

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN INGENIERÍA Y CIENCIAS APLICADAS

**INTERACCIONES DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS
CON NANOESTRUCTURAS CON RADIACIÓN DE LA
LUZ**

TESIS PROFESIONAL PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRÍA EN INGENIERÍA Y CIENCIAS APLICADAS
LIC. CHRISTIAN JOANI CONTRERAS FLORES

DIRECTOR:

DR. GENNADIY BURLAK

CODIRECTOR:

DRA. YESSICA YAZMÍN CALDERÓN SEGURA

SINODALES:

DR. GENNADIY BURLAK

DRA. YESSICA YAZMÍN CALDERON SEGURA

DR. J JESÚS ESCOBEDO ALATORRE

DRA. MARGARITA TECPOYOTL TORRES

DR. YURIY KARLOVYCH

CUERNAVACA, MORELOS

ABRIL, 2026

RESUMEN

Las simulaciones numéricas constituyen una herramienta fundamental para el estudio de fenómenos físicos complejos, permitiendo el modelado de procesos que, por su naturaleza, resultan difíciles de reproducir experimentalmente. En el ámbito de la interacción entre la luz y las nanoestructuras, estos métodos adquieren especial relevancia debido a la precisión requerida para describir el comportamiento de los campos electromagnéticos en materiales con anisotropía y dispersión de frecuencia.

Esta investigación emplea el método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (FDTD) para investigar teóricamente el comportamiento de un cristal magneto-fotónico bidimensional y su interacción con ondas electromagnéticas. Mediante la resolución numérica de las ecuaciones de Maxwell, se analiza la evolución temporal del campo óptico al atravesar un arreglo periódico de cilindros de ferrita. Con el fin de optimizar el costo computacional sin sacrificar la esencia física del fenómeno, el problema se aborda integrando técnicas avanzadas de capas de adaptación perfecta (PML). Asimismo, para dotar a la investigación de una dimensión práctica, el núcleo de cálculo se integró en una Interfaz Gráfica de Usuario (GUI) que facilita la configuración y visualización de barridos paramétricos de manera autónoma.

Los resultados obtenidos permiten profundizar en la comprensión de los mecanismos de propagación no recíproca y la manipulación del estado de polarización. El análisis demuestra que la estructura propuesta es capaz de inducir una rotación de Faraday eficiente, permitiendo la sintonización de un estado de polarización circular mediante el ajuste de la frecuencia de operación. Este estudio contribuye al desarrollo de dispositivos ópticos avanzados con aplicaciones potenciales en telecomunicaciones, procesamiento de información y el diseño de aisladores ópticos de banda estrecha.

ABSTRACT

Numerical simulations constitute a fundamental tool for the study of complex physical phenomena, enabling the modeling of processes that, due to their nature, are difficult to reproduce experimentally. In the field of light-nanostructure interaction, these methods acquire special relevance due to the precision required to describe the behavior of electromagnetic fields in materials exhibiting anisotropy and frequency dispersion.

This research employs the Finite-Difference Time-Domain (FDTD) method to theoretically investigate the behavior of a two-dimensional magneto-phonic crystal and its interaction with electromagnetic waves. Through the numerical resolution of Maxwell's equations, the temporal evolution of the optical field as it propagates through a periodic array of ferrite cylinders is analyzed. In order to optimize computational cost without sacrificing the physical essence of the phenomenon, the problem is addressed by integrating advanced Perfectly Matched Layer (PML) techniques. Furthermore, to provide the research with a practical dimension, the computational core was integrated into a Graphical User Interface (GUI) that facilitates the autonomous configuration and visualization of parametric sweeps.

The obtained results allow for a deeper understanding of the mechanisms underlying non-reciprocal propagation and the manipulation of the polarization state. The analysis demonstrates that the proposed structure is capable of inducing efficient Faraday rotation, allowing the tuning of a circular polarization state by adjusting the operating frequency. This study contributes to the development of advanced optical devices with potential applications in telecommunications, information processing, and the design of narrow-band optical isolators.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Dr. Gennadiy Burlak, mi director de tesis, por su gran paciencia y valiosa comprensión, por su constante apoyo, el asesoramiento y la confianza depositada en mí en todo el trascurso del desarrollo de este proyecto, que sin su guía esto no hubiera sido posible.

Extiendo mi gratitud a mi co-asesora y a los miembros de mi comité tutorial por su orientación, recomendaciones y opiniones, que fueron fundamentales para el desarrollo de este trabajo.

A los profesores del Centro de Investigación en Ingeniería y Ciencias Aplicadas (CIICAp), les agradezco por compartir su conocimiento y enseñanzas, que enriquecieron significativamente mi formación a lo largo de mis estudios de maestría.

A la Universidad Autónoma del Estado de Morelos (UAEM), por proporcionar las instalaciones y el software necesario para llevar a cabo esta investigación.

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT), ahora Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI) por el apoyo económico brindado durante la realización del proyecto.

Finalmente, le agradezco a Dios por permitirme llegar a este momento.

DEDICATORIA

**A los grandes amores de mi
vida,**

Todo lo hago pensando en ustedes, esos
grandes seres que siempre debieron estar
conmigo, que siempre han estado conmigo y
siempre estarán aquí, conmigo.

*“Un poco de ciencia nos aleja de Dios,
pero mucha ciencia nos devuelve a Él.”*

-Louis Pasteur

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 ANTECEDENTES	1
1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	2
1.2. LA JUSTIFICACIÓN.....	3
1.3. HIPÓTESIS.....	4
1.4. OBJETIVOS	4
CAPÍTULO 2 MARCO TEÓRICO	5
2.1. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS: PRINCIPIOS BÁSICOS	6
2.1.1. Ecuaciones de Maxwell y propagación de ondas	8
2.1.2. Propiedades clave: polarización, dispersión y absorción	10
2.1.3. Polarizaciones	14
2.2. CRISTALES FOTÓNICOS	19
2.2.1. Tipos de cristales fotónicos	21
2.2.2. Aplicaciones de los cristales fotónicos en óptica y fotónica.....	25
2.2.3. Materiales dieléctricos: características ópticas.....	28
2.3. MÉTODO FDTD	31
2.3.1. Introducción al método FDTD.....	32
2.3.2. Fronteras: PEC, ABC, PML y periodicidad	36
2.3.3. Resolución de ecuaciones de Maxwell (FDTD).....	39
CAPÍTULO 3 DESARROLLO TEÓRICO / EXPERIMENTAL	42
3.1. DISCRETIZACIÓN ESPACIOTEMPORAL	44
3.1.1. Formulación unidimensional (1D): Fundamentos del esquema <i>leapfrog</i>	45
3.1.2. Reducción bidimensional (2D): Modos TMz y Tez	47
3.1.3. Generalización tridimensional (3D).....	50
3.2. ESTABILIDAD NUMÉRICA Y RESOLUCIÓN ESPACIAL	53
3.2.1. Condición de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)	53
3.2.2. Dispersión numérica y criterios de mallaado	55
3.3. TÉCNICAS DE EXCITACIÓN NUMÉRICA	57
3.3.1. Fuentes duras y fuentes suaves.....	57
3.3.2. Frontera de campo total / campo dispersado (TFSF).....	60
3.4. TRUNCAMIENTO DEL DOMINIO COMPUTACIONAL	63
3.4.1. Conductores Eléctricos Perfectos (PEC).....	64
3.4.2. Condiciones de Frontera Absorbentes (ABC).....	66
3.4.3. Capas Perfectamente Adaptadas (PML).....	68
3.5. INCORPORACIÓN DE MEDIOS MATERIALES COMPLEJOS	70
3.5.1. Dieléctricos con pérdidas óhmicas	71
3.5.2. Modelo analítico de la ferrita magnetizada	73
3.5.3. Implementación algorítmica de tensores giromagnéticos en FDTD (método ADE).....	75

3.6. ARQUITECTURA Y ENSAMBLAJE DEL CÓDIGO PRINCIPAL EN PYTHON.....	77
3.6.1. Inicialización y mapeo espacial.....	77
3.6.2. El bucle de evolución temporal (<i>time loop</i>).....	78
3.6.3. Posprocesamiento y visualización de resultados	79
3.7. CONFIGURACIÓN DE LA PRUEBA Y PARÁMETROS DE SIMULACIÓN	80
3.7.1. Interfaz Gráfica de Usuario (GUI) para parametrización.....	80
3.7.2. Barrido paramétrico para polarización circular	83
CAPÍTULO 4 RESULTADOS Y DISCUSIÓN	84
CAPÍTULO 5 CONCLUSIÓN Y TRABAJO FUTURO	102
REFERENCIAS	107

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1. Visualización espaciotemporal de la propagación del campo eléctrico E_z en una malla de FDTD 1D con una fuente dura (hard source) [Simulación hecha en Python].	58
Figura 3.2. Visualización espaciotemporal de la propagación del campo eléctrico E_z en una malla de FDTD 1D excitada por una fuente suave (soft source) [Simulación hecha en Python].	59
Figura 3.3. Evolución espaciotemporal del campo eléctrico E_z modelando una frontera espacio libre-dieléctrico mediante excitación TFSF en 1D [Simulación hecha en Python].	61
Figura 3.4. Evolución espacial bidimensional del campo eléctrico E_z y efecto de truncamiento abrupto en una malla FDTD [Simulación hecha en Python].	62
Figura 3.5. Diagrama espaciotemporal de reflexiones espurias en una malla FDTD bidimensional truncada [Simulación hecha en Python].	63
Figura 3.6. Interacción de una onda plana con un dispersor cilíndrico PEC utilizando excitación TFSF y Condiciones de Frontera Absorbentes (ABC) en modo TE [Simulación hecha en Python].	65
Figura 3.7. Muestra la evolución espaciotemporal de una simulación bidimensional (modo TE) en un dominio truncado por ABCs análisis de segundo orden [Simulación hecha en Python].	67
Figura 3.8. Topología espacial del cristal magneto-fotónico implementada en el dominio computacional bidimensional.	78
Figura 3.9. Interfaz Gráfica de Usuario (GUI) del simulador FDTD.	81
Figura 4.1. Imagen final de la animación de la propagación de las ondas electromagnéticas en el cristal magneto-fotónico. La escala de color representa la distribución espacial de la amplitud absoluta del campo eléctrico (E_z) en el dominio bidimensional para una longitud de onda de inyección de $\lambda = 1.67\mu\text{m}$, capturada en el instante $t = 3800$.	85
Figura 4.2. Gráfica de la evolución temporal de las componentes transversales del campo magnético (H_x y H_y) capturadas por el detector virtual en el nodo $[20, 50]$, para la simulación con longitud de onda de $\lambda = 1.67\mu\text{m}$.	86

Figura 4.3. Gráfica de la evolución temporal de las partes real e imaginaria de la componente magnética transversal H_x , registrada por el detector virtual en el nodo [20, 50] para una longitud de onda incidente de $\lambda = 1.67\mu\text{m}$	88
Figura 4.4. Gráfica de la evolución temporal de las partes real e imaginaria de la componente longitudinal del campo eléctrico E_z , registrada por el detector virtual en el nodo [20, 50] para una inyección de $1.67\mu\text{m}$	89
Figura 4.5. Gráfica paramétrica del estado de polarización magnética (H_y vs H_x) registrada por el detector virtual en el nodo [20, 50]. La trayectoria corresponde exclusivamente a la fase de estado estacionario ($t > 2500$) para una inyección de $\lambda = 1.67\mu\text{m}$	90
Figura 4.6. Imagen final de la propagación de las ondas electromagnéticas en el cristal magneto-fotónico. La escala de color representa la distribución espacial de la amplitud absoluta del campo eléctrico (E_z) para una inyección de $\lambda = 1.675\mu\text{m}$, capturada en el estado estacionario ($t = 3800$).	91
Figura 4.7. Gráfica de la evolución temporal de las componentes transversales del campo magnético (H_x y H_y) capturadas por el detector virtual en el nodo [20, 50], para la simulación con longitud de onda de $\lambda = 1.675\mu\text{m}$	92
Figura 4.8. Gráfica de la evolución temporal de las partes real e imaginaria de la componente magnética transversal H_x , registrada por el detector virtual en el nodo [20, 50] para el escenario de inyección a $\lambda = 1.675\mu\text{m}$	94
Figura 4.9. Gráfica de la evolución temporal de las partes real e imaginaria de la componente longitudinal del campo eléctrico E_z , registrada por el detector virtual en el nodo [20, 50] para una inyección de $1.675\mu\text{m}$	95
Figura 4.10. Gráfica paramétrica del estado de polarización magnética (H_y vs H_x) registrada por el detector virtual en el nodo [20, 50]. La trayectoria corresponde exclusivamente al régimen estacionario ($t > 2500$) para una inyección de $\lambda = 1.675\mu\text{m}$	96
Figura 4.11. Imagen final de la propagación de las ondas electromagnéticas en el cristal magneto-fotónico. La escala de color representa la distribución espacial de la amplitud absoluta del campo eléctrico (E_z) para una inyección de $\lambda = 1.68\mu\text{m}$, capturada en el régimen estacionario ($t = 3800$).	97
Figura 4.12. Gráfica de la evolución temporal de las componentes transversales del campo magnético (H_x y H_y) capturadas por el detector virtual en el nodo [20, 50], para la simulación con longitud de onda de $\lambda = 1.68\mu\text{m}$	98

Figura 4.13. Gráfica de la evolución temporal de las partes real e imaginaria de la componente magnética transversal H_x , registrada por el detector virtual en el nodo [20, 50] para el escenario de excitación a $\lambda = 1.68\mu\text{m}$	99
Figura 4.14. Gráfica de la evolución temporal de las partes real e imaginaria de la componente longitudinal del campo eléctrico E_z , registrada por el detector virtual en el nodo [20, 50] para una excitación de $1.68\mu\text{m}$	100
Figura 4.15. Gráfica paramétrica del estado de polarización magnética (H_y vs H_x) registrada por el detector virtual en el nodo [20, 50]. La trayectoria corresponde exclusivamente al régimen estacionario ($t > 2500$) para una inyección de $\lambda = 1.68\mu\text{m}$	101
Figura 5.1. Extracto del libro oficial de resúmenes del 32nd International Materials Research Congress (IMRC 2024), dentro del simposio "D4. New Trends in Nanoscience and Nanotechnology: Innovative Synthesis, Novel Properties, Theory and Challenges". El documento avala la aceptación y publicación de la contribución titulada "Waveguide Modeling in Photonic Crystals using the 2D FDTD Method" (Identificador SD4-P031), estableciendo el registro formal de los avances metodológicos y de simulación desarrollados en el presente trabajo de tesis.	104
Figura 5.2. Certificado oficial expedido por la Sociedad Mexicana de Materiales A.C. El documento acredita la presentación y defensa de la investigación en la modalidad de póster dentro del simposio "D4. New Trends in Nanoscience and Nanotechnology", en el marco del 32nd International Materials Research Congress (IMRC 2024) , llevado a cabo en Cancún, México, del 18 al 23 de agosto de 2024.	105

CAPÍTULO 1 ANTECEDENTES

El estudio de las interacciones entre ondas electromagnéticas y nanoestructuras se ha consolidado como un área estratégica dentro de la física aplicada y la ingeniería fotónica moderna. La posibilidad de manipular la propagación de la luz a escalas comparables o inferiores a su longitud de onda ha permitido el desarrollo de dispositivos ópticos altamente integrados. Estos avances tienen un impacto directo en sectores como las telecomunicaciones, el diseño de sensores, la optoelectrónica avanzada y las tecnologías cuánticas.

En este contexto, los cristales fotónicos (PCs, por sus siglas en inglés) constituyen una de las plataformas más relevantes. Estos sistemas periódicos dieléctricos presentan una modulación espacial del índice de refracción que da lugar a la formación de bandas prohibidas fotónicas (PBGs), un fenómeno análogo al de las bandas electrónicas en los sólidos cristalinos. Esta característica permite controlar de manera precisa la propagación de la radiación electromagnética dentro de intervalos de frecuencia específicos, posibilitando el diseño de guías de onda, cavidades resonantes y filtros ópticos altamente selectivos [1].

Durante los últimos años, el surgimiento de la fotónica topológica ha ampliado significativamente el alcance de estos cristales. Se ha demostrado experimentalmente la existencia de estados electromagnéticos unidireccionales que son inmunes a la retrodispersión en estructuras periódicas que rompen la simetría de inversión temporal; esto representa un avance fundamental para el desarrollo de enlaces ópticos robustos [2]. Asimismo, la literatura actual subraya el enorme potencial de la fotónica topológica para la implementación de dispositivos integrados que mantengan su eficiencia incluso en presencia de defectos estructurales [3].

Por otro lado, la integración de materiales magneto-ópticos en estas estructuras ha dado lugar a los cristales magneto-fotónicos (MPCs), sistemas que combinan la periodicidad espacial con propiedades giromagnéticas. En estos materiales, cuando el sistema se encuentra magnetizado, la permeabilidad magnética adquiere un carácter tensorial. Esto genera fenómenos de no reciprocidad y rotación de la polarización. La ingeniería precisa de la red periódica en cristales magneto-fotónicos (MPCs) ha sido fundamental para manipular la propagación electromagnética [4]. De hecho, investigaciones recientes sobre MPCs bidimensionales basados en granate de itrio y hierro (YIG) han demostrado que esta estructuración permite controlar simultáneamente la polarización y la propagación de las ondas con alta eficiencia [5].

