

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN INGENIERÍA Y CIENCIAS APLICADAS

DETECCIÓN DE FALLAS EN SISTEMAS DE DISTRIBUCIÓN
DE AGUA MEDIANTE ESPECTROS T_e CRUZADOS

TESIS PROFESIONAL PARA OBTENER EL GRADO DE:
DOCTORADO EN INGENIERÍA Y CIENCIAS
APLICADAS

PRESENTA: MTRO. EDUARDO TRUTIÉ CARRERO

DIRECTOR: Dr. Diego Seuret Jiménez

CUERNAVACA, MORELOS

Abril DE 2026

Resumen

La escasez de agua a nivel mundial representa un desafío crítico para el desarrollo socioeconómico, agravado por pérdidas significativas en los sistemas de distribución. En el Estado de Morelos, anualmente se pierde aproximadamente el 40 % del agua que se bombea por el sistema de distribución. Dicha pérdida de agua está provocada, principalmente, por el deterioro de la salud estructural de los sistemas de distribución. Este deterioro genera fugas de agua que presentan un pequeño diámetro, las cuales son muy difíciles de detectar y pueden ser precursoras de fugas de agua catastróficas. En este sentido, que el acueducto cuente con herramientas matemáticas para extraer información sobre la salud del sistema es de vital importancia. Esto se debe a que facilitan la toma de decisión sobre el plan de acción a desencadenar para la reparación de la fuga. El objetivo de esta tesis es diseñar y validar una herramienta matemática basada en la transformada de \mathcal{T}_e y en espectros cruzados de frecuencia para detectar fugas de fondo preservando la pureza espectral.

La propuesta incluye el desarrollo teórico de la transformada de \mathcal{T}_e , con seis definiciones y cinco teoremas (existencia, pertenencia a $L^1(\mathbb{R})$, existencia de inversa, unicidad y conservación de energía), así como herramientas asociadas: densidad espectral cruzada, coherencia, espectrograma y fador de \mathcal{T}_e . La metodología se validó experimentalmente en un montaje cuasi-controlado con tubería de hierro fundido y fugas de 1.0 mm y 4.0 mm de diámetro, utilizando dos sensores piezoeléctricos y análisis vibro-acústico. Los resultados muestran que el método propuesto aísla componentes espurias y atenúa términos cruzados, mejorando la pureza espectral y logrando la caracterización de rasgos en presencia de ruido estacionario y no estacionario, superando técnicas convencionales como: la transformada de Fourier de tiempo corto, el espectrograma, la transformada Hilbert-Huang, transformada S, la distribución Wigner–Ville, transformada de Chirplet. Estos hallazgos confirman la viabilidad del enfoque para aplicaciones de monitoreo estructural y detección temprana de fugas en redes de distribución de agua. La función wavelet utilizada para la validación fue la wavelet Daubechies debido a que brinda una atenuación de las bandas laterales de -160 dB. Con respecto al cálculo de las componentes de frecuencia la transformada de \mathcal{T}_e arrojó un corrimiento en frecuencia de 0.25 Hz; el cual corresponde a un error porcentual de 1.45 % en el cálculo de las componentes de frecuencia.

Los aportes al conocimiento expresados constituyen un avance significativo para la gestión del recurso hídrico con un enfoque de monitoreo predictivo, fomentando un desarrollo infraestructural más resiliente y sostenible.

Abstract

The global water shortage represents a critical challenge for socioeconomic development, exacerbated by significant losses in water distribution systems. In the Estado de Morelos, approximately 40 % of the water pumped through the distribution system is lost each year. This water loss is mainly caused by the deterioration of the structural health of the distribution systems. Such deterioration leads to small-diameter leaks that are very difficult to detect and can become precursors of catastrophic water leaks. In this regard, having mathematical tools that allow the aqueduct to extract information about the health of the system is of vital importance. This is because such tools facilitate decision-making regarding the action plan to be implemented for leak repair.

The objective of this thesis is to design and validate a mathematical tool based on the $\mathcal{T}e$ transform and cross-frequency spectra to detect background leaks while preserving spectral purity. The proposal includes the theoretical development of the $\mathcal{T}e$ transform, with six definitions and five theorems (existence, belonging to $L^1(\mathbb{R})$, existence of inverse, uniqueness, and energy conservation), as well as associated tools: cross-spectral density, coherence, spectrogram, and $\mathcal{T}e$ phasor.

The methodology was experimentally validated in a quasi-controlled setup with cast iron piping and leaks of 1.0 mm and 4.0 mm in diameter, using two piezoelectric sensors and vibro-acoustic analysis. The results show that the proposed method isolates spurious components and attenuates cross terms, improving spectral purity and enabling feature characterization in the presence of stationary and non-stationary noise, outperforming conventional techniques such as the Short-Time Fourier Transform, spectrogram, Hilbert–Huang transform, S-transform, Wigner–Ville distribution, and Chirplet transform.

These findings confirm the feasibility of the approach for structural health monitoring and early leak detection in water distribution networks. The wavelet function used for validation was the Daubechies wavelet, as it provides -160 dB attenuation of sidebands. Regarding the calculation of frequency components, the $\mathcal{T}e$ transform yielded a frequency shift of 0.25 Hz, corresponding to a percentage error of 1.45% in the computation of frequency components.

The contributions to knowledge presented here represent a significant advancement in water resource management through a predictive monitoring approach, promoting more resilient and sustainable infrastructural development.

Agradecimientos

Todo trabajo de investigación presenta la responsabilidad de una persona pero tiene el gran aporte del entorno que la rodea y los individuos que lo conforman. El autor de esta tesis (yo) no hubiese cumplido con sus objetivos si no fuera por la participación de muchas personas y un entorno favorable. Por tal motivo, deseo que llegue mi más sincero agradecimiento a todos los que contribuyeron en dicha investigación:

A mi madre Teresa Carrero Garro por ser la autora intelectual y biológica de mi formación personal y profesional. A mi hijo Alejandro Trutié Otero y a mi esposa la Dra. Adriana Otero Blanca.

A Dios por brindarme un camino en el cual pueda cumplir mis sueños académicos y profesionales.

A mis Madrinas Isabel y Odalis, a mi padrino Miguel y Manuel por permitirme conocer un mundo esotérico de la mejor manera posible lleno de sabios consejos.

A mis asesores el Dr. Diego Seuret Jiménez, el Dr. Luis Manuel Gaggero y el Dr. Jorge Cantó Ibáñez por darme la oportunidad de aumentar mis conocimientos.

A Rossy Gómez y Diego Dario Seuret por permitirme entrar en su familia y compartir junto a mí.

A mis amigas Lydia García, la princesita Aydil y Lorena Miranda por acogerme desde el primer día que nos conocimos, siendo excelentes amigas y permitirme entrar en sus familias.

A Heli Seuret a quien cariñosamente llamo la RAE por apoyarme con el español y siempre estar en la mejor disposición de ayudarme.

Al Dr. Jorge Ramírez Beltrán por todas las enseñanzas brindas al Dr. José Manuel Nieto Jalil, Dr. Jorge Torres Gómez y al Dr. Rodolfo Valiente.

A Magaly, Ana Paula y todos los demás acompañantes que compartimos tiempo en el médico y me apoyaron mucho en la hospitalización de mi mamá.

A México por brindarles abrigo a todos los emigrantes, ayudarlos y darles la posibilidad de encontrar nuevas oportunidades.

A los sinodales de esta tesis, a la Mtra. Merle, la Mtra. Margarita, la Mtra. Esmeralda y la Mtra. Raquel, a la comunidad CIICAp y a los estudiantes de licenciatura con los cuales pude compartir momentos muy encantadores dirigidos a la enseñanza.

Al colectivo de Corrosión y Protección que me han hecho saber que mi familia ha crecido.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por brindarme el apoyo económico que financió esta investigación.

Dedicatoria

Este trabajo de investigación está dedicado principalmente, a mi mamá de ahí el nombre \mathcal{T}_e de la transformada de \mathcal{T}_e : $\mathcal{T}_e = \text{Teresa}$.

Tabla de contenido

1.	Antecedentes	1
1.1	Pregunta de investigación	5
1.2	Objetivo	5
1.2.1	Objetivos específicos.....	5
1.3	Hipótesis	6
2	Marco teórico	7
2.1	Convolución.....	7
2.2	Correlación cruzada	7
2.3	Densidad de Energía	8
2.4	Transformada de Fourier y sus propiedades	8
2.5	Fasor clásico	9
2.6	Espectros cruzados en frecuencia	10
2.7	Coherencia espectral	10
2.8	Densidad espectral de energía.....	11
2.9	Teorema de Parseval y teorema de Plancherel	11
2.10	Teorema de Fubini.....	12
2.11	Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.....	12
2.12	Transformada de $\mathcal{T}e$	13
2.13	Conclusión parcial	14
3	Desarrollo Teórico/Experimental.....	15
3.1	Diseño del experimento	15
3.2	Instrumentación y sistema de adquisición de datos	16
3.3	Espectros cruzados de $\mathcal{T}e$	16
3.3.1	Densidad espectral cruzada de $\mathcal{T}e$	17
3.3.2	Coherencia espectral de $\mathcal{T}e$	17
3.3.3	Espectrograma de $\mathcal{T}e$	18
3.3.4	Ventana de $\mathcal{T}e$ y transformada de $\mathcal{T}e$ en dos parámetros	19
3.4	Fasor de $\mathcal{T}e$	21
3.4.1	Determinación del fasor de $\mathcal{T}e$	21
3.4.2	Interpretación física del fasor de $\mathcal{T}e$	23
3.5	Conclusión parcial	23
4	Resultados y Discusión.....	25

4.1	Detección de fugas de agua de fondo mediante una transformada diádica de alta resolución.....	25
4.1.1	Selección de la función wavelet.....	26
4.1.2	Densidad espectral cruzada.....	27
4.1.3	Densidad espectral cruzada de $\mathcal{T}e$	29
4.1.4	Coherencia espectral.....	31
4.1.5	Coherencia de $\mathcal{T}e$	32
4.1.6	Conclusión Parcial.....	34
4.2	Extracción de características de una señal sísmica-acústica no estacionaria mediante un espectrograma diádico de alta resolución.....	35
4.2.1	Señal sísmica adquirida.....	35
4.2.2	Análisis tiempo-frecuencia de la señal sísmica.....	36
4.2.3	Análisis escala-frecuencia de la señal sísmica.....	43
4.2.4	Conclusión parcial.....	45
4.3	La transformada de $\mathcal{T}e$: una transformada integral de alta resolución y sus propiedades principales.....	46
4.3.1	Principales propiedades para la transformada de $\mathcal{T}e$	46
4.3.2	Pares transformados para la transformada de $\mathcal{T}e$	54
4.3.3	Conclusión parcial.....	61
4.4	Análisis fasorial de señales multicomponentes.....	61
4.4.1	Fasor clásico.....	61
4.4.2	Distribución de fase.....	63
4.4.3	Fasor de $\mathcal{T}e$	64
4.4.4	Fasor de $\mathcal{T}e$ cruzado.....	65
4.4.5	Fasor de $\mathcal{T}e$ cruzado para la fuga de agua de 4.0 mm de diámetro.....	68
4.4.6	Conclusión parcial.....	70
5	Resumen, Conclusiones y Recomendaciones.....	72
6	Referencias.....	75
7	ANEXO 1: Carta de revisores externos.....	81
8	ANEXO 2: Código de la transformada de $\mathcal{T}e$	86
9	ANEXO 3: Código de la Densidad Espectral Cruzada de $\mathcal{T}e$	88
10	ANEXO 4: Código de la Coherencia de $\mathcal{T}e$	88

Lista de tablas

Tabla 1. 1 Propiedades de la transformada de Fourier	9
--	---

Lista de Figuras

Figura 2. 1: Espectro diádico de frecuencia para la transformada de $\mathcal{T}e$	14
Figura 3. 1: Esquema para la detección de fuga de fondo.....	16
Figura 3. 2 Representación del resultado obtenido luego de multiplicar la ventana de $\mathcal{T}e$ y la función a analizar, obteniendo $h(\tau)$	20
Figura 3. 3: Diagrama en bloque para el cálculo del fasor de $\mathcal{T}e$	21
Figura 3. 4: Interpretación geométrica del fasor de $\mathcal{T}e$, para una señal multicomponente de 4 componentes fasoriales.....	23
Figura 4. 1: Señal adquirida desde el primer sensor con fugas de 1.0 mm y 4.0 mm de diámetro.....	25
Figura 4. 2: Señal adquirida desde el segundo sensor con fugas de 1.0 mm y 4.0 mm de diámetro.....	26
Figura 4. 3: Respuesta en frecuencia de funciones Wavelets.....	27
Figura 4. 4 Densidad espectral cruzada para una fuga de 1.0 mm de diámetro.	28
Figura 4. 5 Densidad espectral cruzada para una fuga de 4.0 mm de diámetro.	28
Figura 4. 6: Densidad espectral cruzada de $\mathcal{T}e$ para fuga de fondo de 1.0 mm de diámetro y caudal de 33.7 ml/s.	29
Figura 4. 7: Densidad espectral cruzada de $\mathcal{T}e$ en la escala 4, para fuga de fondo de 1.0 mm de diámetro y caudal de 33.7 ml/s.....	29
Figura 4. 8: Densidad espectral cruzada de $\mathcal{T}e$ en la escala 3, para fuga de fondo de 1.0 mm de diámetro y caudal de 33.7 ml/s.....	30
Figura 4. 9: Densidad espectral cruzada de $\mathcal{T}e$, para fuga de fondo de 4.0 mm de diámetro y caudal de 125.0 ml/s.	30
Figura 4. 10: Densidad espectral cruzada de $\mathcal{T}e$, para fuga de fondo de 4.0 mm de diámetro y caudal de 125.0 ml/s.....	31
Figura 4. 11: Magnitud de la coherencia para fuga de fondo con 1.0 mm de diámetro y caudal de 33.7 ml/s.	32
Figura 4. 12: Magnitud de la coherencia para fuga de fondo con 4.0 mm de diámetro y caudal de 125.0 ml/s.	32
Figura 4. 13: Coherencia de $\mathcal{T}e$ para fuga de fondo de 1.0 mm y caudal de 33.7 ml/s.....	33
Figura 4. 14: Coherencia de $\mathcal{T}e$, en la escala 4 para fuga de fondo de 1.0 mm y caudal de 33.7 ml/s.	33
Figura 4. 15: Coherencia de $\mathcal{T}e$ para fuga de fondo de 4.0 mm y caudal de 125.0 ml/s....	34
Figura 4. 16: Coherencia de $\mathcal{T}e$, en la escala 2 para fuga de fondo de 4.0 mm y caudal de 125.0 ml/s.	34
Figura 4. 17: Momentos temporales del sismo.....	36
Figura 4. 18: Espectrograma antes del sismo.	37
Figura 4. 19: Espectrograma durante el sismo.	37

Figura 4. 20: Espectrograma después del sismo.....	37
Figura 4. 21: Transformada Hilbert-Huang antes del sismo.	38
Figura 4. 22: Transformada Hilbert-Huang durante el sismo.....	38
Figura 4. 23: Transformada Hilbert-Huang después del sismo.	39
Figura 4. 24: Transformada S antes del sismo.....	39
Figura 4. 25: Transformada S durante el sismo.....	40
Figura 4. 26: Transformada S después del sismo.	40
Figura 4. 27: Distribución Wigner–Ville antes del sismo.	41
Figura 4. 28: Distribución Wigner–Ville después del sismo.....	41
Figura 4. 29: Distribución Wigner–Ville después del sismo.....	42
Figura 4. 30: Transformada de Chirplet antes del sismo.	42
Figura 4. 31: Transformada de Chirplet durante el sismo.	43
Figura 4. 32 Transformada de Chirplet después del sismo.	43
Figura 4. 33: Espectrograma de $\mathcal{T}e$ antes del sismo.....	44
Figura 4. 34: Espectrograma de $\mathcal{T}e$ durante el sismo.....	44
Figura 4. 35: Espectrograma de $\mathcal{T}e$ durante el sismo, en la escala 2.	45
Figura 4. 36: Espectrograma de $\mathcal{T}e$ durante después del sismo.	45
Figura 4. 37 Representación del espectro diádico de frecuencia para $f(0)$, donde w es el ancho de la ventana de $\mathcal{T}e$	56
Figura 4. 38: Representación del espectro diádico de frecuencia para $ei\omega ct$	57
Figura 4. 39: Representación del espectro diádico de frecuencia para la función $\sin\omega ct$	59
Figura 4. 40: Representación del espectro diádico de frecuencia para la función $\cos\omega ct$	61
Figura 4. 41: Señal sintética monocomponente con frecuencia 60 Hz y fase 45°	62
Figura 4. 42: Fazor clásico en el plano complejo (magnitud 5,00, fase 45°), utilizado como referencia para la comparación con el fazor de $\mathcal{T}e$	62
Figura 4. 43: Fazor de $\mathcal{T}e$ en el nivel 1, que codifica tanto la información de energía como la de fase de una señal multicomponente.	63
Figura 4. 44: Distribución de fase de una señal multicomponente.....	64
Figura 4. 45: Diagrama del sistemas para emplear el fazor de $\mathcal{T}e$	64
Figura 4. 46: Fase en el dominio de $\mathcal{T}e$ en la entrada del sistema.	65
Figura 4. 47: Fase en el dominio de $\mathcal{T}e$ a la salida del sistema.	65
Figura 4. 48: Señal multicomponente 1 presenta componentes de frecuencia $f_1 = 100$ Hz y $f_2 = 200$ Hz.....	66
Figura 4. 49: Señal multicomponente 2 presenta componentes de frecuencia $f_1 = 100$ Hz y $f_2 = 400$ Hz.....	66
Figura 4. 50: Resultado del análisis fasorial cruzado en dominio de $\mathcal{T}e$	67
Figura 4. 51: Señal multicomponente 1 presenta componentes de frecuencia $f_1 = 100$ Hz	

y $f_2 = 200$ Hz.....	67
Figura 4. 52: Señal multicomponente 2 presenta componentes de frecuencia $f_1 = 100$ Hz y $f_2 = 200$ Hz.....	68
Figura 4. 53: Resultado del análisis fasorial cruzado en dominio de $\mathcal{T}e$	68
Figura 4. 54: Resultado obtenido para la señal adquirida en el sensor 1.....	69
Figura 4. 55: Resultado obtenido para la señal adquirida en el sensor 2.....	69
Figura 4. 56: Resultado obtenido para el análisis fasorial cruzado en el dominio de $\mathcal{T}e$...	70

Lista de Definiciones y Teoremas sobre la transformada de \mathcal{T}_e

Definición 1 : Densidad espectral cruzada de \mathcal{T}_e	17
Definición 2: Coherencia espectral de \mathcal{T}_e	18
Definición 3: Espectrograma de \mathcal{T}_e	18
Definición 4: Ventana de \mathcal{T}_e:	19
Definición 5: Fasor de \mathcal{T}_e	23
Definición 6: Transformada de \mathcal{T}_e en dos parámetros:	47
Teorema 1. Existencia de la transformada de \mathcal{T}_e:	46
Teorema 2. Transformada de $\mathcal{T}_e \in L^1\mathbb{R}$:	47
Teorema 3. Existencia de la transformada inversa de \mathcal{T}_e:	48
Teorema 4. Unicidad:	52
Teorema 5. Conservación de energía en el dominio de \mathcal{T}_e	53

Lista de Abreviaturas

Símbolo / Abreviatura	Descripción
2^ξ	Escala diádica $\forall \xi \in \mathbb{Z}^+$,
$\beta_{\mu,\xi}(t)$	Ventana de la transformada de \mathcal{T}_e ,
\star	Operador de convolución,
\mathcal{F}	Operador de transformada de Fourier,
$f(t)$	Función dependiente del tiempo $\forall t \in \mathbb{R}$,
$f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$	Representa funciones densa en $L^2(\mathbb{R})$,
$\gamma(\mu, 2^\xi \omega_0)$	Fasor de \mathcal{T}_e en la frecuencia central ω_0 ,
$\Gamma_{f_1, f_1}(\omega)$	Auto-espectro de la señal f_1 ,
$\Gamma_{f_1, f_2}(\omega)$	Espectro cruzado en frecuencia entre las señales f_1 y f_2 ,
$\eta_{f_1 f_2}(\omega)$	Coherencia espectral entre las señales f_1 y f_2 ,
IEPE	Piezoelectrico con Electrónica Integrada (Integrated Electronics Piezoelectric),
$\Lambda[f(t)](\mu, 2^\xi \omega)$	Espectrograma de \mathcal{T}_e de la señal $f(t)$,
$L^1(\mathbb{R})$	Espacio de funciones integrables en \mathbb{R}
ϑ	Frecuencia lineal diádica,
μ	Variable de traslación,
$\Omega_{f_1, f_2}(\mu, 2^\xi \omega)$	Coherencia espectral de \mathcal{T}_e ,
ω	Frecuencia angular,
$Psf(\mu, \omega)$	Densidad espectral de energía,
SCADA	Supervisión, Control y Adquisición de Datos (Supervisory Control And Data Acquisition),
t	tiempo,
\mathcal{T}_e	Operador de la transformada de \mathcal{T}_e ,
$Y_{f_1, f_2}(\mu, 2^\xi \omega)$	Auto-espectro de \mathcal{T}_e para la señal x_1
$w_\mu(t)$	Función ventana localizada en μ
$\psi_{\mu,\xi}(t)$	Ventana wavelet localizada en μ y escala ξ
\square	Fin de demostración

1. Antecedentes

En la actualidad existe un gran interés por los acueductos en detectar eventos precursores de pérdida de agua. Este recurso natural tiene gran importancia para la vida y el crecimiento de la economía; haciendo que los acueductos implementen estrategias eficaces para su gestión sostenible.

Se estima que el 2.5 % del agua en la Tierra es fresca. De esta el 30.1 % se encuentra subterránea y el 68.7 % forma capas de hielo; solamente menos del 1.0 % está disponible para el consumo de la vida humana, según el reporte de (USGS, 2021).

El consumo elevado del agua se debe a factores demográficos, socioeconómicos y ambientales. Estos factores están vinculados con tendencias tales como:

- El acelerado crecimiento de la población,
- La rápida urbanización,
- Los insostenibles patrones de consumo,
- La contaminación de aguas subterráneas y superficiales.

Un estudio llevado a cabo por (Rathnayaka et al., 2015) muestra que dichas tendencias hacen de las redes un complejo escenario para el cual no fueron diseñadas ni estructuradas. (Ravisangar & Charles, 2011) plantean que a estos problemas se le suman eventos provenientes de operaciones, tales como: encendido o apagado de bombas y aperturas o cierre de válvulas. Eventos que se agravan por el envejecimiento y la corrosión de las instalaciones, derivando en fugas de fondo que incrementan significativamente los costos de reparación.

Actualmente, la cantidad de pérdida de agua en los sistemas de distribución varía ampliamente a nivel internacional. La investigación realizada por (Ebacher et al., 2012), plantea que en un acueducto ubicado en Canadá, se pierde aproximadamente el 30 % del caudal introducido en los ductos. Por otro lado, (EPA, 2002; Lauruschkus & Rehberg, 2015) muestran que el volumen de pérdida de agua introducida en el sistema de distribución de los Estados Unidos y Europa, excede el 30 %. Mientras que en México los datos reportados por (Agua, 2021) revelan que las pérdidas de agua en la capital llegan

hasta el 40 %, incrementándose en otras ciudades hasta alcanzar el 60 %.

La mayor afectación a dichas pérdidas está dada por fugas de fondo, (Martini et al., 2014; Trutié-Carrero et al., 2018) plantean que dichas fugas son muy pequeñas y se generan en tanques, juntas de tubería y errores de ensamblajes.

(Martini et al., 2014) muestran que las fugas de fondo están relacionadas con el funcionamiento normal de la tubería y es muy costosa su reducción por debajo del límite de pérdidas anuales inevitables. Este límite provoca que los acueductos no brinden especial atención a dichas fugas, debido a que económicamente es más costoso repararlas que el agua que se pierde.

(Fox et al., 2014; Wu & Liu, 2017) revelan que dichas fallas son muy costosas en términos de reparación y daño, presentando un impacto negativo en la sociedad y el medioambiente. Lo que provoca, la interrupción del servicio en el acueducto, la demora en el tráfico automotriz intensifica la pérdida de agua y energía, daña las calles y edificaciones e incrementa la proliferación de enfermedades infecciosas. Las adversidades provocadas, hacen que sea de interés hacer mínimo su periodo de vida.

Las fugas de fondo de agua se clasifican en dos grandes grupos:

- **Primer grupo:** Fugas catastróficas de agua. Este tipo de fugas emerge hacia la superficie causando grandes estragos al medioambiente, presentando un periodo de vida corto. El corto periodo de vida está asociado a que el acueducto puede realizar rápidas acciones para resolver el problema.
- **Segundo grupo:** Fugas de agua por debajo del límite de pérdidas anuales inevitables. Estas fugas son muy difíciles de detectar, producto a que permanecen ocultas bajo suelo. En este caso, las fugas debido a su pequeño tamaño presentan una gran posibilidad de existir durante largos periodos de tiempo, además de ser precursores de fugas catastróficas.

Dada la importancia que presenta tener bajo control la generación de fuga de fondo de agua, en la comunidad científica se observan principalmente dos esquemas para su detección. El primero, realiza un estudio de las redes hidráulicas a través de minería de datos utilizando sistemas de Supervisión, Control y Adquisición de Datos (SCADA, por sus siglas en inglés), donde el período de muestreo típicamente es seleccionado entre 1.0, 5.0 y 15.0 minutos (Mounce et al., 2012; Wu & Liu, 2017). El segundo, se basa en detectar

la fuga en el momento que se generó utilizando sistemas de adquisición de datos dedicados a esta función y un periodo de muestreo que puede ser seleccionado entre 2.5 ms y 4.0 ms (Zan et al., 2014).

A pesar de los resultados alcanzados, por las técnicas reportadas en el primer esquema de detección; la principal dificultad desde la instrumentación electrónica es que no siempre existe una ubicación idónea para realizar una instalación invasiva. Lo que provoca que el ciclo de vida de dicho fenómeno no disminuya, aumentando los costos por pérdida de agua.

La manera más eficiente de disminuir los problemas originados por fugas de agua es detectar su generación en el momento que se forma, mediante un monitoreo no invasivo. Esto brinda la ventaja de disminuir el ciclo de vida de la fuga, derivando rápidamente al proceso de reparación. Lo que evidencia el segundo esquema de detección, donde se muestran soluciones como:

El estudio de las características vibro-acústicas de la fuga en tuberías enterradas. En este estudio (Ayala et al., 2017) plantean que antes de utilizar la función correlación cruzada, se debe eliminar el ruido no deseado. Esto se logra filtrando la señal en un ancho de banda de frecuencia donde hay información de fuga. La investigación presentada reafirma la importancia de conocer el comportamiento vibro-acústico de las señales de fuga, mediante condiciones controladas. El siguiente trabajo se dirige hacia técnicas de procesamiento de señales basadas en emisión vibro-acústica. Los investigadores (J. D. Butterfield et al., 2017) se enfocan en cuantificar el caudal de fuga en tuberías plásticas. Además, muestran que la interacción entre las variables asociadas al sistema y la señal vibro-acústica dificultan la clasificación del caudal de la fuga.

El siguiente año, se reporta una investigación sobre la detección de fugas de fondo con pequeño diámetro. Experimentalmente (Joseph D. Butterfield et al., 2018) evalúan la sensibilidad a las fugas de agua bajo diferentes fenómenos vibro-acústicos. En el mismo periodo, se reporta un trabajo donde se aplica el proceso de diferenciación en redes de ductos urbanos para detectar fugas. (Y. Gao et al., 2018) plantean que utilizan la función correlación, resaltando el enfoque en la estimación de la posición de una fuga, mediante el uso de la correlación cruzada. En otro trabajo reportado, en ese mismo año, se utilizó el análisis de auto-correlación para detectar fugas de fondo. (Martini et al., 2018) resaltan en su trabajo la importancia de los umbrales; debido a la dependencia sobre condiciones de los límites locales de la red supervisada. Esto provoca que la configuración inicial sea

costosa y que requiera mucho tiempo. Además, que aumenta el riesgo de fugas no detectadas o falsas alarmas.

En el 2019 se inicia una investigación sobre la detección y localización de fuga de fondo en tubería plástica de agua. (Trutié-Carrero et al., 2019) en su estudio se percataron que en la práctica las señales de fuga coexisten con el ruido estacionario y no estacionario. Por tal motivo, este artículo realiza un análisis sobre la importancia que presenta la relación señal-a-ruido en la detección y localización. (Kassab et al., 2019) realizaron un estudio para detectar fallas de agua en un generador de vapor. En esta investigación los autores emplean una técnica de formación de haces para incrementar la relación señal-a-ruido.

En el año 2020 se reporta un procedimiento para detectar fuga en sistemas urbanos. (Xue et al., 2020) plantean que se detectó fuga a una distancia de 300 m. Además, alegan que detectaron pérdida de agua menor al 20 % del fluido en la tubería. (Cody et al., 2020) muestran un procedimiento basado en predicción lineal para la detección de fugas en redes de distribución de agua. Dichos investigadores muestran un estudio de un procedimiento para detectar fugas de agua que se encuentren próximas al límite de pérdidas inevitable. (Bykerk & Valls Miro, 2022a) utilizaron la técnica del espectrograma para realizar la extracción de características en la señal adquirida. Los resultados reportados indican que obtuvieron un 97 % de precisión en la detección de fugas de agua, con baja tasa de falsas alarmas. En la detección binaria de fugas de fondo, (Bykerk & Valls Miro, 2022b) muestran una propuesta basada en redes neuronales convolucionales. En el presente manuscrito los autores plantean que utilizaron la transformada de Fourier de tiempo corto para entrenar su red neuronal, obteniendo un resultado en la detección superior al 94 %. Sobre la clasificación de señales vibro-acústicas, (Yu et al., 2023) publican un trabajo dirigido a la detección de fugas en sistemas de distribución de agua. En su trabajo plantean que para realizar la extracción de característica de las señales adquiridas utilizaron la técnica del espectrograma.

A pesar de los avances reportados por la comunidad científica, el principal inconveniente en la mayoría de los trabajos es que no consideran la distorsión introducida en el espectro de frecuencia. Además, no se emplea una herramienta matemática que permita aislar componentes de frecuencias espurias y atenuar términos cruzados. Por otro lado, son métodos que solamente caracterizan los rasgos de una fuga de fondo, sin importar el deterioro de la pureza espectral.

Todos estos problemas conllevan a la necesidad de contar con una herramienta matemática que maximice, la pureza espectral y aisle componentes espurias. Es importante que dichas herramientas matemáticas permitan detectar fugas de agua en un ambiente cuasi-controlado; sin deteriorar la pureza espectral. Esto hace que emerja el siguiente enfoque metodológico:

1.1 Pregunta de investigación

¿Cómo detectar fugas de fondo de agua en un ambiente cuasi-controlado sin deteriorar la pureza espectral?

1.2 Objetivo

Diseñar una herramienta matemática basada en la transformada de \mathcal{T}_e y espectros cruzados de frecuencias que permita detectar fugas de fondo de agua en un ambiente cuasi-controlado.

1.2.1 Objetivos específicos

- Identificar los métodos matemáticos utilizados en la literatura para la detección de fugas de agua.
- Crear las bases teóricas correspondientes a la transformada de \mathcal{T}_e .
- Analizar los términos cruzados en el espectro diádico de frecuencia.
- Diseñar y desarrollar experimentos que permitan evaluar la efectividad de los espectros de \mathcal{T}_e cruzados.
- Evaluar el desempeño de la herramienta matemática diseñada fuera de línea.

1.3 Hipótesis

Es posible, detectar fugas de fondo de agua bajo un ambiente cuasi-controlado. Si se diseña una herramienta matemática basada en la transformada de \mathcal{T}_e y espectros cruzados de frecuencia, manteniendo la pureza espectral.

2 Marco teórico

Este capítulo brinda información sobre las bases teóricas empleadas para el desarrollo de las herramientas matemáticas que se muestran en la sección 3: “Desarrollo Teórico/Experimental”, las cuales permitirán obtener los resultados mostrados en la sección 4: “Resultados y Discusión”. Dichos resultados conforman las principales contribuciones de esta tesis y se enfocan principalmente a los espectros cruzados de \mathcal{T}_e , las bases teóricas de la transformada de \mathcal{T}_e y el fador de \mathcal{T}_e .

2.1 Convolución

La convolución es una herramienta matemática que permite combinar dos señales. Una de sus principales aplicaciones se encuentra en la implementación de filtros digitales, como se muestra en los trabajos de (C. Cheng & Parhi, 2004; Love & Kruger, 1987).