Más allá de las telecomunicaciones, los cristales magneto-fotónicos han demostrado tener aplicaciones de alto valor en el ámbito biomédico. Gracias a su paramagnetismo controlable y a su biocompatibilidad, se proyectan como agentes de contraste en resonancia magnética, sistemas de hipertermia magnética y plataformas multifuncionales de imagen [6]. Estos desarrollos evidencian que el estudio de la interacción luz-materia en nanoestructuras magneto-ópticas posee no solo una gran relevancia teórica, sino también un impacto tecnológico inmediato.

El diseño y la optimización de todos estos sistemas exigen un análisis riguroso que requiere resolver las ecuaciones de Maxwell en medios anisotrópicos y dispersivos. Para este propósito, la técnica de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (FDTD) se ha consolidado como una de las herramientas numéricas más robustas e implementadas. Este método, fundamentado en la electrodinámica computacional, permite discretizar las ecuaciones rotacionales de Maxwell en el dominio temporal, describiendo con alta fidelidad la evolución espacial y temporal de los campos eléctricos y magnéticos en estructuras de geometría arbitraria [7].

Recientemente, diversas mejoras metodológicas han optimizado el tratamiento de la permitividad efectiva dentro del esquema FDTD bidimensional (2D-FDTD), permitiendo modelar cristales fotónicos periódicos con una precisión superior [8]. De igual forma, estas aproximaciones han sido aplicadas con éxito en el análisis de cilindros quirales y sistemas anisotrópicos complejos [9]. Estos avances han facilitado el estudio de guías de onda en estructuras fotónicas y magneto-fotónicas mediante la incorporación de condiciones de frontera absorbentes, como las capas perfectamente adaptadas (PML), las cuales son esenciales para mitigar reflexiones numéricas artificiales en los límites del dominio computacional.

Finalmente, en los sistemas magnetizados, la matriz de permeabilidad magnética adopta una forma giromagnética dependiente de la frecuencia de resonancia del material. Esto introduce una dispersión dependiente de la frecuencia que modifica intrínsecamente la estructura modal del sistema, un comportamiento esencial para comprender la aparición de modos unidireccionales y la polarización circular. En consecuencia, el estudio teórico de la interacción entre ondas electromagnéticas y sistemas de nanotubos o nanoestructuras periódicas con dispersión de frecuencia representa una línea de investigación de frontera, indispensable para el diseño de la próxima generación de dispositivos fotónicos, sensores magnéticos y tecnologías de comunicación.

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La constante miniaturización de los dispositivos ópticos y fotónicos exige una comprensión precisa y detallada de cómo la radiación electromagnética interactúa con nanoestructuras compuestas por materiales dispersivos y magneto-ópticos. A escala

nanométrica, las propiedades electromagnéticas de la materia dejan de ser invariables; presentan una fuerte dependencia de la frecuencia y exhiben características complejas como anisotropías, birrefringencia modal y efectos de confinamiento espacial que no se observan en los materiales a nivel macroscópico.

En particular, sistemas como los arreglos de nanotubos y los cristales magneto-fotónicos manifiestan fenómenos de propagación altamente complejos. Entre estos destacan la formación de bandas prohibidas fotónicas, la aparición de modos guiados y alteraciones significativas en el estado de polarización de los campos electromagnéticos. Sin embargo, la caracterización puramente experimental de estos fenómenos enfrenta barreras técnicas e instrumentales considerables, limitadas fundamentalmente por las resoluciones requeridas a escala submicrométrica y por la dinámica ultrarrápida inherente a las interacciones de los campos ópticos.

Frente a estas severas limitaciones experimentales, surge la necesidad crítica de formular modelos teóricos robustos y ejecutar simulaciones numéricas precisas fundamentadas en las ecuaciones de Maxwell. Resulta indispensable implementar abordajes computacionales que permitan describir, con alta fidelidad, la evolución espacial y temporal del campo óptico dentro de estructuras periódicas que presentan dispersión de frecuencia. Cubrir este vacío analítico permitirá no solo desentrañar la física subyacente de la propagación lumínica en estos medios, sino también establecer los criterios de diseño teóricos necesarios para la futura integración de estas nanoestructuras en tecnologías optoelectrónicas y de telecomunicaciones.

1.2. LA JUSTIFICACIÓN

La presente investigación se justifica desde tres dimensiones fundamentales que articulan la teoría electromagnética con las necesidades tecnológicas contemporáneas:

- **Relevancia científica:** Profundizar en la fenomenología de la interacción luz-materia a escala nanométrica es esencial para ampliar la comprensión de la óptica física y el electromagnetismo avanzado. El análisis de sistemas que exhiben dispersión de frecuencia permite validar y expandir los modelos teóricos existentes, aportando nuevo conocimiento sobre el comportamiento de los campos electromagnéticos en regímenes de confinamiento extremo.
- **Impacto tecnológico:** Los arreglos de nanotubos y las nanoestructuras periódicas representan plataformas altamente prometedoras para la optimización de dispositivos fotónicos de próxima generación. Comprender y predecir su respuesta electromagnética es el paso previo indispensable para el diseño de componentes más eficientes, tales como guías de onda miniaturizadas, láseres

de bajo umbral, biosensores de alta sensibilidad y celdas solares con absorción mejorada.

- **Aporte metodológico:** Ante los desafíos técnicos y el elevado costo asociados a la nano-fabricación y la caracterización experimental a escala submicrométrica, el uso de herramientas computacionales robustas se presenta como una alternativa altamente eficaz. La implementación de simulaciones numéricas precisas para modelar la propagación de ondas proporciona un entorno predictivo seguro y económico, permitiendo explorar un amplio espacio de parámetros físicos que resultaría inviable en un laboratorio convencional.

En conjunto, este trabajo trasciende la mera búsqueda de conocimiento básico; se perfila como un puente entre la física fundamental y la ingeniería aplicada. Los modelos teóricos y numéricos desarrollados proporcionarán criterios de diseño críticos con el potencial de impactar significativamente en sectores estratégicos como las telecomunicaciones de banda ancha, la recolección de energía y la instrumentación biomédica avanzada.

1.3. HIPÓTESIS

La interacción de ondas electromagnéticas con un sistema de nanotubos, constituido por materiales que presentan dispersión de frecuencia, induce modificaciones predecibles y controlables en la propagación y el estado de polarización de la luz. En consecuencia, el modelado teórico espaciotemporal de esta interacción permitirá identificar los parámetros físicos necesarios para optimizar el confinamiento, la direccionalidad y las propiedades del campo óptico a escala nanométrica.

1.4. OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Analizar teóricamente la interacción espaciotemporal de ondas electromagnéticas con un sistema de nanotubos compuestos por materiales con dispersión de frecuencia, mediante la resolución numérica de las ecuaciones de Maxwell, para comprender la dinámica del campo óptico a escala nanométrica.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Modelar las características de emisión y propagación de fuentes electromagnéticas (nano-emisores) y su acoplamiento inicial dentro de un dominio computacional.

- Evaluar el comportamiento de las ondas electromagnéticas al incidir sobre la geometría de los nanotubos, analizando los fenómenos de dispersión, absorción y cambios en la polarización.
- Determinar la evolución temporal y la estructura espacial del campo óptico dentro de la nanoestructura, implementando el método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (FDTD) para caracterizar su dinámica.

CAPÍTULO 2 MARCO TEÓRICO

El análisis exhaustivo de la interacción entre ondas electromagnéticas y nanoestructuras periódicas se fundamenta en los principios de la electrodinámica clásica y en la teoría moderna de medios estructurados. La descripción rigurosa de estos fenómenos requiere la integración de conceptos clave como la propagación de ondas, la teoría de bandas, la física de medios anisotrópicos, la dispersión dependiente de la frecuencia y la implementación de métodos numéricos avanzados.

Las ecuaciones de Maxwell constituyen el marco universal que gobierna la dinámica espacio-temporal de los campos eléctricos y magnéticos. A partir de estas leyes fundamentales, se derivan las ecuaciones de onda y las relaciones de dispersión que describen cómo la radiación electromagnética interactúa y se propaga a través de distintos medios materiales [10]. En medios homogéneos e isotrópicos, la solución general adopta la forma de ondas planas transversales; sin embargo, al introducirse en medios con periodicidad espacial, como los cristales fotónicos, las soluciones se transforman en modos de Bloch. Esta alteración estructural es la responsable de la formación de bandas permitidas y prohibidas para la propagación de la luz [1].

La modulación espacial del índice de refracción en los cristales fotónicos genera procesos de interferencia constructiva y destructiva que dan origen a las denominadas brechas de banda fotónicas (PBGs, por sus siglas en inglés). Este fenómeno, propuesto de manera independiente en los trabajos pioneros de Yablonovitch [11] y John [12], demostró que la periodicidad dieléctrica tiene la capacidad de inhibir la emisión espontánea y modificar radicalmente la densidad de estados electromagnéticos. En la práctica, esto permite el confinamiento y el control espectral de la radiación, impulsando el desarrollo de guías de onda integradas, cavidades resonantes y dispositivos de alta selectividad.

Durante los últimos años, la investigación en fotónica topológica ha extendido este marco conceptual, demostrando que ciertos sistemas periódicos pueden albergar modos de borde protegidos topológicamente. Estos estados resultan ser inmunes a la retrodispersión, manteniendo su robustez incluso en presencia de defectos e

imperfecciones estructurales [3], [13]. Dichos fenómenos emergentes se manifiestan, por ejemplo, cuando se rompe la simetría de inversión temporal del sistema mediante la incorporación de materiales magneto-ópticos.

En este sentido, los cristales magneto-fotónicos introducen una capa adicional de complejidad al problema, dado que su permeabilidad magnética debe describirse mediante un tensor giromagnético que es dependiente de la frecuencia. Esta anisotropía intrínseca facilita la aparición de fenómenos no recíprocos y la rotación de la polarización [5]. Desde una perspectiva física, la ruptura de la simetría temporal no solo modifica la estructura de bandas del cristal, sino que habilita la propagación unidireccional de la energía electromagnética [2].

Adicionalmente, cuando el análisis se traslada a la escala nanométrica, los materiales exhiben fuertes respuestas dispersivas. Estas deben ser modeladas rigurosamente mediante formulaciones dependientes de la frecuencia, tales como los modelos de Lorentz o Drude, los cuales relacionan la permitividad del medio con sus resonancias electrónicas o magnéticas [7], [10]. Esta dispersión temporal influye de manera directa y profunda sobre la velocidad de grupo, el confinamiento modal y la estabilidad general de la propagación de la onda.

Debido a la alta complejidad geométrica y material que presentan estos sistemas, la obtención de soluciones analíticas exactas para las ecuaciones de Maxwell resulta, en la mayoría de los casos, matemáticamente inviable. Por consiguiente, los métodos numéricos —y en particular el método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (FDTD)— se han consolidado como herramientas insustituibles para modelar la evolución de los campos electromagnéticos en estructuras dispersivas y periódicas [7]. Esta metodología permite discretizar tanto el espacio como el tiempo empleando el algoritmo de Yee, y facilita la incorporación de condiciones de frontera absorbentes, como las capas perfectamente adaptadas (PML), las cuales son críticas para suprimir las reflexiones numéricas artificiales en dominios computacionales finitos.

2.1. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS: PRINCIPIOS BÁSICOS

La naturaleza fundamental de la luz y otras formas de radiación se describe mediante las ondas electromagnéticas, las cuales consisten en perturbaciones acopladas y oscilantes de los campos eléctrico (\mathbf{E}) y magnético (\mathbf{H}). Estas ondas se propagan a través del espacio transportando tanto energía como momento lineal, describiendo trayectorias ortogonales a los vectores de los campos que las constituyen [14]. En el vacío, la propagación de estas perturbaciones ocurre a una velocidad constante que representa

un límite físico intrínseco del universo, la velocidad de la luz (c), la cual está definida matemáticamente por la relación:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad (1)$$

donde μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío y ε_0 es la permitividad eléctrica del vacío.

Sin embargo, cuando las ondas electromagnéticas ingresan a un medio material, su comportamiento y velocidad de fase se alteran de manera significativa debido a la interacción de los campos oscilantes con los momentos dipolares eléctricos y magnéticos de la estructura atómica o molecular del medio. A nivel macroscópico, esta interacción se caracteriza mediante el índice de refracción (n), el cual vincula la velocidad de propagación de la onda en el material con sus propiedades electromagnéticas relativas [15].

$$n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \quad (2)$$

donde ε_r y μ_r representan, respectivamente, la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética relativas del medio.

En el contexto del modelado de nanoestructuras y dispositivos avanzados, resulta crucial destacar que ε_r y μ_r rara vez son valores escalares constantes. En los materiales dispersivos y magneto-ópticos que conforman los sistemas de nanotubos, estas propiedades exhiben una dependencia altamente no lineal respecto a la frecuencia angular de la onda incidente (ω) y, con frecuencia, adoptan formas tensoriales debido a la anisotropía del medio [16].

La manipulación deliberada de estas propiedades a escalas espaciales comparables a la longitud de onda es el principio rector de la nanofotónica moderna. En estructuras dieléctricas periódicas, la variación espacial de la permitividad, denotada como $\varepsilon(\mathbf{r})$, induce múltiples fenómenos de dispersión ("scattering"). Esta modulación periódica provoca regímenes de interferencia macroscópica —tanto constructiva como destructiva— que alteran la relación de dispersión del sistema, dando origen a las bandas prohibidas fotónicas. Este mecanismo es el que permite moldear, confinar y dirigir el flujo de la radiación electromagnética de manera determinista [1].

2.1.1. Ecuaciones de Maxwell y propagación de ondas

El pilar fundamental para el análisis de cualquier fenómeno electromagnético, incluyendo la interacción de la luz con nanoestructuras, está constituido por las ecuaciones de Maxwell. Este conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas describe de manera macroscópica cómo los campos eléctricos y magnéticos se generan, se propagan y se alteran mutuamente en el espacio y el tiempo [10], [17].

En el dominio del tiempo y en su forma diferencial, las ecuaciones de Maxwell para un medio material general se expresan de la siguiente manera:

Ley de Faraday (ley de inducción):

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

Ley de Ampere-Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4)$$

Ley de Gauss para el campo eléctrico:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad (5)$$

Ley de Gauss para el campo magnético:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6)$$

donde \mathbf{E} es la intensidad del campo eléctrico, \mathbf{H} es la intensidad del campo magnético, \mathbf{D} es la densidad de flujo eléctrico, \mathbf{B} es la densidad de flujo magnético, \mathbf{J} es la densidad de corriente eléctrica y ρ_v es la densidad volumétrica de carga.

Para resolver este sistema, es indispensable introducir las relaciones constitutivas del medio, las cuales vinculan las excitaciones electromagnéticas con las respuestas macroscópicas del material. Para un medio lineal, isotrópico y no dispersivo, estas relaciones se definen mediante escalares simples [18].

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (7)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (8)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (9)$$

donde ε es la permitividad eléctrica, μ es la permeabilidad magnética y σ es la conductividad eléctrica del medio.

Derivación de la ecuación de onda en medios isotrópicos

Considerando una región del espacio libre de fuentes ($\rho_v = 0$ y $\mathbf{J} = 0$) y asumiendo un medio dieléctrico perfecto y homogéneo ($\sigma = 0$), las ecuaciones rotacionales se pueden desacoplar. Tomando el rotacional de la Ley de Faraday y aplicando identidades vectoriales estándar, junto con la Ley de Ampere-Maxwell, se obtiene la ecuación de onda electromagnética clásica de segundo orden [14], [18].

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

Un procedimiento análogo produce una ecuación idéntica para el campo magnético \mathbf{H} . Estas ecuaciones demuestran analíticamente que los campos electromagnéticos se propagan en forma de ondas con una velocidad de fase $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$.

Propagación en medios magneto-ópticos y anisótropos

Sin embargo, para los medios magneto-ópticos que son centrales en esta investigación, la aproximación de isotropía descrita anteriormente deja de ser válida. Cuando un material magneto-activo (como los utilizados en cristales magneto-fotónicos) es sometido a un campo magnético estático o posee una magnetización intrínseca, el medio exhibe un comportamiento giratorio. Esto implica una ruptura fundamental de la simetría de inversión temporal [19].

En este régimen, la respuesta del material depende fuertemente de la dirección de propagación y del estado de polarización de la luz. En consecuencia, las propiedades materiales no pueden describirse mediante valores escalares, sino a través de tensores hermiticos. Para un medio magneto-óptico magnetizado a lo largo del eje z , la permeabilidad magnética efectiva (o la permitividad, dependiendo del régimen de frecuencia y del material) adopta una forma tensorial $\bar{\mu}$ [20].

$$\bar{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 & i\mu_2 & 0 \\ -i\mu_2 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} \quad (11)$$

La relación constitutiva magnética se reescribe entonces como $\mathbf{B} = \bar{\mu}\mathbf{H}$. La presencia de los componentes imaginarios fuera de la diagonal principal ($\pm i\mu_2$) físicamente responsable del acoplamiento entre las componentes ortogonales del

campo electromagnético. Si se sustituye este tensor en las ecuaciones de Maxwell, la ecuación de onda generalizada adquiere una complejidad notable:

$$\nabla \times (\bar{\mu}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (12)$$

Este acoplamiento es el origen de efectos magneto-ópticos fundamentales, como la rotación de Faraday (una rotación del plano de polarización de la luz a medida que se propaga) y la propagación no recíproca de las ondas, lo cual es esencial para el diseño de aisladores ópticos y modos de borde unidireccionales [19], [21].

Adicionalmente, en la escala nanométrica, los coeficientes del tensor (μ_1, μ_2, μ_3) son fuertemente dispersivos, es decir, dependen de la frecuencia de la onda electromagnética (ω) . Debido a esta naturaleza tensorial y a la dispersión frecuencial, la obtención de soluciones analíticas exactas se vuelve matemáticamente prohibitiva para geometrías arbitrarias o periódicas. Por este motivo, el modelado riguroso de la propagación en sistemas de nanotubos magneto-ópticos requiere imperativamente el uso de técnicas numéricas de alta precisión, tales como el método FDTD [7].

2.1.2. Propiedades clave: polarización, dispersión y absorción

La descripción completa de la interacción entre ondas electromagnéticas y medios materiales exige analizar no solo las ecuaciones macroscópicas de Maxwell, sino también las propiedades físicas intrínsecas que determinan la respuesta del medio ante campos oscilatorios. Entre estas propiedades, la polarización, la dispersión y la absorción desempeñan un papel central, especialmente en sistemas nanoestructurados donde las dimensiones geométricas son comparables con la longitud de onda de la radiación incidente.

En términos macroscópicos, la interacción luz-materia se modela mediante las relaciones constitutivas que vinculan los campos eléctricos y magnéticos con las densidades de desplazamiento eléctrico y de flujo magnético. Sin embargo, estas relaciones encapsulan procesos microscópicos altamente complejos, tales como la oscilación forzada de cargas ligadas, las transiciones electrónicas y las resonancias magnéticas. El tratamiento formal de estos fenómenos se aborda mediante la teoría clásica de la dispersión electromagnética y la respuesta lineal del medio [10], [16].

En el contexto de la nanofotónica, estas tres propiedades no actúan de manera aislada. La ingeniería estructural de cristales fotónicos y magneto-fotónicos permite modificar simultáneamente la dispersión, la polarización y las pérdidas, optimizando el confinamiento de la radiación y el control espectral [1], [13]. La comprensión teórica

rigurosa de cada uno de estos fenómenos es indispensable para diseñar los dispositivos integrados que serán objeto de simulación en este trabajo.

Polarización

La polarización de una onda electromagnética describe la orientación y evolución temporal del vector campo eléctrico en el plano perpendicular a la dirección de propagación. En su forma más general, la polarización es elíptica; la polarización lineal y circular representan casos particulares de esta condición geométrica [16]. Si la onda se propaga en la dirección z , el campo eléctrico transversal puede expresarse matemáticamente como la superposición de dos componentes ortogonales:

$$\mathbf{E}(z, t) = E_{0x} \cos(kz - \omega t) \hat{x} + E_{0y} \cos(kz - \omega t + \delta) \hat{y} \quad (13)$$

La diferencia de fase δ determina la forma geométrica de la trayectoria descrita por el vector eléctrico. Cuando $\delta = \pm\pi/2$ y las amplitudes son iguales ($E_{0x} = E_{0y}$), se obtiene polarización circular; si $\delta = 0$ o π , la polarización es estrictamente lineal.

En medios anisotrópicos, el índice de refracción depende de la dirección de propagación y de la orientación del campo eléctrico, fenómeno conocido como birrefringencia [22]. En cristales magneto-ópticos, la presencia de un tensor de permeabilidad giromagnética introduce un acoplamiento entre las componentes ortogonales del campo. Esto produce la rotación continua del plano de polarización (efecto Faraday) y permite controlar la conversión entre estados de polarización lineal y circular [5], [19].

En sistemas de fotónica topológica, la polarización también se asocia íntimamente con el momento angular del campo y con la existencia de modos de borde unidireccionales que están protegidos topológicamente [3], [13]. Esto demuestra que la polarización no es solo una propiedad geométrica del campo, sino un parámetro físico fundamental ligado a la simetría del sistema. Además, en nanoestructuras periódicas, la interacción entre la periodicidad espacial y la anisotropía del material puede inducir polarizaciones elípticas complejas y estados cercanos a la polarización circular en rangos específicos de frecuencia, como resultado directo de la modificación de la estructura de bandas electromagnéticas [1].

Dispersión

La dispersión electromagnética describe la dependencia de la velocidad de propagación de la onda respecto a su frecuencia. Desde el punto de vista microscópico, la dispersión

surge porque los electrones y dipolos del medio no responden de manera instantánea al campo aplicado, sino que presentan una dinámica resonante.

En dieléctricos, el modelo clásico del oscilador de Lorentz expresa la permitividad compleja dependiente de la frecuencia como:

$$\tilde{\epsilon}(\omega) = \epsilon_{\infty} + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (14)$$

mientras que, para metales o materiales con electrones libres, el modelo de Drude gobierna la respuesta electromagnética:

$$\tilde{\epsilon}(\omega) = \epsilon_{\infty} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} \quad (15)$$

Estos modelos evidencian que la dispersión (parte real) está intrínsecamente ligada a la absorción (parte imaginaria), un principio de causalidad dictado por las relaciones de Kramers-Kronig [10], [23].

En los cristales fotónicos, la dispersión no solo es material, sino también estructural. La periodicidad espacial conduce a la formación de bandas permitidas y prohibidas, las cuales están determinadas por el problema espectral del electromagnetismo macroscópico (ecuación maestra para el campo magnético):

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \right) = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (16)$$

La relación de dispersión resultante, $\omega(\mathbf{k})$, define la estructura de bandas del cristal y determina la velocidad de grupo de la energía electromagnética:

$$\mathbf{v}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}) \quad (17)$$

En regiones espectrales cercanas al borde de la banda fotónica, la velocidad de grupo puede reducirse significativamente, favoreciendo el confinamiento extremo y la acumulación de energía electromagnética [1]. Asimismo, en sistemas magneto-fotónicos, la dispersión depende además del estado de magnetización, lo que introduce fuertes asimetrías en la relación de dispersión y posibilita la propagación no recíproca [2].

Absorción

La absorción representa la conversión irreversible de la energía electromagnética en energía interna del material (generalmente calor). Matemáticamente, este fenómeno se introduce mediante la parte imaginaria del índice de refracción complejo:

$$\tilde{n}(\omega) = n(\omega) + i\kappa(\omega) \quad (18)$$

Como consecuencia de este término disipativo, la intensidad I de la onda decrece exponencialmente a medida que penetra en el medio, obedeciendo la Ley de Beer-Lambert:

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z} \quad (19)$$

donde el coeficiente de absorción α está directamente relacionado con el coeficiente de extinción κ mediante la expresión:

$$\alpha = \frac{2\omega\kappa}{c} \quad (20)$$

A nivel microscópico, la absorción puede originarse por diversas vías:

- Transiciones electrónicas interbanda.
- Colisiones electrónicas (pérdidas óhmicas en conductores).
- Resonancias magnéticas en el espectro de microondas u óptico.
- Excitaciones colectivas (como los plasmones de superficie).

Es imperativo destacar que la dispersión y la absorción no son propiedades independientes; obedecen al principio de causalidad. Matemáticamente, están rigurosamente vinculadas a través de las relaciones de Kramers-Kronig, las cuales dictan que el conocimiento de la dispersión de un material en todo el espectro de frecuencias permite determinar de forma unívoca su espectro de absorción, y viceversa [23]. En el diseño de nanoestructuras, minimizar α en las bandas operativas es crucial para maximizar la eficiencia de transmisión.

En nanoestructuras magneto-fotónicas, la incorporación de materiales o nanopartículas magnéticas puede aumentar las pérdidas ópticas debido a las resonancias magnéticas locales [6]. Sin embargo, un control teórico adecuado de la dispersión estructural permite compensar parcialmente estas pérdidas mediante un confinamiento modal optimizado.

Desde el punto de vista analítico y energético, el teorema de Poynting rige este balance:

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (21)$$

donde el término del lado derecho ($-\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$) representa la tasa de disipación de energía o trabajo realizado por el campo sobre las cargas del material [19].

Interacción conjunta de los tres fenómenos

En sistemas reales, la polarización, la dispersión y la absorción están profundamente interrelacionadas. La respuesta lineal completa del medio se describe de forma rigurosa mediante la susceptibilidad compleja:

$$\tilde{\chi}(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega) \quad (22)$$

donde la parte real (χ') determina la dispersión y la velocidad de fase, y la parte imaginaria (χ'') rige la absorción. Las relaciones de Kramers-Kronig vinculan inextricablemente ambas partes, garantizando la causalidad física del sistema [10].

En nanoestructuras periódicas magnetizadas, la ingeniería simultánea de la anisotropía tensorial, la periodicidad espacial y la respuesta espectral del material permite manipular estos tres fenómenos de manera concurrente. Esto abre la puerta al diseño de dispositivos con un control sin precedentes sobre la propagación electromagnética, tales como aisladores ópticos integrados, guías de onda estrictamente no recíprocas y sensores bioquímicos de alta sensibilidad.

2.1.3. Polarizaciones

La polarización es una propiedad vectorial fundamental de las ondas electromagnéticas que describe la orientación, la simetría y la dinámica temporal del campo eléctrico en el plano transversal a la dirección de propagación. Aunque en el vacío todas las ondas electromagnéticas son transversales, la orientación y la dinámica del campo pueden variar significativamente dependiendo del estado de polarización y de las propiedades del medio por el cual se propagan. Más allá de su interpretación puramente geométrica, la polarización está íntimamente ligada a la estructura matemática del campo electromagnético, a sus invariantes físicos y a su interacción con la materia. En sistemas nanoestructurados y medios magneto-ópticos, la polarización adquiere una dimensión dinámica, ya que puede modificarse por efectos de anisotropía, confinamiento espacial, dispersión espectral y la ruptura de la simetría de inversión temporal.

En el caso general, para una onda monocromática que se propaga en la dirección z , el campo eléctrico transversal puede representarse como:

$$\mathbf{E}(z, t) = E_{0x} \cos(kz - \omega t + \phi_x) \hat{x} + E_{0y} \cos(kz - \omega t + \phi_y) \hat{y} \quad (23)$$

La diferencia de fase $\delta = \phi_y - \phi_x$ y la relación entre las amplitudes (E_{0x} y E_{0y}) determinan el estado de polarización. Eliminando la dependencia temporal, se obtiene la ecuación general de la elipse de polarización [15], [16]:

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_x E_y}{E_{0x} E_{0y}} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (24)$$

Esta expresión demuestra analíticamente que la polarización elíptica es el estado más general de una onda electromagnética.

Formalismo matricial y parámetros de Stokes

Para facilitar el análisis matemático, el estado de polarización completamente coherente puede representarse mediante un vector complejo de dos componentes, conocido como el vector de Jones [16]:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} E_{0x} e^{i\phi_x} \\ E_{0y} e^{i\phi_y} \end{pmatrix} \quad (25)$$

Las transformaciones de polarización inducidas por sistemas ópticos lineales (como polarizadores o retardadores) se describen multiplicando este vector por matrices de transferencia de 2×2 .

Por otro lado, para describir radiación parcialmente polarizada o campos fluctuantes, se utiliza la matriz de coherencia (o matriz de polarización) [24]:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_y E_x^* \rangle & \langle E_y E_y^* \rangle \end{pmatrix} \quad (26)$$

A partir de los elementos de esta matriz se definen los cuatro parámetros de Stokes (S_0, S_1, S_2, S_3):

$$S_0 = |E_{0x}|^2 + |E_{0y}|^2 \quad (27)$$

$$S_1 = |E_{0x}|^2 - |E_{0y}|^2 \quad (28)$$

$$S_2 = 2E_{0x}E_{0y} \cos \delta \quad (29)$$

$$S_3 = 2E_{0x}E_{0y} \sin \delta \quad (30)$$

Estos parámetros permiten representar cualquier estado de polarización como un punto sobre la superficie o en el interior de la esfera de Poincaré [24], [25]. A partir de ellos, el grado de polarización P del campo se define como:

$$P = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0} \quad (31)$$

Polarización lineal

La polarización lineal ocurre cuando las componentes del campo oscilan en fase ($\delta = 0$ o π). En este estado, que corresponde a un punto sobre el ecuador de la esfera de Poincaré, el vector eléctrico oscila a lo largo de una dirección fija. En medios isotrópicos y homogéneos, este estado se mantiene invariante durante la propagación.

Sin embargo, en medios anisotrópicos, la ecuación de onda general admite modos propios con diferentes constantes de propagación [26]. La diferencia de índices de refracción ortogonales ($\Delta n = n_e - n_o$), conocida como birrefringencia, produce una acumulación de fase diferencial durante la propagación a lo largo de una distancia L :

$$\Delta\phi = \frac{\omega}{c} (n_e - n_o)L \quad (32)$$

Esta diferencia de fase transforma de manera progresiva un estado lineal en uno elíptico, y eventualmente produce una rotación del estado de polarización [19].

Polarización elíptica

Representa el caso donde $S_3 \neq 0$ y las amplitudes difieren ($|E_x| \neq |E_y|$), de forma que la diferencia de fase no es un múltiplo entero de π . La elipse que traza el campo se caracteriza por su ángulo de orientación ψ y su ángulo de elipticidad χ , los cuales se relacionan con los parámetros de Stokes de la siguiente manera [23]:

$$\tan(2\psi) = \frac{S_2}{S_1}, \quad \sin(2\chi) = \frac{S_3}{S_0} \quad (33)$$

En medios dispersivos, la dependencia espectral de la permitividad $\tilde{\epsilon}(\omega)$ puede introducir variaciones en δ , modificando la elipticidad del campo en función de la frecuencia [27].

Polarización circular y medios magneto-ópticos

La polarización circular se obtiene cuando las amplitudes ortogonales son idénticas ($E_{0x} = E_{0y}$) y la diferencia de fase es exactamente $\delta = \pm\pi / 2$. El vector eléctrico describe un círculo perfecto en el plano transversal de magnitud constante, correspondiendo a los polos de la esfera de Poincaré ($S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = \pm S_0$).

Desde una perspectiva electrodinámica y cuántica avanzada, la polarización circular está indisolublemente asociada al momento angular de espín de la luz. La densidad de momento angular de espín para el campo electromagnético se define como [28]:

$$\mathbf{S}_{spin} = \frac{\varepsilon_0}{2i\omega} \text{Im}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}) \quad (34)$$

Para estados circulares puros, este vector apunta a lo largo de la dirección de propagación con su magnitud máxima.

Este estado adquiere una relevancia central en los medios magneto-ópticos. En materiales magnetizados, la permeabilidad o permitividad se describen mediante tensores giromagnéticos:

$$\bar{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 & i\mu_2 & 0 \\ -i\mu_2 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} \quad (35)$$

La presencia de los términos imaginarios fuera de la diagonal acopla las componentes ortogonales del campo, produciendo constantes de propagación distintas para los modos circulares derecho (\mathbf{k}_+) e izquierdo (\mathbf{k}_-):

$$\mathbf{k}_\pm = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\mu_1 \pm \mu_2)} \quad (36)$$

La diferencia entre \mathbf{k}_+ y \mathbf{k}_- es el origen microscópico del efecto Faraday [20]. En los cristales magneto-fotónicos bidimensionales, la interacción entre esta anisotropía magnética y la periodicidad estructural induce diferencias en la estructura de bandas fotónicas ($\omega(\mathbf{k})$) para modos circulares opuestos. Esta separación espectral rompe la reciprocidad del sistema, lo que favorece la aparición de modos de borde unidireccionales protegidos topológicamente y posibilita el diseño de aisladores ópticos [2], [5], [13].

Polarización en nanoestructuras y acoplamiento dipolar

A escala nanométrica, el confinamiento óptico extremo en sistemas periódicos altera la descripción puramente transversal del campo electromagnético, generando fuertes componentes longitudinales [27]:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \implies \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}\right) \neq 0 \quad (37)$$

En sistemas conformados por nanotubos, el acoplamiento entre un nano-emisor dipolar y el campo depende de la proyección del vector eléctrico sobre el eje de la nanoestructura. La polarización del campo influye directamente en el volumen modal

efectivo (V) de la cavidad. Esto modifica la tasa de emisión espontánea, un fenómeno cuantificado por el factor de Purcell [29]:

$$F_p = \frac{3}{4\pi^2} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^3 \frac{Q}{V} \quad (38)$$

donde Q es el factor de calidad de la resonancia. Pequeñas variaciones geométricas en la nanoestructura pueden inducir transiciones abruptas entre estados de polarización, optimizando así la interacción luz-materia.

Desacoplamiento modal en 2D: modos Transversal Eléctrico (TE) y Transversal Magnético (TM)

Para simular numéricamente la propagación de estas ondas polarizadas en sistemas nanoestructurados bidimensionales (como arreglos de cilindros o nanotubos infinitamente largos), es un paso teórico indispensable reducir la dimensionalidad de las ecuaciones de Maxwell.