Sea $f_1(t)$ y $f_2(t)$ dos funciones que pertenecen a $L^1(\mathbb{R})$, la convolución de $f_1(t) \star f_2(t)$ pertenece a $L^1(\mathbb{R})$ y (Mooers, 1973) la define mediante la ecuación (1).

$$C_{f_1, f_2}(\mu) = \{f_1(t) \star f_2(t)\}(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t - \mu)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - \mu)f_2(t)dt, \quad (1)$$

donde: \star es el operador de convolución y μ es la variable de traslación que pertenece a \mathbb{R} .

2.2 Correlación cruzada

La correlación cruzada es una medida de la similitud entre dos señales muy utilizada para encontrar características relevantes entre ambas señales. Los trabajos reportados por (Contreras-Reyes & Idrovo-Aguirre, 2020; Dean & Dunsmuir, 2016; Plerou et al., 1999) muestran la importancia de dicha herramienta matemática.

Si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son dos señales ergódicas que pertenecen a $L^1(\mathbb{R})$, (Derrick & Thomas, 2004; Haugh, 1976) definen la función correlación cruzada normalizando la ecuación (1),

como se muestra en la ecuación (2).

$$R_{f_1, f_2}(\mu) = \frac{\{f_1(t) \star f_2(t)\}(\mu)}{\sqrt{\{f_1(t) \star f_1(t)\}(0)\{f_2(t) \star f_2(t)\}(0)}} \quad (2)$$

donde: $\{f_1(t) \star f_1(t)\}(0)$ es la auto-correlación para la función $f_1(t)$ y $\{f_2(t) \star f_2(t)\}(0)$ es la auto-correlación para la función $f_2(t)$.

2.3 Densidad de Energía

La densidad de energía ha sido utilizada en aplicaciones de detección de falla como se muestra en los trabajos de (Junsheng et al., 2005; Loutridis, 2006). La principal ventaja que brinda la densidad de energía es conocer, desde el espectro de frecuencia, como se modifican las características de la señal en un espectro energético.

Si tenemos una caja de Heisenberg $\phi_\mu(t)$ que presenta una vecindad en (μ, ω_γ) ; entonces (Mallat, 2009) define la densidad energética de la señal $f(t)$ como se muestra en la ecuación (3).

$$P_\Phi f(\mu, \omega_\gamma) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi_{\mu, \gamma}^*(t) dt \right|^2, \quad (3)$$

donde: γ es un parámetro multi-indicador.

2.4 Transformada de Fourier y sus propiedades

La transformada de Fourier presenta gran importancia en aplicaciones donde es necesario extraer los rasgos de señales con periodicidad localizada. Esta herramienta matemática tiene gran importancia en el área de la detección de fallas, donde se han reportado trabajos como los de (Ghosh et al., 2022; Jalayer et al., 2021; Majali et al., 2022).

Sea $f(t)$ una función que pertenece a $L^1(\mathbb{R})$ (Brigham & Morrow, 1967; Mallat, 2009) definen la transformada de Fourier para $f(t)$ como:

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (4)$$

Si $f(t)$ es una función que pertenece a $L^1(\mathbb{R})$ y $\mathcal{F}[f(t)](\omega)$ pertenece a $L^1(\mathbb{R})$ entonces la ecuación (5) es la transformada inversa de Fourier según (L. Chen et al., 1987; Mallat, 2009).

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f(t)](\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (5)$$

Debido al amplio uso de la transformada de Fourier en el análisis de sistemas y señales se han desarrollado diversas propiedades. La Tabla 1. 1 muestra sus principales propiedades reportadas por (Mallat, 2009).

Tabla 1. 1 Propiedades de la transformada de Fourier

Propiedad	Función	Transformada de Fourier
	$f(t)$	$\mathcal{F}[f(t)](\omega)$
Inversa	$\mathcal{F}[f(\omega)](t)$	$2\pi f(-\omega)$
Convolución	$f_1(t) * f_2(t)$	$\mathcal{F}[f_1(t)](\omega)\mathcal{F}[f_2(t)](\omega)$
Multiplicación	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[f_1(t)](\omega) * \mathcal{F}[f_2(t)](\omega)$
Traslación	$f(t - \mu)$	$e^{-i\omega\mu}\mathcal{F}[f(t)](\omega)$
Modulación	$e^{i\xi t}f(t)$	$\mathcal{F}[f(t)](\omega - \xi)$
Escalado	$f\left(\frac{t}{s}\right)$	$ s \mathcal{F}[f(t)](s\omega)$
Complejo conjugado	$f^*(t)$	$f^*(-\omega)$

2.5 Fasor clásico

Un fasor es una representación compleja de una función sinusoidal en el dominio del tiempo. Esta herramienta matemática se utiliza ampliamente en la detección de fallos para señales monocaracterísticas (Opoku & Dimitrovski, 2025; Tanha et al., 2025). Dicha herramienta se expresa como un número complejo que codifica la amplitud y la fase de la señal como:

$$F = Ae^{i\phi(\omega_0)} = A[\cos \phi(\omega_0) + i \sin \phi(\omega_0)], \quad (6)$$

donde: A es la amplitud y $\phi(\omega_0)$ es la para la frecuencia específica ω_0 .

2.6 Espectros cruzados en frecuencia

El análisis de espectros cruzados permite conocer la relación existente entre las características de dos señales. Las aplicaciones donde se ha utilizado dicha herramienta matemática, se encuentra en los trabajos de (Dalai et al., 2015; Liang et al., 2022; Sinha, 2008).

Sea $f_1(t)$ y $f_2(t)$ dos señales provenientes de un proceso determinístico o estocástico con función de auto-correlación $\{f_1(t) \star f_1(t)\}(0)$ y $\{f_2(t) \star f_2(t)\}(0)$, respectivamente, y función de correlación cruzada $R_{f_1, f_2}(\mu)$. (Proix et al., 2022; White & Boashash, 1990) definen el espectro cruzado $\Gamma_{f_1, f_2}(\omega)$ como la transformada de Fourier de $R_{f_1, f_2}(\mu)$ (ver ecuación (2)), como:

$$\Gamma_{f_1, f_2}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{f_1, f_2}(\mu) e^{-i\omega\mu} d\mu. \quad (7)$$

El espectro cruzado puede ser descompuesto en parte real y parte imaginaria como:

$$\Gamma_{f_1, f_2}(\omega) = \Lambda_{f_1, f_2}(\omega) + i\Psi_{f_1, f_2}(\omega). \quad (8)$$

La parte real $\Lambda_{f_1, f_2}(\omega)$ y la parte imaginaria $\Psi_{f_1, f_2}(\omega)$, son conocidas como co-espectro y espectro de cuadratura, respectivamente.

2.7 Coherencia espectral

La coherencia espectral es una herramienta matemática que permite analizar la relación frecuencial de dos señales. Investigadores tales como (Z. Chen et al., 2020; Perez-Sanjines et al., 2023; Schmidt et al., 2020), han utilizado dicha herramienta en sus aplicaciones para analizar la similitud de dos fuentes transmisoras de señal. La coherencia espectral expresa la amplitud del espectro cruzado de frecuencia en forma normalizada. Partiendo de la ecuación (7), se define la coherencia como:

$$\eta_{f_1, f_2}(\omega) = \frac{|\Gamma_{f_1, f_2}(\omega)|}{\sqrt{\Gamma_{f_1, f_1}(\omega)\Gamma_{f_2, f_2}(\omega)}}, \quad (9)$$

donde: $\Gamma_{f_1, f_1}(\omega)$ es el auto-espectro para la señal f_1 y $\Gamma_{f_2, f_2}(\omega)$ es el auto-espectro para la señal f_2 .

2.8 Densidad espectral de energía

La densidad espectral de energía permite conocer la distribución de energía de una función $f(t)$. Esta herramienta matemática muestra el auto-espectro de $f(t)$ y es conocida como el espectrograma, siendo utilizada por disímiles autores en el análisis de señales, como se evidencia en los trabajos mostrados por (Jena et al., 2023; Khan et al., 2022; H. Zhang et al., 2023). En la ecuación (10) se define la densidad espectral de energía para $f(t)$, reportada por (Altes, 1984; Mallat, 2009).

$$Psf(\mu, \omega) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)w(t - \mu)e^{-i\omega t} dt \right|^2, \quad (10)$$

donde: $w(t - \mu)$ es una función ventana.

2.9 Teorema de Parseval y teorema de Plancherel

(Mallat, 2009) plantea que, el teorema de Parseval y el teorema de Plancherel presentan resultados muy importantes en el campo de la teoría de señales. Esto se debe a que dichos teoremas permiten conocer la relación existente entre el dominio del tiempo y el dominio de Fourier. Por otro lado, tiene como caso particular el análisis de energía de una señal mostrando como se conserva dicha energía en ambos dominios.

(Kelkar et al., 1983; Paruthiyil et al., 2021; Rudin, 1959) muestran la definición para el teorema de Parseval esclareciendo que, si $f(t)$ y $h(t)$ son dos funciones que pertenecen $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ entonces se define el teorema de Parseval como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)h^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f(t)](\omega)\mathcal{F}[h(t)]^*(\omega)d\omega. \quad (11)$$

(Dhaouadi et al., 2021; Wolff, 2003; Y. Zhang & Li, 2022) muestran que un caso

particular al teorema de Parseval es el teorema de Plancherel. Este último está dirigido para el momento en que $f(t) = h(t)$, definiéndose el teorema de Plancherel como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}[f(t)](\omega)|^2 d\omega, \quad (12)$$

donde: $\mathcal{F}[h(t)]^*(\omega)$ es el complejo conjugado de la transformada de Fourier de $h(t)$.

2.10 Teorema de Fubini

El Teorema de Fubini es un resultado muy importante en el ámbito de la teoría de señales, específicamente para el análisis de transformadas integrales. Esto se debe a que dicho teorema proporciona condiciones bajo las cuales es posible intercambiar el orden de integración en una integral doble o múltiple.

(Friedman, 1980; Mallat, 2009; Tonelli, 1909) plantean que si $\int_{-\infty}^{\infty} (\int_{-\infty}^{\infty} |f(v_1, v_2)| dv_1) dv_2 < +\infty$, entonces los cambios de orden de integración se muestran como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v_1, v_2) dv_1 dv_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(v_1, v_2) dv_1 \right) dv_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(v_1, v_2) dv_2 \right) dv_1, \quad (13)$$

donde: $f(v_1, v_2)$ representa una función absolutamente integrable, permitiendo la intercambiabilidad del orden de integración.

2.11 Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

El teorema de la convergencia dominada es de gran importancia en análisis de señales. Esto se debe a que dicho teorema permite conocer el comportamiento de convergencia de una secuencia.

(Macwhinney, 2008; Yoshikawa & Innes, 2013) muestran que para $\{f_n\}$ sea una

secuencia de funciones medibles sobre E que converge puntualmente a la función $f(t)$ y se supone que existe una función G sobre E tal que $|f_n| \leq G, \forall n \in \mathbb{N}$, entonces:

a) $f(t)$ es integrable sobre E ,

$$b) \int_E f(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(t)dt.$$

2.12 Transformada de \mathcal{T}_e

La transformada de \mathcal{T}_e es una herramienta matemática que permite obtener un espectro diádico de frecuencia (Trutié-Carrero et al., 2021), sus principales ventajas son: aísla componentes de frecuencias espurias, atenúa los términos cruzados y brinda multi-sensibilidad.

Si $f(t) \in L^1(\mathbb{R}) \forall t \in \mathbb{R}$ entonces (Trutié-Carrero, Seuret-Jiménez, Nieto-Jalil, Cantó, et al., 2023) definen la transformada de \mathcal{T}_e para $f(t)$ como:

$$\mathcal{T}_e[f(t)](\mu, 2^\xi \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \beta_{\mu, \xi}(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \forall \mu, \xi \in \mathbb{Z}^+, \quad (14)$$

donde: $\mathcal{T}_e[f(t)](\mu, 2^\xi \omega)$ contiene la información de $f(t)$ en el dominio \mathcal{T}_e , $\beta_{\mu, \xi}(t)$ es la ventana de \mathcal{T}_e . Dicha ventana es la multiplicación de una función ventana $\{w_\mu(t)\}$ y una función wavelet $\psi_{\mu, \xi}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^\xi}} \psi\left(\frac{t}{2^\xi} - \mu\right)$ según (R. X. Gao & Yan, 2011; Griffel & Daubechies, 1995).

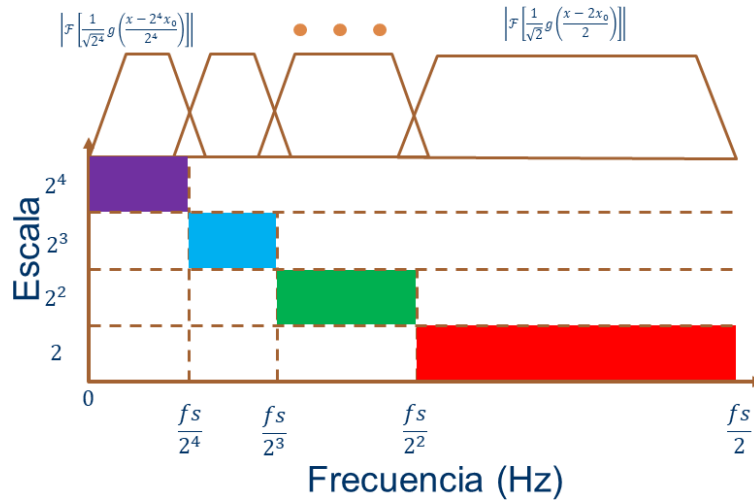


Figura 2. 1: Espectro diádico de frecuencia para la transformada de \mathcal{T}_e .

2.13 Conclusión parcial

El estudio de las señales que tengan la característica en su periodo y sean adquiridas desde un proceso estocástico o determinístico, motiva a los investigadores a utilizar herramientas matemáticas que se encuentran dentro de las técnicas de tiempo-frecuencia. A pesar de los avances reportados, no se han desarrollado herramientas que permitan obtener información escalada en el dominio de la frecuencia, frenando que se tengan propiedades como la multi-sensibilidad, la atenuación de los términos cruzados y el aislamiento de componentes de frecuencia. Esto origina a que se utilicen herramientas como la transformada de \mathcal{T}_e .

3 Desarrollo Teórico/Experimental

Este capítulo tiene como objetivo mostrar las herramientas matemáticas propuestas a la comunidad científica, para el análisis de señales con un nuevo enfoque al dominio de la frecuencia: “*espectro diádico de frecuencia*”. Por otro lado, el capítulo inicia describiendo el diseño experimental que se utilizó para la extracción de rasgos existente en la fuga de agua.

3.1 Diseño del experimento

Para validar la principal contribución, se utilizó una instalación que consiste en un tubo de hierro fundido. Dicha tubería presenta una longitud de 90 cm con diámetro interior y diámetro exterior de 8.2 cm y 8.5 cm, respectivamente. La distancia entre los sensores es de 30 cm y la distancia desde cada sensor a la fuga es de 15 cm. En dicho proceso de validación dos escenarios fueron utilizados para analizar los resultados arrojados por las contribuciones propuestas:

- El primer escenario tiene una fuga de agua que presenta 1.0 mm de diámetro.
- El segundo escenario, tiene una fuga de agua que presenta 4.0 mm de diámetro.

La Figura 3. 1 muestra el esquema de la instalación utilizada para detectar la fuga de fondo. Note en dicha figura como la posición de los sensores es descrita, resaltando la distancia entre los sensores y la distancia de cada sensor a la fuga de fondo. Los experimentos fueron realizados a temperatura ambiente (25 °C) y presión atmosférica de (1019 hPa).

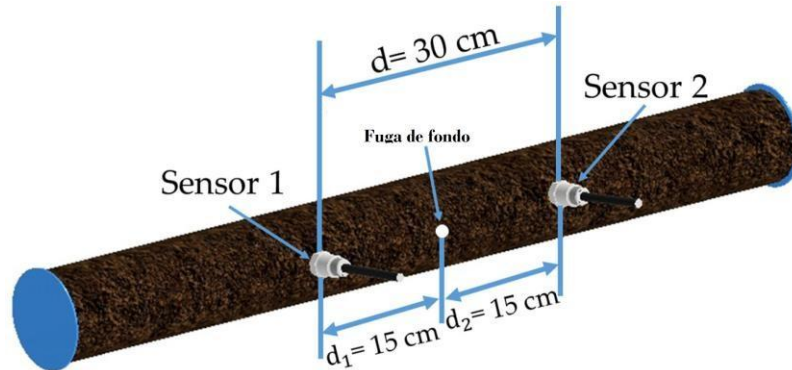


Figura 3. 1: Esquema para la detección de fuga de fondo.

3.2 Instrumentación y sistema de adquisición de datos

La instrumentación utilizada para realizar la adquisición de los datos de fuga de agua se dirige a dos acelerómetros piezoeléctricos IEPE uniaxiales con una sensibilidad de 100 mV/g y un rango dinámico de $\pm 50 \text{ g}$. El sistema de adquisición de dato empleado fue de National Instrument NI 9234 y NIcDAQ – 9172. Finalmente, para el manejo de los datos se utilizó un programa diseñado en LabView 2018.

Las señales vibro-acústicas se adquirieron cumpliendo con el teorema de Nyquist, utilizando una frecuencia de muestreo de 500 Hz. Esto se debe a que las componentes de frecuencias esperadas se encuentran por debajo de 250 Hz, según los estudios reportado por (W. Cheng & Shen, 2022).

3.3 Espectros cruzados de \mathcal{T}_e

La principal contribución al conocimiento de esta tesis radica en los espectros cruzados de \mathcal{T}_e . Contar con una herramienta matemática, no-paramétrica que permita realizar la extracción de rasgos de una señal, atenuando las componentes espurias, es de vital importancia. Esto permitirá detectar fugas de agua que presenten hasta 1.0 mm de diámetro.

Los espectros cruzados de \mathcal{T}_e tienen como principal objetivo permitir el análisis de procesos que sean vulnerables frente al ruido estacionario y no estacionario. Esto se debe a que vinculan las principales ventajas presente en la transformada de \mathcal{T}_e (aislar componentes de frecuencia y atenuación de los términos cruzados) y la principal ventaja

de la densidad del espectro cruzado (atenuar señales que presenten característica relacionada).

3.3.1 Densidad espectral cruzada de \mathcal{T}_e

La densidad espectral cruzada emerge de las propiedades de la transformada de \mathcal{T}_e . Por tal motivo, la densidad espectral cruzada permite obtener un espectro cruzado diádico de frecuencia. Los resultados mostrados sobre esta subsección se encuentran publicados en (Trutié-Carrero, Seuret-Jiménez, Nieto-Jalil, Herrera-Díaz, et al., 2023). Si sustituimos en la ecuación (14) en la ecuación (1) se define la densidad espectral cruzada de \mathcal{T}_e como:

Definición 1 :
Densidad espectral
cruzada de \mathcal{T}_e Sea $C_{f_1, f_2}(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ denso en $L^2(\mathbb{R})$ entonces se define la densidad espectral cruzada de \mathcal{T}_e para $C_{f_1, f_2}(t)$ como:

$$Y_{f_1, f_2}(\mu, 2^\xi \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C(t) \beta_{\mu, \xi}(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (15)$$

donde: $Y_{f_1, f_2}(\mu, 2^\xi \omega)$ es la densidad espectral cruzada de \mathcal{T}_e .

De la ecuación (15) se deduce que la densidad espectral cruzada de \mathcal{T}_e es una herramienta matemática para analizar un par de señales proveniente de un proceso estocástico o determinístico. Dicha herramienta revela la distribución de las componentes de frecuencias a través del espectro diádico de frecuencia.

3.3.2 Coherencia espectral de \mathcal{T}_e

La coherencia de \mathcal{T}_e es una herramienta estadística que es útil para estimar la transferencia de energía entre la entrada y la salida de un sistema lineal. Esta herramienta es obtenida mediante la normalización de la ecuación (15) por los auto-espectros de \mathcal{T}_e de la señal $f_1(t)$ y $f_2(t)$; definiéndose como:

Definición 2: Sea $Y_{f_1, f_2}(\mu, 2^\xi \omega)$ la densidad espectral cruzada de \mathcal{T}_e para **Coherencia** $C_{f_1, f_2}(t)$ y $Y_{f_x, f_x}(\mu, 2^\xi \omega)$ el auto-espectro de $f_x \forall x \in \mathbb{N}: [1, 2]$, **espectral de \mathcal{T}_e** entonces se define la coherencia de \mathcal{T}_e como se muestra en la ecuación (16).

$$\Omega_{f_1, f_2}(\mu, 2^\xi \omega) = \frac{|Y_{f_1, f_2}(\mu, 2^\xi \omega)|}{\sqrt{|Y_{f_1, f_1}(\mu, 2^\xi \omega)| |Y_{f_2, f_2}(\mu, 2^\xi \omega)|}}, \quad (16)$$

donde: $|Y_{f_1, f_1}(\mu, 2^\xi \omega)|$ es el valor absoluto del \mathcal{T}_e auto-espectro para f_1 , $|Y_{f_2, f_2}(\mu, 2^\xi \omega)|$ es el valor absoluto del \mathcal{T}_e auto-espectro para f_2 , $\Omega_{f_1, f_2}(\mu, 2^\xi \omega)$ siendo 0 y 1 la mínima y máxima coherencia, respectivamente.

3.3.3 Espectrograma de \mathcal{T}_e

El espectrograma diádico de alta resolución o espectrograma de \mathcal{T}_e permite conocer la distribución de la energía de una señal en el espectro diádico de frecuencia. (Seuret-Jiménez et al., 2023) define el espectrograma de \mathcal{T}_e como:

Definición 3: *Sea $f(t)$ una función ergódica que pertenece a $L^1(\mathbb{R}) \cap$*
Espectrograma *$L^2(\mathbb{R})$ densa en $L^2(\mathbb{R})$ entonces la ecuación (17) define el*
de \mathcal{T}_e *espectrograma de \mathcal{T}_e para $f(t)$.*

$$\Lambda[f(t)](\mu, 2^\xi \omega) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \beta_{\mu, \xi}(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2, \quad (17)$$

donde: $\Lambda[f(t)](\mu, 2^\xi \omega)$ es la densidad de energía de $f(t)$.

Una desventaja del espectrograma de \mathcal{T}_e no permite conocer la información sobre la fase de la señal. Por otro lado, observe que dicha herramienta es un caso particular del espectro cruzado de \mathcal{T}_e ; debido a que es el auto-espectro de \mathcal{T}_e para $f(t)$. Esto implica la necesidad de tener una herramienta como el fasor de \mathcal{T}_e para conocer la distribución de energía en la fase (ver subsección 3.4: Fasor de \mathcal{T}_e).

3.3.4 Ventana de \mathcal{T}_e y transformada de \mathcal{T}_e en dos parámetros

La transformada de \mathcal{T}_e permite calcular el espectro diádico de frecuencia, dando un nuevo enfoque al espectro de frecuencia como el que se muestra en la Figura 2. 1: Espectro diádico de frecuencia para la transformada de \mathcal{T}_e .

(Trutié-Carrero et al., 2021) plantean por primera vez la forma analítica de la transformada de \mathcal{T}_e , como:

$$\mathcal{T}_e[f(t)](\mu, \xi, \vartheta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)w_{\mu}(t)\psi_{\mu,\xi}(t)e^{-i2\pi\vartheta t} dt, \quad (18)$$

donde: ϑ representa la frecuencia lineal diádica, t representa tiempo, $w_{\mu}(t) = w(t - \mu)$, $\forall \mu \in \mathbb{R}$ y $\psi_{\mu,\xi}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^{\xi}}}\psi\left(\frac{t}{2^{\xi}} - \mu\right)$, $\forall \xi \in \mathbb{Z}$.

A pesar de los resultados obtenidos, contar con una transformada integral dependiente de 3 parámetros, complejiza la obtención de su transformada integral inversa. Por otro lado, impide que exista claridad frente a teoremas de gran importancia como: el teorema de existencia y unicidad, además de conocer el espacio funcional en el cual está se define la transformada integral.

Por los motivos mencionados anteriormente (Trutié-Carrero, Seuret-Jiménez, Nieto-Jalil, Cantó, et al., 2023) definen la ventana de \mathcal{T}_e como:

Definición 4: *Una función acotada $\beta_{\mu,\xi}(t)$, centrada en $t = 0$, par y perteneciente a $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ es una ventana de \mathcal{T}_e ; si es el producto de una función acotada $w_{\mu}(t)$ con $\|w_{\mu}\| = 1$ y una función wavelet diádica $\psi_{\mu,\xi}(t)$, donde μ y ξ son los parámetros de traslación y escala, respectivamente, la ecuación (19) muestra la ventana de \mathcal{T}_e .*

$$\beta_{\mu,\xi}(t) = w_{\mu}(t)\psi_{\mu,\xi}(t), \quad (19)$$

donde: $w_{\mu}(t) = w(t - \mu) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $\psi_{\mu,\xi}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^{\xi}}}\psi\left(\frac{t}{2^{\xi}} - \mu\right) \in L^1(\mathbb{R}) \cap$

$L^2(\mathbb{R})$.

Deducción 1 (transformada de \mathcal{T}_e en dos parámetros)

Si consideramos que el parámetro de traslación $\mu = 0$ y en la escala ξ_1 , podemos reescribir la ecuación (18) como:

$$\mathcal{T}_e[f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\beta_{0,\xi_1}(t)e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2^{\xi_1}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\beta\left(\frac{t}{2^{\xi_1}}\right)e^{-i\omega t} dt, \quad (20)$$

Posteriormente realizamos un cambio de variable en la ecuación (20) $\frac{t}{2^{\xi_1}} = \tau$ obtenemos que $dt = 2^{\xi_1}d\tau$. Por otro lado, al realizar la multiplicación de $f(t)\beta\left(\frac{t}{2^{\xi_1}}\right)$ obtenemos una función acotada. Esto implica que, mediante la Figura 3. 2 la ecuación (20) puede ser reescrita como:

$$\mathcal{T}_e[h(t)](2^{\xi_1}\omega) = \frac{1}{\sqrt{2^{\xi_1}}} \int_a^b h(\tau)e^{-i\omega 2^{\xi_1}\tau} 2^{\xi_1}d\tau \quad (21)$$

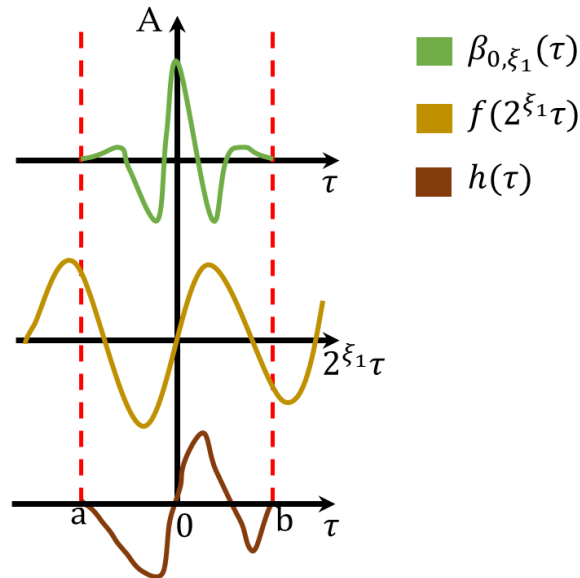


Figura 3. 2 Representación del resultado obtenido luego de multiplicar la ventana de \mathcal{T}_e y la función a analizar, obteniendo $h(\tau)$.

Note en la ecuación (21) como se observa la presencia de la transformada de Fourier de

$h(\tau)$, luego de reorganizar dicha ecuación se obtiene:

$$\mathcal{T}_e[h(t)](2^{\xi_1}\omega) = \sqrt{2^{\xi_1}}\mathcal{F}[h(t)](2^{\xi_1}\omega), \quad (22)$$

Este resultado indica como el dominio de frecuencia es escalado, considerando el parámetro de traslación y su propiedad de invariancia entonces se expresa el miembro izquierdo de la ecuación (22) como: $\mathcal{T}_e[h(t)](\mu, 2^{\xi_1}\omega)$. Este resultado muestra la posibilidad de expresar la transformada de \mathcal{T}_e en dos parámetros.

3.4 Fasor de \mathcal{T}_e

El fasor de \mathcal{T}_e es una herramienta matemática que permite determinar la energía de una señal para la componente de fase correspondiente. La Figura 3. 3 muestra el diagrama en bloque para el cálculo del fasor de \mathcal{T}_e .

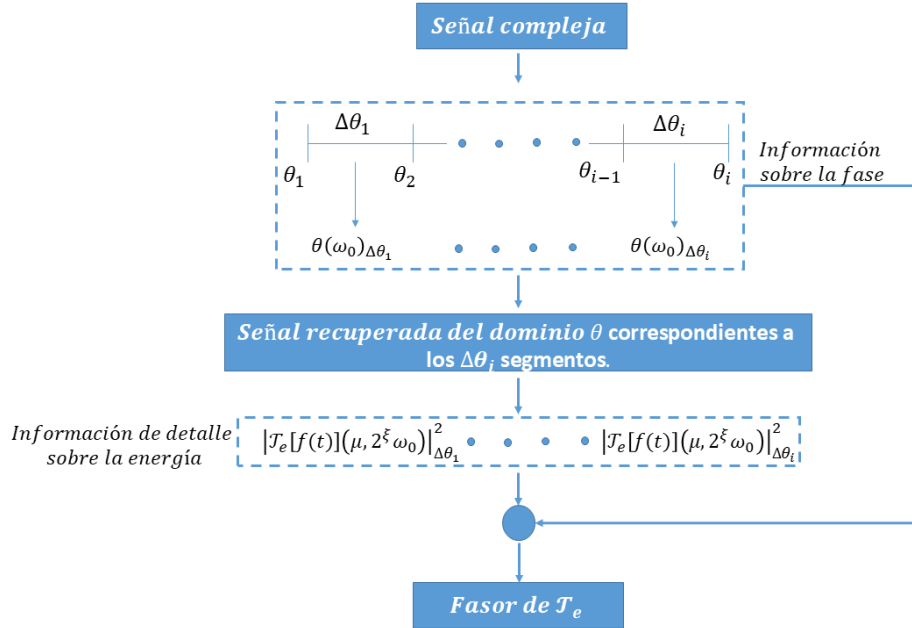


Figura 3. 3: Diagrama en bloque para el cálculo del fasor de \mathcal{T}_e .

3.4.1 Determinación del fasor de \mathcal{T}_e

Para comenzar la determinación del fasor de \mathcal{T}_e , el primer paso es iniciar analizando la información de fase, partiendo de la Figura 3. 3. Note que en la partición $\Delta\theta_i$ se obtiene un valor en la ordenada de $f(\omega_0, \theta_i^\circ) \forall i \in \mathbb{Z}^+$ donde θ_i° es un valor específico. Luego de

analizar la partición n -ésima, obtenemos la ecuación (23).

$$\Delta\theta_i = \frac{\alpha - \beta}{n} \rightarrow 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (23)$$

donde: α y β son los límites inferior y superior, respectivamente, de los intervalos que contienen todas las particiones.

Mediante el concepto de suma de Riemann, la información de la fase se expresa como:

$$S_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\omega_0, \theta_i^\circ) \Delta\theta_i \quad \forall i \in Z^+, \quad (24)$$

donde: S_i es el resultado con todos los intervalos, $f(\omega_0, \theta_i^\circ)$ es la función compleja evaluada en θ_i° para la frecuencia específica ω_0 , θ_i° es un punto dentro de $\Delta\theta_i$.

Esto permite expresar el miembro derecho de la ecuación (24) como una integral en el sentido Riemann, mostrando la integral en el dominio fase:

$$\phi_\eta(\omega_0) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\omega_0, \theta_i^\circ) \Delta\theta_i = \int_\alpha^\beta f(\omega_0, \theta) d\theta, \quad (25)$$

donde: $\phi_\eta(\omega_0)$ indica la información de fase para cada ω_0 , η es la η -ésima señal, $f(\omega_0, \theta)$ es una función integrable en el sentido Riemann, $\int_\alpha^\beta f(\omega_0, \theta) d\theta$ es la integral en el dominio fase.

Luego de conocer cómo se integra en el dominio fase se puede obtener la componente fasorial en el mismo dominio, posteriormente se calcula la energía de la señal en el dominio de \mathcal{T}_e para cada $\Delta\theta_i$.