Considerando que la estructura es invariante a lo largo del eje z (es decir, las derivadas parciales $\partial/\partial z = 0$), el sistema tridimensional de ecuaciones rotacionales de Maxwell se desacopla matemáticamente en dos conjuntos independientes de ecuaciones escalares, dando lugar a dos modos de polarización fundamentales [7]:

Modo Transversal Magnético (TM): En este modo, el campo eléctrico oscila únicamente de forma paralela al eje de los cilindros o nanotubos (eje z), mientras que el campo magnético reside completamente en el plano transversal (xy). Las ecuaciones que rigen la dinámica de este estado de polarización son:

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (39)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (40)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (41)$$

Modo Transversal Eléctrico (TE): De manera complementaria, en este modo el campo magnético está orientado a lo largo del eje z , y el campo eléctrico está confinado en el plano transversal (xy). Las ecuaciones correspondientes son:

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad (42)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (43)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (44)$$

Esta separación rigurosa de las polarizaciones es la piedra angular para la implementación del método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (FDTD) en 2D, ya que permite reducir significativamente el costo computacional al calcular la evolución temporal de solo tres componentes vectoriales por cada modo, en lugar de las seis componentes del espacio tridimensional completo [7].

Consideración teórica sobre la polarización circular

Es pertinente establecer un criterio analítico respecto a la evaluación del estado de polarización. En el modelado riguroso de medios materiales complejos y arreglos periódicos fuertemente dispersivos, alcanzar una trayectoria con excentricidad matemáticamente nula (un círculo perfecto absoluto) resulta computacional y físicamente improbable debido a la naturaleza discreta de las interferencias y a las impedancias acopladas.

No obstante, en el ámbito de la electrodinámica aplicada y la ingeniería de microondas/óptica, los estados de propagación que exhiben una alta simetría en sus componentes ortogonales y un desfase cercano a la cuadratura ($\pi / 2$) son categorizados y validados operativamente como polarización circular. Este criterio de aceptación práctica es respaldado en la literatura especializada; por ejemplo, Seguí Camacho y Marante Rizo (2022) establecen que, en el diseño y análisis de sistemas de radiación avanzados, estas condiciones de alta simetría transversal son suficientes para confirmar la operabilidad de la polarización circular en el sistema [30].

2.2. CRISTALES FOTÓNICOS

Los cristales fotónicos representan una de las contribuciones más significativas de la óptica moderna al control estructurado de la radiación electromagnética. El concepto fue introducido de manera independiente a finales de la década de 1980, cuando se propuso teóricamente que una modulación periódica del índice de refracción podía generar una banda prohibida fotónica (PBG, por sus siglas en inglés). Esta brecha constituye un intervalo espectral donde la propagación de la luz queda estrictamente inhibida en determinadas direcciones, o incluso en todas ellas de manera omnidireccional [11], [12].

Este planteamiento estableció un paralelismo directo y elegante con la física del estado sólido, donde el potencial eléctrico periódico en la red cristalina de los semiconductores produce bandas de energía y brechas electrónicas.

En un cristal fotónico, la periodicidad espacial de la permitividad dieléctrica, $\varepsilon(\mathbf{r})$, modifica fundamentalmente las soluciones de las ecuaciones de Maxwell. A diferencia de un medio homogéneo e isotrópico, donde las ondas planas son soluciones triviales, en un medio periódico las soluciones adoptan la forma de ondas de Bloch. Esto conduce a la formación de una estructura de bandas electromagnéticas, caracterizada por la relación de dispersión $\omega(\mathbf{k})$. Esta relación determina parámetros críticos como la velocidad de grupo, la densidad de estados y la existencia de regiones espectrales donde la propagación está prohibida [31].

Matemáticamente, asumiendo un medio dieléctrico lineal, isotrópico a nivel local, sin pérdidas y libre de fuentes, el problema se formula en el dominio frecuencial mediante la ecuación maestra para el campo magnético:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \right) = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (45)$$

Dado que la función dieléctrica cumple con la periodicidad de la red cristalina espacial, $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r} + \mathbf{R})$ (donde \mathbf{R} es un vector de la red de Bravais), el teorema de Bloch establece que las soluciones electromagnéticas (modos) deben tener la forma:

$$\mathbf{H}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (46)$$

donde \mathbf{k} es el vector de onda en la zona de Brillouin y $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ es una función vectorial que posee la misma periodicidad que la red cristalina [1]. Esta formulación revela que la estructura geométrica del material no solo altera la dirección de propagación macroscópica, sino que dicta la distribución espacial del campo a nivel microscópico y la densidad local de estados electromagnéticos.

Una consecuencia tecnológica fundamental de la existencia de las bandas prohibidas fotónicas es la posibilidad de controlar la emisión espontánea. Yablonovitch [11] señaló que, al suprimir los modos electromagnéticos disponibles en un intervalo espectral específico, es posible inhibir o modificar radicalmente la tasa de emisión radiactiva de un átomo o nano-emisor embebido en el cristal. Posteriormente, la demostración del control de emisión en cavidades fotónicas con un alto factor de calidad (Q) consolidó la importancia de estas estructuras para el desarrollo de láseres de bajo umbral y dispositivos de información cuántica [32].

Además del control espectral, los cristales fotónicos permiten una precisa ingeniería de la dispersión. Al diseñar deliberadamente la curvatura de las bandas fotónicas, es factible obtener regímenes de velocidad de grupo extremadamente reducida (*slow light*). Esta ralentización del paquete de ondas incrementa drásticamente el tiempo de interacción luz-materia, favoreciendo la aparición de efectos ópticos no lineales [33]. Esta capacidad de controlar simultáneamente la propagación, la fase y la localización espacial convierte a los cristales fotónicos en la plataforma idónea para la fotónica altamente integrada.

En escalas nanométricas, donde las dimensiones estructurales son comparables con la longitud de onda de operación, el comportamiento del campo electromagnético se ve profundamente modificado por procesos de interferencia coherente múltiple. Revisiones exhaustivas sobre estructuras periódicas nanofotónicas han destacado cómo esta periodicidad puede amplificar fenómenos ópticos sutiles y generar confinamientos de volumen menores de la longitud de onda [34]. Este marco teórico es de vital importancia para la presente investigación, la cual se centra en analizar la propagación y dinámica temporal de ondas electromagnéticas en sistemas de nanotubos mediante simulaciones FDTD.

La complejidad y el potencial del sistema aumentan exponencialmente en el caso de los cristales magneto-fotónicos. En estos medios, la incorporación de materiales magneto-ópticos introduce una anisotropía tensorial y fuerza la ruptura de la simetría de inversión temporal. Como se discutió en secciones anteriores, esto modifica asimétricamente la relación de dispersión y facilita fenómenos avanzados como la propagación no recíproca. La demostración experimental de estados electromagnéticos unidireccionales inmunes a la retrodispersión confirmó que la convergencia entre la periodicidad dieléctrica y la magnetización da lugar a regímenes topológicos robustos [2]. Este hallazgo conecta de manera directa con el objetivo central de esta tesis: analizar cómo la arquitectura periódica y el estado de polarización interactúan dinámicamente en medios con dispersión de frecuencia.

En síntesis, los cristales fotónicos no constituyen meramente una herramienta de ingeniería óptica, sino un sistema físico complejo donde convergen los conceptos fundamentales de dispersión geométrica, simetría espacial, polarización vectorial y topología electromagnética. Su estudio profundo proporciona el cimiento teórico indispensable para comprender el confinamiento de la luz en nanoestructuras, estableciendo el marco conceptual sobre el cual se desarrollarán las simulaciones de esta investigación.

2.2.1. Tipos de cristales fotónicos

Los cristales fotónicos pueden clasificarse fundamentalmente según la dimensionalidad de su periodicidad espacial (1D, 2D y 3D), la naturaleza del contraste dieléctrico y la

simetría geométrica de su red. Esta clasificación trasciende la mera descripción estructural; la dimensionalidad determina de manera estricta la existencia y amplitud de la banda prohibida fotónica (PBG), la anisotropía de la relación de dispersión, la sensibilidad a los estados de polarización y la viabilidad tecnológica para su integración en dispositivos [1]. Desde los trabajos fundacionales que propusieron el concepto de inhibición de la emisión espontánea [11], [12], múltiples arquitecturas han sido desarrolladas para explotar la interferencia electromagnética a nivel macroscópico en diversas plataformas materiales.

Cristales fotónicos unidimensionales (1D)

Los cristales fotónicos 1D consisten en estructuras estratificadas que presentan una modulación periódica del índice de refracción a lo largo de un único eje espacial. Los ejemplos más clásicos incluyen los espejos de Bragg distribuidos (DBR), los filtros dieléctricos multicapa y las microcavidades tipo Fabry-Pérot construidas mediante la introducción de defectos espaciales en la periodicidad.

En estas arquitecturas, la banda prohibida se origina exclusivamente por la interferencia constructiva de las ondas retrodispersadas y la interferencia destructiva de las ondas transmitidas en las interfaces dieléctricas. La condición de Bragg, que define las longitudes de onda resonantes para las cuales la reflexión es máxima (centro del bandgap), se expresa matemáticamente como [35]:

$$m\lambda = 2dn_{\text{eff}} \cos \theta \quad (47)$$

donde m es el orden de difracción (un número entero), λ es la longitud de onda en el vacío, d es el periodo espacial de la celda unitaria, n_{eff} es el índice de refracción efectivo del medio y θ es el ángulo de incidencia respecto a la normal.

A pesar de su simplicidad estructural y de no poseer un bandgap omnidireccional absoluto (válido para todos los ángulos y polarizaciones), los cristales 1D permiten estudiar los principios fundamentales del control espectral. Además, constituyen una base teórica natural para el posterior análisis mediante matrices de transferencia y para la introducción de materiales magneto-ópticos en configuraciones resonantes simples [26].

Cristales fotónicos bidimensionales (2D)

En los cristales fotónicos 2D, la modulación periódica del índice de refracción ocurre en dos direcciones del plano (por ejemplo, el plano xy), asumiendo homogeneidad a lo largo del tercer eje (z). Geometrías típicas incluyen redes cuadradas o hexagonales formadas por cilindros dieléctricos inmersos en aire, o, de manera inversa, matrices de agujeros

perforados en un sustrato de alto índice. En la práctica experimental, el confinamiento en la tercera dimensión suele lograrse mediante reflexión interna total en estructuras conocidas como losas fotónicas (*photonic crystal slabs*) [36].

La importancia analítica de los cristales 2D radica en que permiten desacoplar rigurosamente las ecuaciones de Maxwell en dos estados de polarización independientes: el modo Transversal Magnético (TM) y el modo Transversal Eléctrico (TE). Al perturbar la red periódica (por ejemplo, eliminando una fila de cilindros), se generan defectos lineales que actúan como guías de onda altamente eficientes dentro del *bandgap*, o defectos puntuales que operan como cavidades con un elevado factor de calidad Q [36].

Asimismo, la ingeniería de dispersión en estas estructuras permite manipular drásticamente la relación $\omega(\mathbf{k})$. La velocidad de la energía electromagnética, caracterizada por la velocidad de grupo, se define como el gradiente espectral en el espacio recíproco:

$$\mathbf{v}_g = \nabla_{\mathbf{k}}\omega(\mathbf{k}) \quad (48)$$

Diseñando bandas fotónicas con curvaturas cercanas a cero (bandas planas), se obtienen regímenes de luz lenta (*slow light*) [37]. Esta reducción de \mathbf{v}_g incrementa exponencialmente el tiempo de interacción luz-materia, favoreciendo el confinamiento modal y amplificando los efectos ópticos deseados en dimensiones ultracompactas [33].

Cristales fotónicos tridimensionales (3D)

Los cristales fotónicos 3D presentan periodicidad dieléctrica en las tres dimensiones espaciales. Son las únicas estructuras capaces de producir bandgaps fotónicos absolutos o completos, es decir, intervalos espectrales donde la propagación de la luz está estrictamente prohibida para cualquier vector de onda \mathbf{k} tridimensional y para cualquier estado de polarización [38].

Arquitecturas complejas como las estructuras *woodpile* (estructura de barras cruzadas), las redes con simetría de diamante y los ópalos inversos han sido intensamente estudiadas desde la década de 1990 [34], [38]. En estos sistemas, el confinamiento volumétrico extremo permite modificar de manera profunda y determinista la densidad local de estados electromagnéticos (LDOS), brindando el control definitivo sobre fenómenos cuánticos como la emisión espontánea. Sin embargo, su complejidad de nanofabricación hace que los modelos 2D sigan siendo preferidos para muchas aplicaciones integradas.

Cristales Magneto-Fotónicos (MPCs)

Una extensión de vital importancia para esta investigación es la hibridación de redes periódicas con materiales que exhiben fuerte actividad magneto-óptica, dando origen a los cristales magneto-fotónicos (MPCs). En estos sistemas, además de la modulación espacial del tensor dieléctrico, la permeabilidad magnética (o permitividad, dependiendo de la frecuencia) adquiere una respuesta tensorial asimétrica inducida por un campo magnético estático o una magnetización intrínseca [39].

Para un material magnetizado a lo largo del eje z , el tensor de permeabilidad adopta una forma girotópica que introduce explícitamente la ruptura de la simetría de inversión temporal:

$$\bar{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 & i\mu_2 & 0 \\ -i\mu_2 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} \quad (49)$$

Esta fuerte anisotropía tensorial levanta la degeneración frecuencial entre los modos de polarización circular derecha e izquierda. Un hito experimental en este ámbito fue la observación de estados electromagnéticos unidireccionales que resultaron ser completamente inmunes a la retrodispersión geométrica en un cristal magneto-óptico iterativo [2]. Este tipo de arquitectura es el núcleo central de la presente tesis, ya que la interacción sinérgica entre la periodicidad de los nanotubos, la dispersión espectral y la anisotropía magnética es lo que determina la evolución espaciotemporal de la onda.

Cristales fotónicos topológicos

Como consecuencia directa de los avances en magneto-fotónica, ha emergido la categoría de los cristales fotónicos topológicos. Inspirados en el efecto Hall cuántico de la física de la materia condensada, estos sistemas presentan estructuras de bandas electromagnéticas caracterizadas por invariantes topológicos no triviales (como el número de Chern) [40].

En arquitecturas donde se rompe la simetría de inversión temporal (mediante el tensor giromagnético mencionado anteriormente), el teorema *bulk-edge correspondence* garantiza la aparición de modos de borde electromagnéticos. Estos modos fluyen en una sola dirección a lo largo de las interfaces del cristal y, de manera fascinante, pueden rodear defectos, esquinas e impurezas sin sufrir reflexión o pérdida de energía [3], [40].

La tipología de los cristales fotónicos abarca una diversidad de plataformas que responden a distintas necesidades de control espectral, confinamiento espacial y manipulación vectorial del campo. En el marco de esta investigación, y dadas las capacidades de discretización computacional, los **cristales magneto-fotónicos**

bidimensionales (arreglos de nanotubos) se erigen como la plataforma teórica y numérica óptima. Su dimensionalidad permite una clara separación de modos (TE/TM), mientras que su naturaleza rotacional habilita el estudio profundo de la propagación, la dispersión dependiente de la frecuencia y las transiciones de polarización mediante la resolución rigurosa del método FDTD.

2.2.2. Aplicaciones de los cristales fotónicos en óptica y fotónica

Las aplicaciones tecnológicas de los cristales fotónicos derivan de su capacidad inherente para modificar drásticamente la estructura de las bandas electromagnéticas y, por consiguiente, controlar la propagación, el confinamiento espacial y la emisión de la radiación a voluntad. Desde los trabajos pioneros que demostraron analíticamente la existencia de las bandas prohibidas fotónicas [11], [12], estas arquitecturas han evolucionado de simples reflectores a plataformas multifuncionales indispensables para la fotónica integrada, la óptica cuántica y, más recientemente, la fotónica topológica.

Control de emisión espontánea y cavidades resonantes

El impacto más profundo de los cristales fotónicos a nivel cuántico es su capacidad para modificar la emisión espontánea alterando la densidad local de estados electromagnéticos (LDOS). Si un átomo o nano-emisor se sitúa en un entorno donde su frecuencia de transición coincide con un *bandgap* fotónico absoluto, la emisión radiactiva queda completamente inhibida. Por el contrario, si se introduce un defecto puntual en la red geométrica, se crea una microcavidad que concentra la energía electromagnética en un volumen minúsculo [41].

El incremento de la tasa de emisión espontánea en estas cavidades respecto a su emisión en el vacío se cuantifica mediante el Factor de Purcell (F_p):

$$F_p = \frac{3}{4\pi^2} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^3 \left(\frac{Q}{V}\right) \quad (50)$$

donde λ es la longitud de onda de emisión, n es el índice de refracción del material, Q es el factor de calidad de la cavidad (que mide el tiempo de confinamiento del fotón) y V es el volumen modal efectivo. Este confinamiento extremo ($V \sim (\lambda/n)^3$) con altos factores Q ha permitido el desarrollo de láseres de muy bajo umbral, fuentes de fotones individuales deterministas y sistemas de electrodinámica cuántica de cavidades (cQED) [32], [36].

Guías de onda y circuitos integrados fotónicos

Al introducir defectos lineales continuos en un cristal fotónico bidimensional (por ejemplo, eliminando una fila de cilindros), se crean guías de onda fotónicas. A diferencia de las guías convencionales basadas en la reflexión interna total (donde se requiere un núcleo de alto índice rodeado de un revestimiento de bajo índice), en los cristales fotónicos el confinamiento transversal es un efecto puramente interferencial provocado por la banda prohibida [42].