Finalmente, utilizando la información obtenida desde el dominio fase y la información de energía desde el dominio de \mathcal{T}_e , mediante la **Definición 5** se expresa el fasor de \mathcal{T}_e como:

$$\gamma(\mu, 2^\xi \omega_0) = |\mathcal{T}_e[f(t)_\eta](\mu, 2^\xi \omega_0)|^2 e^{j\phi_\eta(\omega_0)}, \quad (26)$$

donde: $\gamma(\mu, 2^\xi \omega_0)$ es el fasor de \mathcal{T}_e .

Definición 5: Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en casi todo su dominio con periodo $T > 0$: $|f| \leq M$ para algún $M \in \mathbb{R}$ y $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ denso en $L^2(\mathbb{R})$ entonces la ecuación (26) define el fasor de \mathcal{T}_e .

3.4.2 Interpretación física del fasor de \mathcal{T}_e

La Figura 3. 4 muestra la interpretación geométrica del fasor de \mathcal{T}_e para una señal multicomponente que presenta 4 componentes fasoriales. En el ejemplo mostrado, cada vector representa una componente fasorial presente en la señal multicomponente. Cada círculo discontinuo representa un nivel de energía constante; localizado en una escala específica. Note como en este enfoque se observa el escalado diádico de la energía, mostrando un comportamiento de dilatación o contracción.

Tener este enfoque fasorial permite conocer las oscilaciones que componen a la señal $f(t)$, observada desde el dominio de \mathcal{T}_e . Cada fase brinda información instantánea de su comportamiento en cada escala. Esto permite entender que el fasor de \mathcal{T}_e brinda un enfoque fasorial de energía distribuida.

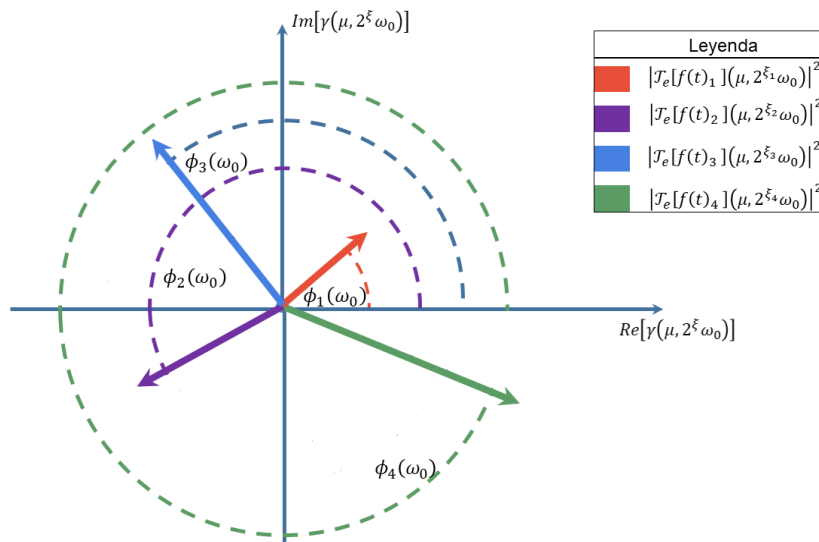


Figura 3. 4: Interpretación geométrica del fasor de \mathcal{T}_e , para una señal multicomponente de 4 componentes fasoriales.

3.5 Conclusión parcial

Las herramientas matemáticas presentadas en este capítulo han demostrado su eficacia al ofrecer un enfoque renovado al espectro de frecuencia y fase, llamado por el autor de esta tesis: “*espectro diádico de frecuencia y fase*”. La capacidad de discriminar componentes de frecuencias espurias, comúnmente denominado ruido estacionario, representa un avance significativo en la mejora de la calidad de análisis. Además, estas herramientas posibilitan el aislamiento de la componente de frecuencia, facilitando así un análisis más detallado en diversas escalas. Este enfoque de multi-sensibilidad proporciona un marco robusto para la investigación y la comprensión de fenómenos complejos relacionados con el espectro de frecuencia. En conjunto, estas capacidades abren nuevas perspectivas para la aplicación de estas herramientas en diversos campos, potenciando el desarrollo de investigaciones más precisas y avanzadas. En la sección 4: “Resultados y Discusión” el autor muestra los resultados alcanzados con las herramientas presentadas en este capítulo.

4 Resultados y Discusión

En la presente sección se presentan los resultados relevantes alcanzados mediante las herramientas presentadas en la sección 3: “Desarrollo Teórico/Experimental”. El autor de la investigación destaca cada uno de los artículos publicados, dando a conocer los resultados principales que evidencian el alcance logrado mediante las afirmaciones realizadas.

4.1 Detección de fugas de agua de fondo mediante una transformada diádica de alta resolución

Para llevar a cabo el proceso de validación de la ecuación (15) y la ecuación (16) se utilizaron dos tipos de fugas de agua de fondo. La primera fuga presenta un diámetro de 1.0 mm brindando un caudal de 33.7 ml/s. Mientras que la segunda fuga tiene un diámetro de 4.0 mm con un caudal de 125.0 ml/s.

Ambas fugas de fondo fueron adquiridas desde el esquema mostrado en la

Figura 3. 1. La Figura 4. 1 y la Figura 4. 2 muestran los resultados obtenidos luego del proceso de adquisición de señal.

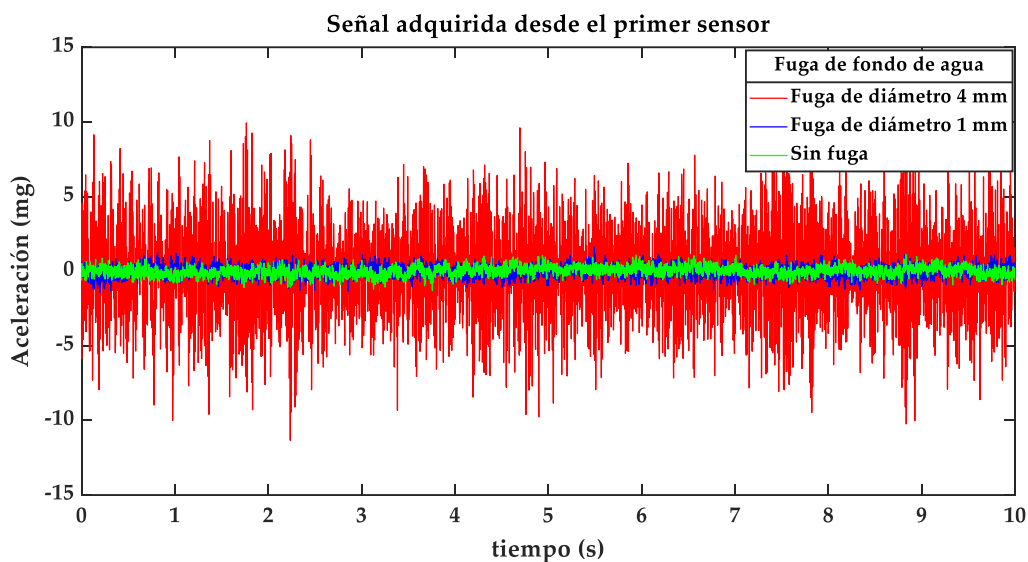


Figura 4. 1: Señal adquirida desde el primer sensor con fugas de 1.0 mm y 4.0 mm de diámetro.

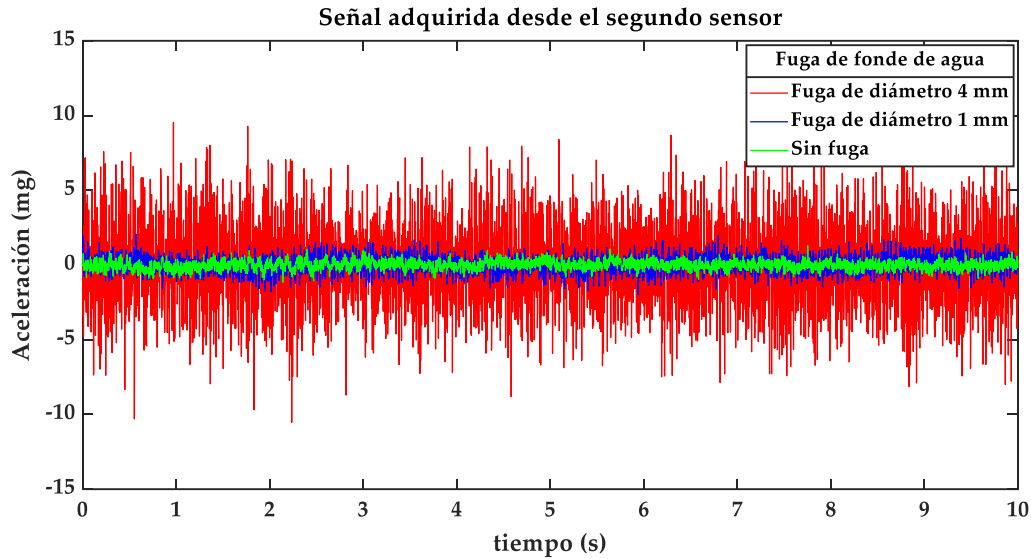


Figura 4. 2: Señal adquirida desde el segundo sensor con fugas de 1.0 mm y 4.0 mm de diámetro.

Nótese en la Figura 4. 1 y la Figura 4. 2 como la fuga que corresponde a 1.0 mm de diámetro presenta una amplitud próxima al piso de ruido de la tubería. Dicha fuga de fondo presenta una relación señal-a-ruido de 2.82 dB y un caudal de 33.7 ml/s. Para el caso de la fuga de fondo que tiene un diámetro de 4.0 mm tiene una relación señal-a-ruido de 9.73 dB y un caudal de 125.0 ml/s. Estos resultados iniciales muestran la importancia de contar con herramientas matemáticas que maximicen la extracción de rasgos a señales próximas al piso de ruido.

4.1.1 Selección de la función wavelet

El proceso de selección de la función wavelet tiene gran importancia. Esto se debe a que existen varias funciones wavelet que presentan un comportamiento diádico. La densidad espectral cruzada de \mathcal{T}_e y la coherencia de \mathcal{T}_e presentan una dependencia con la función wavelet. Esto implica que antes de aplicar dichas herramientas matemáticas hay que seleccionar la función wavelet que se adapte al estudio que se va a llevar a cabo.

Para realizar la selección de la función wavelet se estudiaron las funciones que presenten mayor momento de desvanecimiento. Esto se debe a que las funciones wavelets presentan un enfoque de filtro, indicando que a mayor momento de desvanecimiento mayor es el orden del filtro.

El principal objetivo de este estudio es seleccionar una función wavelet que haga máxima la atenuación de componentes de frecuencia que se encuentren fuera de su banda de paso.

La Figura 4. 3 muestra la respuesta en frecuencia para las funciones Coiflet 5, Daubechies 45 y Symlet 8.

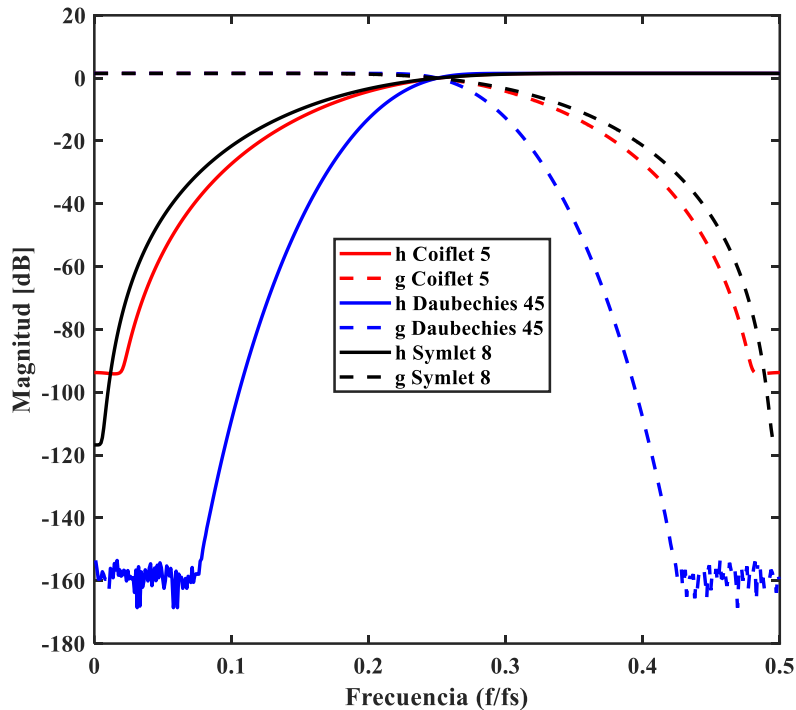


Figura 4. 3: Respuesta en frecuencia de funciones Wavelets.

Note en la Figura 4. 3 como la función wavelet que presenta mejor respuesta para el requerimiento mencionado (hacer máxima la atenuación de las bandas laterales) corresponde a la función Wavelet Daubechies 45, brindando una atenuación de las bandas laterales de -160 dB.

4.1.2 Densidad espectral cruzada

El proceso de validación inició mediante el cálculo de la densidad espectral cruzada para la fuga de 1.0 mm de diámetro y la fuga de 4.0 mm de diámetro. Las Figura 4. 4 y Figura 4. 5 muestran los resultados obtenidos.

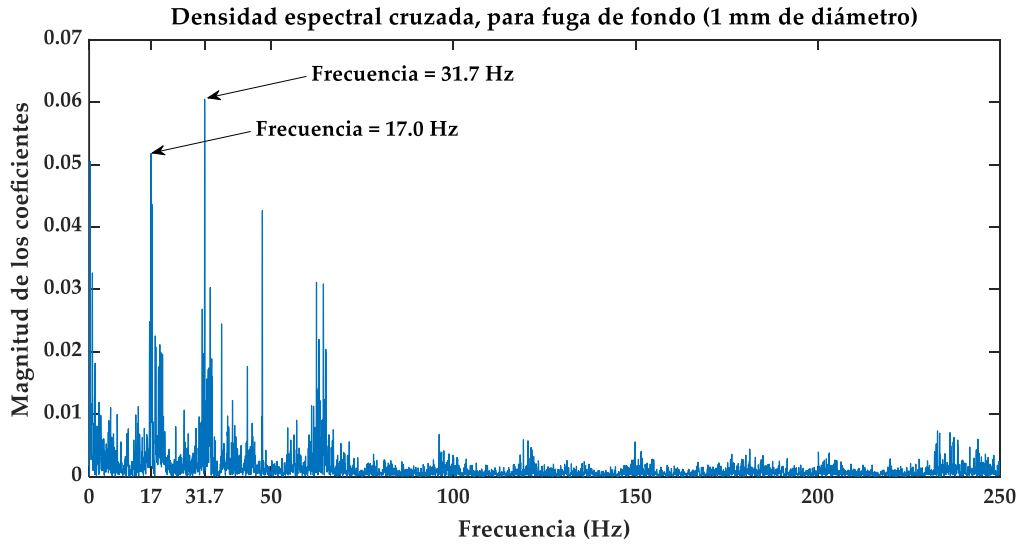


Figura 4. 4 Densidad espectral cruzada para una fuga de 1.0 mm de diámetro.

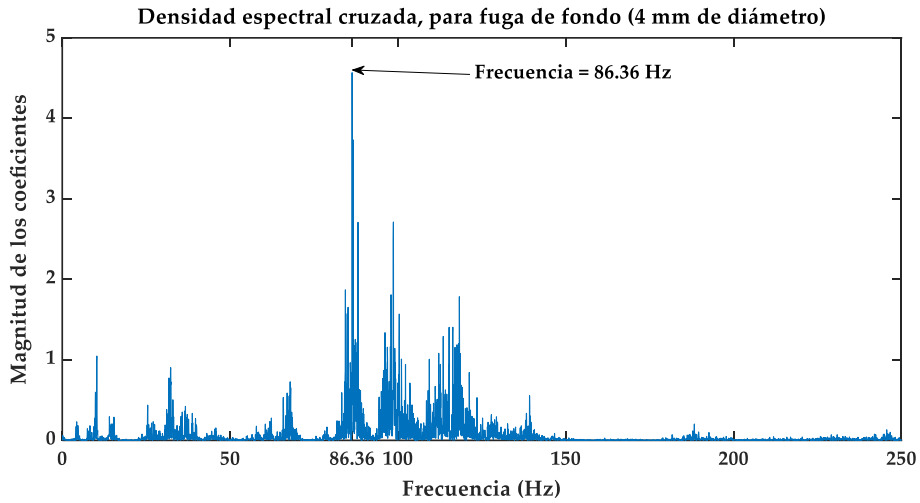


Figura 4. 5 Densidad espectral cruzada para una fuga de 4.0 mm de diámetro.

Note en la Figura 4. 4 como aparecen dos componentes de frecuencias en 31.7 Hz y 17.0 Hz. El hecho de tener dos componentes de frecuencias implica que una de las dos corresponde a la fuga de fondo mientras la otra corresponde a ruido estacionario. A pesar de las grandes bondades que brinda la densidad espectral cruzada no permite extraer la característica de la fuga, siendo vulnerable al ruido estacionario. Por otro lado, podemos observar en la Figura 4. 5 que cuando aumenta la relación señal-a-ruido incrementa la efectividad de la extracción de rasgos, mostrando un espectro de frecuencia libre de ruido estacionario. El siguiente paso es calcular la densidad espectral cruzada de \mathcal{T}_e y la coherencia de \mathcal{T}_e mediante las ecuaciones (15) y (16).

4.1.3 Densidad espectral cruzada de \mathcal{T}_e

Las Figura 4. 6, Figura 4. 7 y Figura 4. 8 muestran los resultados obtenidos por la ecuación (15) a la fuga de 1.0 mm de diámetro, mientras que las Figura 4. 9 y Figura 4. 10 muestran los resultados obtenidos aplicada a la fuga de 4.0 mm de diámetro.

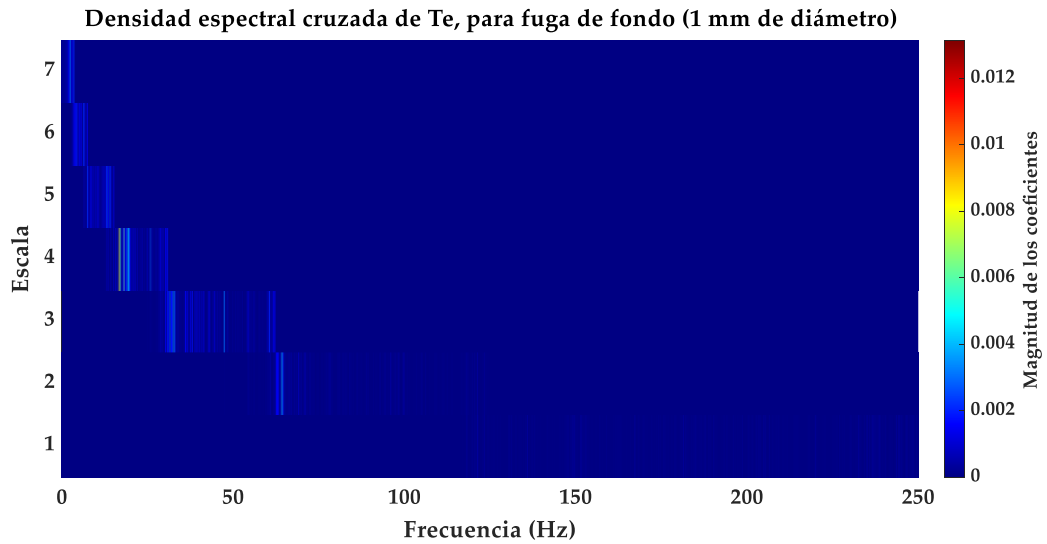


Figura 4. 6: Densidad espectral cruzada de \mathcal{T}_e para fuga de fondo de 1.0 mm de diámetro y caudal de 33.7 ml/s.

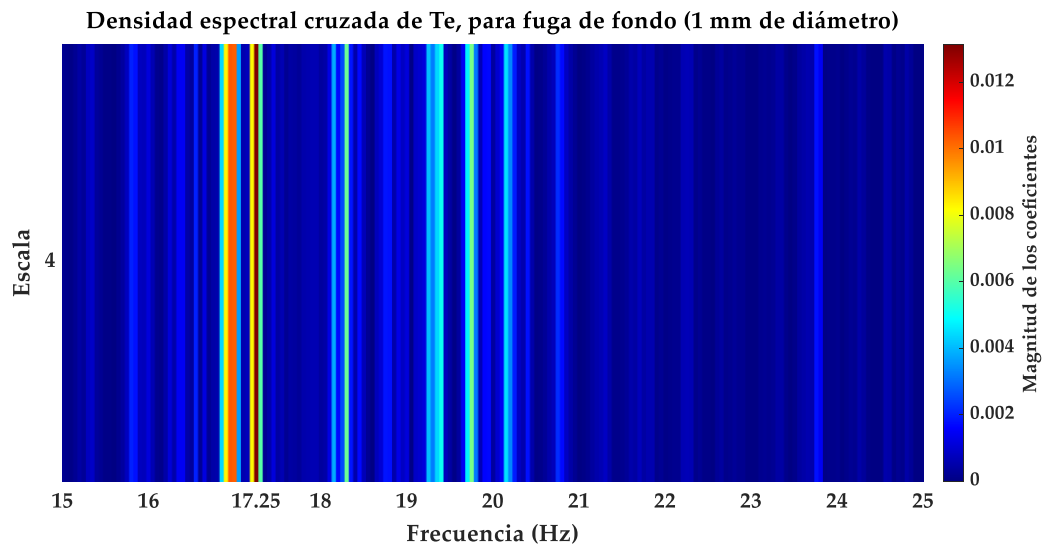


Figura 4. 7: Densidad espectral cruzada de \mathcal{T}_e en la escala 4, para fuga de fondo de 1.0 mm de diámetro y caudal de 33.7 ml/s.

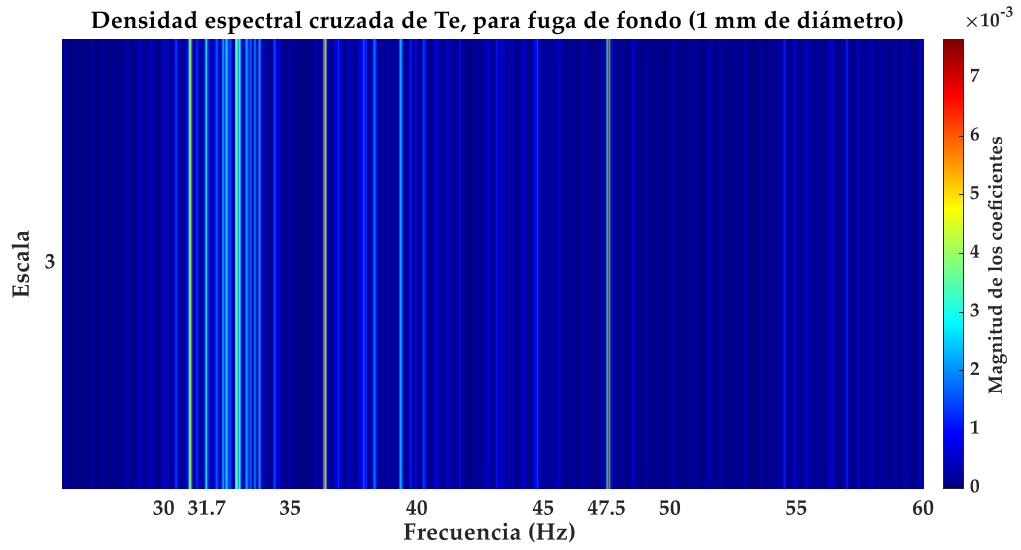


Figura 4. 8: Densidad espectral cruzada de \mathcal{T}_e en la escala 3, para fuga de fondo de 1.0 mm de diámetro y caudal de 33.7 ml/s.

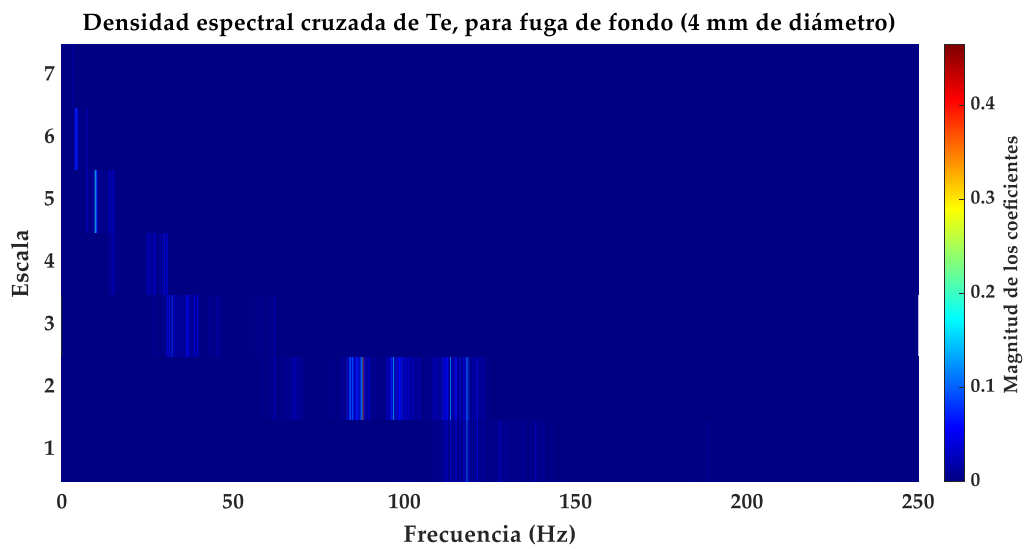


Figura 4. 9: Densidad espectral cruzada de \mathcal{T}_e , para fuga de fondo de 4.0 mm de diámetro y caudal de 125.0 ml/s.

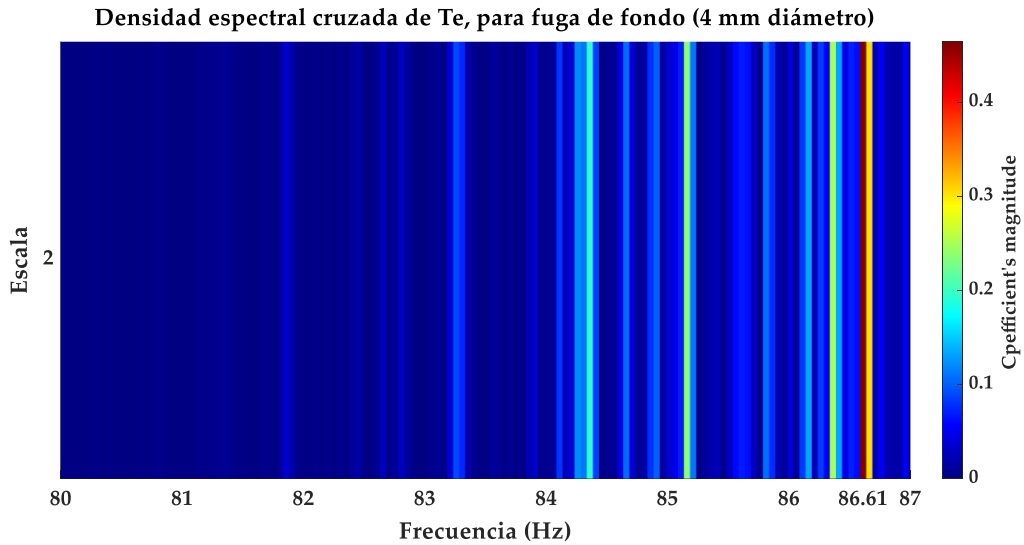


Figura 4. 10: Densidad espectral cruzada de \mathcal{T}_e , para fuga de fondo de 4.0 mm de diámetro y caudal de 125.0 ml/s.

Observe como mediante la densidad espectral cruzada de \mathcal{T}_e es posible (en comparación con la densidad espectral cruzada) aumentar la eficiencia frente a la discriminación del ruido estacionario. Note en la Figura 4. 4 como se aprecian dos componentes de frecuencia (17.0 Hz y 31.7 Hz). Por otro lado, observe en la Figura 4. 7 como solamente aparece una componente de frecuencia (17.25 Hz), mostrando un corrimiento de 0.25 Hz. Mientras que en el resultado obtenido en la Figura 4. 10 solamente se observa un corrimiento de 0.25 Hz en el proceso de extracción de rasgos para la fuga de 4.0 mm de diámetro. Esto indica que el cálculo de los espectros cruzados de \mathcal{T}_e muestran un error de 1.45 %, para este caso.

Estos resultados permiten resaltar la ventaja que muestra la densidad espectral cruzada de \mathcal{T}_e en ambientes donde la relación señal-a-ruido es próxima a 0 dB. Además, permite discriminar el ruido estacionario.

4.1.4 Coherencia espectral

Para realizar el segundo paso en la validación se calcula la coherencia de la fuga de fondo generada con un diámetro de 1.0 mm. La Figura 4. 11 muestra el resultado obtenido. Por otro lado, la Figura 4. 12 muestra el resultado obtenido de la coherencia para la fuga de fondo de 4.0 mm de diámetro.

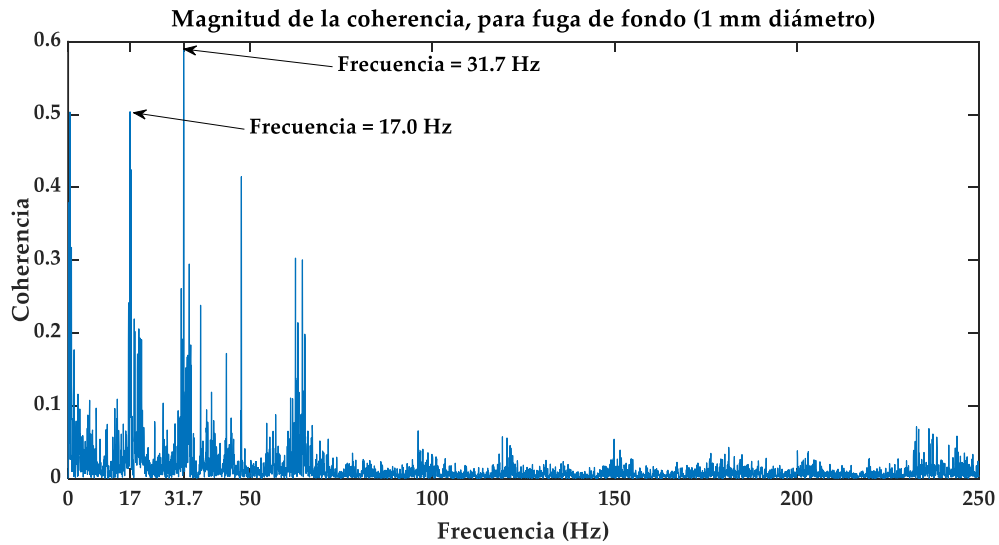


Figura 4. 11: Magnitud de la coherencia para fuga de fondo con 1.0 mm de diámetro y caudal de 33.7 ml/s.

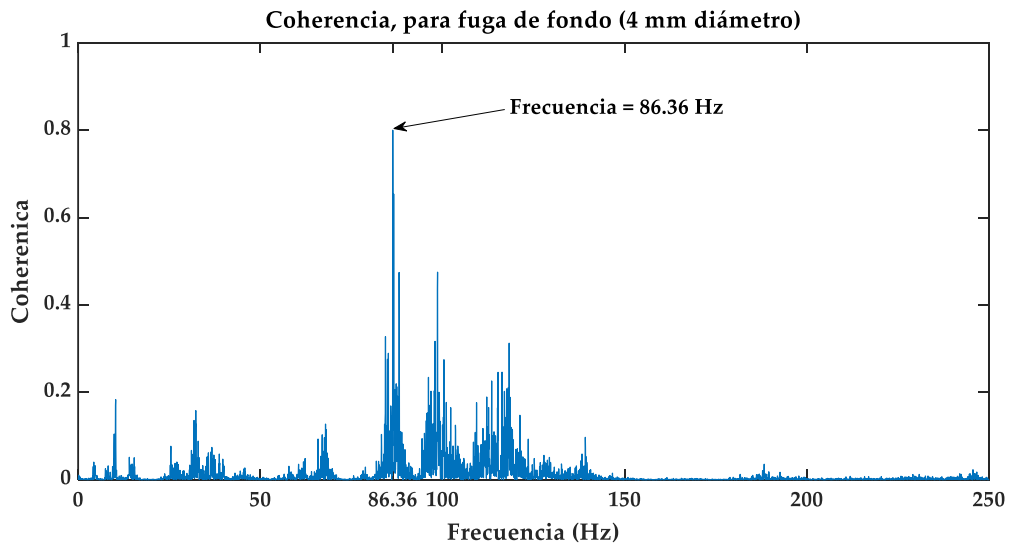


Figura 4. 12: Magnitud de la coherencia para fuga de fondo con 4.0 mm de diámetro y caudal de 125.0 ml/s.

La principal ventaja que muestran los resultados mostrados en la Figura 4. 11 y Figura 4. 12; es que permiten conocer de forma normalizada las componentes de frecuencias presentes en el espectro de frecuencias. Esto permite atenuar cualquier componente de frecuencia que se relacione con ruido. Vincular la ventaja que presenta la coherencia con el espectro cruzado de \mathcal{T}_e va a permitir atenuar la presencia del ruido estacionario y no estacionario.

4.1.5 Coherencia de \mathcal{T}_e

Las Figura 4. 13 y Figura 4. 14 muestran los resultados obtenidos luego de calcular la coherencia de \mathcal{T}_e para una fuga de fondo de 1.0 mm de diámetro y caudal de 33.7 ml/s. Mientras que la Figura 4. 15 y la Figura 4. 16 muestran los resultados de la coherencia de \mathcal{T}_e para la fuga de fondo de 4.0 mm de diámetro y caudal de 125.0 ml/s.

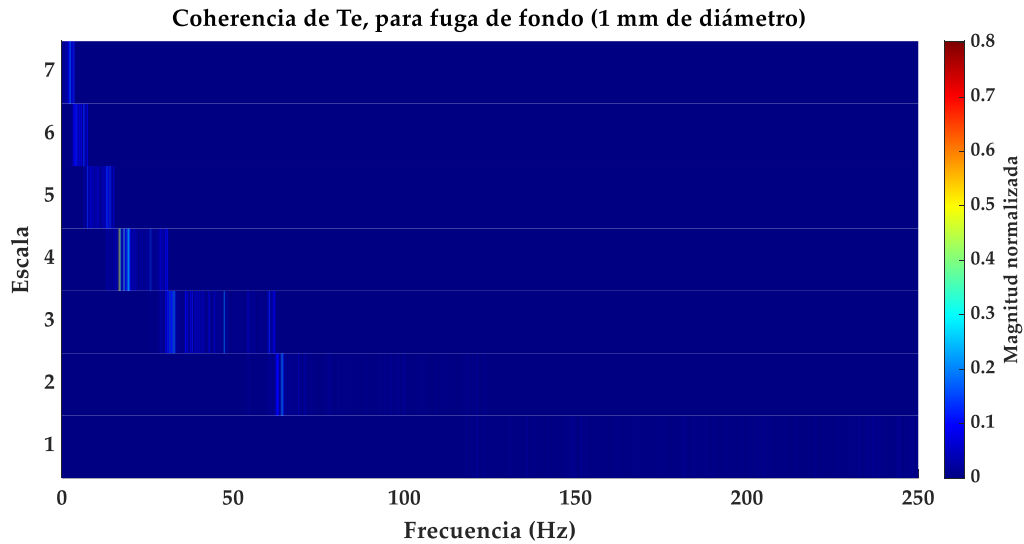


Figura 4. 13: Coherencia de \mathcal{T}_e para fuga de fondo de 1.0 mm y caudal de 33.7 ml/s.

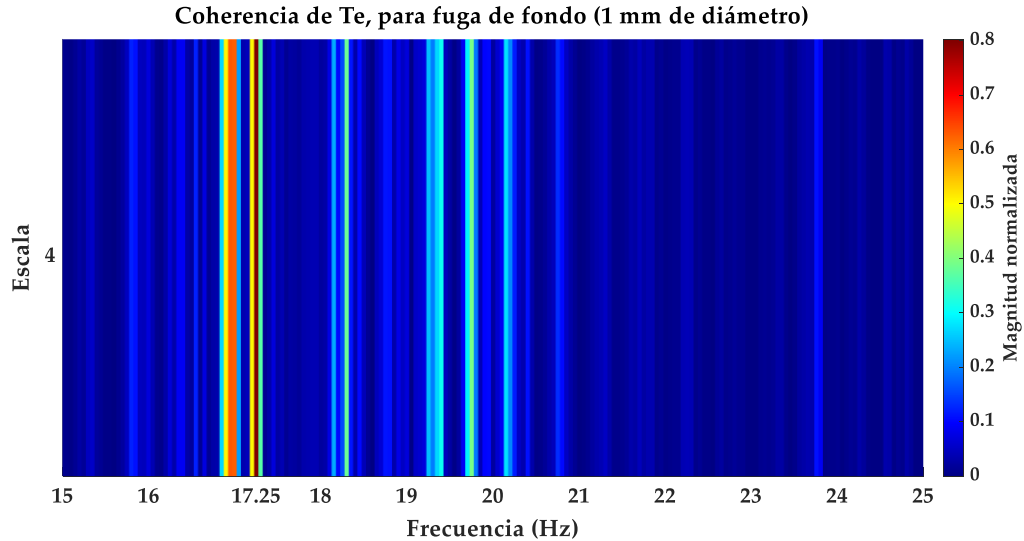


Figura 4. 14: Coherencia de \mathcal{T}_e , en la escala 4 para fuga de fondo de 1.0 mm y caudal de 33.7 ml/s.

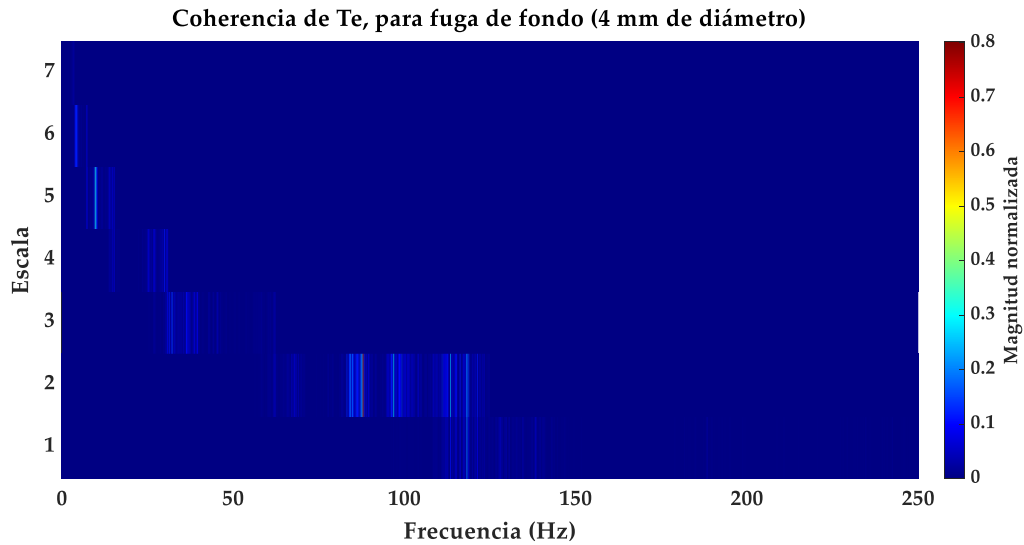


Figura 4. 15: Coherencia de \mathcal{T}_e para fuga de fondo de 4.0 mm y caudal de 125.0 ml/s.

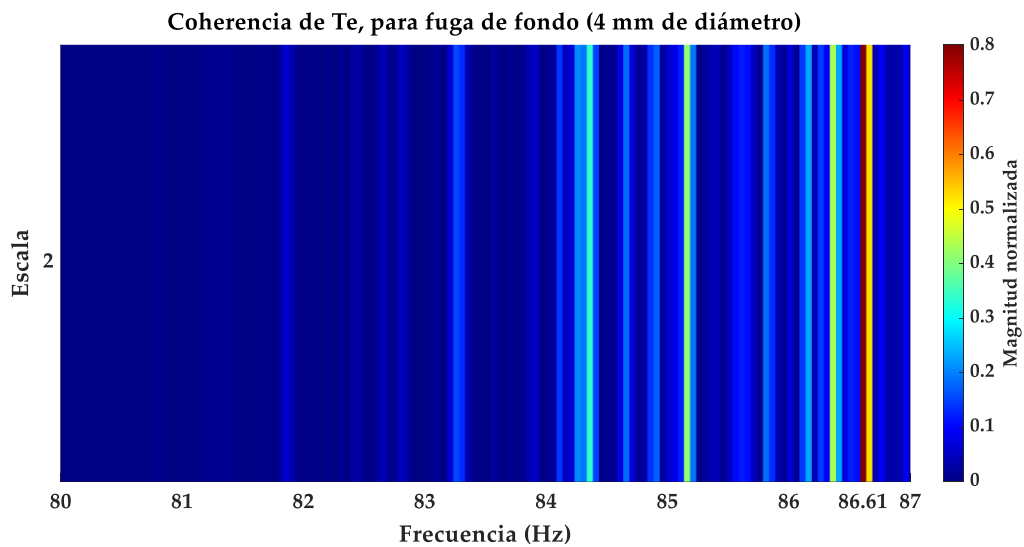


Figura 4. 16: Coherencia de \mathcal{T}_e , en la escala 2 para fuga de fondo de 4.0 mm y caudal de 125.0 ml/s.

Los resultados mostrados revelan la ventaja de la coherencia de \mathcal{T}_e , resaltando la discriminación de componentes de frecuencias espurias. Note como tanto para el caso de la fuga de 1.0 mm como para el caso de la fuga de 4.0 mm se obtiene un espectro puro, permitiendo extraer la característica de frecuencia correspondiente al fenómeno de fuga de fondo.

4.1.6 Conclusión Parcial

En la subsección 4.1: “Detección de fugas de agua de fondo mediante una transformada

diádica de alta resolución” se muestran los resultados de dos contribuciones dirigidas a la detección de fugas de agua generadas en un diámetro de hasta 1.0 mm y 33.7 ml/s.

La densidad espectral cruzada de \mathcal{T}_e se constituye como una herramienta estadística de suma utilidad para analizar un par de señales adquiridas de un proceso, ya sea estocástico o determinístico. Esta herramienta revela la distribución de las componentes de frecuencia a lo largo del espectro diádico de frecuencia. Es importante señalar que la magnitud de la densidad espectral cruzada de \mathcal{T}_e constituye una función de frecuencia diádica que, a su vez, puede experimentar variaciones en función del tiempo. Este enfoque dinámico brinda a la herramienta la capacidad de reflejar cambios diádicos a lo largo del tiempo relacionado con las componentes de frecuencias.

La coherencia de \mathcal{T}_e , como caso particular de la densidad espectral cruzada de \mathcal{T}_e , es una herramienta estadística que puede ser utilizada para estimar la transferencia de potencia entre la entrada y la salida de un sistema. Además, se puede utilizar para estimar la causalidad entre la entrada y la salida.

4.2 Extracción de características de una señal sísmica-acústica no estacionaria mediante un espectrograma diádico de alta resolución

Los sismos representan una amenaza significativa para las infraestructuras urbanas y rurales, estando entre ellas los sistemas de distribución de agua. Esto se debe a que tras la ocurrencia de un sismo los ductos y estructuras asociadas a la distribución del agua sufren daños. Los daños provocados hacen que la salud estructural del sistema de distribución de agua se deteriore, conllevando a que se maximice la probabilidad de ocurrencia de fugas de agua. Por tal motivo, es importante contar con una herramienta matemática que permita analizar la distribución de energía en el espectro diádico de frecuencia.

4.2.1 Señal sísmica adquirida

Para realizar el proceso de validación de la ecuación (17) el autor utilizó una señal sísmica que fue proporcionada por el Instituto Nacional de Sismología radicado en México. Dicha señal corresponde al sismo que se generó el *19 de septiembre de 2017* entre el estado de Morelos y el estado de Puebla la Figura 4. 17 muestra la señal sísmica adquirida.

Note en la Figura 4. 17 como se resaltan tres momentos temporales, describiendo tres escenarios experimentales para la validación del espectrograma de \mathcal{T}_e y las herramientas

matemáticas reportadas en la literatura.

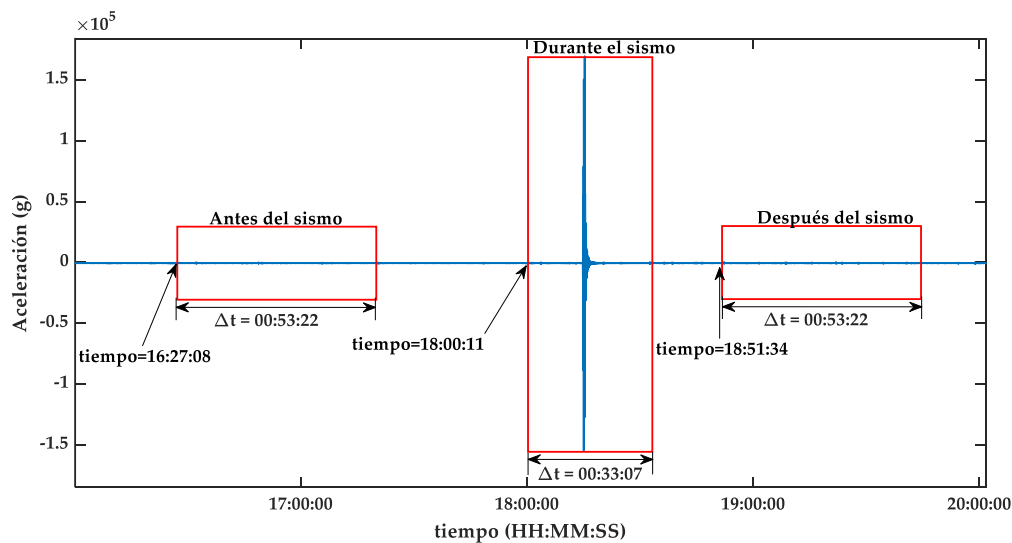


Figura 4. 17: Momentos temporales del sismo.

Para realizar el análisis, mediante el espectrograma de \mathcal{T}_e (ver ecuación (17)), de los momentos temporales mostrados en la señal que se observa en la Figura 4. 17, el autor utilizó la función wavelet Daubechies 45; basándose en el resultado mostrado en la subsección 4.1: “Detección de fugas de agua de fondo mediante una transformada diádica de alta resolución” y la Figura 4. 3.

4.2.2 Análisis tiempo-frecuencia de la señal sísmica

El análisis tiempo-frecuencia es una técnica que engloba varias herramientas matemáticas para el estudio de señales que presentan comportamientos donde las componentes de frecuencias son variables en el tiempo.

Las herramientas matemáticas mostradas en la literatura se basan en realizar la extracción de rasgos bajo la técnica del análisis tiempo-frecuencia. Los resultados mostrados desde la Figura 4. 18 hasta la Figura 4. 32 revelan los resultados obtenidos por las herramientas mostradas en la literatura para los momentos temporales de la señal mostrada en la Figura 4. 17.

La Figura 4. 18 (antes), Figura 4. 19 (durante) y Figura 4. 20 (después) muestran los resultados obtenidos luego de aplicar el espectrograma a los momentos temporales de la señal sísmica adquirida.

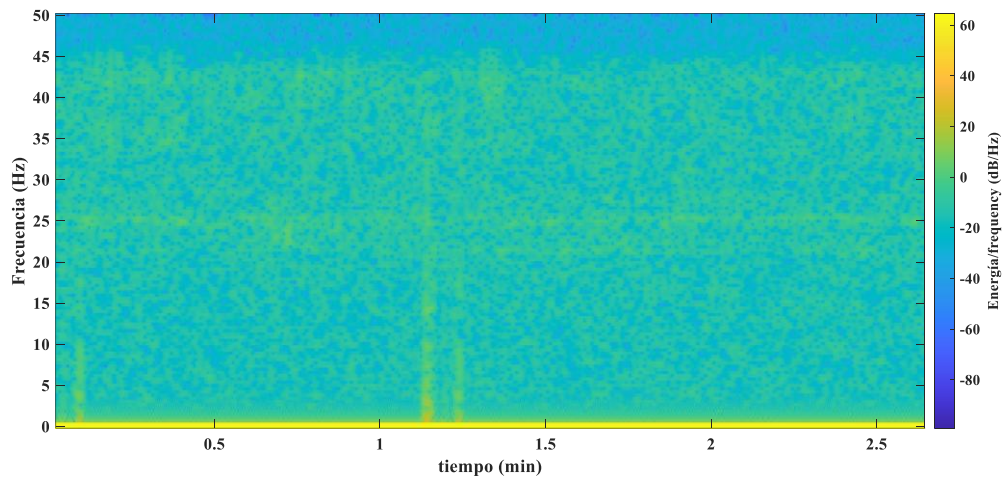


Figura 4. 18: Espectrograma antes del sismo.

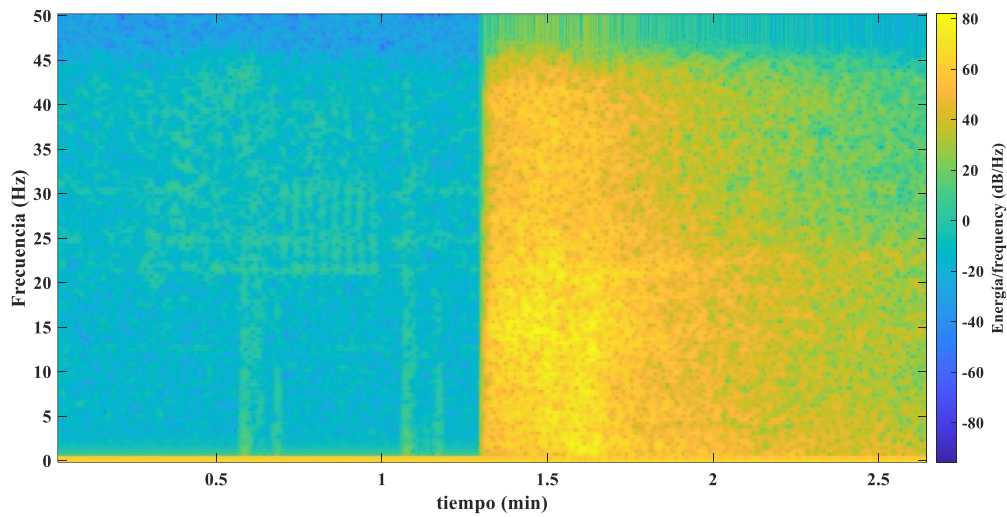


Figura 4. 19: Espectrograma durante el sismo.

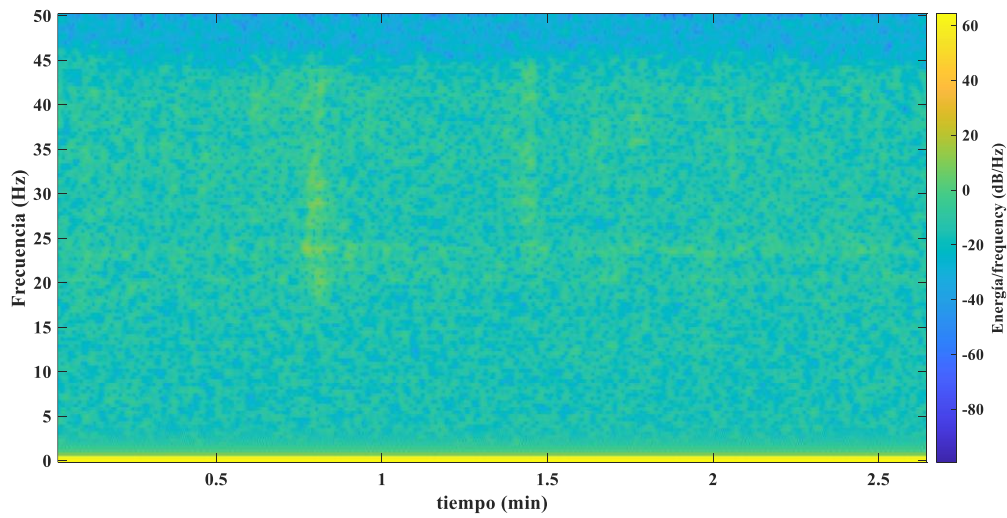


Figura 4. 20: Espectrograma después del sismo.

La segunda herramienta matemática utilizada para procesar los momentos temporales de la señal sísmica fue, la transformada de Hilbert-Huang. El resultado obtenido tras aplicar esta herramienta matemática se muestra la Figura 4. 21 (antes), Figura 4. 22 (durante) y Figura 4. 23 (después). Note en los resultados mostrados en la Figura 4. 21 y la Figura 4. 23 como se observa claramente la ausencia de componentes de frecuencia antes y después del sismo. Observe en dichas figuras como existe una concentración de la energía en un instante temporal, fuera de ese momento la energía disminuye considerablemente.

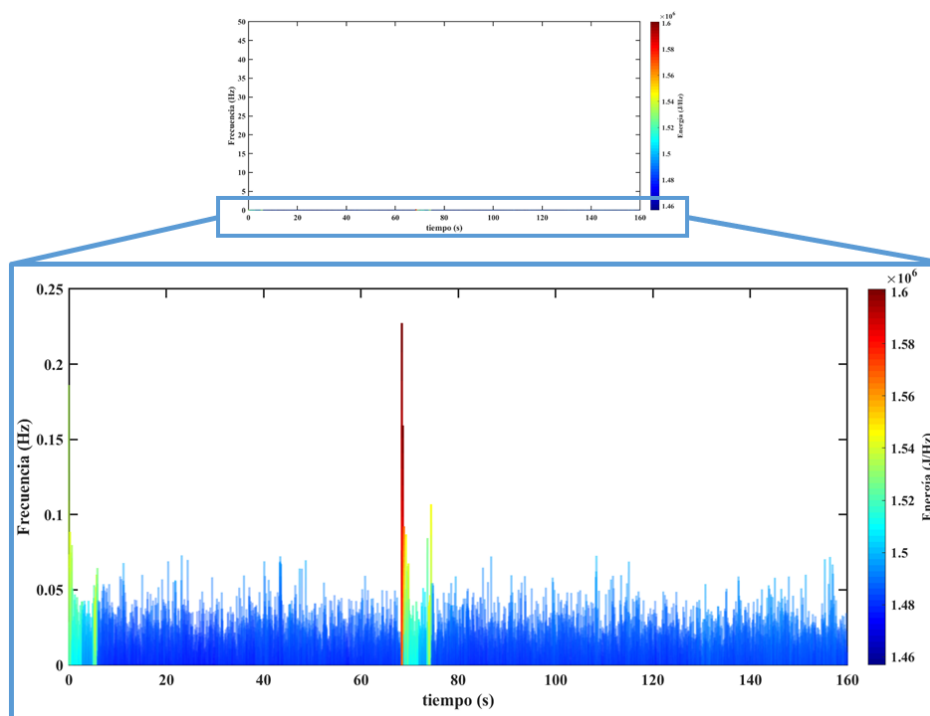


Figura 4. 21: Transformada Hilbert-Huang antes del sismo.

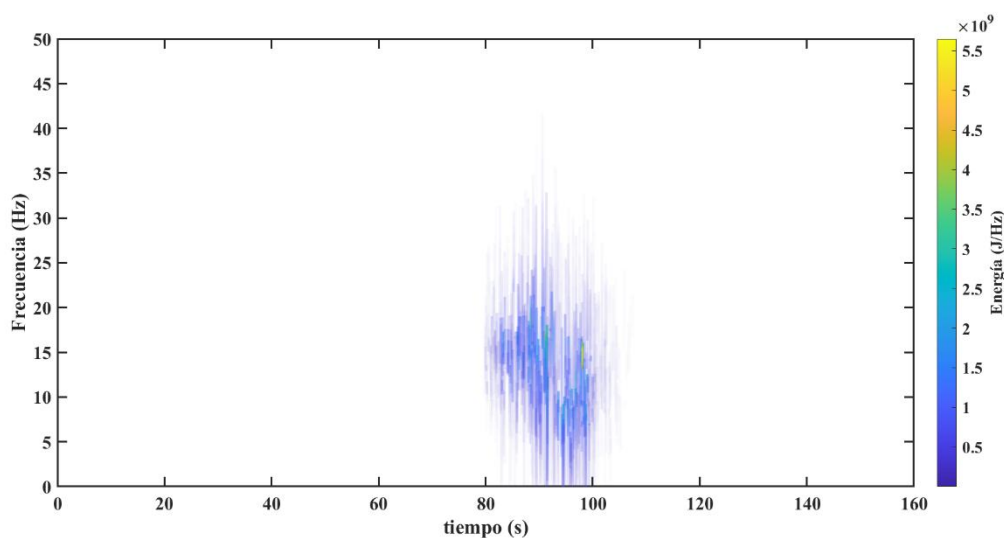


Figura 4. 22: Transformada Hilbert-Huang durante el sismo.

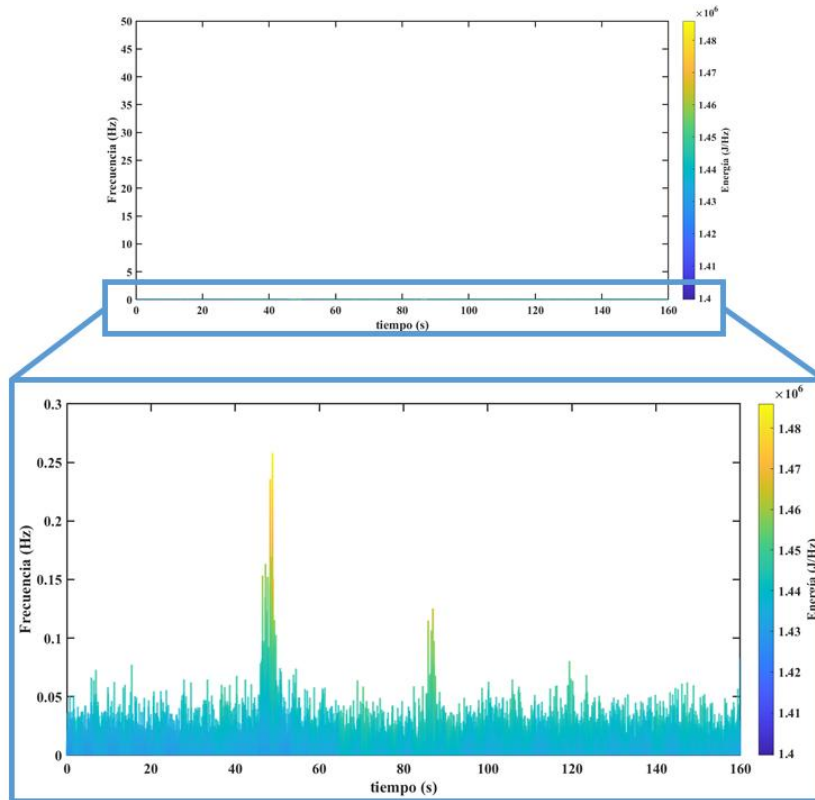


Figura 4. 23: Transformada Hilbert-Huang después del sismo.

En el siguiente proceso de validación se utilizó la transformada S, los resultados se muestran desde la Figura 4. 24 (antes), Figura 4. 25 (durante) y Figura 4. 26 (después). Note como se resalta una pequeña energía antes y después del sismo de forma dispersa, imposibilitando que se observe claramente una componente de frecuencia.

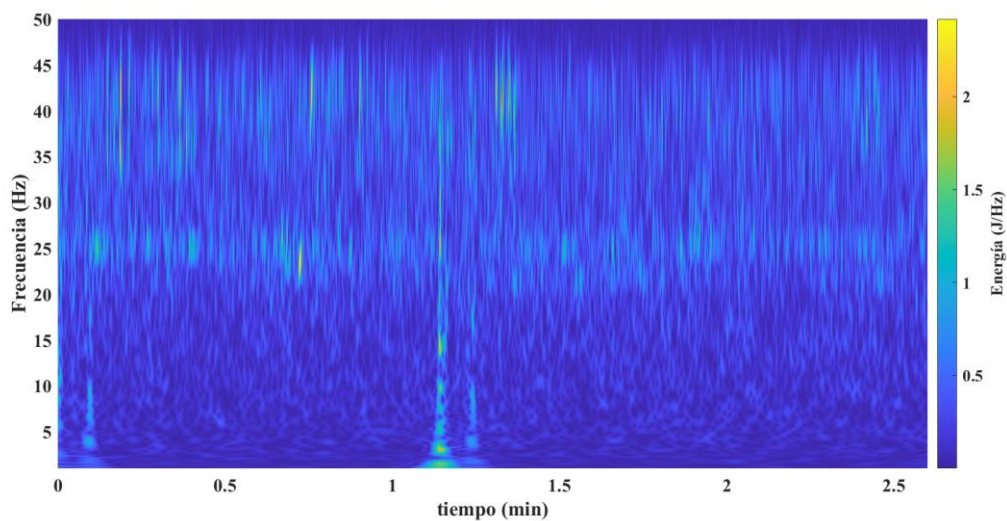


Figura 4. 24: Transformada S antes del sismo.

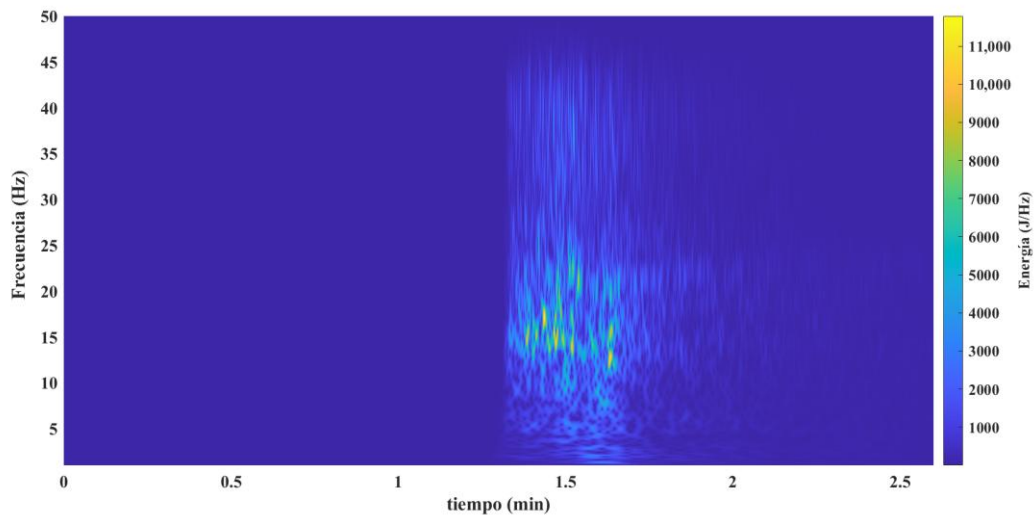


Figura 4. 25: Transformada S durante el sismo.

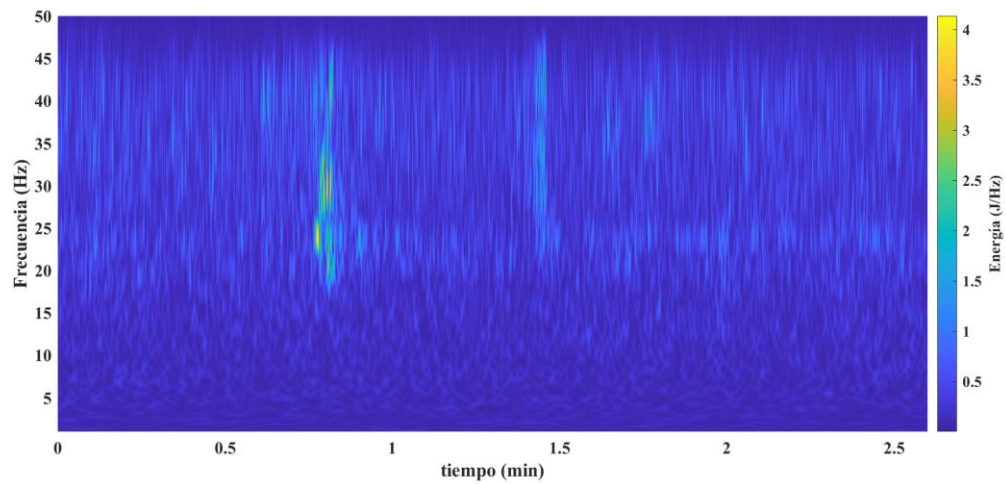


Figura 4. 26: Transformada S después del sismo.

En el cuarto proceso de validación se aplicó la distribución Wigner–Ville. Obsérvese como de igual forma que en los métodos anteriores no se visualiza claramente la existencia de componentes de frecuencia antes y después del sismo.