Esto permite guiar la luz a través de curvaturas extremadamente pronunciadas (del orden de la longitud de onda) con pérdidas por radiación casi nulas, un hito inalcanzable para la óptica tradicional. Asimismo, mediante la ingeniería geométrica de la guía, es posible diseñar la relación de dispersión $\omega(\mathbf{k})$ para manipular la velocidad de grupo de la onda:

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (51)$$

Aplanando artificialmente la banda de dispersión fotónica, se logran regímenes de luz lenta (slow light, donde $v_g \ll c$), lo que comprime espacialmente la energía del pulso y amplifica exponencialmente la interacción luz-materia [33], [37].

Fibras de cristal fotónico (PCF)

Las fibras de cristal fotónico constituyen una de las aplicaciones comerciales más maduras de esta tecnología. Ideadas inicialmente por P. Russell [43], consisten en hilos de sílice con un patrón microscópico periódico de agujeros de aire que corren a lo largo de toda la fibra. La dispersión cromática de estas fibras (D) puede controlarse con extraordinaria precisión mediante el diseño geométrico de los agujeros:

$$D = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2 n_{\text{eff}}}{d\lambda^2} \quad (52)$$

Donde n_{eff} es el índice efectivo del modo fundamental. Las PCF han revolucionado la óptica no lineal al permitir la generación de supercontinuo (espectros de luz blanca altamente coherentes) y la transmisión de alta potencia a través de núcleos huecos donde el daño material es inexistente [43].

Sensado óptico

La extrema sensibilidad de las resonancias fotónicas frente a las variaciones del entorno dieléctrico los convierte en plataformas sensoriales de vanguardia. La infiltración de analitos (gases o fluidos) en los poros de un cristal fotónico altera el índice de refracción

efectivo medio (∇n), lo que induce un corrimiento medible en la longitud de onda de resonancia ($\nabla \lambda$) o en el borde de la banda prohibida [44]:

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} \approx \frac{\Delta n}{n_{\text{eff}}} \quad (53)$$

El intenso confinamiento modal en defectos optimiza la superposición entre el campo eléctrico y el analito, proporcionando límites de detección a nivel molecular para aplicaciones biomédicas y de monitoreo ambiental.

Fotónica no lineal

El aumento del campo eléctrico local asociado a la luz lenta ($v_g \rightarrow 0$) y al confinamiento en cavidades favorece la aparición de efectos ópticos no lineales incluso con potencias de entrada muy bajas. La eficiencia de procesos como la generación de segundo armónico o el efecto Kerr óptico escala de forma inversamente proporcional al cuadrado de la velocidad de grupo ($\propto (c / v_g)^2$). Soljačić y Joannopoulos demostraron que los cristales fotónicos reducen los requisitos de potencia para conmutadores ópticos ultrarrápidos en varios órdenes de magnitud [45].

Fotónica topológica y aisladores magneto-ópticos integrados

Una de las fronteras más activas es la aplicación de la topología matemática a las bandas electromagnéticas. Al introducir materiales magneto-ópticos (como granates de itrio y hierro, YIG) y someterlos a un campo magnético estático, el tensor de permeabilidad rompe la simetría de inversión temporal (\mathbf{T} -symmetry). En el marco de bandas fotónicas degeneradas, esto abre un gap topológico caracterizado por un número de Chern no nulo.

La consecuencia macroscópica de esta física es la aparición de modos de borde unidireccionales [2], [3]. Para aplicaciones en circuitos integrados, esto permite la creación de aisladores ópticos perfectos, donde el desfase no recíproco acumulado ($\Delta\beta$) entre modos que viajan en direcciones opuestas se maximiza:

$$\Delta\beta = \beta_{\text{forward}} - \beta_{\text{backward}} \neq 0 \quad (54)$$

Estos componentes son críticos para proteger a los láseres integrados de reflexiones parásitas destructivas [46].

Interacción con nanoemisores en medios dispersivos

En sistemas nanoestructurados fuertemente dispersivos, como los arreglos periódicos de nanotubos, el entorno fotónico dicta la dinámica temporal de las ondas emitidas. La

respuesta dieléctrica de estos materiales suele obedecer a modelos espectrales (Drude o Lorentz), lo que introduce una dependencia compleja entre la absorción, la dispersión y el confinamiento de la cavidad.

Recientemente, Burlak y Medina-Ángel [29] demostraron que nano-emisores dipolares acoplados a sistemas tridimensionales de nanotubos dispersivos pueden experimentar una dinámica de radiación fuertemente alterada. La hibridación entre las resonancias propias del nanotubo y los modos de la cavidad periódica induce efectos análogos a regímenes láser sin inversión de población. Este antecedente conecta directamente con el objetivo central de esta tesis: utilizar el método numérico FDTD para resolver simultáneamente la evolución de las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones auxiliares de dispersión material, revelando cómo las redes de nanotubos manipulan el vector de polarización y la propagación de la radiación a escala nanométrica.

2.2.3. Materiales dieléctricos: características ópticas

La viabilidad y eficiencia de cualquier dispositivo basado en cristales fotónicos dependen críticamente de las propiedades ópticas de los materiales dieléctricos que conforman su red periódica. La selección de estos materiales no responde únicamente a criterios de nanofabricación, sino a rigurosas exigencias electrodinámicas que determinan la formación de la banda prohibida, la sensibilidad espectral y la interacción con campos confinados [31].

Contraste dieléctrico y formación del bandgap

El parámetro fundamental en el diseño de un cristal fotónico es el contraste del índice de refracción entre los medios que lo componen, definido frecuentemente como la relación $\Delta n / n$ o $\varepsilon_a / \varepsilon_b$. Para cristales fotónicos bidimensionales y tridimensionales, la teoría electromagnética de Bloch demuestra que la apertura de una banda prohibida fotónica (PBG) completa requiere un contraste dieléctrico mínimo significativo [38].

Si el contraste es demasiado bajo, la dispersión ("scattering") en las interfaces no es lo suficientemente fuerte como para que la interferencia destructiva supere la propagación normal de la onda, resultando en *pseudogaps* o en la ausencia total de bandas prohibidas. Por ello, materiales con alto índice de refracción (como el silicio, $n \approx 3.48$, o el arseniuro de galio) inmersos en medios de bajo índice (como el aire o el óxido de silicio) son la base estándar de la fotónica integrada.

Dispersión material y causalidad (Relaciones de Kramers-Kronig)

Ningún dieléctrico real posee un índice de refracción constante en todo el espectro electromagnético. La dependencia frecuencial de la permitividad, $\varepsilon(\omega)$, se conoce como

dispersión material. En regiones alejadas de las resonancias electrónicas o vibracionales del material, la dispersión puede describirse con alta precisión mediante el modelo clásico del oscilador de Lorentz para múltiples polos:

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_{\infty} + \sum_3 \frac{f_j \omega_p^2}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega} \quad (55)$$

donde ε_{∞} es la permitividad a frecuencias infinitas, f_j es la fuerza del oscilador para la j -ésima resonancia, ω_j es la frecuencia de resonancia y γ_j es el coeficiente de amortiguamiento [10].

Este modelo analítico pone de manifiesto un principio físico inviolable: la relación entre la dispersión (parte real de la susceptibilidad, χ') y la absorción (parte imaginaria, χ'') está rígidamente gobernada por las relaciones de Kramers-Kronig [47]. Estas relaciones integrales aseguran la causalidad del sistema (el efecto no puede preceder a la causa) y se expresan como:

$$\chi'(\omega) = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\omega' \chi''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (56)$$

donde \mathcal{P} denota el valor principal de Cauchy. Físicamente, esto implica que cualquier variación abrupta en el índice de refracción $n(\omega)$ (dispersión) conlleva inevitablemente un pico de absorción asociado $\kappa(\omega)$. En un cristal fotónico, la dispersión total experimentada por la onda es una combinación híbrida y compleja de esta dispersión material intrínseca y la dispersión estructural derivada de la periodicidad geométrica [31].

Ventanas de transparencia y pérdidas ópticas

Para aplicaciones prácticas y simulaciones a largo plazo de propagación de ondas, los materiales dieléctricos deben operar dentro de sus "ventanas de transparencia", donde las pérdidas por absorción ($\kappa \rightarrow 0$) son mínimas. Óxidos como el SiO_2 , nitruros como el Si_3N_4 y diversos granates son ampliamente utilizados debido a su baja absorción en los rangos visible e infrarrojo cercano.

El modelado preciso de estos medios en simulaciones computacionales requiere la integración empírica de las constantes ópticas tabuladas en referencias estándar de la literatura científica [48]. Sin embargo, al reducir las dimensiones a la escala nanométrica, emergen mecanismos de pérdida adicionales que eluden los modelos macroscópicos, tales como la dispersión de Rayleigh por rugosidad superficial, defectos en la red cristalina y absorción por estados superficiales no pasivados.

Anisotropía y respuesta tensorial

En medios estructuralmente anisotrópicos o cristales sometidos a tensiones, la permitividad deja de ser un escalar y asume la forma de un tensor simétrico de rango 2:

$$\bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (57)$$

Esta anisotropía cristalina intrínseca es fundamental en dispositivos diseñados para manipular o discriminar estados de polarización (birrefringencia). Aún más crítico para esta investigación es el caso de los dieléctricos magneto-ópticos (cristales magneto-fotónicos), donde la influencia de un campo magnético introduce términos imaginarios antisimétricos fuera de la diagonal principal. Como se analizó previamente, esta ruptura tensorial de la simetría es el motor de los efectos no recíprocos y de la divergencia en la propagación de polarizaciones circulares [2], [20].

Materiales dieléctricos a escala nanométrica

En el régimen de la nano-óptica, la interacción campo-materia experimenta desviaciones significativas respecto a la electrodinámica clásica de medios continuos masivos (*bulk*). El confinamiento espacial en geometrías de menor longitud de onda (como los nanotubos) genera componentes longitudinales del campo eléctrico y concentraciones locales extremadamente intensas (puntos calientes o *hotspots*) [49].

La teoría de dispersión de partículas demuestra que la sección eficaz de absorción y dispersión geométrica de estas estructuras depende críticamente del parámetro de tamaño $x = 2\pi a/\lambda$ [50]. Estos efectos adquieren especial relevancia cuando se integran nanoestructuras dispersivas, como los nanotubos de carbono. Estudios recientes, como el de Burlak y Medina-Ángel [29], evidencian que la dinámica radiactiva de los nano-emisores se ve profunda y no linealmente modificada por la respuesta espectral del medio nanoestructurado circundante.

Relevancia para la implementación en FDTD

En el contexto computacional de esta tesis, los materiales dieléctricos no solo constituyen el medio físico donde se conforman las bandas fotónicas, sino que representan un desafío central para la estabilidad y precisión del algoritmo FDTD. El fuerte contraste dieléctrico definirá el comportamiento electromagnético en las interfaces de las celdas de Yee; asimismo, la respuesta espectral y las pérdidas inherentes del material deberán integrarse rigurosamente en los coeficientes de las ecuaciones de actualización del FDTD. Este mapeo directo de las propiedades materiales dictará la correcta atenuación

y la velocidad de fase de la señal simulada, manteniendo la eficiencia y simplicidad del algoritmo original.

En consecuencia, una caracterización teórica exhaustiva de los tensores de permitividad y permeabilidad es un requisito ineludible para garantizar que la propagación electromagnética, la anisotropía magnética y las transiciones de polarización observadas en la simulación sean un reflejo fidedigno de la física real y no meros artefactos numéricos.

2.3. MÉTODO FDTD

El método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (FDTD, por sus siglas en inglés: *Finite-Difference Time-Domain*) se ha consolidado como una de las técnicas numéricas más robustas, intuitivas y versátiles para la resolución computacional de las ecuaciones de Maxwell en geometrías espaciales arbitrarias. Introducido originalmente por Kane S. Yee en 1966 [51] y formalizado para la electrodinámica moderna por investigadores como Allen Taflove y Dennis Sullivan [7], [52], este esquema ha revolucionado el modelado de nanoestructuras y dispositivos fotónicos.

A diferencia de los métodos analíticos tradicionales o las técnicas numéricas formuladas en el dominio de la frecuencia (como el Método de Elementos Finitos, FEM, o el Método de Momentos, MoM), el algoritmo FDTD resuelve directamente las ecuaciones diferenciales parciales rotacionales de Maxwell en su forma natural dependiente del tiempo. Para lograr esto, el método discretiza simultáneamente tanto el espacio continuo como la variable temporal, creando una red computacional entrelazada.

Su formulación estrictamente temporal otorga ventajas analíticas excepcionales. En primer lugar, permite modelar la evolución completa y dinámica de los campos electromagnéticos paso a paso, visualizando el flujo de energía ante excitaciones transitorias o monocromáticas. Al excitar el sistema con un pulso temporal ultracorto (de banda ancha), es posible obtener la respuesta espectral completa del dispositivo en un amplio rango de frecuencias mediante una sola ejecución de la simulación, aplicando una Transformada de Fourier a los datos temporales registrados [52].

En segundo lugar, la naturaleza directa de las ecuaciones de actualización del FDTD facilita enormemente la asignación de propiedades físicas complejas punto por punto en la malla espacial. Mediante formulaciones auxiliares, el algoritmo permite incorporar sin dificultad materiales dieléctricos y magnéticos que sean dispersivos (modelos de Drude o Lorentz), anisotrópicos (tensores giromagnéticos) y espacialmente inhomogéneos [51]. Todo esto se logra de manera explícita, evitando la necesidad de invertir matrices de gran tamaño, lo cual representa el principal cuello de botella computacional en los métodos frecuenciales.

En el contexto de esta investigación, estas características convierten al método FDTD en la herramienta computacional idónea. El estudio de la propagación de ondas electromagnéticas en cristales fotónicos y magneto-fotónicos —y particularmente la interacción con sistemas de nanotubos— exige modelar escenarios donde la dispersión estructural de la red periódica y la respuesta dispersiva del material desempeñan un papel central. La capacidad del FDTD para rastrear la onda en el dominio temporal permite observar y cuantificar directamente fenómenos complejos como la propagación no recíproca, la rotación del estado de polarización y el confinamiento en defectos a escala nanométrica.

2.3.1. Introducción al método FDTD

El método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (FDTD) es una técnica numérica determinista, concebida para resolver las ecuaciones de Maxwell de forma directa mediante la discretización simultánea del espacio y del tiempo. Su fortaleza principal radica en que permite modelar la evolución completa de los campos electromagnéticos sin asumir un régimen armónico (una frecuencia fija) preestablecido. Esto lo convierte en una herramienta insustituible para el análisis de fenómenos transitorios, la propagación de pulsos de banda ancha y la dinámica en materiales con dispersión dependiente de la frecuencia [7], [53].

El esquema algorítmico original fue propuesto por Kane S. Yee en 1966 [51]. Su contribución magistral fue la introducción de una discretización espacial escalonada, hoy conocida universalmente como la **celda de Yee**, que preserva la naturaleza topológica y las propiedades de conservación de las ecuaciones rotacionales de Maxwell en el entorno discreto.

Aproximación matemática mediante el Teorema de Taylor

El núcleo matemático del FDTD reside en la aproximación de las derivadas parciales continuas de las ecuaciones de Maxwell mediante diferencias finitas centrales. Para deducir esta aproximación, se emplea el desarrollo en series de Taylor de una función arbitraria $f(x)$ que representa una componente del campo electromagnético. Evaluando la función en puntos desplazados por medio incremento espacial ($\pm\Delta x / 2$) alrededor de un nodo central x_0 , se obtiene:

$$f(x_0 + \Delta x/2) = f(x_0) + \frac{\Delta x}{2} f'(x_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots \quad (58)$$

$$f(x_0 - \Delta x/2) = f(x_0) - \frac{\Delta x}{2} f'(x_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 f''(x_0) - \frac{1}{3!} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots \quad (59)$$

Restando la segunda ecuación de la primera, los términos con derivadas de orden par se anulan. Despejando la primera derivada $f'(x_0)$, se obtiene la aproximación de diferencia central:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x/2) - f(x_0 - \Delta x/2)}{\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (60)$$

El término $O(\Delta x^2)$ representa el error de truncamiento. Esta demostración prueba que la aproximación de diferencias centrales proporciona una precisión de segundo orden respecto a la resolución de la malla, minimizando drásticamente el error numérico en comparación con esquemas de diferencias hacia adelante o hacia atrás [53].

La celda de Yee y el esquema Leapfrog

Para aprovechar esta precisión de segundo orden tanto espacial como temporalmente, Yee diseñó una red cartesiana donde las componentes vectoriales de los campos no coexisten en el mismo punto físico. En la **celda de Yee** tridimensional de dimensiones Δx , Δy y Δz :

- Las componentes del campo eléctrico (**E**) se ubican en los centros de las aristas del cubo.
- Las componentes del campo magnético (**H**) se posicionan en los centros de las caras del cubo.

Esta disposición garantiza que cada componente del campo **E** esté rodeada por cuatro componentes de **H** de forma rotacional, y viceversa, simulando numéricamente las leyes de Ampere y Faraday.