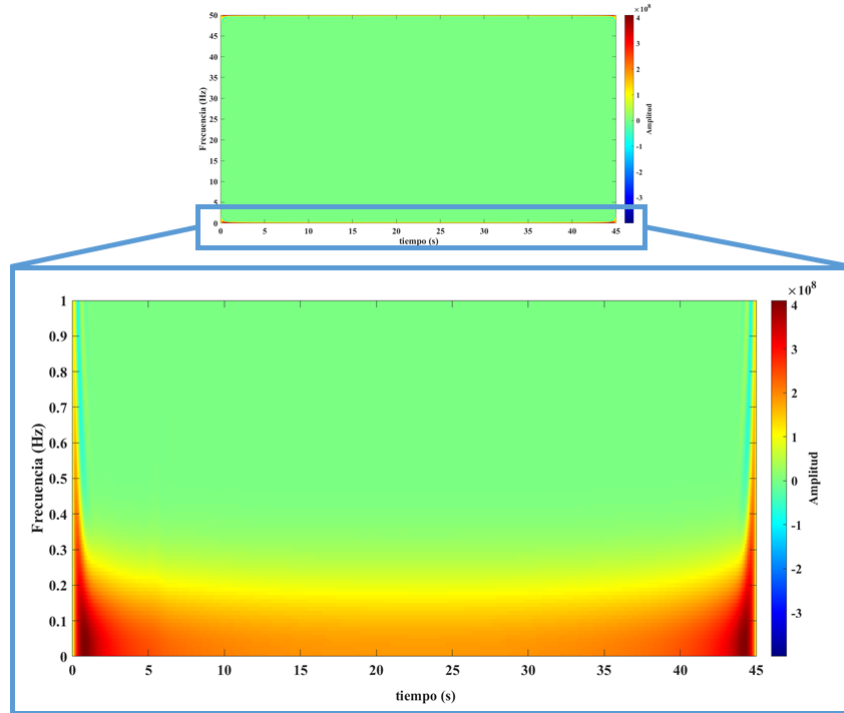


Figura 4. 27: Distribución Wigner–Ville antes del sismo.

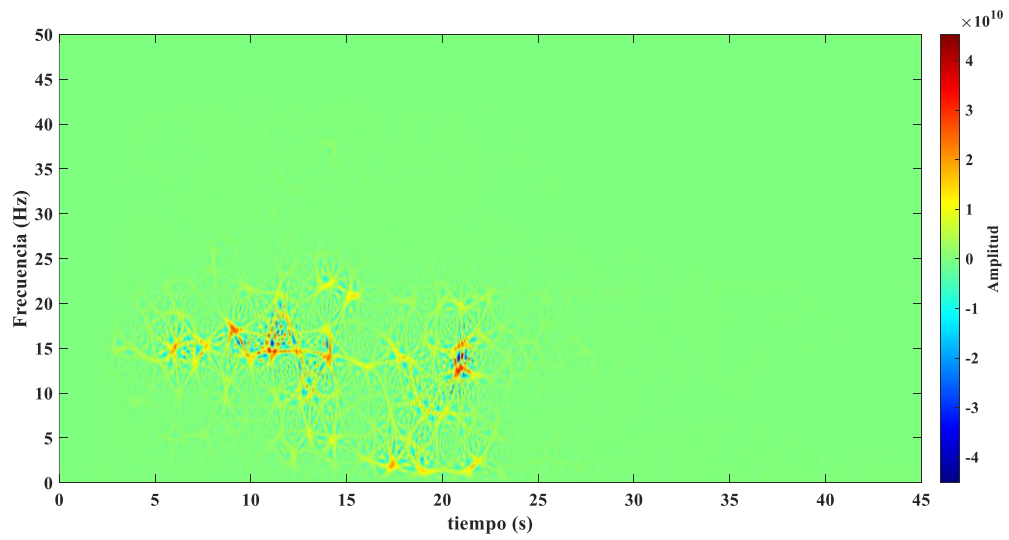


Figura 4. 28: Distribución Wigner–Ville después del sismo.

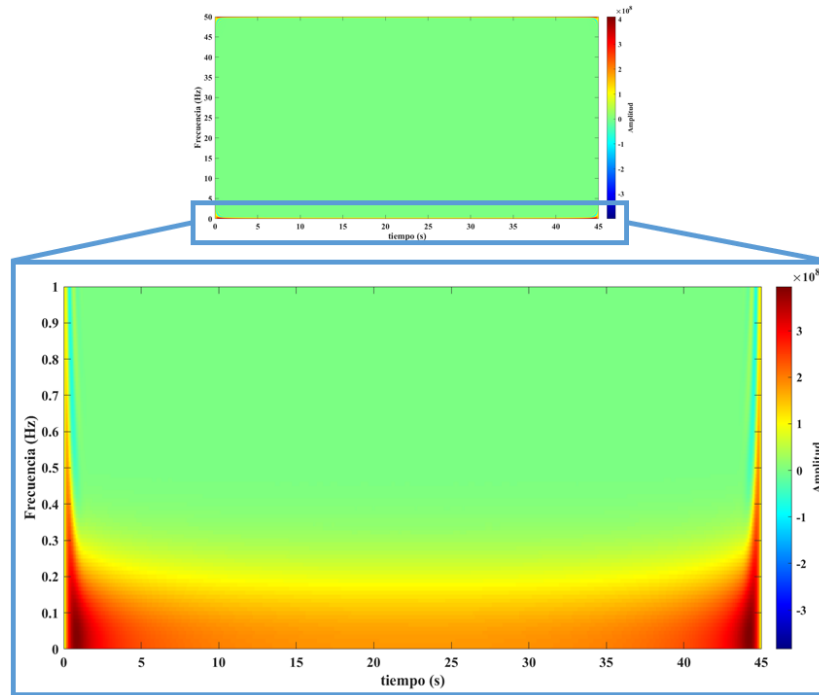


Figura 4. 29: Distribución Wigner–Ville después del sismo.

La última herramienta matemática, reportada en la literatura que se utilizó en el proceso de validación corresponde a la transformada de Chirplet. Desde la Figura 4. 30 hasta la Figura 4. 32 se observan los resultados obtenidos, antes del sismo, durante el sismo y después del sismo. Note como antes y después del sismo se concentra la energía en las bajas frecuencias. A pesar de mostrar este dato interesante, indicando la aparente acumulación de energía o ruido de la Tierra; no es posible con esta herramienta matemática conocer, con claridad, cuál es su banda de frecuencia.

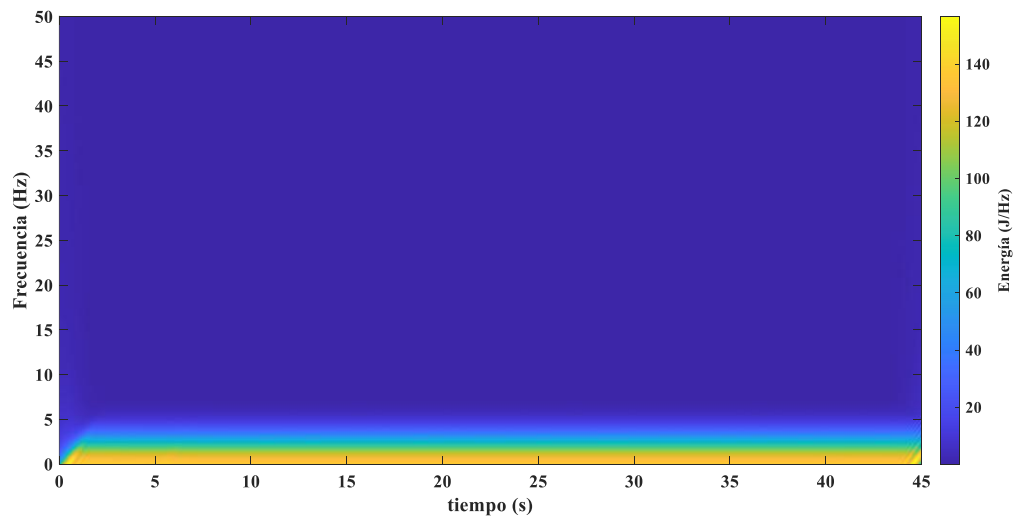


Figura 4. 30: Transformada de Chirplet antes del sismo.

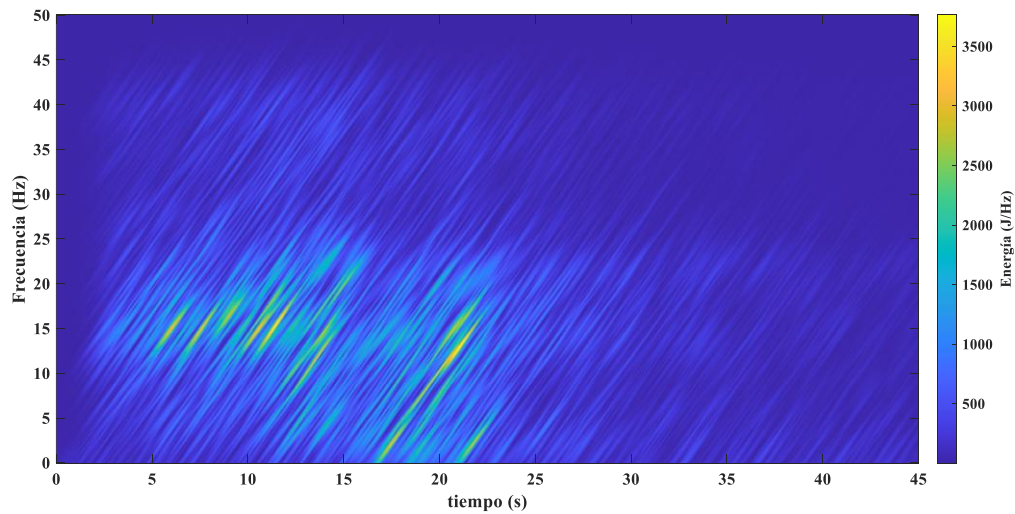


Figura 4. 31: Transformada de Chirplet durante el sismo.

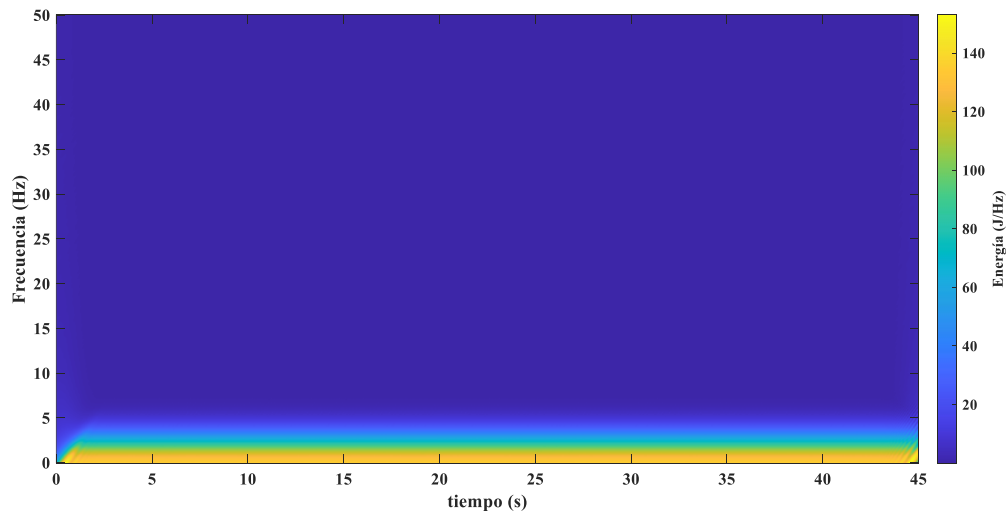


Figura 4. 32 Transformada de Chirplet después del sismo.

Independientemente de los resultados alcanzados por las herramientas matemáticas reportadas en la literatura se desconoce una herramienta que permita descomponer la distribución de energía del espectro de frecuencia. Esto se debe a que el plano tiempo-frecuencia está dirigido a conocer cuando cambió una componente de frecuencia dicha técnica no permite fragmentar el espectro de frecuencia. Por tal motivo, se hace muy difícil poder conocer “el origen y por qué existe una acumulación de energía en componentes de frecuencias próximas a cero”. Además, no se aprecia con claridad la componente de frecuencia que corresponde al sismo.

4.2.3 Análisis escala-frecuencia de la señal sísmica

El análisis escala-frecuencia es la técnica donde se encuentran las contribuciones obtenidas de esta tesis. Dichas herramientas matemáticas van a permitir estudiar señales multi-componentes con un enfoque espectral diádico. Los resultados mostrados se basan en los momentos temporales de la señal mostrados en la Figura 4. 17. Desde la Figura 4. 33 hasta la Figura 4. 36 se observan los resultados obtenidos.

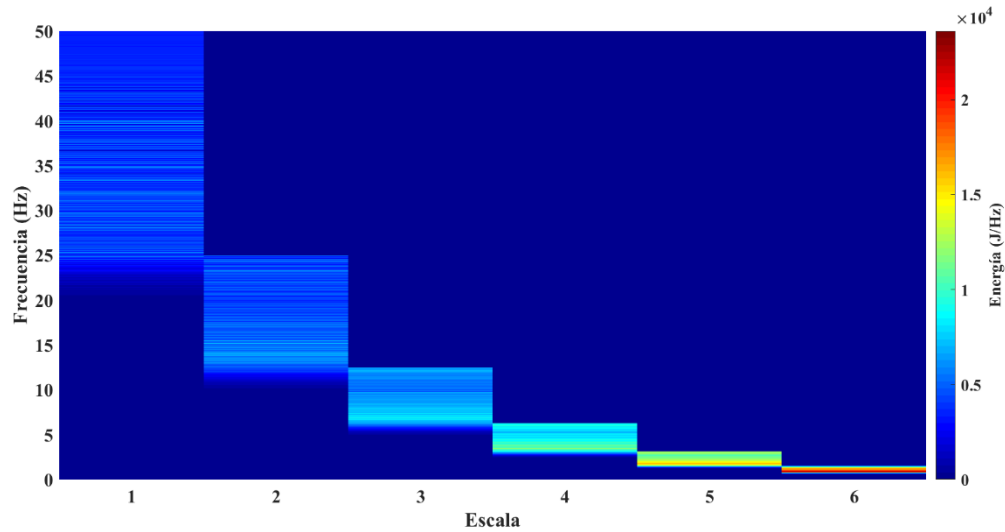


Figura 4. 33: Espectrograma de \mathcal{T}_e antes del sismo.

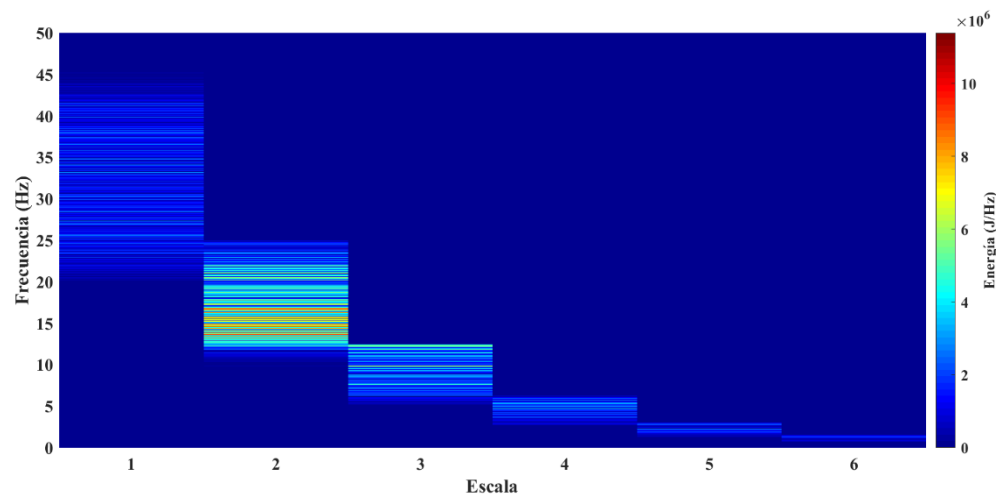


Figura 4. 34: Espectrograma de \mathcal{T}_e durante el sismo.

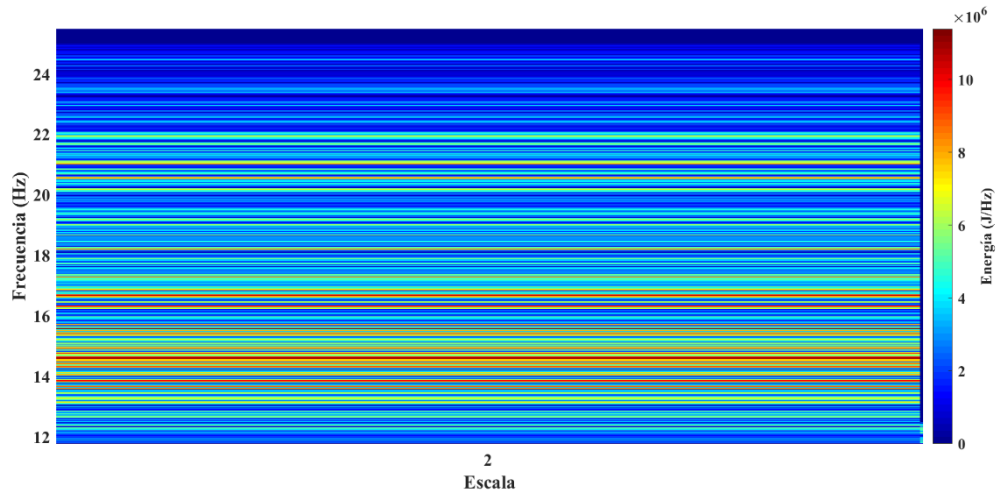


Figura 4. 35: Espectrograma de \mathcal{T}_e durante el sismo, en la escala 2.

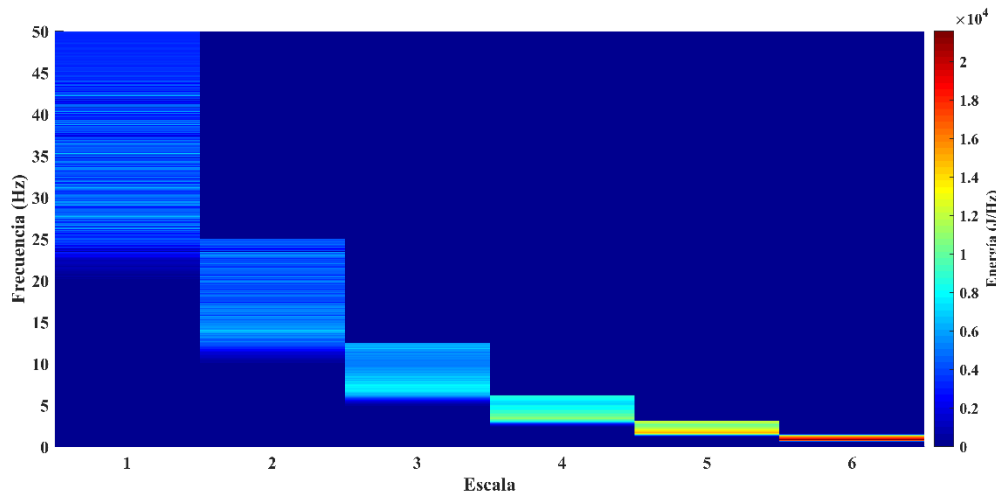


Figura 4. 36: Espectrograma de \mathcal{T}_e durante después del sismo.

Podemos notar de los resultados obtenidos por el espectrograma de \mathcal{T}_e en la Figura 4. 35 una componente de frecuencia entorno a los 12.0 Hz. Es importante resaltar que, en los resultados obtenidos, por las herramientas matemáticas reportadas en la literatura no se logra observar con claridad la componente de frecuencia de 12.0 Hz. Esto se debe a que dichas herramientas matemáticas no permiten analizar componentes de frecuencias que tengan una naturaleza no-estacionaria. Por otro lado, en las Figura 4. 33 y Figura 4. 36 se logra observar una componente de frecuencia en la escala 6, la cual corresponde a una banda de frecuencia que se encuentra entre 0.75 Hz y 1.75 Hz la cual llamamos ruido de la tierra.

4.2.4 Conclusión parcial

En la subsección 4.2: “Extracción de características de una señal sísmica-acústica no estacionaria mediante un espectrograma diádico de alta resolución”, se mostraron los resultados obtenidos tras utilizar el espectrograma de \mathcal{T}_e para distintos momentos temporales de una señal sísmica; antes, durante y después del sismo. El espectrograma de \mathcal{T}_e permite analizar el auto-espectro de una señal. Esto brinda la posibilidad de conocer la distribución de energía para dicha señal, dentro del espectro diádico de frecuencia, manteniendo las propiedades presentes de la transformada de \mathcal{T}_e .

4.3 La transformada de \mathcal{T}_e : una transformada integral de alta resolución y sus propiedades principales

La transformada de \mathcal{T}_e emerge como una herramienta matemática para ser empleada en el análisis de señales. En ella se destaca su capacidad para proporcionar una representación detallada y de alta resolución en el dominio de frecuencia. Desde este contexto, exploraremos las propiedades principales de la transformada de \mathcal{T}_e con el objetivo de mostrar cómo esta transformada integral ofrece una visión única de las características temporales y espectrales de las señales. Este enfoque no solo amplía las posibilidades de estudio en diversas disciplinas, sino que también abre nuevas perspectivas para la comprensión profunda de fenómenos dinámicos en el ámbito de las señales y sistemas.

4.3.1 Principales propiedades para la transformada de \mathcal{T}_e

Teorema 1. *Sea la ecuación (27) la transformada de \mathcal{T}_e para una señal $f(t)$, Existencia de la transformada de \mathcal{T}_e :*

$$\mathcal{T}_e[f(t)](\mu, 2^\xi \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \beta_{\mu, \xi}(t) e^{-i\omega t} dt \quad (27)$$

Si $f(t)$ y $\beta_{\mu, \xi}(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, entonces $\exists \mathcal{T}_e[f(t)](\mu, 2^\xi \omega)$.

Demostración

Para llevar a cabo la demostración debemos calcular la integral del módulo del integrando

de la ecuación (27), quedando:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)\beta_{\mu,\xi}(t)e^{-i\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)\beta_{\mu,\xi}(t)| |e^{-i\omega t}| dt.$$

Debido a que $f(t)$ y $\beta_{\mu,\xi}(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, entonces $f(t)\beta_{\mu,\xi}(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ lo que significa $|f(t)\beta_{\mu,\xi}(t)|$ es absolutamente integrable. Por otro lado, $|e^{-i\omega t}| = 1$ entonces la transformada de \mathcal{T}_e para $f(t)$ existe.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| |\beta_{\mu,\xi}(t)| |e^{-i\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)\beta_{\mu,\xi}(t)| dt < \infty \quad (28)$$

□

Este teorema es fundamental en el campo del análisis de señales y teoría de sistemas. Debido a que una función que está en $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, su espectro de frecuencia se descompone diádicamente, obteniendo diferentes combinaciones de componentes de frecuencias, las cuales son esenciales para el análisis de las componentes de frecuencias de una señal. Por tal motivo, los autores plantean la definición **Definición 6**.

Definición 6: Sea $f(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ denso en $L^2(\mathbb{R})$, entonces la transformada de \mathcal{T}_e en dos parámetros, para $f(t)$ es definida como se muestra en la ecuación (27).

Transformada de \mathcal{T}_e en dos parámetros:

Teorema 2. Si $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\mathcal{T}_e[f(t)] \in L^1(\mathbb{R})$.

Transformada de $\mathcal{T}_e \in L^1(\mathbb{R})$:

Demostración

Para llevar a cabo la demostración es suficiente demostrar que $\mathcal{T}_e[f(t)]$ converge puntualmente. Por tal motivo, se utilizará el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, mostrado en la sección 2. Primeramente, calculamos la transformada de \mathcal{T}_e de $f(t)$ entorno de la frecuencia angular χ como:

$$\mathcal{T}_e[f(t)](\mu, 2^\xi\{\omega + \chi\}) - \mathcal{T}_e[f(t)](\mu, 2^\xi\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\beta_{\mu,\xi}(t)[e^{-i(\omega+\chi)t} - e^{-i\omega t}]dt \quad (29)$$

Reorganizando el integrando obtenemos la siguiente ecuación:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\chi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\beta_{\mu,\xi}(t)e^{-i\omega t}[e^{-i\chi t} - 1]dt, \quad (30)$$

donde: $f_\chi(t) = f(t)\beta_{\mu,\xi}(t)e^{-i\omega t}[e^{-i\chi t} - 1]$.

Posteriormente calculamos $\lim_{\chi \rightarrow 0} f_\chi(t)$, como:

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} f_\chi(t) = f(t)\beta_{\mu,\xi}(t)e^{-i\omega t} \lim_{\chi \rightarrow 0} (e^{-i\chi t} - 1) = 0. \quad (31)$$

Luego de calcular el límite planteado en la ecuación (31) y debido a que $|f(t)|$ es integrable mediante el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue obtenemos que $\mathcal{T}_e[f(t)](\mu, 2^\xi\omega) \in L^1(\mathbb{R})$.

□

La principal importancia de que la transformada de \mathcal{T}_e pertenezca a $L^1(\mathbb{R})$ es que permite analizar funciones en términos de sus componentes espectrales, revelando cómo es la composición de la función en el dominio diádico de la frecuencia para luego poder recuperar dicha función.

Teorema 3. Si $f(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, entonces la transformada inversa de Existencia de la transformada inversa de \mathcal{T}_e es:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}_e[f(t)](\mu, 2^\xi\omega)\beta_{\mu,\xi}(t)e^{i\omega t}d\omega d\mu. \quad (32)$$

Demostración

Para comenzar con la demostración primero calculamos la transformada de Fourier de $\mathcal{T}_e[f(t)](\mu, 2^\xi\omega)$ con respecto a μ , como:

$$\mathcal{F}\{\mathcal{T}_e[f(t)](\mu, 2^\xi\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\beta_{\mu,\xi}(t)e^{-i\omega t}dt e^{-i\chi\mu}d\mu, \quad (33)$$

donde: χ es la frecuencia angular asociada con μ .

Aplicando el teorema de Fubini, descrito en la sección 2, obtenemos:

$$\mathcal{F}\{\mathcal{T}_e[f(t)](\mu, 2^\xi \omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \beta_{\mu, \xi}(t) e^{-i\chi \mu} d\mu dt. \quad (34)$$

Debido a que la ventana de \mathcal{T}_e es par, podemos calcular su transformada de Fourier se calcula de la siguiente forma:

$$\mathcal{F}[\beta_{t, \xi}(\mu)](t, \chi) = \frac{1}{\sqrt{2^\xi}} \int_{-\infty}^{\infty} \beta\left(\mu - \frac{t}{2^\xi}\right) e^{-i\chi \mu} d\mu.$$

Haciendo un cambio de variables $\mu - \frac{t}{2^\xi} = \tau$, obteniendo $\mu = \tau + \frac{t}{2^\xi}$ y $d\mu = d\tau$:

$$\mathcal{F}[\beta_{t, \xi}(\mu)](t, \chi) = \frac{1}{\sqrt{2^\xi}} e^{-\frac{i\chi t}{2^\xi}} \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\tau) e^{-i\chi \tau} d\tau,$$

$$\mathcal{F}[\beta_{t, \xi}(\mu)](t, \chi) = \frac{1}{\sqrt{2^\xi}} e^{-\frac{i\chi t}{2^\xi}} \mathcal{F}[\beta(\tau)](\chi). \quad (35)$$

Si sustituimos el resultado de la ecuación (35) en la ecuación (34) obtenemos la ecuación (36). Dichos pasos se muestran a continuación.

$$\mathcal{F}\{\mathcal{T}_e[f(t)](\mu, 2^\xi \omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2^\xi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\frac{i\chi t}{2^\xi}} \mathcal{F}[\beta(\tau)](\chi) e^{-i\omega t} dt,$$

$$\mathcal{F}\{\mathcal{T}_e[f(t)](\mu, 2^\xi \omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2^\xi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathcal{F}[\beta(\tau)](\chi) e^{-i\left[\omega + \frac{\chi}{2^\xi}\right]t} dt,$$

$$\mathcal{F}\{\mathcal{T}_e[f(t)](\mu, 2^\xi \omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2^\xi}} \mathcal{F}[\beta(\tau)](\chi) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\left[\omega + \frac{\chi}{2^\xi}\right]t} dt,$$

$$\mathcal{F}\{\mathcal{T}_e[f(t)](\mu, 2^\xi \omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2^\xi}} \mathcal{F}[\beta(\tau)](\chi) \mathcal{F}[f(t)]\left(\omega + \frac{\chi}{2^\xi}\right) \quad (36)$$

Posteriormente, aplicamos el teorema de Parseval y el teorema de Fubini, que se muestra en la sección 2: “Marco teórico”, a la integral que se encuentra dentro de los corchetes cuadrados en la ecuación (37) para obtener la ecuación (38).

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_e[f(t)](\mu, 2^\xi \omega) \beta_{\mu, \xi}(t) d\mu \right] e^{i\omega t} d\omega, \quad (37)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^\xi}} \mathcal{F}[\beta(\tau)](\chi) \mathcal{F}[f(t)] \left(\omega + \frac{\chi}{2^\xi} \right) \left[\frac{1}{\sqrt{2^\xi}} e^{-\frac{i\chi t}{2^\xi}} \mathcal{F}[\beta(\tau)](\chi) \right]^* d\chi \right] e^{i\omega t} d\omega, \quad (38)$$

donde: * es el operador complejo conjugado.

Reescribiendo la ecuación (38) obtenemos:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f(t)] \left(\omega + \frac{\chi}{2^\xi} \right) \frac{1}{\sqrt{2^\xi}} \mathcal{F}[\beta(\tau)](\chi) \frac{1}{\sqrt{2^\xi}} \mathcal{F}[\beta(\tau)]^*(\chi) e^{\frac{i\chi t}{2^\xi}} d\chi \right] e^{i\omega t} d\omega. \quad (39)$$

Como $\frac{1}{\sqrt{2^\xi}} \in \mathbb{R}$, esto significa que $B'(\chi) = \frac{1}{\sqrt{2^\xi}} \mathcal{F}[\beta(\tau)](\chi) \frac{1}{\sqrt{2^\xi}} \mathcal{F}[\beta(\tau)]^*(\chi)$ puede ser reescrito como $|B'(\chi)|^2$. Reescribiendo la ecuación (39) y haciendo uso del teorema de Fubini, obtenemos:

$$f(t) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f(t)] \left(\omega + \frac{\chi}{2^\xi} \right) |B'(\chi)|^2 e^{i\left[\omega + \frac{\chi}{2^\xi}\right]t} d\omega d\chi. \quad (40)$$

Posteriormente se organiza la integral de la ecuación (40) como:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f(t)] \left(\omega + \frac{\chi}{2^\xi} \right) e^{i\left[\omega + \frac{\chi}{2^\xi}\right]t} d\omega \right] |B'(\chi)|^2 d\chi. \quad (41)$$

Para resolver la ecuación (41), primero hacemos un cambio de variable a la integral que se

encuentra dentro de los corchetes cuadrados $\omega' = \omega + \frac{\chi}{2^\xi}$ y $d\omega' = d\omega + d\left(\frac{\chi}{2^\xi}\right)$ obteniendo que $d\omega' = d\omega$. La ecuación muestra dicha integral con el cambio de variable, observe que estamos en presencia de la transformada inversa de Fourier de la función $\mathcal{F}[f(t)](\omega')$, obteniendo $f(t)$.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f(t)](\omega') e^{i\omega't} d\omega'. \quad (42)$$

Si sustituimos el resultado obtenido de la ecuación (42) en la ecuación(41) obtenemos:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) |B'(\chi)|^2 d\chi. \quad (43)$$

Luego reescribimos la ecuación (43) para obtener:

$$f(t) = f(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |B'(\chi)|^2 d\chi. \quad (44)$$

Mediante la referencia de (Mallat, 2009) obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\beta_{\mu,\xi}(t)|^2 d\mu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |B'(\chi)|^2 d\chi = 1. \quad (45)$$

Entonces la identidad $f(t) = f(t)$ se cumple, lo cual indica que la transformada inversa de \mathcal{T}_e existe.

□

Contar con una herramienta matemática que permita recuperar una función desde el dominio diádico de frecuencia es de gran valor para el análisis de sistemas. Esto se debe a que simplifica el análisis de funciones a través de la representación de frecuencia diádica, particularmente cuando se trata de funciones complejas o ruidosas. Además, permite la reducción de ruido aislando y eliminando componentes de frecuencia no deseados o espurios.

Teorema 4. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones para las cuales existe su

Unicidad:

transformada de \mathcal{T}_e . Entonces, $\mathcal{T}_e[f(t)](\mu, 2^\xi \omega) =$

$\mathcal{T}_e[g(t)](\mu, 2^\xi \omega)$ si y solo si $f(t) = g(t)$, casi donde sea.

Demostración.

Necesaria

Para realizar la demostración, el primer paso es calcular la magnitud de la diferencia de la transformada de \mathcal{T}_e para $f(t)$ y para $g(t)$. Finalmente, utilizamos el **Teorema 3. Existencia de la transformada inversa de \mathcal{T}_e** : para utilizar la transformada inversa de \mathcal{T}_e .

$$\begin{aligned} & |\mathcal{T}_e[f(t)] - \mathcal{T}_e[g(t)]|(\mu, 2^\xi \omega) \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \beta_{\mu, \xi}(t) e^{-i\omega t} dt - \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \beta_{\mu, \xi}(t) e^{-i\omega t} dt \right|, \end{aligned}$$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) - g(t)] \beta_{\mu, \xi}(t) e^{-i\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)| |\beta_{\mu, \xi}(t)| |e^{-i\omega t}| dt.$$

Debido a que $|e^{-i\omega t}| = 1$, entonces

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) - g(t)] \beta_{\mu, \xi}(t) e^{-i\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)| |\beta_{\mu, \xi}(t)| dt = 0.$$

Suficiencia

Para demostrar el otro sentido de equivalencia se utiliza la propiedad de linealidad, demostrada por (Trutié-Carrero et al., 2021) para la transformada de \mathcal{T}_e .

$$f(t) - g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}_e[f(t) - g(t)](\mu, 2^\xi \omega) \beta_{\mu, \xi}(t) e^{i\omega t} d\omega d\mu = 0,$$

Debido a que $\mathcal{T}_e[f(t) - g(t)](\mu, 2^\xi \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \beta_{\mu, \xi}(t) e^{-i\omega t} dt - \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \beta_{\mu, \xi}(t) e^{-i\omega t} dt = 0$.

□

El teorema de unicidad en la transformada de \mathcal{T}_e es una propiedad fundamental que establece que una función en el dominio del tiempo está completamente determinada por su transformada de \mathcal{T}_e en el dominio diádico de frecuencia.

Teorema 5. Si $f(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ denso $L^2(\mathbb{R})$ en entonces,
Conservación de energía en el dominio de \mathcal{T}_e
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{T}_e[f(t)](\mu, 2^\xi \omega)|^2 d\omega d\mu$$

Demostración.

El primer paso es aplicar el teorema de Fubini al miembro derecho de la integral que se encuentra en la hipótesis del teorema. Posteriormente, se aplica el teorema de Plancherel, descrito en la subsección 2.8, con respecto a μ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{T}_e[f(t)](\mu, 2^\xi \omega)|^2 d\mu d\omega \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2^\xi}} \mathcal{F}[\beta(\tau)](\chi) \mathcal{F}[f(t)]\left(\omega + \frac{\chi}{2^\xi}\right) \right|^2 d\chi \right] d\omega \end{aligned}$$

En el segundo paso se reorganiza el resultado obtenido para aplicar la ecuación (45).

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2^\xi}} \mathcal{F}[\beta(\tau)](\chi) \mathcal{F}[f(t)]\left(\omega + \frac{\chi}{2^\xi}\right) \right|^2 d\chi \right] d\omega \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \mathcal{F}[f(t)]\left(\omega + \frac{\chi}{2^\xi}\right) \right|^2 \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2^\xi}} \mathcal{F}[\beta(\tau)](\chi) \right|^2 d\chi \right] d\omega \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación (45) reescribimos la integral que se encuentra en el miembro derecho, obteniendo:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \mathcal{F}[f(t)] \left(\omega + \frac{\chi}{2\xi} \right) \right|^2 \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\xi}} \mathcal{F}[\beta(\tau)](\chi) \right|^2 d\chi \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \mathcal{F}[f(t)] \left(\omega + \frac{\chi}{2\xi} \right) \right|^2 d\omega \end{aligned}$$

Finalmente, bajo el teorema de Plancherel podemos observar que existe una conservación de la energía.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \mathcal{F}[f(t)] \left(\omega + \frac{\chi}{2\xi} \right) \right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

Sustituyendo el resultado obtenido en el miembro derecho de la ecuación mostrada en la hipótesis del teorema 5 obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

Nótese como el miembro izquierdo de la ecuación es igual al miembro derecho. Desde un punto de vista de análisis energético podemos percatarnos que la energía de la función $f(t)$ no se modifica en el dominio de \mathcal{T}_e . Esto da a conocer que el espectrograma de \mathcal{T}_e no modifica las componentes energéticas de una señal.

□

4.3.2 Pares transformados para la transformada de \mathcal{T}_e

- **Transformada de \mathcal{T}_e para una constante $f(\omega_c t)$ donde $\omega_c = 0$:**

$$\mathcal{T}_e[f(0)](\mu, 2^\xi \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(0) \beta_{\mu, \xi}(t) e^{-i\omega t} dt,$$

$$\mathcal{T}_e[f(0)](\mu, 2^\xi \omega) = \frac{f(0)}{\sqrt{2^\xi}} \int_{-\infty}^{\infty} \beta\left(\frac{t}{2^\xi} - \mu\right) e^{-i\omega t} dt.$$

Hacemos un cambio de variables $\frac{t}{2^\xi} - \mu = \tau$ obteniendo $t = 2^\xi(\tau + \mu)$ y $dt = 2^\xi d\tau$,

$$\mathcal{T}_e[f(0)](\mu, 2^\xi \omega) = 2^\xi \frac{f(0)}{\sqrt{2^\xi}} \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\tau) e^{-i2^\xi \omega(\tau + \mu)} d\tau,$$

$$\mathcal{T}_e[f(0)](\mu, 2^\xi \omega) = \sqrt{2^\xi} f(0) e^{-i2^\xi \omega \mu} \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\tau) e^{-i2^\xi \omega \tau} d\tau,$$

$$\mathcal{T}_e[f(0)](\mu, 2^\xi \omega) = \sqrt{2^\xi} f(0) e^{-i2^\xi \omega \mu} \mathcal{F}[\beta(\tau)](2^\xi \omega),$$

Note como del resultado obtenido se observa que a través de la transformada de \mathcal{T}_e la componente de fase $e^{-i2^\xi \omega \mu}$ también se modifica por el factor de escala. Esto indica la existencia de multi-sensibilidad en un análisis de fase en un sistema, indicando la posibilidad de aislamiento en las componentes de fase.

La Figura 4. 37 muestra una representación del espectro de frecuencia obtenido para la transformada de \mathcal{T}_e de la función $f(0)$. Nótese en esta figura que existe un espectro de frecuencias para cada valor de ξ , obteniendo una ventana de \mathcal{T}_e para cada escala (2^ξ donde $\xi \in [1 \ 3]$). Este resultado es llamado por el autor de la tesis como espectro diádico de frecuencia debido a que ω es dilatado por el factor 2^ξ .

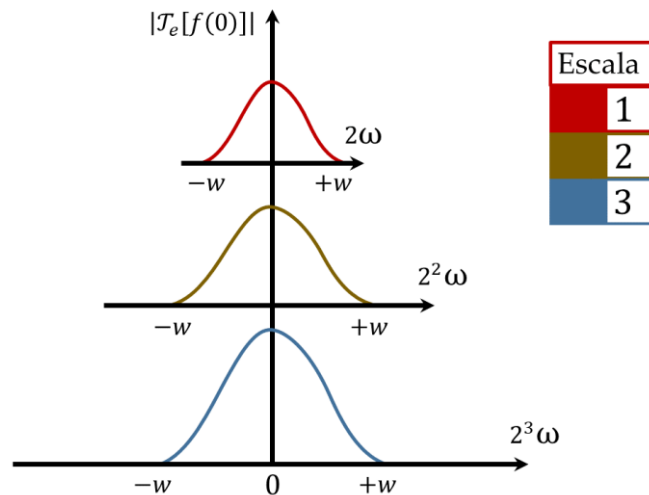


Figura 4. 37 Representación del espectro diádico de frecuencia para $f(0)$, donde w es el ancho de la ventana de \mathcal{T}_e .

- **Transformada de \mathcal{T}_e para una exponencial compleja**

$$\mathcal{T}_e[e^{i\omega_c t}](\mu, 2^\xi \omega) = \frac{1}{\sqrt{2^\xi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_c t} \beta_{\mu, \xi}(t) e^{-i\omega t} dt,$$

$$\mathcal{T}_e[e^{i\omega_c t}](\mu, 2^\xi \omega) = \frac{1}{\sqrt{2^\xi}} \int_{-\infty}^{\infty} \beta\left(\frac{t}{2^\xi} - \mu\right) e^{-i(\omega - \omega_c)t} dt.$$

Haciendo un cambio de variable $\frac{t}{2^\xi} - \mu = \tau$, obtenemos $t = 2^\xi(\tau + \mu)$ y $dt = 2^\xi d\tau$,

$$\mathcal{T}_e[e^{i\omega_c t}](\mu, 2^\xi \omega) = 2^\xi \frac{1}{\sqrt{2^\xi}} \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\tau) e^{-i(\omega - \omega_c)2^\xi(\tau + \mu)} d\tau,$$

$$\mathcal{T}_e[e^{i\omega_c t}](\mu, 2^\xi \omega) = \sqrt{2^\xi} e^{-i(\omega - \omega_c)2^\xi \mu} \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\tau) e^{-i(\omega - \omega_c)2^\xi \tau} d\tau,$$

$$\mathcal{T}_e[e^{i\omega_c t}](\mu, 2^\xi \omega) = \sqrt{2^\xi} e^{-i(\omega - \omega_c)2^\xi \mu} \mathcal{F}[\beta(\tau)](2^\xi[\omega - \omega_c]).$$

La Figura 4. 38 muestra el espectro diádico de frecuencia obtenido después de calcular la transformada de \mathcal{T}_e para la función $e^{i\omega_c t}$. Tenga en cuenta que el espectro de frecuencia no distorsiona el componente de frecuencia, lo que muestra cómo se puede observar en diferentes escalas. Además, como la ventana tiene un ancho de banda espectral limitado, podemos observar cómo este ancho de banda es modificado por la escala, mostrando la existencia de diferentes anchos de banda que indican un comportamiento sensible para diferentes componentes de frecuencia, lo que se conoce como multi-sensibilidad.

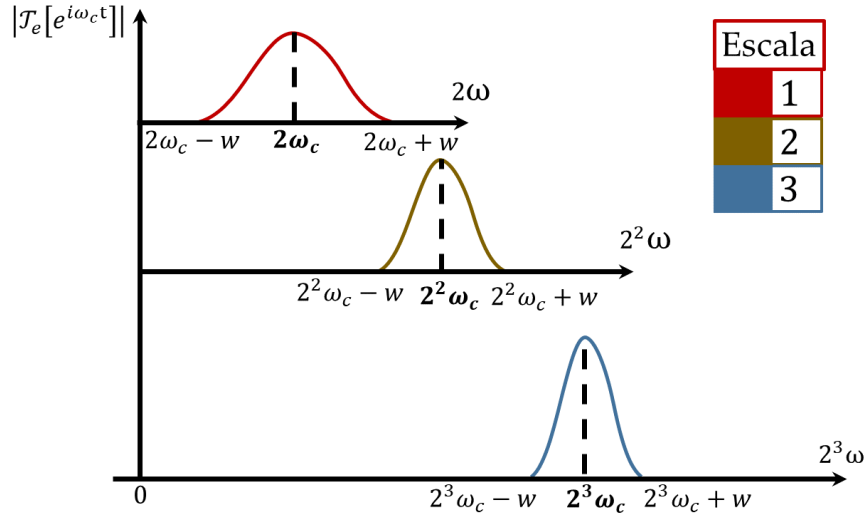


Figura 4. 38: Representación del espectro diádico de frecuencia para $e^{i\omega_c t}$.

- **Transformada de \mathcal{T}_e para la función seno**

$$\mathcal{T}_e[\sin(\omega_c t)](\mu, 2^\xi \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega_c t) \beta_{\mu, \xi}(t) e^{-i\omega t} dt,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_e[\sin(\omega_c t)](\mu, 2^\xi \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2^\xi} 2i} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_c t} \beta\left(\frac{t}{2^\xi} - \mu\right) e^{-i\omega t} dt \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_c t} \beta\left(\frac{t}{2^\xi} - \mu\right) e^{-i\omega t} dt \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_e[\sin(\omega_c t)](\mu, 2^\xi \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2^\xi} 2i} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \beta\left(\frac{t}{2^\xi} - \mu\right) e^{-i(\omega - \omega_c)t} dt \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} \beta\left(\frac{t}{2^\xi} - \mu\right) e^{-i(\omega + \omega_c)t} dt \right], \end{aligned}$$

Hacemos un cambio de variables $\frac{t}{2^\xi} - \mu = \tau$, obteniendo que $t = 2^\xi(\tau + \mu)$ y $dt = 2^\xi d\tau$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_e[\sin(\omega_c t)](\mu, 2^\xi \omega) &= \frac{2^\xi}{\sqrt{2^\xi} 2i} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \beta(\tau) e^{-i(\omega - \omega_c) 2^\xi (\tau + \mu)} d\tau \right. \\
&\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\tau) e^{-i(\omega + \omega_c) 2^\xi (\tau + \mu)} d\tau \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_e[\sin(\omega_c t)](\mu, 2^\xi \omega) &= \frac{2^\xi}{\sqrt{2^\xi} 2i} \left[e^{-i(\omega - \omega_c) 2^\xi \mu} \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\tau) e^{-i(\omega - \omega_c) 2^\xi \tau} d\tau \right. \\
&\quad \left. - e^{-i(\omega + \omega_c) 2^\xi \mu} \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\tau) e^{-i(\omega + \omega_c) 2^\xi \tau} d\tau \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_e[\sin(\omega_c t)](\mu, 2^\xi \omega) &= i\sqrt{2^{\xi-2}} \left[e^{-i(\omega - \omega_c) 2^\xi \mu} \mathcal{F}[\beta(\tau)](2^\xi [\omega - \omega_c]) \right. \\
&\quad \left. - e^{-i(\omega + \omega_c) 2^\xi \mu} \mathcal{F}[\beta(\tau)](2^\xi [\omega + \omega_c]) \right].
\end{aligned}$$

La Figura 4. 39 muestra la representación del espectro diádico de frecuencia para la función $\sin(\omega_c t)$. Note como el resultado obtenido es similar al que brinda la transformada de Fourier para una función seno, reportada por (Constantin, 2016; Cooley et al., 1969; Gaskill, 1978). La principal diferencia es que en esta nueva representación podemos adquirir información en distintas escalas, lo que permite poder apreciar con mayor detalle las componentes de frecuencias.

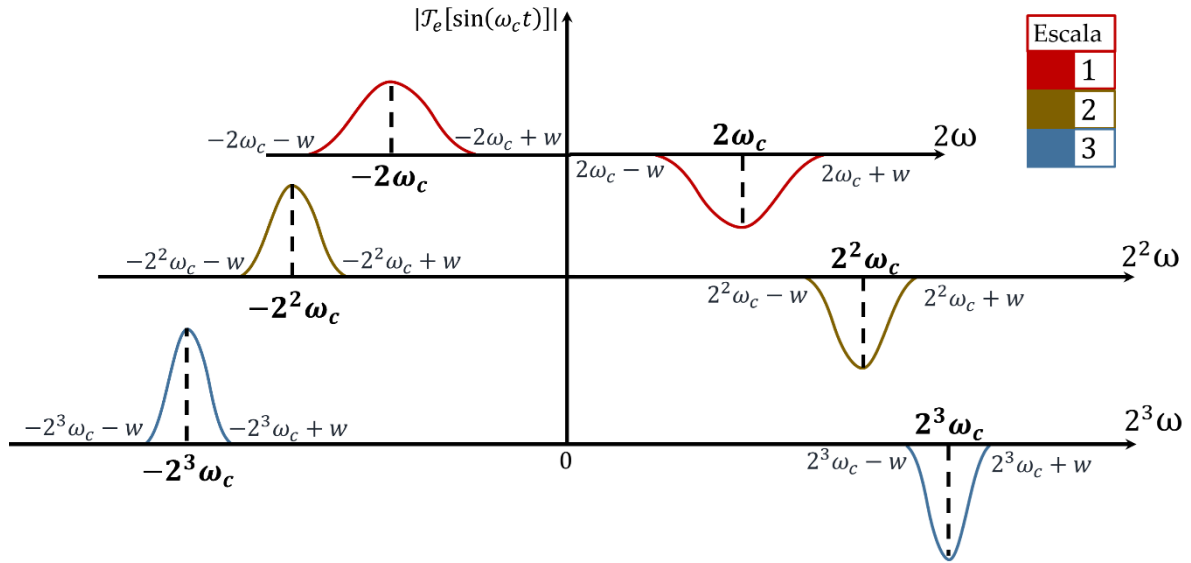


Figura 4. 39: Representación del espectro diádico de frecuencia para la función $\sin(\omega_c t)$.

- **Transformada de \mathcal{T}_e para la función coseno**

Observemos como en este ejemplo se obtiene un resultado muy similar al obtenido para la transformada de \mathcal{T}_e de la función seno.

$$\mathcal{T}_e[\cos(\omega_c t)](\mu, 2^\xi \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_c t) \beta_{\mu, \xi}(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_e[\cos(\omega_c t)](\mu, 2^\xi \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2^\xi} 2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_c t} \beta\left(\frac{t}{2^\xi} - \mu\right) e^{-i\omega t} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_c t} \beta\left(\frac{t}{2^\xi} - \mu\right) e^{-i\omega t} dt \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_e[\cos(\omega_c t)](\mu, 2^\xi \omega) &= \frac{\sqrt{2^\xi}}{2^\xi 2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_c t} \beta\left(\frac{t}{2^\xi} - \mu\right) e^{-i\omega t} dt \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_c t} \beta\left(\frac{t}{2^\xi} - \mu\right) e^{-i\omega t} dt \right]
\end{aligned}$$

Hacemos un cambio de variables $\frac{t}{2^\xi} - \mu = \tau$, obteniendo $t = 2^\xi(\tau + \mu)$ y $dt = 2^\xi d\tau$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_e[\cos(\omega_c t)](\mu, 2^\xi \omega) &= \frac{\sqrt{2^\xi}}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \beta(\tau) e^{-i(\omega - \omega_c)2^\xi(\tau + \mu)} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\tau) e^{-i(\omega + \omega_c)2^\xi(\tau + \mu)} d\tau \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_e[\cos(\omega_c t)](\mu, 2^\xi \omega) &= \sqrt{2^{\xi-2}} \left[e^{-i(\omega - \omega_c)2^\xi \mu} \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\tau) e^{-i(\omega - \omega_c)2^\xi \tau} d\tau \right. \\
&\quad \left. + e^{-i(\omega + \omega_c)2^\xi \mu} \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\tau) e^{-i(\omega + \omega_c)2^\xi \tau} d\tau \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_e[\cos(\omega_c t)](\mu, 2^\xi \omega) &= \sqrt{2^{\xi-2}} \left[e^{-i(\omega - \omega_c)2^\xi \mu} \mathcal{F}[\beta(\tau)](2^\xi[\omega - \omega_c]) \right. \\
&\quad \left. + e^{-i(\omega + \omega_c)2^\xi \mu} \mathcal{F}[\beta(\tau)](2^\xi[\omega + \omega_c]) \right]
\end{aligned}$$

La Figura 4. 40 muestra la representación del espectro diádico de frecuencia para la función coseno.

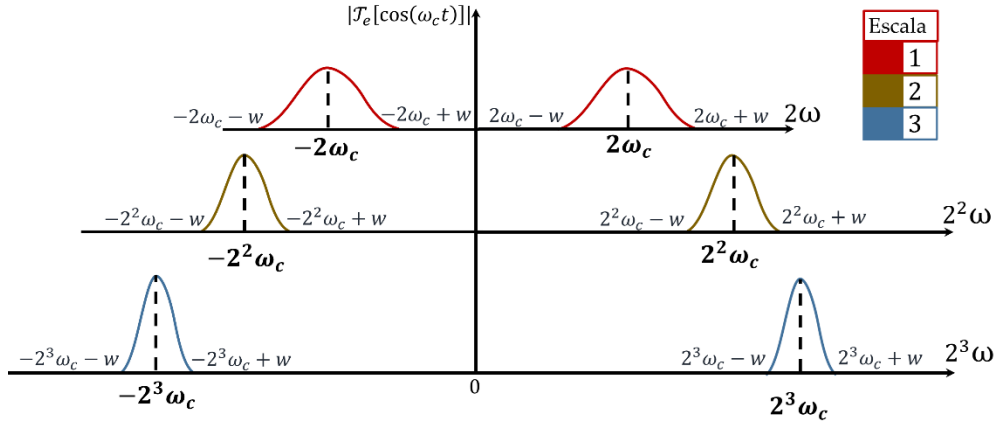


Figura 4. 40: Representación del espectro diádico de frecuencia para la función $\cos(\omega_c t)$.

4.3.3 Conclusión parcial

La subsección 4.3 mostró los principales fundamentos teóricos con el objetivo de crear un ambiente de \mathcal{T}_e .

Tener una nueva definición de la transformada de \mathcal{T}_e en dos parámetros maximiza la precisión del análisis matemático. Además, proporciona un nuevo enfoque para analizar funciones dentro de la técnica escala frecuencia.

El teorema de unicidad enfatiza la importancia significativa de dejar claro que la recuperación de una función de su espectro de frecuencia diádica sólo es posible a través de la transformada de \mathcal{T}_e . Observamos que tener un espectro multisensible (espectro de frecuencia diádico) permite aislar las componentes de frecuencia, permitiendo su identificación. Esto fortalece las aplicaciones destinadas al diagnóstico de fallas, que es crucial en campos como la ingeniería mecánica y el análisis sísmico.

La transformada de \mathcal{T}_e en $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ nos permite validar los teoremas de recuperación y todos los teoremas que se basan en el teorema de inversión de la transformada de \mathcal{T}_e . En aplicaciones donde es deseable modificar las características espectrales de funciones, es de gran importancia devolver posteriormente la función al dominio temporal o espacial.

4.4 Análisis fasorial de señales multicomponentes

4.4.1 Fasor clásico

Para validar el fasor de \mathcal{T}_e frente al fasor clásico, el autor generó una señal sintética que presenta una componente de frecuencia de 60 Hz y fase 45° ; la Figura 4. 41 muestra la señal generada.

Tras generar la señal a procesar, el autor aplicó el fasor clásico (ver la Figura 4. 42) para comparar el resultado obtenido con el fasor de \mathcal{T}_e (ver la Figura 4. 43). Obsérvese cómo, en el caso de una señal con un solo componente fasorial, ambos fasores proporcionan la misma fase. Este ejemplo básico demuestra que el fasor de \mathcal{T}_e no modifica el componente fasorial de una señal.

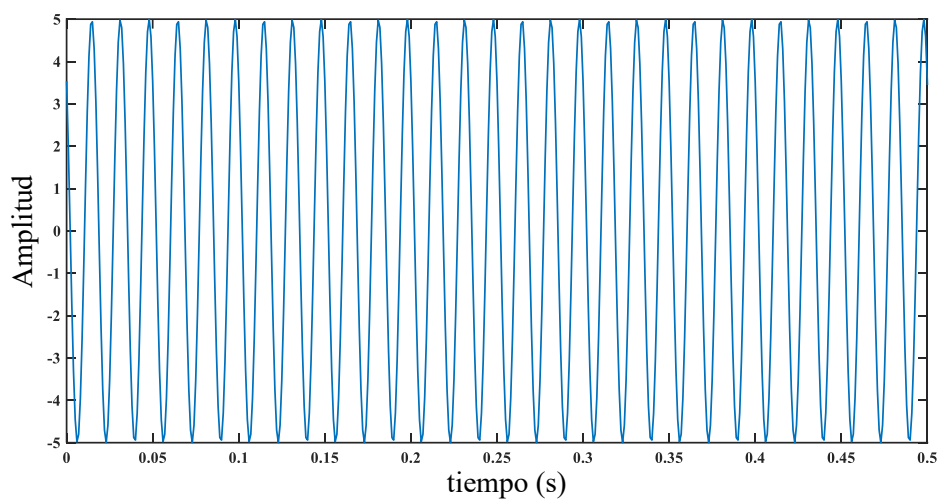


Figura 4. 41: Señal sintética monocomponente con frecuencia 60 Hz y fase 45° .

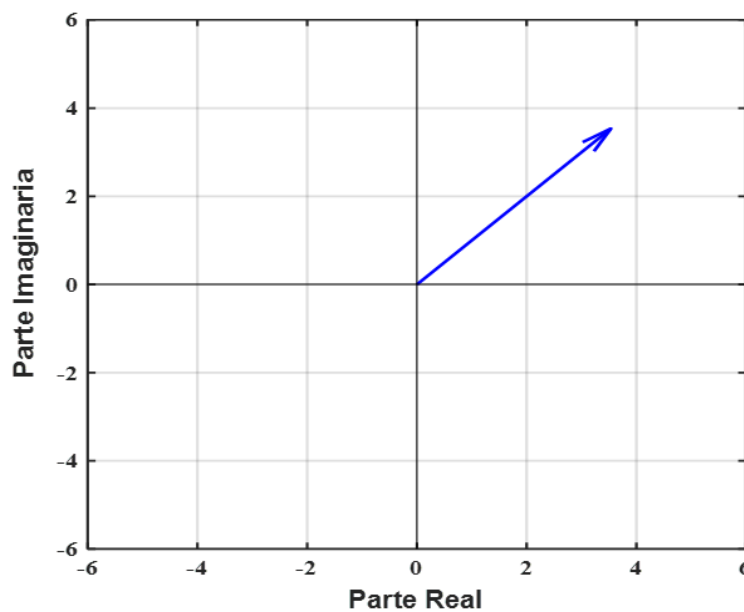


Figura 4. 42: Fasor clásico en el plano complejo (magnitud 5,00, fase 45°), utilizado como referencia para la comparación con el fasor de \mathcal{T}_e .

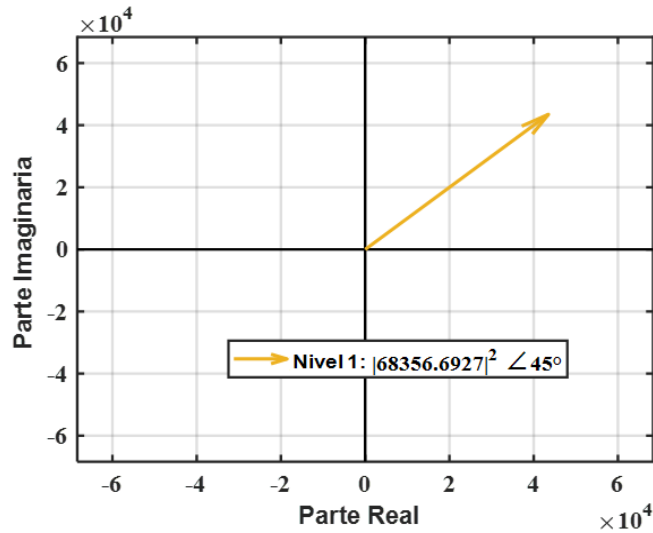


Figura 4. 43: Fasor de $\mathcal{T}e$ en el nivel 1, que codifica tanto la información de energía como la de fase de una señal multicomponente.

4.4.2 Distribución de fase

El análisis fasorial para señales multicomponentes se realiza mediante la distribución de fase. El principal inconveniente que presenta este enfoque es que para ser aplicado hay que conocer a priori cual o cuales son las componentes de frecuencia que se van a analizar. Esto significa que el análisis de la fase mediante la distribución de fase es para procesos que sean determinísticos.

La Figura 4. 44 muestra el resultado obtenido luego de calcular la distribución de fase para la señal multicomponente. Es importante resaltar que las componentes de fase corresponden a 45° , 90° y 180° .

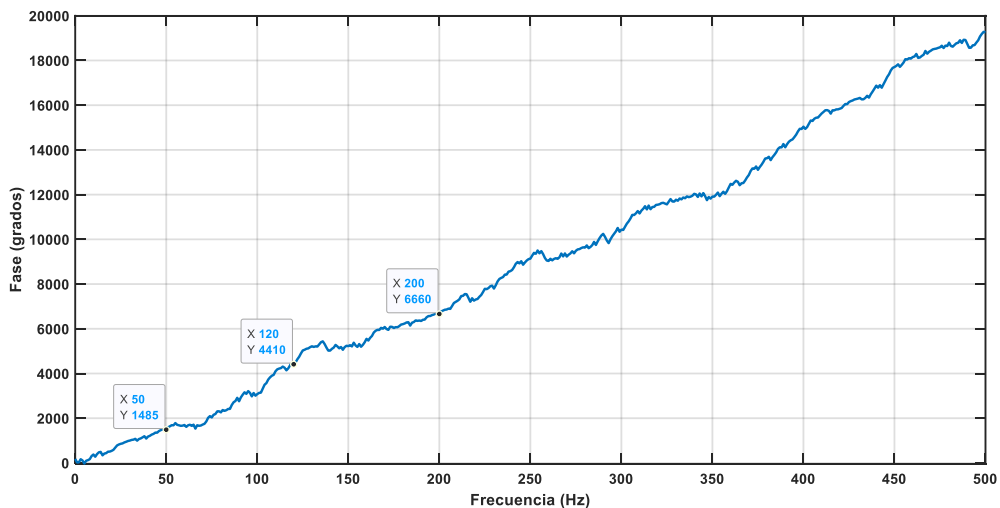


Figura 4. 44: Distribución de fase de una señal multicomponente.

A pesar del resultado obtenido es muy difícil aplicar este método en un sistema donde no se tiene conocimiento de las componentes de frecuencia. Por tal motivo es conveniente utilizar el Fasor de \mathcal{T}_e , permitiendo hacer un análisis de la fase sin tener conocimiento a priori de las componentes de frecuencia de la señal.

4.4.3 Fasor de \mathcal{T}_e

En el primer escenario de validación el autor utilizó una señal sintética con fases predeterminadas y mediante Matlab se introdujo un corrimiento de fase 90° . La Figura 4. 45 muestra el diagrama de la aplicación principal donde se utiliza el fasor de \mathcal{T}_e .



Figura 4. 45: Diagrama del sistemas para emplear el fasor de \mathcal{T}_e .

La Figura 4. 46 muestra el resultado obtenido luego de aplicar el fasor de \mathcal{T}_e a la señal sintética antes de provocarle un corrimiento a la fase. Por otro lado, la Figura 4. 47 muestra el resultado obtenido luego de aplicar un corrimiento de 90° a la señal generada sintéticamente.

Note en dicha figura como este nuevo enfoque de análisis fasorial, permite conocer las componentes fasoriales de una señal que presente distintas características fasoriales. Para este caso podemos observar que tanto las componentes de frecuencia como las componentes fasoriales son 3; las cuales se encuentran en el Nivel 1: 90° , Nivel 2: 45° y Nivel 3: -180° . Observe que en el Nivel 4: existe una componente de frecuencia pero el vector resultante presenta una magnitud muy atenuada indicando la presencia de ruido.

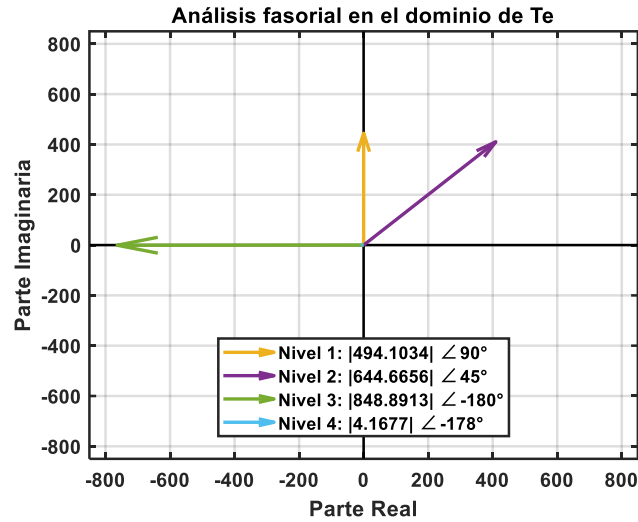


Figura 4. 46: Fase en el dominio de \mathcal{T}_e en la entrada del sistema.

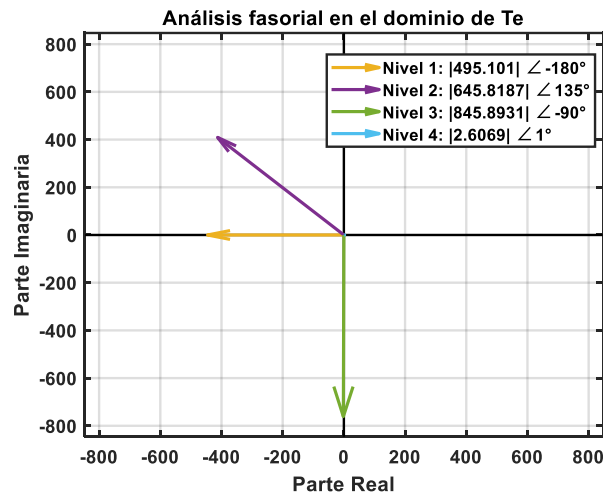


Figura 4. 47: Fase en el dominio de \mathcal{T}_e a la salida del sistema.