En el dominio del tiempo, el método emplea un esquema escalonado conocido como *leapfrog*. Los campos no se calculan simultáneamente:

- El campo **E** se evalúa en instantes de tiempo enteros: $t = n\Delta t$.
- El campo **H** se evalúa en instantes intermedios: $t = (n + 1/2)\Delta t$.

Sustituyendo las derivadas de diferencias centrales en la Ley de Faraday ($\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$), la ecuación de actualización general para una componente magnética toma la forma explícita:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} &= \mathbf{H}_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n-1/2} \\
 &+ \frac{\Delta t}{\mu} \left(\frac{\mathbf{E}_y|_{i,j+1/2,k+1}^n - \mathbf{E}_y|_{i,j+1/2,k}^n}{\Delta z} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\mathbf{E}_z|_{i,j+1,k+1/2}^n - \mathbf{E}_z|_{i,j,k+1/2}^n}{\Delta y} \right)
 \end{aligned} \tag{61}$$

Este método iterativo es explícito: el estado futuro del campo depende exclusivamente de sus estados pasados inmediatos y de los campos adyacentes, lo que elimina la necesidad de invertir grandes matrices del sistema [7].

Estabilidad (condición CFL) y dispersión numérica

Dado que FDTD es un método explícito, está sujeto a restricciones rigurosas de estabilidad condicional. Para evitar que las soluciones crezcan de forma divergente e infinita, el incremento de tiempo Δt debe estar limitado por el criterio de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) [54]:

$$\Delta t \leq \frac{1}{c_{\max} \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z}\right)^2}} \tag{62}$$

donde c_{\max} es la velocidad máxima de propagación de la luz en el dominio computacional. Este criterio establece físicamente que la onda electromagnética no puede propagarse a través de más de una celda de la malla en un solo paso de tiempo.

Adicionalmente, la discretización discreta del continuo introduce un artefacto conocido como **dispersión numérica**. Esto implica que, en la malla, la velocidad de fase de la onda simulada difiere ligeramente de su velocidad física real (c), y esta variación depende tanto de la frecuencia de la onda como de su ángulo de propagación respecto a la red cartesiana [55]. Para una propagación unidimensional, la relación de dispersión numérica se expresa como:

$$\left[\frac{1}{c\Delta t} \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) \right]^2 = \left[\frac{1}{\Delta x} \sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) \right]^2 \tag{63}$$

Para mitigar este error, la regla empírica estándar dicta que la resolución espacial debe ser al menos diez veces menor que la longitud de onda más corta presente en la simulación ($\Delta x \leq \lambda_{\min} / 10$). Estudios sistemáticos, como los desarrollados por Taflove

y Kunz & Luebbers [7], [55], han analizado exhaustivamente estas tasas de convergencia y error.

Extensiones del método y comparación

Desde su formulación original, el algoritmo básico de Yee ha sido vigorosamente extendido para abarcar sistemas físicos complejos, lo cual es crítico para esta investigación. Entre los avances más notables destacan:

- **Materiales dispersivos:** Incorporación de modelos dependientes de la frecuencia mediante la adaptación directa de las propiedades espectrales y las pérdidas en los coeficientes de actualización del esquema estándar de Yee [56].
- **Medios anisotrópicos y giromagnéticos:** Implementación de tensores de permitividad y permeabilidad resolviendo sistemas matriciales locales en cada celda [57].
- **Modelado subcelda y conformal:** Técnicas que deforman las celdas cercanas a interfaces curvas para evitar el efecto de escalera ("staircasing") y mejorar la precisión en geometrías cilíndricas [58].

En comparación con métodos de dominio frecuencial como el FEM o la Expansión de Ondas Planas (PWE), el FDTD adolece de un alto costo computacional y de memoria para volúmenes extremadamente grandes. Sin embargo, su capacidad inherente para modelar excitaciones transitorias, obtener respuestas de banda ancha mediante transformadas de Fourier, y su simplicidad conceptual para programar respuestas no lineales y no recíprocas, lo coronan como el estándar de la industria.

Aplicación en cristales fotónicos y magneto-fotónicos

En el contexto de los cristales fotónicos, el FDTD resulta invaluable. Permite modelar perturbaciones, defectos estructurales, y fuentes de nano-emisores sin la obligación de asumir una periodicidad infinita perfecta (como lo requiere el método PWE). Mediante la aplicación de Condiciones de Frontera Periódicas (PBC), también es posible excitar la malla con perfiles espaciales específicos para mapear numéricamente el diagrama de bandas $\omega(\mathbf{k})$ de la estructura.

Específicamente para los **cristales magneto-fotónicos bidimensionales**, el FDTD es la única herramienta que permite visualizar, cuadro por cuadro y en el dominio del tiempo, cómo la ruptura de la simetría temporal impulsada por el tensor magnético desacopla los modos circulares. Esto permite cuantificar directamente la rotación del estado de polarización, el confinamiento en los defectos de la red, y confirmar de forma explícita la inmunidad de propagación direccional frente a imperfecciones de los nanotubos.

2.3.2. Fronteras: PEC, ABC, PML y periodicidad

En el método FDTD, la discretización espacial y temporal obliga inexorablemente a definir un dominio computacional finito, mientras que el problema físico a modelar puede corresponder a un sistema cerrado (cavidades), abierto (radiación hacia el infinito) o periódico (cristales fotónicos). Esta discrepancia entre el "mundo físico" infinito y el "mundo numérico" acotado exige la implementación de condiciones de frontera rigurosas [7].

Si la frontera está mal elegida o deficientemente parametrizada, la simulación quedará dominada por reflexiones espurias, modos estacionarios numéricos e inestabilidades. Estos artefactos contaminan por completo las magnitudes físicas de interés, tales como los espectros de transmisión, las pérdidas radiativas y la evolución de la polarización [52]. Desde una perspectiva electrodinámica, las fronteras se diseñan para cumplir uno de dos propósitos: representar un límite físico real del sistema (PEC), o emular matemáticamente un entorno no acotado (ABC, PML) o infinitamente repetitivo (PBC) sin introducir reflexiones artificiales.

1. PEC: Conductor Eléctrico Perfecto (*Perfect Electric Conductor*)

Interpretación física y matemática: Un PEC idealiza un material con conductividad eléctrica infinita ($\sigma \rightarrow \infty$). En este régimen, las cargas libres se redistribuyen instantáneamente para anular cualquier campo eléctrico en el interior del material. En la interfaz geométrica, la condición de frontera impone matemáticamente que las componentes tangenciales del campo eléctrico y las componentes normales del campo magnético sean estrictamente nulas [53]:

$$\hat{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad (64)$$

$$\hat{n} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (65)$$

donde \hat{n} es el vector normal a la superficie.

Implementación y uso: En FDTD, esto se logra forzando a cero los nodos de las componentes tangenciales de \mathbf{E} en el límite de la malla en cada paso de tiempo. Es una condición incondicionalmente estable y de costo computacional nulo. Resulta idónea para modelar cavidades metálicas o planos de simetría, pero introducirá un 100% de reflexión artificial si se usa erróneamente para truncar un dominio que físicamente debería ser abierto.

2. ABC: Condiciones de Frontera Absorbentes (*Absorbing Boundary Conditions*)

Históricamente, antes del desarrollo de medios absorbentes artificiales, el truncamiento del espacio se realizaba mediante operadores diferenciales locales que buscaban aproximar la condición de radiación de Sommerfeld.

Formulación matemática (Condición de Mur): La ABC más conocida es la de Mur de primer orden [59]. Partiendo de la ecuación de onda escalar unidimensional, se asume que en el límite del dominio (por ejemplo, en $x = 0$) la onda solo viaja hacia el exterior (en dirección $-x$). El operador diferencial que anula exactamente esta onda saliente es:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{E}_{tan} \Big|_{x=0} = 0 \quad (66)$$

Al discretizar este operador mediante diferencias finitas centrales, se obtiene una ecuación de actualización en la frontera que "absorbe" la onda incidente.

Limitaciones: Aunque matemáticamente elegantes y computacionalmente baratas, las ABC clásicas (Mur, Liao, Higdon) tienen un defecto fundamental demostrado por la teoría de Engquist-Majda [60]: la absorción solo es perfecta para ondas que inciden de forma estrictamente normal a la frontera. Para ángulos de incidencia oblicuos o para ondas evanescentes (cuya constante de propagación es imaginaria), el coeficiente de reflexión numérico crece inaceptablemente. En el estudio de cristales magneto-fotónicos, donde abundan las múltiples direcciones de difracción y los modos fuertemente confinados, las ABC resultan insuficientes [7].

3. PML: Capa Perfectamente Adaptada (*Perfectly Matched Layer*)

El desarrollo de la PML por J. P. Berenger en 1994 marcó un hito en el electromagnetismo computacional, convirtiéndose en el método indispensable para simular espacios abiertos [61]. A diferencia de las ABC, la PML no es una condición de contorno o un operador diferencial, sino un *medio material artificial* de espesor finito que recubre el dominio computacional.

Fundamentación matemática (estiramiento de coordenadas): La genialidad de la PML fue reinterpretada rigurosamente por Chew y Weedon [62] mediante el concepto del espacio de coordenadas complejas estiradas (*complex coordinate stretching*). En el dominio de la frecuencia, las derivadas espaciales ordinarias se mapean a un espacio complejo multiplicándolas por un factor métrico s_ω :

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \rightarrow \frac{1}{s_\omega} \frac{\partial}{\partial \omega}, \text{ con } s_\omega = \kappa_\omega + \frac{\sigma_\omega}{i\omega\epsilon_0} \quad (67)$$

donde ω representa cualquier eje cartesiano (x, y, z) , $\kappa_\omega \geq 1$ controla la compresión de la longitud de onda en la capa, y σ_ω es un perfil de conductividad artificial.

Si analizamos una onda plana que viaja en la dirección x ($e^{-ik_x x}$) y penetra en una región PML a partir de $x = 0$, la transformación de coordenadas modifica la fase acumulada de la onda:

$$e^{-ik_x \int s_x dx} = e^{-ik_x \kappa_x x} \cdot e^{-\frac{k_x \sigma_x x}{\omega \epsilon_0}} \quad (68)$$

Sabiendo que $k_x = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \cos \theta$, el segundo término exponencial se convierte en una **atenuación real y estricta**, independiente de la frecuencia ω .

Por qué es indispensable: Esta formulación matemática garantiza dos propiedades físicas asombrosas:

- a) Impedancia adaptada: La impedancia de onda del medio PML es idéntica a la del dominio computacional adyacente. Por tanto, teóricamente hay cero reflexiones en la interfaz para cualquier frecuencia y cualquier ángulo de incidencia.
- b) Atenuación exponencial: Una vez dentro de la PML, los campos decaen rápidamente hasta alcanzar un límite PEC exterior (pared dura), donde se reflejan, viajan de vuelta por la PML y terminan de disiparse antes de reingresar al dominio útil.

Evolución (CPML): Para el modelado de cristales magneto-fotónicos altamente dispersivos, se emplea la variante moderna conocida como CPML (*Convolutional PML*) [63]. Esta técnica traslada la formulación de coordenadas complejas al dominio del tiempo utilizando integración mediante convolución recursiva, ofreciendo un rendimiento excepcional para atenuar pulsos de banda ancha, modos de baja frecuencia y campos evanescentes, sin requerir el desdoblamiento ("split") de las variables de campo original propuesto por Berenger [52].

4. Periodicidad: PBC y Bloch-Floquet

Cuando el sistema físico posee simetría traslacional (como una red infinita de nanotubos), trancar el dominio con una PML destruiría la física del problema, ya que absorbería la energía que debería continuar interactuando con las celdas vecinas. En este escenario, la condición matemáticamente correcta es imponer periodicidad.

PBC (Periodic Boundary Conditions): Para incidencia normal o periodicidad simple, los campos en un extremo del dominio computacional se asignan directamente al extremo opuesto.

Condiciones de Bloch-Floquet: Para simular un cristal fotónico infinito excitado por una onda oblicua, o para calcular su diagrama de bandas, se simula únicamente una celda unitaria de la red. Según el teorema de Bloch, el campo electromagnético en una frontera \mathbf{r} está relacionado con el campo en la frontera opuesta $\mathbf{r} + \mathbf{a}$ (donde \mathbf{a} es el vector fundamental de la red) mediante un desfase determinista dictado por el vector de onda \mathbf{k} :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}} \quad (69)$$

En la simulación en el dominio del tiempo, este factor de fase espacial complejo requiere técnicas especializadas (como el método de fase espectral o el método de inyección de campo polarizado) para mantener variables puramente reales en la matriz de Yee [31].

En el marco de esta tesis, la selección precisa de estas fronteras es esencial. Al analizar la propagación confinada en los defectos del cristal magneto-fotónico, las direcciones transversales al arreglo requerirán condiciones PML de alta absorción para emular la radiación hacia el espacio libre, mientras que los ejes longitudinales podrían requerir la implementación de condiciones de Bloch para estudiar los modos guiados fundamentales sin artefactos numéricos.

2.3.3. Resolución de ecuaciones de Maxwell (FDTD)

En el contexto del método FDTD, "resolver" las ecuaciones de Maxwell significa convertir el sistema continuo de ecuaciones diferenciales parciales acopladas en un conjunto de reglas algorítmicas de actualización explícita. Estas reglas evolucionan los campos electromagnéticos paso a paso en el tiempo sobre una malla espacial discreta. A diferencia de las formulaciones estrictas en el dominio de la frecuencia, el FDTD calcula la evolución transitoria real de los campos. Esta característica es extraordinariamente valiosa para el estudio de nanoestructuras, ya que una sola simulación excitada con un pulso de banda ancha permite extraer, mediante la Transformada Rápida de Fourier (FFT), la respuesta espectral completa del sistema y la dinámica de la polarización [7], [52].

Formulación base y esquema *leapfrog*

El punto de partida son las ecuaciones rotacionales de Maxwell en el dominio del tiempo para un medio con posibles pérdidas óhmicas, dictadas por una conductividad eléctrica efectiva σ y una conductividad magnética equivalente σ_m :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \sigma_m \mathbf{H} \quad (70)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} \quad (71)$$

Para resolver este sistema, el algoritmo discretiza las derivadas espaciales utilizando diferencias finitas centrales sobre la celda escalonada de Yee. En el dominio temporal, se implementa el esquema *leapfrog*. En este esquema, el campo eléctrico \mathbf{E} se evalúa en instantes de tiempo enteros ($n\Delta t$), mientras que el campo magnético \mathbf{H} se evalúa en instantes intermedios o fraccionarios ($(n + 1/2)\Delta t$).

Aplicando esta discretización de segundo orden, se obtienen las ecuaciones de actualización explícitas. Por ejemplo, desglosando la componente x de la Ley de Faraday para el campo magnético en un entorno tridimensional, la ecuación algorítmica resulta en:

$$\begin{aligned} H_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} &= C_{m1} H_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n-1/2} \\ &+ C_{m2} \left[\frac{E_y|_{i,j+1/2,k+1}^n - E_y|_{i,j+1/2,k}^n}{\Delta z} \right. \\ &\quad \left. - \frac{E_z|_{i,j+1,k+1/2}^n - E_z|_{i,j,k+1/2}^n}{\Delta y} \right] \end{aligned} \quad (72)$$

De manera análoga, la componente x de la Ley de Ampere-Maxwell para el campo eléctrico se actualiza como:

$$\begin{aligned} E_x|_{i+1/2,j,k}^{n+1} &= C_{e1} E_x|_{i+1/2,j,k}^n \\ &+ C_{e2} \left[\frac{H_z|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} - H_z|_{i+1/2,j-1/2,k}^{n+1/2}}{\Delta y} \right. \\ &\quad \left. - \frac{H_y|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} - H_y|_{i+1/2,j,k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} \right] \end{aligned} \quad (73)$$

Los coeficientes de actualización C_{m1} , C_{m2} y C_{e1} , C_{e2} agrupan las propiedades del material (ε , μ , σ) y los pasos de discretización (Δt , Δx). Por ejemplo, para el campo eléctrico, estos coeficientes se definen de manera estándar como:

$$C_{e1} = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}}, C_{e2} = \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}} \quad (74)$$

Estas ecuaciones demuestran que el nuevo valor de un campo en un punto específico del espacio depende únicamente de su historia inmediata (el paso de tiempo anterior) y de la circulación espacial de los campos ortogonales adyacentes.

Reducción a 2D y estabilidad condicional

Para el análisis de sistemas invariantes a lo largo del eje z , como los cristales magneto-fotónicos cilíndricos, el sistema se desacopla en los modos Transversal Magnético (TM $_z$) y Transversal Eléctrico (TE $_z$). El modo TE $_z$ es de particular relevancia porque confina el campo eléctrico en el plano transversal (E_x, E_y), lo cual es estrictamente necesario para observar el acoplamiento vectorial dictado por el tensor magneto-óptico.

Para garantizar que estas actualizaciones iterativas no diverjan, el método exige cumplir con la condición de estabilidad de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL). Físicamente, esto impide que la onda numérica viaje más rápido que la luz en el vacío dentro de la malla computacional. Asimismo, el tamaño de la celda (Δx) debe ser considerablemente menor a la longitud de onda ($\approx \lambda/10$) para mitigar la dispersión numérica artificial.