4.4.4 Fasor de \mathcal{T}_e cruzado

El principal objetivo del fasor de \mathcal{T}_e cruzado es poder analizar señales con una característica relacionada, permitiendo atenuar señales que sean no-relacionadas. Para validar dicha herramienta se utilizaron dos escenarios con un enfoque sintético.

En el primer escenario se emplearon dos señales multicomponentes pero con frecuencias diferentes. Mientras que en el segundo escenario se utilizaron dos señales multicomponente pero con la misma componente de frecuencia. La Figura 4. 48, Figura 4. 49 y Figura 4. 50 muestran los resultados obtenidos para el segundo escenario. Por otro lado, la Figura 4. 51, la Figura 4. 52 y la Figura 4. 53 muestran los resultados obtenidos para el segundo escenario.

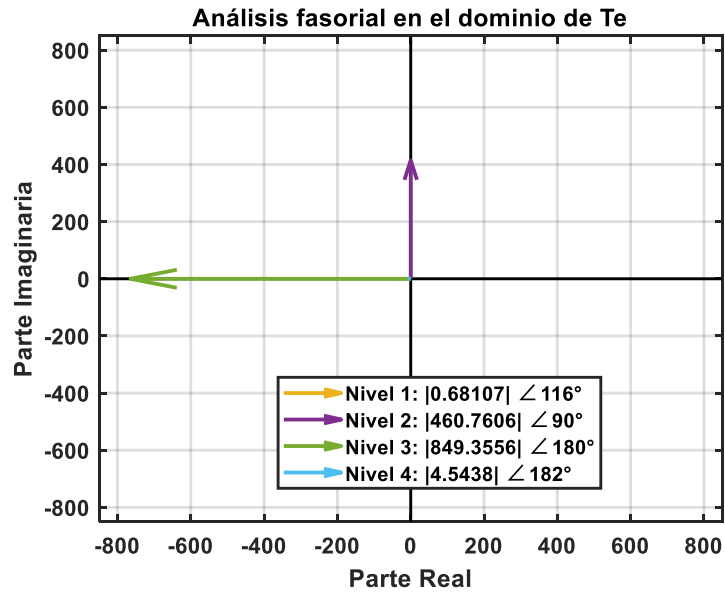


Figura 4. 48: Señal multicomponente 1 presenta componentes de frecuencia $f_1 = 100$ Hz y $f_2 = 200$ Hz.

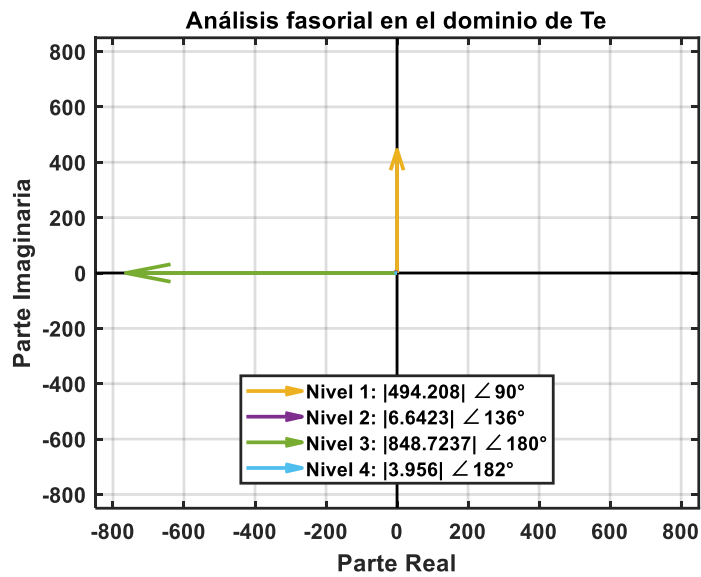


Figura 4. 49: Señal multicomponente 2 presenta componentes de frecuencia $f_1 = 100$ Hz y $f_2 = 400$ Hz.

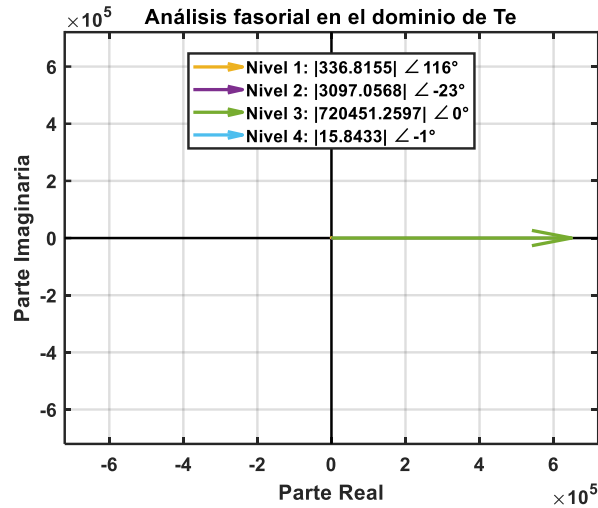


Figura 4. 50: Resultado del análisis fasorial cruzado en dominio de \mathcal{T}_e .

Note en el resultado obtenido en la Figura 4. 50 como se muestra que los fasores que no presentan una característica relacionada se atenúan, quedando solamente el fasor relacionado.

En el segundo escenario podemos observar como el análisis fasorial cruzado mantiene la relación entre los fasores permitiendo analizar una señal multicomponente.

Para el resultado obtenido en el segundo escenario sintético podemos observar en la Figura 4. 51 y la Figura 4. 52 las componentes de fase para las señales utilizadas. Note en la Figura 4. 53 el resultado obtenido donde se observa que debido a la presencia de relación entre las señales de análisis el resultado muestra que no se eliminan las componentes de frecuencia obteniéndose el resultado de corrimiento de frecuencia.

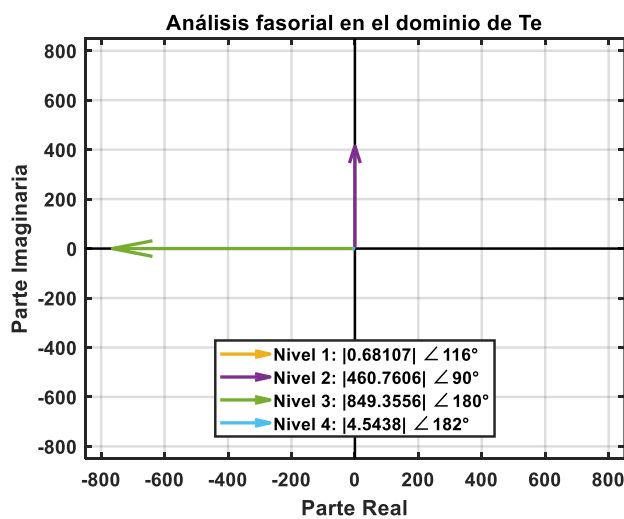


Figura 4. 51: Señal multicomponente 1 presenta componentes de frecuencia $f_1 = 100$ Hz y $f_2 = 200$ Hz.

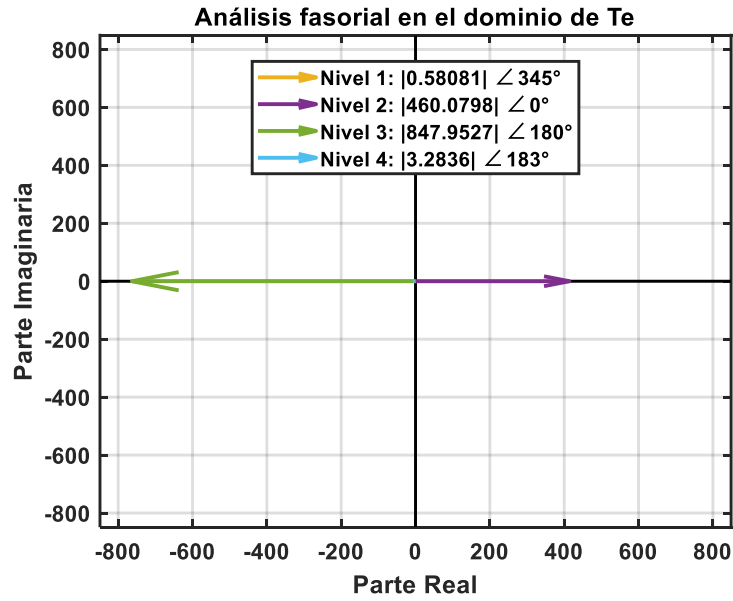


Figura 4. 52: Señal multicomponente 2 presenta componentes de frecuencia $f_1 = 100$ Hz y $f_2 = 200$ Hz.

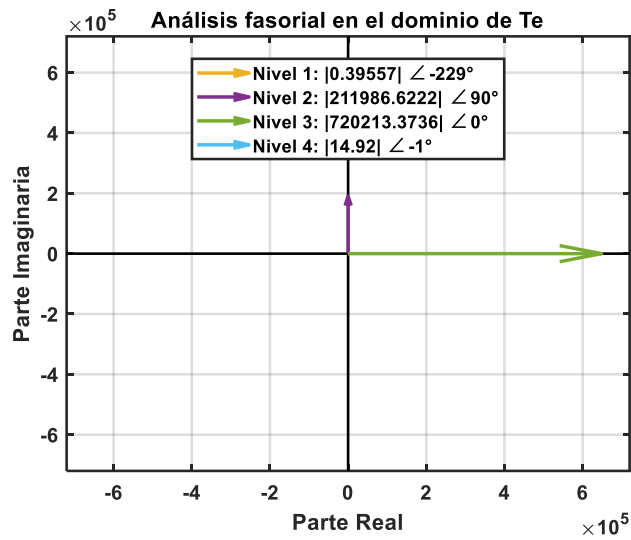


Figura 4. 53: Resultado del análisis fasorial cruzado en dominio de \mathcal{T}_e

4.4.5 Fasor de \mathcal{T}_e cruzado para la fuga de agua de 4.0 mm de diámetro

Para validar, con señales reales, el análisis fasorial en el dominio de \mathcal{T}_e se utilizaron señales adquiridas desde el esquema mostrado en la Figura 3. 1. Dichas señales se muestran en la Figura 4. 1 y la Figura 4. 2 correspondientes a la fuga de 4.0 mm de diámetro. La Figura 4. 54, la Figura 4. 55 y la Figura 4. 56 muestran los resultados obtenidos.

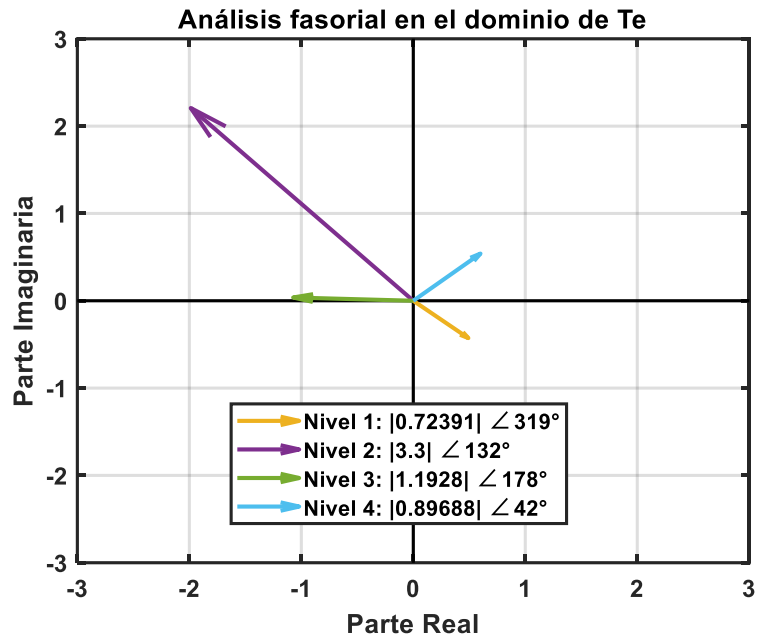


Figura 4. 54: Resultado obtenido para la señal adquirida en el sensor 1.

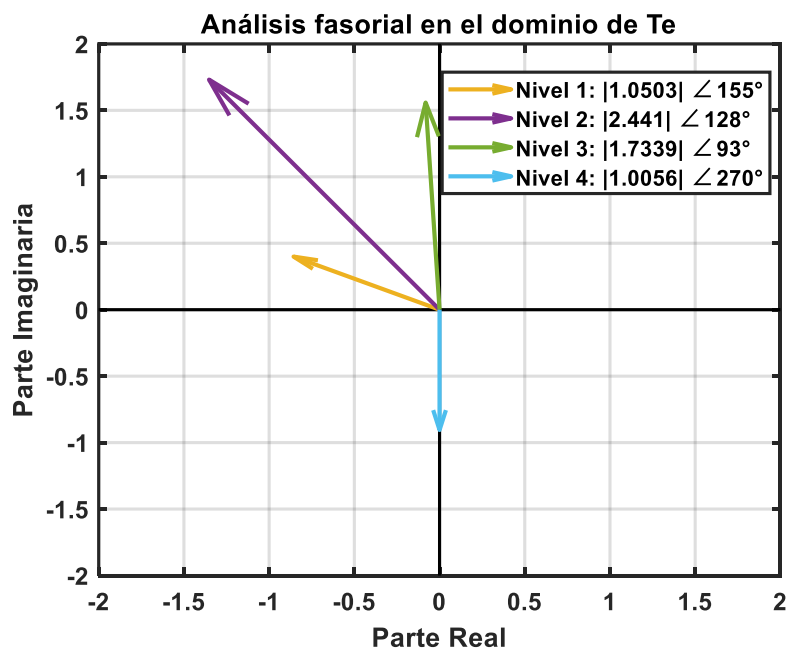


Figura 4. 55: Resultado obtenido para la señal adquirida en el sensor 2.

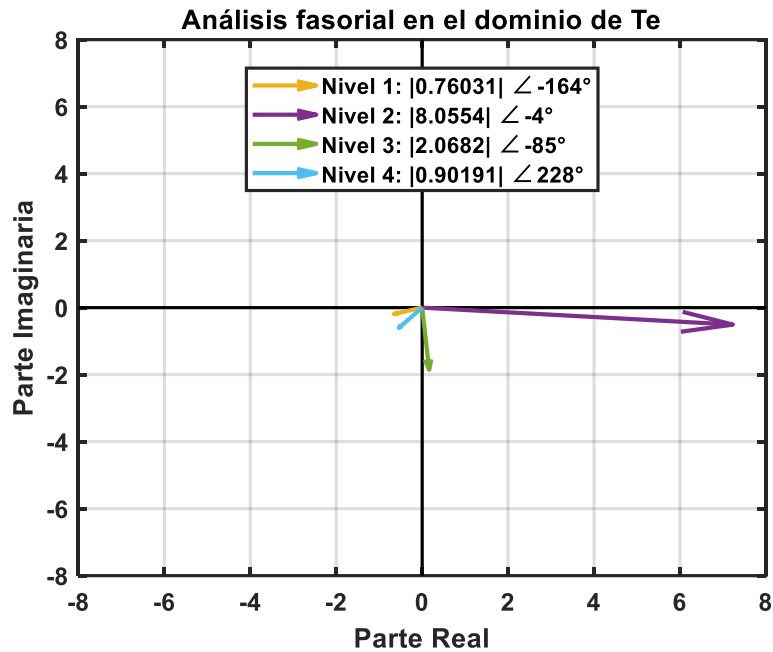


Figura 4. 56: Resultado obtenido para el análisis fasorial cruzado en el dominio de \mathcal{T}_e .

Los resultados obtenidos muestran que es detectable la presencia de fuga mediante el fasor de \mathcal{T}_e ; esto se valida mediante la comparación con los resultados mostrados en la Figura 4. 9 y la Figura 4. 10. Note que el vector que mayor magnitud presenta se localiza en el nivel 2 de descomposición, tanto para los resultados mostrados en la Figura 4. 9 y la Figura 4. 10 como para los resultados mostrados en las figuras de esta subsección. Por otro lado, en la Figura 3. 1 se muestra que los sensores están x-distantes de la fuga generada. Nótese en la Figura 4. 54 y la Figura 4. 55 como la señal llega al Sensor 1 y al Sensor 2 con una fase de 132° y 128°, respectivamente. Esto muestra la relevancia del análisis fasorial en el dominio \mathcal{T}_e debido a que la diferencia de fase es de 4°, como se muestra en la Figura 4. 56. Otra importancia que se muestra en la Figura 4. 56 es que se mantiene la principal ventaja que es atenuar componentes de la señal que no presente coherencia.

4.4.6 Conclusión parcial

El fasor de \mathcal{T}_e permiten analizar señales multicomponentes, brindando características al procesamiento de señales como: analizar fasorialmente señales multicomponentes y detectar la presencia de una señal sin necesidad de estudiar el espectro de frecuencia de dicha señal. Por otro lado, el fasor de \mathcal{T}_e permite estudiar señales que presenten una composición multicomponente.

Estos nuevos enfoques aportan al estado del arte nuevas herramientas matemáticas que aumentan la robustez en diversas áreas de la ingeniería como el campo de la ingeniería hidráulica o en campos donde la presencia de señales no coherentes sea un problema.

5 Resumen, Conclusiones y Recomendaciones

En esta tesis de doctorado se estudiaron los métodos desarrollados por la comunidad científica frente a la detección de fugas de agua. Esto permitió el desarrollo de los espectros cruzados de \mathcal{T}_e para extraer características de frecuencias y fase correspondientes a fugas de agua. Debido al avance alcanzado en la presente tesis se desarrollaron las bases teóricas correspondientes a la transformada de \mathcal{T}_e .

Para realizar la validación de los espectros cruzados de \mathcal{T}_e se diseñó una configuración experimental; generando dos escenarios principales. El primer escenario presentó una fuga de agua con diámetro de 1.0 mm. Mientras que el segundo escenario presentó una fuga de agua con un diámetro de 4.0 mm. Detectar fugas de agua que presenten un diámetro pequeño brinda gran fortaleza en los sistemas de distribución de agua. Esto se debe a que este tipo de fugas de agua son precursoras de fugas de agua catastróficas. Contar con herramientas que le permita al acueducto poder implementar un plan de acción preventivo ante una catástrofe permite que se eviten problemas como: la proliferación de enfermedades infecciosas, la destrucción de estructuras civiles, etc. Mediante esta configuración experimental se logró validar los espectros cruzados de \mathcal{T}_e fuera de línea, mostrando resultados superiores a los reportados en la comunidad científica.

La función wavelet utilizada para la validación fue la wavelet Daubechies debido a que brinda una atenuación de las bandas laterales de -160 dB. Con respecto al cálculo de las componentes de frecuencia la transformada de \mathcal{T}_e arrojó un corrimiento en frecuencia de 0.25 Hz; el cual corresponde a un error porcentual de 1.45 % en el cálculo de las componentes de frecuencia.

El desarrollo de este nuevo enfoque matemático “dominio de \mathcal{T}_e ”, cubrió un vacío en el análisis de señales estocásticas. Las principales ventajas presentes en las herramientas matemáticas desarrolladas son: la atenuación de los términos cruzados, la multi-sensibilidad espectral y el aislamiento de componentes de frecuencias; dando paso a que se puedan obtener soluciones versátiles para diferentes escenarios con condiciones no controladas. Por otro lado, este nuevo enfoque al análisis de señales permite atenuar los efectos de ruido estacionario y no estacionario.

En función al segundo objetivo específico (Crear las bases teóricas correspondientes a la transformada de \mathcal{T}_e): Se obtuvieron seis definiciones y cinco teoremas sobre la

transformada de \mathcal{T}_e . La primera definición se dirige hacia la densidad espectral cruzada de \mathcal{T}_e . La segunda definición se dirige hacia la coherencia de \mathcal{T}_e , siendo esta un caso particular de la primera definición. La tercera definición está enfocada al espectrograma de \mathcal{T}_e . La cuarta definición se dirige hacia la ventana de \mathcal{T}_e la cual se conforma de una función wavelet y una función ventana convencional. La quinta definición se dirige hacia el fasor de \mathcal{T}_e . Mientras que la sexta definición está dirigida hacia la expresión analítica de la transformada de \mathcal{T}_e en dos parámetros. Por otro lado, el primer teorema demuestra la existencia de la transformada de \mathcal{T}_e . Este teorema es fundamental en el campo del análisis de señales y la teoría de sistemas. Debido a que este plantea que una función que sea de módulo integrable su espectro de frecuencia se puede descomponer diádicamente, permitiendo aislar las diferentes combinaciones de frecuencias sinusoidales. El segundo teorema, se dirige a que la transformada de \mathcal{T}_e existe en $L^1(\mathbb{R})$. La principal importancia de este teorema es que permite estudiar el contenido espectral de señales revelando cómo es la composición de la función en el dominio diádico de frecuencia para luego poder recuperar dicha función. El tercer teorema muestra la existencia de la transformada de \mathcal{T}_e inversa. Tener una herramienta que nos permita recuperar una función del dominio de frecuencia diádica es muy valioso en el análisis de sistemas. Esto se debe a que simplifica el análisis de funciones mediante la representación de frecuencias diádicas, particularmente cuando se trata de funciones en presencia de ruido. Además, permite la atenuación de ruido aislando y eliminando componentes de frecuencia no deseados o espurios. El cuarto teorema es sobre unicidad. El teorema de unicidad en la transformada de \mathcal{T}_e es una propiedad fundamental que establece que una función en el dominio del tiempo tiene una correspondencia biunívoca con su transformada. Desde el punto de vista de las matemáticas aplicadas, tal teorema garantiza que, dado el espectro diádico de frecuencia para una función, es posible recuperar la función original en el dominio del tiempo de una manera única. Esto es crucial en aplicaciones donde es necesario reconstruir funciones a partir de su espectro, como en comunicación, procesamiento de señales y recuperación de datos. Finalmente, el quinto teorema se dirige hacia la conservación de energía de una señal al transformar esta al dominio de \mathcal{T}_e . Este teorema es de gran importancia en aplicaciones donde se necesite conocer el comportamiento energético de una señal sin distorsionar su energía temporal.

En función al tercer objetivo específico (Analizar los términos cruzados en el espectro diádico de frecuencia): Se obtuvieron tres nuevas herramientas matemáticas (densidad

espectral cruzada de \mathcal{T}_e , la coherencia de \mathcal{T}_e y el espectrograma de \mathcal{T}_e) para realizar la extracción de características y representar en el espectro diádico de frecuencia las componentes espectrales de señales provenientes de dos puntos de adquisición. La densidad espectral cruzada de \mathcal{T}_e y la coherencia de \mathcal{T}_e se basan en el vínculo de la correlación cruzada entre las señales a analizar y el cálculo de la transformada de \mathcal{T}_e , mientras que el espectrograma de \mathcal{T}_e se basa en la función de autocorrelación y su vínculo con la transformada de \mathcal{T}_e . Dichos resultados permiten fortalecer el desempeño de la extracción de características en el estudio de sistemas que se encuentren bajo un ambiente no controlado, para señales corruptas por ruido estacionario y no estacionario.

Además, se desarrollaron tres algoritmos para realizar el computo de la densidad espectral cruzada de \mathcal{T}_e , la coherencia de \mathcal{T}_e , el espectrograma de \mathcal{T}_e y el fásor de \mathcal{T}_e . Los resultados mostraron robustez dejando evidencia clara de su superioridad frente a los métodos reportados en la literatura.

Debido a que este es un trabajo preliminar, presenta como principal limitación el número de aplicaciones donde se ha utilizado en dominio de \mathcal{T}_e . Finalmente, para estudios futuros se propone considerar la implementación de versiones computacionales más eficientes de las herramientas matemáticas propuestas, en función de la integración con aplicaciones prácticas.

- Se recomienda que se continúe con el estudio de funciones ventanas de \mathcal{T}_e .
- Que se extienda el estudio de las herramientas matemáticas hacia la implementación en sistemas embebidos para incrementar la autonomía en la detección de eventos.
- Estudiar desde un enfoque de instrumentación electrónico que estrategia a seguir para hacer máxima la eficiencia de la adquisición de señales.
- Enfocar el estudio hacia la clasificación para obtener una relación entre la energía y el tamaño de la fuga.

6 Referencias

- Agua, C. C. del. (2021). *Viejas tuberías hacen de México uno de los países con mayor desperdicio de agua: OCDE*. <https://www.aguas.org.mx/sitio/blog/noticias/item/1683-viejas-tuberias-hacen-de-mexico-uno-de-los-paises-con-mayor-desperdicio-de-agua-ocde.html>
- Altes, R. A. (1984). Spectrograms and Generalized Spectrograms for Classification of Random Processes. *ICASSP, IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing - Proceedings*, 3, 282–285. <https://doi.org/10.1109/icassp.1984.1172744>
- Ayala, P., Brennan, M., Almeida, F., Kroll, F., Obata, D., & Tabone, A. (2017). Vibroacoustic characteristics of leak noise in buried water pipes in Brazil. *I Jornada Peruana Internacional de Investigacion En Ingenieria*.
- Brigham, E. O., & Morrow, R. E. (1967). The fast Fourier transform. In *IEEE Spectrum* (Vol. 4, Issue 12). Springer. <https://doi.org/10.1109/MSPEC.1967.5217220>
- Butterfield, J. D., Krynkin, A., Collins, R. P., & Beck, S. B. M. (2017). Experimental investigation into vibro-acoustic emission signal processing techniques to quantify leak flow rate in plastic water distribution pipes. *Applied Acoustics*, 119, 146–155. <https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2017.01.002>
- Butterfield, Joseph D., Collins, R. P., & Beck, S. B. M. (2018). Influence of Pipe Material on the Transmission of Vibroacoustic Leak Signals in Real Complex Water Distribution Systems: Case Study. *Journal of Pipeline Systems Engineering and Practice*, 9(3), 05018003. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)ps.1949-1204.0000321](https://doi.org/10.1061/(asce)ps.1949-1204.0000321)
- Bykerk, L., & Valls Miro, J. (2022a). Detection of Water Leaks in Suburban Distribution Mains with Lift and Shift Vibro-Acoustic Sensors. *Vibration*, 5(2), 370–382. <https://doi.org/10.3390/vibration5020021>
- Bykerk, L., & Valls Miro, J. (2022b). Vibro-Acoustic Distributed Sensing for Large-Scale Data-Driven Leak Detection on Urban Distribution Mains. *Sensors*, 22(18), 6897. <https://doi.org/10.3390/s22186897>
- Chen, L., Wang, T. C. L., Ricca, T. L., & Marshall, A. G. (1987). Phase-Modulated Stored Waveform Inverse Fourier Transform Excitation for Trapped Ion Mass Spectrometry. *Analytical Chemistry*, 59(3), 449–454. <https://doi.org/10.1021/ac00130a016>
- Chen, Z., Mauricio, A., Li, W., & Gryllias, K. (2020). A deep learning method for bearing fault diagnosis based on Cyclic Spectral Coherence and Convolutional Neural Networks. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 140, 106683. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2020.106683>
- Cheng, C., & Parhi, K. K. (2004). Hardware efficient fast parallel FIR filter structures based on iterated short convolution. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 51(8), 1492–1500. <https://doi.org/10.1109/TCSI.2004.832784>
- Cheng, W., & Shen, Y. (2022). Frequency Characteristic Analysis of Acoustic Emission Signals of Pipeline Leakage. *Water (Switzerland)*, 14(24), 3992. <https://doi.org/10.3390/w14243992>

- Cody, R. A., Dey, P., & Narasimhan, S. (2020). Linear Prediction for Leak Detection in Water Distribution Networks. *Journal of Pipeline Systems Engineering and Practice*, 11(1), 04019043. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)ps.1949-1204.0000415](https://doi.org/10.1061/(asce)ps.1949-1204.0000415)
- Constantin, A. (2016). Fourier transforms. In *Fourier Analysis*. Courier Corporation. <https://doi.org/10.1017/cbo9781107358508.006>
- Contreras-Reyes, J. E., & Idrovo-Aguirre, B. J. (2020). Backcasting and forecasting time series using detrended cross-correlation analysis. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 560, 125109. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2020.125109>
- Cooley, J. W., Lewis, P. A. W., & Welch, P. D. (1969). The Fast Fourier Transform and its Applications. In *IEEE Transactions on Education* (Vol. 12, Issue 1). Prentice-Hall, Inc. <https://doi.org/10.1109/TE.1969.4320436>
- Dalai, S., Dey, D., Chatterjee, B., Chakravorti, S., & Bhattacharya, K. (2015). Cross-spectrum analysis-based scheme for multiple power quality disturbance sensing device. *IEEE Sensors Journal*, 15(7), 3989–3997. <https://doi.org/10.1109/JSEN.2014.2377775>
- Dean, R. T., & Dunsmuir, W. T. M. (2016). Dangers and uses of cross-correlation in analyzing time series in perception, performance, movement, and neuroscience: The importance of constructing transfer function autoregressive models. *Behavior Research Methods*, 48(2), 783–802. <https://doi.org/10.3758/s13428-015-0611-2>
- Derrick, T., & Thomas, J. (2004). *Time series analysis: the cross-correlation function*.
- Dhaouadi, L., Sahbani, J., & Fitouhi, A. (2021). Harmonic analysis associated to the canonical Fourier Bessel transform. *Integral Transforms and Special Functions*, 32(4), 290–315. <https://doi.org/10.1080/10652469.2020.1823977>
- Ebacher, G., Besner, M. C., Prévost, M., & Allard, D. (2012). Negative pressure events in water distribution systems: Public health risk assessment based on transient analysis outputs. In *Water Distribution Systems Analysis 2010 - Proceedings of the 12th International Conference, WDSA 2010* (pp. 471–483). [https://doi.org/10.1061/41203\(425\)45](https://doi.org/10.1061/41203(425)45)
- EPA. (2002). *National Service Center for Environmental (NSCEP)*. Publications User's Guide to MOBILE6.1 and MOBILE6.2: Mobile Source Emission Factor Model. <https://nepis.epa.gov/Exe/ZyNET.exe/P1001DSD.txt?ZyActionD=ZyDocument&Client=EPA&Index=2000 Thru 2005&Docs=&Query=&Time=&EndTime=&SearchMethod=1&TocRestrict=n&Toc=&TocEntry=&QField=&QFieldYear=&QFieldMonth=&QFieldDay=&UseQField=&IntQFieldOp=0&ExtQFieldOp=>
- Fox, S., Shepherd, W., Collins, R., & Boxall, J. (2014). Experimental proof of contaminant ingress into a leaking pipe during a transient event. *Procedia Engineering*, 70(1), 668–677. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2014.02.073>
- Friedman, H. (1980). A consistent Fubini-Tonelli theorem for nonmeasurable functions. *Illinois Journal of Mathematics*, 24(3), 390–395. <https://doi.org/10.1215/ijm/1256047607>
- Gao, R. X., & Yan, R. (2011). Wavelets: Theory and applications for manufacturing. In *Wavelets: Theory and Applications for Manufacturing*. Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1545-0>