Tratamiento de medios complejos y magneto-ópticos en FDTD

En el esquema FDTD estándar, la permitividad y permeabilidad se asumen constantes en el tiempo. Para modelar materiales con dispersión de frecuencia sin incrementar el costo computacional con ecuaciones diferenciales auxiliares, el método se adapta evaluando las propiedades espectrales del material ($\varepsilon(\omega), \mu(\omega)$) directamente a la frecuencia central de la ventana espectral de interés. Los valores efectivos obtenidos se integran como constantes en los coeficientes de actualización (C_{e1}, C_{e2} , etc.) para esa ejecución específica. Este enfoque de banda estrecha permite capturar fielmente las pérdidas y el contraste dieléctrico manteniendo la eficiencia del algoritmo base [64].

El desafío computacional mayor reside en la incorporación del material magneto-óptico. La permeabilidad magnética $\bar{\mu}$ es un tensor giromagnético asimétrico con términos fuera de la diagonal (componentes imaginarios acoplados). En el método FDTD, la relación constitutiva tensorial $\mathbf{B} = \bar{\mu}\mathbf{H}$ implica que la actualización de H_x requiere conocer simultáneamente H_y , y viceversa. Dado que la malla de Yee ubica estas componentes en posiciones espaciales distintas, el algoritmo requiere realizar una interpolación espacial promediada de los campos ortogonales vecinos. Posteriormente, en cada celda perteneciente a la región magneto-óptica y en cada paso de tiempo, se debe resolver un sistema matricial local explícito (típicamente de 2×2) para actualizar correctamente el

vector de campo magnético [65]. Este tratamiento riguroso del tensor es lo que permite simular la ruptura de la simetría temporal y el surgimiento de la polarización circular electromagnética.

Flujo General de una Simulación FDTD

La arquitectura algorítmica que consolida la resolución de las ecuaciones de Maxwell para la investigación experimental sigue el siguiente flujo iterativo:

1. **Inicialización:** Definición de la malla, el paso de tiempo CFL y creación de las matrices en memoria.
2. **Mapeo de Materiales:** Asignación de ϵ , μ y tensores giromagnéticos en las regiones espaciales correspondientes.
3. **Fuentes y Fronteras:** Aplicación de las excitaciones (por ejemplo, *Total-Field/Scattered-Field*) y actualización de las fronteras absorbentes (PML) en los límites del dominio.
4. **Bucle Leapfrog:** Actualización escalonada del campo magnético \mathbf{H} (incluyendo la resolución tensorial), seguida de la actualización del campo eléctrico \mathbf{E} .
5. **Extracción de Datos:** Registro temporal de los campos en puntos de observación para el posterior análisis de fase, espectros de transmisión y generación de retratos de polarización.

CAPÍTULO 3 DESARROLLO TEÓRICO / EXPERIMENTAL

El presente capítulo detalla la metodología computacional y la implementación numérica desarrolladas para modelar la interacción de la radiación electromagnética con nanoestructuras periódicas. Traducir el marco teórico continuo de la electrodinámica a un entorno discreto exige una validación algorítmica rigurosa. Por ello, el proceso experimental de esta investigación se estructuró de manera evolutiva: se partió de la simulación de fenómenos electromagnéticos fundamentales en geometrías simples, escalando progresivamente la dimensionalidad y la complejidad física del sistema computacional.

Para garantizar el rigor numérico y la estabilidad de las simulaciones, la construcción de los códigos base se fundamentó en la arquitectura algorítmica descrita en la obra *Understanding the Finite-Difference Time-Domain Method* del profesor John B. Schneider

[65]. Todo el desarrollo experimental fue programado íntegramente en el lenguaje Python, aprovechando su alta capacidad para el cálculo matricial eficiente (mediante bibliotecas como NumPy) y la visualización de datos espaciotemporales.

La estrategia de desarrollo computacional se dividió en tres etapas de dimensionalidad creciente. Estas fases funcionaron como un entorno de pruebas controlado (sandbox) que permitió aislar, estudiar y validar componentes específicos del método numérico — como la inyección de fuentes, el truncamiento del espacio y la atenuación material— antes de ensamblar el simulador final para los cristales magneto-fotónicos:

Validaciones en una dimensión (1D)

El análisis experimental inició con el modelado del comportamiento de las ondas electromagnéticas en un espacio unidimensional. Este entorno resultó ideal para aislar los efectos de la dispersión numérica y calibrar las excitaciones. En esta fase inicial, se evaluó el impacto de implementar fuentes de excitación rígidas (*hard sources*) frente a fuentes suaves (*soft sources*), analizando su influencia en la propagación pura de la onda. Asimismo, se introdujeron fronteras de Campo Total / Campo Dispersado (TFSF) para inyectar ondas planas sin generar retrodispersión artificial, y se aplicaron Condiciones de Frontera Absorbentes (ABC) de primer orden para truncar la malla computacional. Finalmente, esta etapa sirvió para validar matemáticamente la propagación, transmisión y atenuación de ondas armónicas al atravesar interfaces entre regiones dieléctricas perfectas y medios con pérdidas óhmicas.

Extensión a dos dimensiones (2D)

Una vez estabilizados y validados los algoritmos unidimensionales, el código se escaló al espacio bidimensional (2D). Este es el paso teórico indispensable para la presente investigación, ya que permite el estudio de la difracción geométrica y la separación vectorial de las polarizaciones transversal y longitudinal. En primera instancia, se desarrolló una malla para el modo Transversal Magnético (TM_z) excitada por un pulso transitorio (onda de Ricker) en el centro del dominio, lo que permitió observar la radiación cilíndrica de banda ancha y su interacción analítica con las fronteras de la malla.

Posteriormente, se implementó el modo Transversal Eléctrico (TE_z), integrando condiciones absorbentes de segundo orden, inyección de onda plana mediante TFSF y la inclusión de dispersores cilíndricos modelados como Conductores Eléctricos Perfectos (PEC). Esta fase consolidó explícitamente las bases algorítmicas requeridas para el futuro modelado de los arreglos periódicos de nanotubos en el plano transversal.

Generalización a tres dimensiones (3D)

Para finalizar el proceso de validación metodológica y asegurar un dominio absoluto del esquema explícito completo, la exploración concluyó con el modelado volumétrico tridimensional. Se programó la radiación de un dipolo corto en un espacio homogéneo, estructurando el empaquetado computacional en Python necesario para aplicar condiciones absorbentes a una malla 3D completa.

Esta evolución metodológica sistemática de 1D a 3D proporcionó un entorno de pruebas robusto y la confiabilidad estructural necesaria para el simulador. Comprender a nivel de código fuente cómo reaccionan los campos espaciotemporales ante diferentes obstáculos dieléctricos, fronteras de inyección (TFSF) y condiciones absorbentes, constituyó el paso preparatorio fundamental. Este dominio algorítmico previo fue indispensable antes de programar las ecuaciones de actualización para medios materiales complejos —específicamente la dispersión espectral y los tensores de permeabilidad giromagnética—, así como las métricas de polarización circular requeridas para el análisis definitivo de los cristales magneto-fotónicos.

3.1. DISCRETIZACIÓN ESPACIOTEMPORAL

El núcleo computacional del método FDTD radica en la transformación de las ecuaciones diferenciales parciales continuas de Maxwell en un sistema de ecuaciones algebraicas explícitas. En el entorno físico real, los campos electromagnéticos existen en un continuo espaciotemporal; sin embargo, para su procesamiento algorítmico, este continuo debe ser truncado y evaluado en puntos discretos definidos por una malla de resolución finita.

Esta discretización se fundamenta en el algoritmo propuesto por Kane Yee. En lugar de evaluar todos los vectores de campo en un mismo nodo coordenado, el esquema de Yee distribuye las componentes del campo eléctrico (**E**) y magnético (**H**) en posiciones espacialmente alternadas.

De manera análoga, en el dominio del tiempo, la evolución no ocurre de forma simultánea. El método emplea un esquema de integración escalonado (*leapfrog*), donde los campos eléctricos y magnéticos se actualizan de forma intercalada, separados por medio paso temporal ($\Delta t/2$). Esta elegante arquitectura topológica garantiza que los operadores rotacionales espaciales se calculen naturalmente como la circulación de los campos adyacentes, logrando una precisión de segundo orden basada en la aproximación de diferencias finitas centrales del teorema de Taylor.

A continuación, se desarrolla la deducción matemática rigurosa de estas ecuaciones de actualización, partiendo desde el caso fundamental unidimensional, progresando a las

reducciones bidimensionales requeridas para esta investigación, y culminando con la generalización volumétrica.

3.1.1. Formulación unidimensional (1D): Fundamentos del esquema *leapfrog*

El desarrollo algorítmico del método FDTD comienza rigurosamente con la formulación unidimensional (1D). Esta simplificación geométrica es fundamental, ya que permite aislar la mecánica central del esquema *leapfrog* y estudiar fenómenos como la dispersión numérica, la estabilidad y la interacción con las fronteras sin la carga computacional y la complejidad vectorial de las dimensiones superiores.

Para derivar las ecuaciones de actualización, consideremos una onda electromagnética plana que se propaga exclusivamente a lo largo del eje z en un medio lineal, isotrópico y sin pérdidas ($\sigma = 0$). Asumimos que el campo eléctrico oscila puramente en la dirección x (E_x) y, por consiguiente, el campo magnético oscila en la dirección ortogonal y (H_y). Bajo estas condiciones, las derivadas parciales respecto a las coordenadas x e y se anulan estrictamente, reduciendo el sistema de ecuaciones rotacionales de Maxwell a dos ecuaciones escalares acopladas:

Ley de Faraday en 1D:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (75)$$

Ley de Ampere-Maxwell en 1D:

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (76)$$

Para trasladar este sistema continuo al dominio computacional discreto, se implementa la malla espacial escalonada unidimensional. En esta red, definida por un incremento espacial uniforme Δz y un paso temporal Δt , las variables continuas espaciotemporales se denotan mediante índices discretos, de forma que $F(z, t) = F(k\Delta z, n\Delta t) \equiv F^n(k)$.

Siguiendo la convención de la celda de Yee, las componentes de los campos se evalúan en posiciones desfasadas por medio paso espacial y medio paso temporal:

- El campo eléctrico E_x se registra en los nodos espaciales enteros (k) y pasos de tiempo enteros (n).

- El campo magnético H_y se registra en los nodos fraccionarios $(k + 1/2)$ y pasos de tiempo fraccionarios $(n + 1/2)$.

Discretización de la Ley de Faraday (actualización del campo magnético)

Aplicando la aproximación de diferencias finitas centrales de segundo orden a la ecuación de Faraday alrededor del punto espaciotemporal $(k + 1/2, n)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{E_x^n(k+1) - E_x^n(k)}{\Delta z} &= -\mu \frac{H_y^{n+1/2}(k+1/2) - H_y^{n-1/2}(k+1/2)}{\Delta t} \end{aligned} \quad (77)$$

Despejando el valor futuro del campo magnético ($H_y^{n+1/2}$), la ecuación explícita resulta:

$$\begin{aligned} H_y^{n+1/2}(k+1/2) &= H_y^{n-1/2}(k+1/2) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\mu \Delta z} [E_x^n(k+1) - E_x^n(k)] \end{aligned} \quad (78)$$

Discretización de la Ley de Ampere-Maxwell (actualización del campo eléctrico)

De manera análoga, aplicando las diferencias centrales a la ecuación de Ampere-Maxwell alrededor del punto $(k, n + 1/2)$, se obtiene:

$$\frac{H_y^{n+1/2}(k+1/2) - H_y^{n+1/2}(k-1/2)}{\Delta z} = \frac{E_x^{n+1}(k) - E_x^n(k)}{\Delta t} \quad (79)$$

Despejando el valor futuro del campo eléctrico (E_x^{n+1}):

$$\begin{aligned} E_x^{n+1}(k) &= E_x^n(k) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta z} [H_y^{n+1/2}(k+1/2) \\ &\quad - H_y^{n+1/2}(k-1/2)] \end{aligned} \quad (80)$$

Optimización computacional (formulación de Schneider)

En la implementación práctica en Python (como la desarrollada en los programas básicos de la etapa metodológica), resulta computacionalmente ineficiente calcular los factores $\frac{\Delta t}{\mu \Delta z}$ y $\frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta z}$ en cada iteración del bucle temporal. Para optimizar el código, la literatura especializada [66] recomienda normalizar estas ecuaciones introduciendo el **número de Courant** (S_c) y la **impedancia intrínseca** del medio (η):

$$S_c = \frac{c\Delta t}{\Delta z} \quad (81)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (82)$$

donde $c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ es la velocidad de propagación en el medio. Sustituyendo estos parámetros, las ecuaciones de actualización se reescriben en su forma algorítmica final:

$$\begin{aligned} H_y^{n+1/2}(k+1/2) &= H_y^{n-1/2}(k+1/2) \\ &\quad - \frac{S_c}{\eta} [E_x^n(k+1) - E_x^n(k)] \end{aligned} \quad (83)$$

$$\begin{aligned} E_x^{n+1}(k) &= E_x^n(k) \\ &\quad - S_c \eta [H_y^{n+1/2}(k+1/2) - H_y^{n+1/2}(k-1/2)] \end{aligned} \quad (84)$$

Esta formulación compacta es el núcleo de los simuladores unidimensionales desarrollados. En el código fuente, los campos E_x y H_y se representan mediante arreglos unidimensionales (vectores en memoria), y el algoritmo actualiza primero todos los elementos del arreglo magnético para luego utilizar esos nuevos valores en la actualización del arreglo eléctrico. Esta iteración secuencial es la materialización directa del esquema *leapfrog*.

3.1.2. Reducción bidimensional (2D): Modos TM_z y Te_z

El paso intermedio entre la simulación básica unidimensional y el modelado volumétrico completo es la reducción del problema a dos dimensiones (2D). Físicamente, esta aproximación es sumamente poderosa y constituye el núcleo computacional de esta investigación. Al modelar arreglos de nanotubos o fibras cilíndricas que componen un cristal fotónico, es válido asumir que la estructura geométrica es uniforme e infinitamente larga a lo largo de su eje longitudinal (convencionalmente, el eje z).

Bajo esta simetría traslacional, ninguna de las componentes del campo electromagnético presenta variaciones a lo largo de dicho eje, lo que implica matemáticamente que todas las derivadas parciales respecto a z se anulan ($\partial/\partial z = 0$). Al aplicar esta condición a las ecuaciones rotacionales de Maxwell en 3D, el sistema de seis ecuaciones acopladas se desacopla rigurosamente en dos conjuntos independientes de tres ecuaciones cada uno. Estos conjuntos definen dos modos de polarización ortogonales que pueden simularse por separado en una malla plana, reduciendo drásticamente el costo de memoria y procesamiento.

A continuación, se presentan las ecuaciones de actualización espaciotemporal para ambos modos en un medio base isotrópico y sin pérdidas. Esta formulación sirve como la cuadrícula computacional fundamental, sobre la cual posteriormente se implementarán las modificaciones tensoriales para el material magneto-óptico.

Modo Transversal Magnético (TMz)

En el modo TMz, el campo eléctrico oscila puramente de forma paralela al eje de los cilindros (E_z), mientras que el campo magnético está confinado completamente en el plano transversal de simulación (H_x y H_y). Las ecuaciones diferenciales parciales que rigen este modo son:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (85)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (86)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (87)$$

Al aplicar el esquema de discretización de Yee en una malla bidimensional plana con incrementos Δx y Δy , y utilizar diferencias finitas centrales en el tiempo con un paso Δt , obtenemos las ecuaciones de actualización explícitas algorítmicas. Evaluando el campo magnético en el medio paso temporal ($n + 1/2$) y el campo eléctrico en el paso entero ($n + 1$), las expresiones resultan en:

$$\begin{aligned} H_x^{n+1/2}(i, j + 1/2) &= H_x^{n-1/2}(i, j + 1/2) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\mu \Delta y} [E_z^n(i, j + 1) - E_z^n(i, j)] \end{aligned} \quad (88)$$

$$\begin{aligned} H_y^{n+1/2}(i + 1/2, j) &= H_y^{n-1/2}(i + 1/2, j) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} [E_z^n(i + 1, j) - E_z^n(i, j)] \end{aligned} \quad (89)$$

$$\begin{aligned}
& E_z^{n+1}(i, j) \\
& = E_z^n(i, j) \\
& + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[\frac{H_y^{n+1/2}(i + 1/2, j) - H_y^{n+1/2}(i - 1/2, j)}{\Delta x} \right. \\
& \left. - \frac{H_x^{n+1/2}(i, j + 1/2) - H_x^{n+1/2}(i, j - 1/2)}{\Delta y} \right]
\end{aligned} \tag{90}$$

Para el caso específico de los cristales magneto-fotónicos basados en ferritas magnetizadas longitudinalmente, el modo TM_z resulta de vital importancia. Dado que este modo contiene las componentes magnéticas transversales acopladas en el plano (H_x y H_y), es precisamente aquí donde el tensor giromagnético de Polder ejercerá su influencia física, permitiendo observar la ruptura de la simetría y las alteraciones en el estado de polarización.