- Gao, Y., Liu, Y., Ma, Y., Cheng, X., & Yang, J. (2018). Application of the differentiation process into the correlation-based leak detection in urban pipeline networks. *Mechanical Systems and Signal Processing*, *112*, 251–264. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2018.04.036>
- Gaskill, J. D. (1978). *Linear systems, Fourier transforms, and optics* (Vol. 56). John Wiley & Sons.
- Ghosh, C., Verma, A., & Verma, P. (2022). Real time fault detection in railway tracks using Fast Fourier Transformation and Discrete Wavelet Transformation. *International Journal of Information Technology (Singapore)*, *14*(1), 31–40. <https://doi.org/10.1007/s41870-021-00784-x>
- Griffel, D. H., & Daubechies, I. (1995). Ten Lectures on Wavelets. In *The Mathematical Gazette* (Vol. 79, Issue 484). Siam. <https://doi.org/10.2307/3620105>
- Haugh, L. D. (1976). Checking the independence of two covariance-stationary time series: A univariate residual cross-correlation approach. *Journal of the American Statistical Association*, *71*(354), 378–385. <https://doi.org/10.1080/01621459.1976.10480353>
- Jalayer, M., Orsenigo, C., & Vercellis, C. (2021). Fault detection and diagnosis for rotating machinery: A model based on convolutional LSTM, Fast Fourier and continuous wavelet transforms. *Computers in Industry*, *125*, 103378. <https://doi.org/10.1016/j.compind.2020.103378>
- Jena, K. K., Bhoi, S. K., Mohapatra, S., & Bakshi, S. (2023). A hybrid deep learning approach for classification of music genres using wavelet and spectrogram analysis. *Neural Computing and Applications*, *35*(15), 11223–11248. <https://doi.org/10.1007/s00521-023-08294-6>
- Junsheng, C., Dejie, Y., & Yu, Y. (2005). Time-energy density analysis based on wavelet transform. *NDT and E International*, *38*(7), 569–572. <https://doi.org/10.1016/j.ndteint.2005.02.002>
- Kassab, S., Michel, F., & Maxit, L. (2019). Water experiment for assessing vibroacoustic beamforming gain for acoustic leak detection in a sodium-heated steam generator. *Mechanical Systems and Signal Processing*, *134*, 106332. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2019.106332>
- Kelkar, S. S., Grigsby, L. L., & Langsner, J. (1983). An Extension of Parseval's Theorem and Its Use in Calculating Transient Energy in the Frequency Domain. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, *IE-30*(1), 42–45. <https://doi.org/10.1109/TIE.1983.356702>
- Khan, M. S., Salsabil, N., Alam, M. G. R., Dewan, M. A. A., & Uddin, M. Z. (2022). CNN-XGBoost fusion-based affective state recognition using EEG spectrogram image analysis. *Scientific Reports*, *12*(1), 14122. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-18257-x>
- Lauruschkus, F., & Rehberg, J. (2015). Comparison of European water and wastewater prices, Part 1: Drinking water . In *GWF, Wasser - Abwasser* (Vol. 156, Issue 9). <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-84953236021&partnerID=40&md5=70ae3f51bcd58bacc78d9cd416fe4228>
- Liang, N., Zhou, J., & Yang, Y. (2022). Revising the application of cross-spectrum processing in motion parameter estimation for harmonic sources. *Frontiers in Physics*,

- 10, 1170. <https://doi.org/10.3389/fphy.2022.1070920>
- Loutridis, S. J. (2006). Instantaneous energy density as a feature for gear fault detection. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(5), 1239–1253. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2004.12.001>
- Love, L. A., & Kruger, R. A. (1987). Scatter estimation for a digital radiographic system using convolution filtering. *Medical Physics*, 14(2), 178–185. <https://doi.org/10.1118/1.596126>
- Macwhinney, B. (2008). Functional Analysis. In *A Companion to Cognitive Science* (Vol. 52). Springer. <https://doi.org/10.1002/9781405164535.ch31>
- Majali, A., Mulay, A., Iyengar, V., Nayak, A., & Singru, P. (2022). Fault identification and remaining useful life prediction of bearings using Poincare maps, fast Fourier transform and convolutional neural networks. *Mathematical Models in Engineering*, 8(1), 1–14. <https://doi.org/10.21595/mme.2022.22364>
- Mallat, S. (2009). A Wavelet Tour of Signal Processing. In *A Wavelet Tour of Signal Processing* (Third). Elsevier. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-374370-1.X0001-8>
- Martini, A., Rivola, A., & Troncossi, M. (2018). Autocorrelation analysis of vibro-acoustic signals measured in a test field for water leak detection. *Applied Sciences (Switzerland)*, 8(12), 2450. <https://doi.org/10.3390/app8122450>
- Martini, A., Troncossi, M., & Rivola, A. (2014). Vibration Monitoring as a Tool for Leak Detection in Water Distribution Networks. *Ciri & Din*, 7, 1–9. <http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-84937219271&partnerID=tZOtx3y1>
- Mooers, C. N. K. (1973). A technique for the cross spectrum analysis of pairs of complex-valued time series, with emphasis on properties of polarized components and rotational invariants. *Deep-Sea Research and Oceanographic Abstracts*, 20(12), 1129–1141. [https://doi.org/10.1016/0011-7471\(73\)90027-2](https://doi.org/10.1016/0011-7471(73)90027-2)
- Mounce, S. R., Mounce, R. B., & Boxall, J. B. (2012). Identifying Sampling Interval for Event Detection in Water Distribution Networks. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 138(2), 187–191. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)wr.1943-5452.0000170](https://doi.org/10.1061/(asce)wr.1943-5452.0000170)
- Opoku, K., & Dimitrovski, A. (2025). A Dynamic Phasor-Based Approach to Fault Detection in Power Systems with Inverter-Based Resources. *2025 IEEE Texas Power and Energy Conference (TPEC)*, 1–6.
- Paruthiyil, S. K., Montoya, R., Bidram, A., & Reno, M. J. (2021). A Numerical Method for Fault Location in DC Systems Using Traveling Waves. *2021 North American Power Symposium, NAPS 2021*, 1–6. <https://doi.org/10.1109/NAPS52732.2021.9654771>
- Perez-Sanjines, F., Peeters, C., Verstraeten, T., Antoni, J., Nowé, A., & Helsen, J. (2023). Fleet-based early fault detection of wind turbine gearboxes using physics-informed deep learning based on cyclic spectral coherence. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 185, 109760. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2022.109760>
- Plerou, V., Gopikrishnan, P., Rosenow, B., Amaral, L. A. N., & Stanley, H. E. (1999). Universal and nonuniversal properties of cross correlations in financial time series. *Physical Review Letters*, 83(7), 1471–1474.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.1471>

- Proix, T., Delgado Saa, J., Christen, A., Martin, S., Pasley, B. N., Knight, R. T., Tian, X., Poeppel, D., Doyle, W. K., Devinsky, O., Arnal, L. H., Mégevand, P., & Giraud, A. L. (2022). Imagined speech can be decoded from low- and cross-frequency intracranial EEG features. *Nature Communications*, *13*(1), 48. <https://doi.org/10.1038/s41467-021-27725-3>
- Rathnayaka, S., Shannon, B., Rajeev, P., & Kodikara, J. (2015). Monitoring of pressure transients in water supply networks. *Water Resources Management*, *30*(2), 471–485. <https://doi.org/10.1007/s11269-015-1172-y>
- Ravisangar, V., & Charles, T. J. (2011). Special considerations for protecting very long transmission mains from hydraulic transients. In *Pipelines 2011: A Sound Conduit for Sharing Solutions - Proceedings of the Pipelines 2011 Conference* (pp. 1215–1224). [https://doi.org/10.1061/41187\(420\)111](https://doi.org/10.1061/41187(420)111)
- Rudin, W. (1959). Some Theorems on Fourier Coefficients. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *10*(6), 855. <https://doi.org/10.2307/2033608>
- Schmidt, S., Heyns, P. S., & Gryllias, K. C. (2020). A methodology using the spectral coherence and healthy historical data to perform gearbox fault diagnosis under varying operating conditions. *Applied Acoustics*, *158*, 107038. <https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2019.107038>
- Seuret-Jiménez, D., Trutié-Carrero, E., Nieto-Jalil, J. M., García-Aquino, E. D., Díaz-González, L., Carballo-Sigler, L., Quintana-Fuentes, D., & Gaggero-Sager, L. M. (2023). Feature Extraction of a Non-Stationary Seismic–Acoustic Signal Using a High-Resolution Dyadic Spectrogram. *Sensors*, *23*(13), 6051. <https://doi.org/10.3390/s23136051>
- Sinha, J. K. (2008). Bi-spectrum of a composite coherent cross-spectrum for faults detection in rotating machines. *Institution of Mechanical Engineers - 9th International Conference on Vibrations in Rotating Machinery*, *2*, 565–572.
- Tanha, M. H., Gandomkar, M., Nikoukar, J., & Aranizadeh, A. (2025). Intelligent-single-phase auto-reclosing scheme using line-voltage-phasor-side analysis. *Results in Engineering*, *25*, 103771.
- Tonelli, L. (1909). Sull'integrazione per parti. *Atti Della Accademia Nazionale Dei Lincei*, *18*(2), 246–253.
- Trutié-Carrero, E., Delgado-Hernández, L. A., González-Zamora, C., & Ramírez-Beltrán, J. (2019). Detección y localización de fuga de fondo en tuberías plásticas de agua bajo un ambiente ruidoso. *Detección y Localización de Fuga de Fondo En Tuberías Plásticas de Agua Bajo Un Ambiente Ruidoso*, *40*(3), 1–15.
- Trutié-Carrero, E., Seuret-Jimenez, D., & Nieto-Jalil, J. M. (2021). A high-resolution dyadic transform for non-stationary signal analysis. *Mathematics*, *9*(23), 3041. <https://doi.org/10.3390/math9233041>
- Trutié-Carrero, E., Seuret-Jiménez, D., Nieto-Jalil, J. M., Cantó, J., Valdés-Santiago, D., & Carballo-Sigler, L. (2023). The Te Transform: A High-Resolution Integral Transform and Its Key Properties. *Mathematics*, *11*(21), 4495. <https://doi.org/10.3390/math11214495>

- Trutié-Carrero, E., Seuret-Jiménez, D., Nieto-Jalil, J. M., Herrera-Díaz, J. C., Cantó, J., & Escobedo-Alatorre, J. J. (2023). Detection of Background Water Leaks Using a High-Resolution Dyadic Transform. *Water (Switzerland)*, 15(4), 736. <https://doi.org/10.3390/w15040736>
- Trutié-Carrero, E., Valdés-Santiago, D., León-Mecías, Á., & Ramírez-Beltrán, J. (2018). Detección y Localización de Ruptura Súbita mediante Transformada Wavelet Discreta y Correlación Cruzada. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 15(2), 211. <https://doi.org/10.4995/riai.2017.8738>
- USGS. (2021). *Where is Earth's Water?* https://www.usgs.gov/special-topic/water-science-school/science/where-earths-water?qt-science_center_objects=0#qt-science_center_objects
- White, L. B., & Boashash, B. (1990). Cross Spectral Analysis of Nonstationary Processes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 36(4), 830–835. <https://doi.org/10.1109/18.53742>
- Wolff, T. (2003). Fourier inversion and the Plancherel theorem. In *Non Commutative Harmonic Analysis and Lie Groups* (pp. 15–22). Springer. <https://doi.org/10.1090/ulect/029/03>
- Wu, Y., & Liu, S. (2017). A review of data-driven approaches for burst detection in water distribution systems. *Urban Water Journal*, 14(9), 972–983. <https://doi.org/10.1080/1573062X.2017.1279191>
- Xue, Z., Tao, L., Fuchun, J., Riehle, E., Xiang, H., Bowen, N., & Prasad, R. (2020). Application of acoustic intelligent leak detection in an urban water supply pipe network. *Journal of Water Supply: Research and Technology - AQUA*, 69(5), 512–520. <https://doi.org/10.2166/aqua.2020.022>
- Yoshikawa, T., & Innes, J. (2013). Functional analysis. In *The Routledge Companion to Cost Management*. Elsevier. <https://doi.org/10.2307/3610182>
- Yu, T., Chen, X., Yan, W., Xu, Z., & Ye, M. (2023). Leak detection in water distribution systems by classifying vibration signals. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 185, 109810. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2022.109810>
- Zan, T. T. T., Wong, K. J., Lim, H. B., Whittle, A. J., & Lee, B. S. (2014). Leak detection and localization in water distribution system using time frequency analysis. *European Signal Processing Conference*, 2285–2289.
- Zhang, H., Wu, S., Zhang, Z., & Han, L. (2023). Rock joint roughness determination method based on deep learning of time–frequency spectrogram. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 117, 105505. <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2022.105505>
- Zhang, Y., & Li, W. (2022). Fractional Fourier transform on \mathbb{R}^2 and an application. *Frontiers of Mathematics in China*, 17(6), 1181–1200. <https://doi.org/10.1007/s11464-021-0983-9>

7 ANEXO 1: Carta de revisores externos

Carta 1: Dr. Jorge Torres Gómez



TU Berlin | Sekr. FT 5 | Einsteinufer 25 | 10587 Berlin

Fakultät IV – Electrical Engineering
and Computer Science
Institute of Telecommunication
Systems

Data Communications and
Networking /
Telekommunikationsnetze (TKN)

Professor
Prof. Dr.-Ing. habil. Falko Dressler

Sekretariat FT 5
Raum FT 233
Einsteinufer 25
10587 Berlin

Phone +49 30 314-28227
Fax +49 30 314-23818
dressler@tkn.tu-berlin.de

Berlin, June 30, 2025

A Comité tutorial del candidato a doctor, Mtro. Eduardo Trutié Carrero

Por medio de la presente, me permito emitir la valoración académica del trabajo de tesis titulado "Detección de fallas en sistemas de distribución de agua mediante espectros \mathcal{T}_e cruzados", elaborado por el Mtro. Eduardo Trutié-Carrero. Este trabajo representa una contribución significativa al campo del procesamiento de señales, particularmente en el contexto de diagnóstico estructural no invasivo en redes hidráulicas. En un entorno global donde el recurso hídrico es cada vez más escaso, el planteamiento de una herramienta matemática robusta para la detección temprana de fugas de fondo cobra especial relevancia técnica y social.

Desde el punto de vista metodológico, el autor logra una sólida integración entre fundamentos matemáticos rigurosos y aplicaciones prácticas. Entre sus principales aportaciones se destacan:

- El desarrollo de la Transformada de \mathcal{T}_e , herramienta matemática de alta resolución espectral, acompañada por teoremas fundamentales que garantizan su existencia, unicidad, e inversa.
- La introducción del espectro cruzado diádico y el fasor de \mathcal{T}_e , lo cual enriquece el análisis tiempo-frecuencia en señales multicomponente y con presencia de ruido estacionario.
- La validación experimental con datos reales, incluyendo escenarios con fugas de apenas 1 mm de diámetro y señales sísmico-acústicas no estacionarias, que evidencian la efectividad del enfoque en condiciones reales.

Los resultados presentados demuestran que la metodología propuesta supera claramente las limitaciones de técnicas tradicionales como el espectrograma de Fourier, la Transformada de Hilbert-Huang o la distribución Wigner-Ville, al permitir el aislamiento de componentes espurias, la atenuación de términos cruzados y la conservación de la pureza espectral. La tesis evidencia un dominio profundo en matemáticas aplicadas, desde teoría de transformadas integrales. Asimismo,

Page 1/2 |

TKN Telecommunication
Networks Group

Berliner Volksbank | IBAN DE69 1009 0000 8841 0150 03 | BIC BEVODE33

www.tkn.tu-berlin.de



revela una madurez investigativa notable en la articulación entre teoría, modelado, diseño experimental y validación. En consecuencia, considero que este trabajo cumple ampliamente con los criterios de originalidad, rigor científico y relevancia aplicada exigidos para un grado de doctorado.

Sin más, quedo a su disposición para cualquier consulta adicional.



Jorge Torres Gómez
Senior Researcher
jorge.torresgomez@tu-berlin.de
+49 303-1421-702
<https://www2.tkn.tu-berlin.de/team/torres-gomez/>
TU Berlin, Germany

Carta 2: Dr. Rodolfo Valiente Romero

California, USA. Agosto 8, 2025

A: Comité Tutorial del candidato a doctor, Mtro. Eduardo Trutié-Carrero

Asunto: Valoración de la tesis doctoral

Por este medio emito mi valoración del trabajo de tesis titulado "Detección de fallas en sistemas de distribución de agua mediante espectros Te cruzados", elaborado por el Mtro. Eduardo Trutié-Carrero en la Universidad Autónoma del Estado de Morelos.

Esta tesis aborda el problema de la detección de fugas de agua de pequeño diámetro en sistemas de distribución, con énfasis en preservar la pureza espectral durante la extracción de características. El autor propone la transformada de Te y sus espectros cruzados como herramientas matemáticas no paramétricas capaces de aislar componentes espurias, atenuar términos cruzados y ofrecer multi-sensibilidad en el dominio frecuencia-escala. Se presentan definiciones formales, cinco teoremas fundamentales y derivaciones analíticas que sustentan la nueva transformada, además de su aplicación experimental en un entorno cuasi-controlado con fugas de 1 mm y 4 mm de diámetro. La validación se realiza mediante un montaje controlado con sensores piezoeléctricos y análisis de señales vibro-acústicas adquiridas. Los resultados muestran que el método propuesto permite detectar y caracterizar fugas en presencia de ruido estacionario y no estacionario con mayor aislamiento espectral que técnicas convencionales.

El trabajo combina un desarrollo matemático formal con una validación experimental bien diseñada. Adicionalmente el problema abordado es crítico y de alto impacto social: en el Estado de Morelos se pierde ~40% del agua bombeada por la red de distribución. Una herramienta que detecta fugas de pequeño diámetro con mayor aislamiento espectral aporta valor directo a la reducción de pérdidas y a la gestión de activos de los sistemas hidráulicos.

La tesis cumple los criterios de originalidad, rigurosidad científica y pertinencia tecnológica exigidos para el grado de doctorado. El candidato demuestra dominio de las matemáticas aplicadas, claridad en la articulación teoría-modelo-experimento, y entrega evidencia empírica convincente de la superioridad del enfoque Te frente a métodos tradicionales en el contexto de detección de fugas.

Con base en lo anterior, recomiendo el trabajo y quedo atento a cualquier comentario o requerimiento adicional.

Atentamente,



Dr. Rodolfo Valiente Romero

Research Scientist IV, Intelligent Systems Center

rvalienteromero@hrl.com

+1 407-373-3629

HRL Laboratories, LLC

Malibu, CA 90265, USA



México, a 12 de septiembre de 2025

Asunto: Valoración académica de la tesis titulada “Detección de fallas en sistemas de distribución de agua mediante espectros T_e cruzados”

Autor: Mtro. Eduardo Trutié-Carrero

Programa: Doctorado en Ingeniería y Ciencias Aplicadas

Institución: Universidad Autónoma del Estado de Morelos (UAEM).

A Comité Tutorial:

Por este medio emito la valoración académica de la tesis titulada “Detección de fallas en sistemas de distribución de agua mediante espectros T_e cruzados,” elaborada por el Mtro. Eduardo Trutié-Carrero, la cual revisé con atención en su versión integra. El trabajo analiza el problema de la detección de fallas (p. ej., fugas) en redes de distribución de agua y propone una metodología original basada en la transformada T_e y en espectros T_e cruzados para preservar la pureza espectral, mejorar la relación señal-ruido y discriminar artefactos frente a señales útiles en escenarios con ruido significativo.

1) Pertinencia y contexto.

El tema es altamente relevante para la gestión de infraestructura hídrica, con impacto directo en sostenibilidad, economía del agua y mantenimiento predictivo. La tesis se sitúa con acierto en el cruce entre señales y sistemas, análisis espectral avanzado y diagnóstico no invasivo de redes, un área donde persisten limitaciones de los enfoques clásicos (p. ej., Fourier corto, Hilbert-Huang, Wigner-Ville) para separar componentes útiles de ruido y de espurias en condiciones operativas reales.

2) Objetivos y preguntas de investigación.

El objetivo central (diseñar, fundamentar y validar una herramienta matemática y de procesamiento basada en T_e y espectros T_e cruzados) está bien definido y se vincula coherentemente con preguntas de investigación sobre:

- a) pureza espectral.
- b) robustez frente a ruido cercano a 0 dB.
- c) capacidad discriminativa ante señales espurias.

Se identifica con claridad la contribución incremental respecto de métodos de referencia.

3) Aporte teórico y formalización matemática.

El manuscrito presenta de forma estructurada la transformada T_e , con definiciones formales y teoremas (existencia, pertenencia, inversa, unicidad), y desarrolla herramientas asociadas: densidad espectral cruzada T_e , coherencia T_e , espectrogramas y fasores bajo T_e . Este andamiaje teórico constituye un aporte original y sólido, con potencial de extenderse a otras áreas (vibraciones, acústica, geofísica, biomédica). Se agradece la rigurosidad de los

enunciados; sin embargo, recomiendo mover algunos detalles de demostración a un anexo matemático con pruebas paso a paso y una guía de notación unificada (T_e/T_e).

4) Metodología experimental e instrumentación

La validación se realiza en un montaje cuasi-controlado con tubería metálica, instrumentado con sensores piezoeléctricos y adquisición dedicada. Se ensayan fugas pequeñas (p. ej., diámetros del orden de 1-4 mm) y se trabaja con frecuencias de muestreo acordes al fenómeno; la cadena de procesamiento está bien razonada. Esta sección es clara y replicable.

5) Resultados, análisis y validez.

Los resultados indican que los espectros T_e cruzados:

- a) Preservan mejor la pureza espectral que los métodos comparativos.
- b) Aíslan componentes útiles vinculadas a la presencia de fuga, reduciendo artefactos y componentes espurias.
- c) Mantienen desempeño en SNR desfavorable (cercano a 0 dB), lo que es particularmente valioso para condiciones reales.
- d) Potencian la coherencia como métrica de normalización entre canales/sensores.

A nivel de redacción, las figuras son elocuentes y la discusión conecta los hallazgos con la hipótesis y con la literatura pertinente.


6) Originalidad, impacto y transferencia

El trabajo avanza el estado del arte al proponer una ruta espectral alternativa con fundamento matemático y evidencia experimental. Por su carácter no invasivo y su robustez al ruido, es transferible a pruebas de campo y a esquemas de monitoreo continuo. Veo potencial para publicaciones derivadas y para la liberación de un paquete (p. ej., Python/MATLAB) bajo licencia académica.

Con base en la evidencia revisada y en los criterios académicos habituales (originalidad, rigor, validez metodológica, claridad de presentación, impacto potencial), recomiendo la aprobación de la tesis con correcciones menores. Las sugerencias mencionadas no cuestionan la solidez del aporte, sino que buscan maximizar la claridad, la transferibilidad y la citabilidad del trabajo.

Sin otro particular, y reconociendo el mérito académico del trabajo del Mtro. Eduardo Trutié-Carrero, quedo a su disposición para cualquier aclaración adicional.

Atentamente,


Dr. José Manuel Nieto Jalil
Director del Departamento Regional de Ciencias en la Región Centro-Occidente.
Profesor Titular de la Escuela de Ingeniería y Ciencias
Líder de Grupos Nacionales de Ciencias
Miembro del Sistema Nacional de Investigadores de México

8 ANEXO 2: Código de la transformada de T_e

```
function  
[PP, ff]=Te_transform(S, ancho_w, Fs, nivel)
```

```

S = upsample(S,2);

w=hamming(ancho_w);

RR = filter(w,1,S);

ca=RR;

for i = 1:nivel
    [ca,cd]=arbol(ca);
    assignin('base', ['FcA' num2str(i)],ca);
    assignin('base', ['FcD' num2str(i)],cd);
end

for x=1:nivel
    [~,P,f]=fourier(evalin('base', ['FcD'
num2str(x)]),Fs/(2^x));
        for col = 1:length(P)

            PP(x,col) = P(col);
            ff(x,col) = f(col);
        end
    end
end
end

```

```

function [ca,cd]=arbol(S)
    [LoD,HiD,~,~] = wfilters('db45');

    S = downsample(S,2);
    cd=filter(HiD,1,S);
    ca=filter(LoD,1,S);

end

```

```

function [Y,P1,f]=fourier(signal,Fs)

L = length(signal);

Y = fft(signal);
P2 = abs(Y);
P1 = P2(1:L/2+1);

```

```

P1(2:end-1) = 2*P1(2:end-1);
f = 2*Fs*(0:(L/2))/L;

end

```

9 ANEXO 3: Código de la Densidad Espectral Cruzada de \mathcal{T}_e

```

function [P,f]=CSD_Te(x_CFn,y_CFn,w,Fs,nivel)

    [c,~] = xcorr(x_CFn,y_CFn); % correlacion
cruzada

    [P,f]=Te_transform(c,w,Fs,nivel);
end

```

10 ANEXO 4: Código de la Coherencia de \mathcal{T}_e

```

function
[coe,f]=Te_Coherence(x_CFn,y_CFn,w,Fs,nivel)

    [c,~] = xcorr(x_CFn,y_CFn); % correlacion
cruzada

    [c_x,~] = xcorr(x_CFn,x_CFn); % auto-
correlacion_x

    [c_y,~] = xcorr(y_CFn,y_CFn); % auto-
correlacion_y

    [P,f]=Te_transform(c,w,Fs,nivel); % espectro
cruzado mediante transformada Te

    [P_x,~]=Te_transform(c_x,w,Fs,nivel); % auto
espectro para c_x

```

```
[P_y,~]=Te_transform(c_y,w,Fs,nivel); % auto  
espectro para c_y
```

```
mult = (P_x.*P_y);
```

```
coe = P/sqrt(norm(mult));
```

```
end
```



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS



INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

JEFATURA DE POSGRADO EN INGENIERÍA Y CIENCIAS APLICADAS



Cuernavaca, Morelos, a 23 de septiembre de 2025.

DR. ARTURO MOLINA OCAMPO
COORDINADOR DEL POSGRADO
EN INGENIERÍA Y CIENCIAS APLICADAS
PRESENTE

Atendiendo a la solicitud para emitir DICTAMEN sobre la revisión de la TESIS titulada: DETECCIÓN DE FALLAS EN SISTEMAS DE DISTRIBUCIÓN DE AGUA MEDIANTE ESPECTROS Te CRUZADOS., que presenta el alumno **EDUARDO TRUTIE CARRERO**, para obtener el título de **DOCTORADO EN INGENIERÍA Y CIENCIAS APLICADAS**.

Nos permitimos informarle que nuestro voto es **APROBATORIO**.

Atentamente
Por una humanidad culta

DR. PEDRO ANTONIO MÁRQUEZ AGUILAR

DR. J JESÚS ESCOBEDO ALATORRE

DR. HÉCTOR MANUEL CASTRO BELTRÁN

DR. LUIS MANUEL GAGGERO SAGER

DR. JOSÉ ANTONIO MARBÁN SALGADO

DR. JORGE JOAQUÍN CANTÓ IBÁÑEZ

DR. DIEGO SEURET JIMÉNEZ

Se adiciona efirma UAEM



Av. Universidad 1001 Col. Chamilpa, Cuernavaca Morelos, México, 62209, Edificio 65,
Tel. 777 329 70 00 Ext. 6208 / ciicap.posgrado@uaem.mx

UAEM
RECTORÍA
2023-2029



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento con firma electrónica UAEM, soportada por el certificado vigente a la fecha de su elaboración y con efectos plenos de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS PUBLICADOS en el ÓRGANO INFORMATIVO UNIVERSITARIO "ADOLFO MENÉNDEZ SAMARÁ" número 117 de fecha 20 de abril de 2021.

Sello electrónico

J JESUS ESCOBEDO ALATORRE | Fecha:2025-09-24 16:27:05 | FIRMANTE

gtykjHrfhjyVb8OegVG0yOh9wjXD9eem7h439CkOW278NjCAlHmPsyNMTnhV6rofVnMCo1tldxfzq3DijudTJAAtkqy8NZVgytnqMLYhICyGOA75bnO1uXnNAYVkcS1aHnQai8aqAO
P35ooxbllbextPwyUDTK4t74n4XSbU+0j6epiveok9w60C7SF5xll//kDFHt0/Osc7jKdMKnnPa1S33TL+PtrQHv3zsuWzT3d6xci/UuXpwHsnQoQtH218VxRMOgBjHwCXNKs8bCllpm
A5PUtXH15sC3R03yR07LS6GIFnVPqF9iuVZLkFK9nwsADX4KuWahF/DX/oUYIMpw==

DIEGO SEURET JIMENEZ | Fecha:2025-09-28 18:41:00 | FIRMANTE

lumBHynj25NuwR+rr3MeeN9lpCP+a6UFWkijcWGxHq+YuAr9EYYozKVjHurfTWWSDjccVSwg5NAPGpeQTzAXO6feyoBAuRL7b3lOjMEENLnB5SkxQDMdcAWIPWvIvq/Z12X+
UUDA5uhInfUtMbn4rJvNTO1LZXoT6b6DSP3rFGEsNyQZ4sMX3HF31WCd4QpEYhvESdCZispeJvikJfW6/4vTtE2T6YlgmYm3vyYNX4GpN0ixX6B8P3jNRyPkY4PzRe5Bn0vhw
akj1lxMb+3QvJVGQdC3Ph67ELHjhoNqXlio7pUGYXm1723O43ZWUbbHrRjQDgswDSd4Dz5AKnDA==

PEDRO ANTONIO MARQUEZ AGUILAR | Fecha:2025-10-03 15:30:25 | FIRMANTE

MqzVfGxkMh6ht38FfRixM3u3Mp2Q4z7UwlcUML7X2AqNzhpHD33miATV9coH8LLM2RijGf6drCy2hw7ltFY2263kSIEHOKLh05EU8W6/Z4e2+5JiThj29R8t3qv11f+x9AobLoOb
FT83cEykJUCdgV4OzjEwe2crLHPB1krkTAbjI0umt4ED+90562x0xXuxFD+Ts2CqAvJ7RhZ3KvYAR/ZJUFqdM9F1keEd4rH7kkfcmK45Bq8OmdIUE/wAgkW2wK2/mPArmWm63Q
yoS6kqlnxmJOWd2Pn4T06sX66ohSBqqT+ly75DcQvVnAlkEKLRLu11ZlqgzQBQd1dWA==

LUIS MANUEL GAGGERO SAGER | Fecha:2025-10-13 20:20:40 | FIRMANTE

VaaWFBdktlbRACVM0kbcwCYzKTbOJeD9XN0rGgC6M5eTNB3ee4Lw1z2xKCKASny7J8vaG89ZE11Yk+y7qyHP+Wrf0bQJbXUN89wRKAv22TJORSsjyhqGZAXGk8kqEoOxN
Tk8ILGCh4apPTIGeA4bcITawVniQ9FnftLeu2JqxmFHCKNnjamA1gJWjaBUNMUHMGEBKaM/OMGUvAhz9/DOiOTBETfCiujs+PRu7FbPTD84ypY9R40x1Xm9qcqaKEBucEx32Di
4n+fsH2LJiUwqZK8Re/8aXIYMAhV3UI5cT2fUcBsXJOP0qqK54uNLF049iYrxXU7XUV0iB5P7Lm2IUg==

HECTOR MANUEL CASTRO BELTRAN | Fecha:2025-10-21 14:58:27 | FIRMANTE

mmvNmiuFTpnydJ7f0i3UhuypxRqEaHjGUs57meOGYpkJnflz5Tq3xwUxNPEksgNwx1LFsfRuxU1eZxyn8WNTqlqQpZqCpZ36Z2eOuPOwkP1xswQdc5CZwggfOzKOx3TNsRvzrlm
NryFZd0eI27UFsv3ZTdfkAWAPaVpyVsx5fSsz3xqnKtAayFzQHqHfz2im/GRH5f5axFrrRuB6zA23MFzhdMQWdGT2u9hD2ia6IEBTQL81LCg+5QWc1z5hRLd6bY4VmlhxDW
Mo3uUyPwizlvnkmRulbnO9HPOBZ5dB7prnP15G9ZmWpC3ZmgtnSjJrVOavn/96ik/99dkw==

JOSE ANTONIO MARBAN SALGADO | Fecha:2025-10-21 17:04:46 | FIRMANTE

Aml9cckx8wcpOovgqStPq85qa1W7uOlbnm9PSr/Dav/payli7rEXCsTA/ZojvEwZYgM/TbhQsXo4O3yRGWHF4RHLXw8KRv/Dxh8ia9cXmmXJSPohTzh0tVldxv4VvBD1clmJter2W
M6GuIXQQ10k3afyr6suffuoFMEyPSIQIMeyG+sx7/Zlr1en9FCJnFJTpu+6FcBUx9e7n/odXLDeyThp8KnlwxYHCAG8LYEYwGlteC9ytWEHeOkTm5DqWg1SmJr+goHt63B1vrm
GOqa5JAA/i9cpe4Vb9YnKvpo4kteOg3pLpQDNou55ieTsSj5bEekuTNiyNIUtyMkg==

JORGE JOAQUÍN CANTÓ IBÁÑEZ | Fecha:2025-10-21 19:22:24 | FIRMANTE

wktrnuNhk1fEdKUYpROCakcfKTZQD9lityU6kxlXOhZf/EXzGipAj9FqV9DG4vnEi+n1Gd3IFA11u8VPK45XLUmPca7DdXnPjHpvjBA6xAh0RPOw9hD046E8RVYXLgHgpLKo8dq4
G3UWl6CRhw4DH4pg2yHtmeUlryJSvexBbG+FI+q0V5B5iuv/5aJehulCg5Ns33Y6UqylhuTkhXz7HL7O1ebn2Of/UEmixh1FLaHvuvxTmj64xiJU/Xsvxkg93LZC1KIQeJGqopv6M8L+
nFovpTSiZnVluMB5+AH0juSpGqdT2YL62CDYRO+BUoZJ0n0xsTBIQNjcyJ/ixZKOQ==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o
escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



9YdbWiwXL

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/ODg1TBtelHl2RwZP7PvElpBH05prSHI>



UAEM
RECTORÍA
2023-2029