Modo Transversal Eléctrico (TE_z)

De manera complementaria, en el modo TE_z el campo magnético está alineado con el eje de simetría de los cilindros (H_z), obligando al campo eléctrico a oscilar exclusivamente en el plano transversal (E_x y E_y). Las ecuaciones diferenciales correspondientes son:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y} \tag{91}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \tag{92}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \tag{93}$$

Discretizando de la misma manera sobre la red de Yee bidimensional escalonada, las ecuaciones de actualización explícitas para la implementación en código resultan en:

$$\begin{aligned}
& E_x^{n+1}(i + 1/2, j) \\
& = E_x^n(i + 1/2, j) \\
& + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta y} [H_z^{n+1/2}(i + 1/2, j + 1/2) \\
& - H_z^{n+1/2}(i + 1/2, j - 1/2)]
\end{aligned} \tag{94}$$

$$\begin{aligned}
E_y^{n+1}(i, j + 1/2) & \quad (95) \\
& = E_y^n(i, j + 1/2) \\
& \quad - \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} [H_z^{n+1/2}(i + 1/2, j + 1/2) \\
& \quad - H_z^{n+1/2}(i - 1/2, j - 1/2)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_z^{n+1/2}(i + 1/2, j + 1/2) & \quad (96) \\
& = H_z^{n-1/2}(i + 1/2, j + 1/2) \\
& \quad + \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_x^n(i + 1/2, j + 1) - E_x^n(i + 1/2, j)}{\Delta y} \right. \\
& \quad \left. - \frac{E_y^n(i + 1, j + 1/2) - E_y^n(i, j + 1/2)}{\Delta x} \right]
\end{aligned}$$

Ambos modos (TM_z y TE_z) constituyen la arquitectura computacional sobre la cual se desarrollaron los programas experimentales en Python descritos al inicio de este capítulo. Al codificar estas ecuaciones como arreglos matriciales, se sentaron las bases para insertar posteriormente las condiciones de frontera absorbentes y los materiales dispersivos.

3.1.3. Generalización tridimensional (3D)

La expansión del modelo algorítmico al espacio tridimensional (3D) requiere considerar la naturaleza vectorial completa de las ecuaciones de Maxwell. En este régimen general, la onda electromagnética no está restringida geométrica ni analíticamente, por lo que el campo posee seis componentes acopladas de manera simultánea tanto en el espacio como en el tiempo: tres para el campo eléctrico (E_x, E_y, E_z) y tres para el campo magnético (H_x, H_y, H_z).

Para discretizar este sistema físicamente complejo, el método FDTD emplea la celda unitaria volumétrica de Yee. En esta topología tridimensional, definida por los incrementos espaciales $\Delta x, \Delta y$ y Δz , las componentes vectoriales se distribuyen de manera estratégica para emular las leyes de circulación macroscópicas:

- Las componentes del campo eléctrico (**E**) se ubican tangencialmente en los centros de las aristas del paralelepípedo.
- Las componentes del campo magnético (**H**) se ubican ortogonalmente en los centros de las caras que componen el volumen.

Evaluando las leyes rotacionales de Faraday y Ampere-Maxwell en un medio dieléctrico lineal e isotrópico, y aplicando el esquema *leapfrog* con diferencias finitas centrales de segundo orden, se obtiene el sistema completo de seis ecuaciones escalares explícitas.

Actualización del campo magnético (Instante n+1/2): Las tres componentes de **H** dependen de sus valores en el medio paso temporal anterior y de las circulaciones espaciales cruzadas de los campos eléctricos adyacentes actuales:

$$\begin{aligned}
 & H_x^{n+1/2}(i, j + 1/2, k + 1/2) \\
 & = H_x^{n-1/2}(i, j + 1/2, k + 1/2) \\
 & + \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_y^n(i, j + 1/2, k + 1) - E_y^n(i, j + 1/2, k)}{\Delta z} \right. \\
 & \left. - \frac{E_z^n(i, j + 1, k + 1/2) - E_z^n(i, j, k + 1/2)}{\Delta y} \right] \quad (97)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & H_y^{n+1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + 1/2\right) \quad (98) \\
 & = H_y^{n-1/2}(i + 1/2, j, k + 1/2) \\
 & + \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_z^n(i + 1, j, k + 1/2) - E_z^n(i, j, k + 1/2)}{\Delta x} \right. \\
 & \left. - \frac{E_x^n(i + 1/2, j, k + 1) - E_x^n(i + 1/2, j, k)}{\Delta z} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & H_z^{n+1/2}(i + 1/2, j + 1/2, k) \quad (99) \\
 & = H_z^{n-1/2}(i + 1/2, j + 1/2, k) \\
 & + \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_x^n(i + 1/2, j + 1, k) - E_x^n\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta y} \right. \\
 & \left. - \frac{E_y^n(i + 1, j + 1/2, k) - E_y^n(i, j + 1/2, k)}{\Delta x} \right]
 \end{aligned}$$

Actualización del campo eléctrico (Instante n+1): Una vez actualizadas todas las componentes magnéticas en la malla volumétrica, el algoritmo avanza para calcular las tres componentes de **E** en el siguiente paso entero de tiempo, basándose en la circulación del campo magnético recién calculado:

$$\begin{aligned}
& E_x^{n+1}(i + 1/2, j, k) \\
& = E_x^n(i + 1/2, j, k) \\
& + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[\frac{H_z^{n+1/2}(i + 1/2, j + 1/2, k) - H_z^{n+1/2}(i + 1/2, j - 1/2, k)}{\Delta y} \right. \\
& \left. - \frac{H_y^{n+1/2}(i + 1/2, j, k + 1/2) - H_y^{n+1/2}(i + 1/2, j, k - 1/2)}{\Delta z} \right] \tag{100}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E_y^{n+1}(i, j + 1/2, k) \tag{101} \\
& = E_y^n(i, j + 1/2, k) \\
& + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[\frac{H_x^{n+1/2}(i, j + 1/2, k + 1/2) - H_x^{n+1/2}(i, j + 1/2, k - 1/2)}{\Delta z} \right. \\
& \left. - \frac{H_z^{n+1/2}(i + 1/2, j + 1/2, k) - H_z^{n+1/2}(i - 1/2, j + 1/2, k)}{\Delta x} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E_z^{n+1}(i, j, k + 1/2) \tag{102} \\
& = E_z^n(i, j, k + 1/2) \\
& + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[\frac{H_y^{n+1/2}(i + 1/2, j, k + 1/2) - H_y^{n+1/2}(i - 1/2, j, k + 1/2)}{\Delta x} \right. \\
& \left. - \frac{H_x^{n+1/2}(i, j + 1/2, k + 1/2) - H_x^{n+1/2}(i, j - 1/2, k + 1/2)}{\Delta y} \right]
\end{aligned}$$

Este sistema formaliza matemáticamente la evolución completa de cualquier onda electromagnética en un volumen discretizado y fue la base teórica para la programación del modelo de radiación dipolar desarrollado en la etapa experimental. No obstante, resulta imperativo señalar que modelar arreglos extensos de cristales magneto-fotónicos en un entorno 3D exige recursos computacionales masivos (memoria RAM y tiempo de procesamiento) que crecen a un ritmo volumétrico de $O(N^3)$, donde N es el número de celdas por dimensión. Por esta razón, una vez validada la completitud del esquema matricial tridimensional, el núcleo de esta investigación explota de manera rigurosa la simetría traslacional de los nanotubos, concentrando la carga computacional en las matrices 2D descritas en la sección previa para lograr resoluciones espaciales extremadamente altas en el plano de interacción magneto-óptica.

3.2. ESTABILIDAD NUMÉRICA Y RESOLUCIÓN ESPACIAL

La traducción de las ecuaciones continuas de Maxwell a un entorno discreto, tal como se desarrolló en la sección anterior, introduce inherentemente desafíos analíticos que no existen en el mundo físico ideal. Al segmentar el espacio y el tiempo mediante diferencias finitas, el algoritmo FDTD deja de ser una representación matemáticamente exacta y se convierte en una aproximación numérica. Si los parámetros rectores de esta malla computacional —específicamente los incrementos espaciales (Δx , Δy y Δz) y el paso de avance temporal (Δt)— se eligen de manera arbitraria, la simulación sufrirá de patologías computacionales severas.

Para que el modelo numérico de los cristales magneto-fotónicos sea una herramienta predictiva válida y confiable, es imperativo establecer fronteras operativas rigurosas. Existen dos fenómenos principales que amenazan la integridad de los resultados numéricos en el esquema explícito de Yee: la divergencia matemática infinita y la distorsión geométrica de la señal.

Por lo tanto, la viabilidad de cualquier simulación desarrollada en esta investigación está estrictamente condicionada a la observancia de dos criterios fundamentales:

- La estabilidad numérica: Gobernada por la restricción de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), la cual dicta el límite máximo del paso temporal para evitar que las actualizaciones iterativas de los campos electromagnéticos crezcan sin límite y "exploten" numéricamente.
- La resolución espacial y la dispersión numérica: Que establece el tamaño máximo admisible de la celda de Yee en relación con la longitud de onda de operación, con el objetivo de minimizar el error artificial en la velocidad de fase de la onda simulada.

A continuación, se desarrolla la formulación matemática de estos criterios, los cuales justifican directamente la selección de los parámetros de mallado y el tiempo total de iteración implementados en los códigos en Python para la obtención de los resultados experimentales.

3.2.1. Condición de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)

El método FDTD es un esquema de integración explícito en el dominio del tiempo. Esto significa que el estado futuro del campo electromagnético se calcula directamente a partir de sus estados pasados conocidos. Aunque esta característica evita la necesidad computacionalmente costosa de invertir matrices globales gigantescas (como ocurre en

los métodos implícitos), somete al algoritmo a una restricción de estabilidad matemática ineludible: la condición de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) [53].

Físicamente, la condición CFL establece el principio de causalidad dentro de la malla discreta. Dicta que la velocidad a la que la información numérica se propaga a través de la red computacional debe ser estrictamente mayor o igual a la velocidad física real a la que viaja la perturbación electromagnética (la velocidad de la luz en el medio, c). Si el paso temporal Δt es demasiado grande, la onda física cruzaría más de una celda espacial Δx en una sola iteración. Esto provocaría que el "dominio de dependencia numérico" no logre abarcar el "dominio de dependencia físico", resultando en una amplificación artificial y exponencial de los campos espurios hasta hacer divergir el modelo por completo.

Matemáticamente, para garantizar que los errores de truncamiento no crezcan iteración tras iteración, el paso de tiempo Δt debe estar acotado por la resolución espacial elegida. Para una malla tridimensional genérica con incrementos Δx , Δy y Δz el criterio absoluto de estabilidad CFL se expresa como:

$$\Delta t \leq \frac{1}{c_{max} \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z}\right)^2}} \quad (103)$$

donde c_{max} es la velocidad de propagación máxima dentro de todo el dominio computacional (típicamente la velocidad de la luz en el vacío, c_0 , si la malla incluye regiones de espacio libre).

Reducciones Dimensionales y el Número de Courant

En la práctica experimental de esta tesis, desarrollada en Python siguiendo la metodología de Schneider [66], la condición CFL se maneja mediante la definición de un parámetro adimensional conocido como el **Número de Courant** (S_c). Para mallas computacionales uniformes (donde $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta$), la condición general se simplifica dependiendo de la dimensionalidad del problema:

- **Para el entorno unidimensional (1D):** La ecuación se reduce a $\Delta t \leq \Delta/c_{max}$. En este caso, el límite superior de estabilidad ocurre cuando el número de Courant es exactamente $S_c = 1$. Este valor límite se conoce en la literatura como el "*Magic Step*" (Paso Mágico), ya que bajo ciertas condiciones permite una propagación exacta sin dispersión numérica en una dimensión.
- **Para el entorno bidimensional (2D):** Dado que las simulaciones de los cristales magneto-fotónicos en esta investigación explotan la invariancia longitudinal en el

eje z , el criterio rector para la configuración del simulador se restringe al plano transversal. Eliminando el término de z , la condición CFL en 2D exige que:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta}{\sqrt{2}c_{max}} \quad (104)$$

Por lo tanto, el número de Courant debe cumplir $S_c \leq 1 / \sqrt{2} \approx 0.707$.

En la configuración del simulador principal para esta tesis, la elección del paso de tiempo no se lleva al límite exacto de la igualdad. Al introducir materiales dieléctricos dispersivos, fronteras absorbentes (PML) y tensores de permeabilidad giromagnética para modelar la ferrita, se introducen perturbaciones numéricas adicionales. Para garantizar la estabilidad absoluta durante los largos tiempos de simulación requeridos para alcanzar el estado estacionario y observar la polarización circular, se adoptó convencionalmente un número de Courant con un margen de seguridad (por ejemplo, $S_c = 0.5$ o $S_c = 0.99 \times (1/\sqrt{D})$), asegurando así que las transiciones de polarización observadas provengan exclusivamente de la física del tensor magneto-óptico y no de inestabilidades latentes del algoritmo.

3.2.2. Dispersión numérica y criterios de mallado

El cumplimiento estricto de la condición de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) asegura que la simulación no diverja matemáticamente hacia el infinito, pero no garantiza la fidelidad física de los resultados numéricos. El proceso intrínseco de discretizar el continuo espaciotemporal en una cuadrícula introduce un artefacto numérico inevitable conocido como **dispersión numérica** [7].

En el mundo físico continuo y en el vacío, todas las ondas electromagnéticas viajan a la misma velocidad c , independientemente de su frecuencia o dirección de propagación. Sin embargo, en el "mundo discreto" de la malla de Yee, la velocidad de fase numérica de la onda simulada (\tilde{v}_p) difiere de la velocidad física real. Esta velocidad artificial se vuelve dependiente de dos factores: la frecuencia de la onda (o su longitud de onda relativa al tamaño de la celda Δx) y el ángulo de propagación respecto a los ejes principales de la malla cartesiana (anisotropía numérica).

Para comprender el origen de este error, podemos analizar la relación de dispersión numérica para una onda plana armónica que se propaga unidimensionalmente en una malla discreta con pasos Δx y Δt :

$$\left[\frac{1}{c\Delta t} \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) \right]^2 = \left[\frac{1}{\Delta x} \sin\left(\frac{\tilde{k}\Delta x}{2}\right) \right]^2 \quad (105)$$

En el límite continuo ($\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$), la función seno se aproxima a su argumento ($\sin(\theta) \approx \theta$), recuperando la relación de dispersión física exacta $\omega = ck$. Sin embargo, para resoluciones finitas, la función seno introduce una no linealidad. Esto provoca que las componentes de alta frecuencia (longitudes de onda más cortas) se propaguen más lentamente que las componentes de baja frecuencia a través de la red computacional.

Impacto y criterios de mallado

Si el tamaño de la celda es demasiado grande, la dispersión numérica causa distorsiones severas en la forma de los pulsos de banda ancha, introduce reflexiones espurias en los bordes y, lo más crítico para esta tesis, **genera errores acumulativos de fase**. Dado que la generación de polarización circular en el cristal magneto-fotónico depende de alcanzar una diferencia de fase exacta entre las componentes transversales del campo (H_x y H_y), cualquier retardo de fase artificial introducido por la malla destruiría la validez del fenómeno físico observado.

Para mitigar este error a niveles despreciables, la literatura especializada establece una heurística rigurosa para la resolución espacial: el tamaño máximo de la celda (Δ) debe ser, como mínimo, una décima parte de la longitud de onda más corta presente en la simulación.

$$\Delta \leq \frac{\lambda_{min}}{N}, \quad \text{con } N \geq 10 \quad (106)$$

Es crucial destacar que λ_{min} no es la longitud de onda en el vacío (λ_0), sino la longitud de onda acortada al penetrar en el medio material más denso del dominio computacional. Para los nanotubos de ferrita modelados en esta investigación, que poseen una permitividad relativa efectiva ($\epsilon_r = 5$) y permeabilidades dictadas por el tensor, la longitud de onda efectiva se comprime significativamente:

$$\lambda_{min} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (107)$$

Por lo tanto, en la configuración de los parámetros del simulador en Python, la cuadrícula espacial se definió asegurando una densidad de nodos ($N \geq 10$ a 20) suficiente para la longitud de onda mínima del barrido espectral dentro del material magneto-óptico. Esta resolución estricta, combinada con un paso temporal seguro que obedece la condición CFL, garantiza que el confinamiento modal y las rotaciones de polarización obtenidas

sean un reflejo fidedigno de la interacción luz-materia, aislando los resultados de cualquier aberración numérica significativa.

3.3. TÉCNICAS DE EXCITACIÓN NUMÉRICA

En su estado inicial ($t = 0$), el dominio computacional de una simulación FDTD se encuentra en reposo absoluto; es decir, todos los vectores de campo eléctrico y magnético en los arreglos de memoria son estrictamente nulos. Para estudiar fenómenos como la propagación, la difracción o la alteración del estado de polarización en los cristales magneto-fotónicos, es indispensable inyectar energía electromagnética en la malla numérica simulando la presencia de un emisor físico (como un láser o una antena).

Sin embargo, la introducción de esta excitación en un entorno discreto no es un proceso trivial. Si la fuente no se acopla correctamente a la arquitectura del esquema *leapfrog* de Yee, puede desencadenar una serie de patologías numéricas: puede generar ruido de alta frecuencia, inyectar componentes de corriente continua (DC) que corrompan el análisis de Fourier, o, en el peor de los casos, actuar como un obstáculo sólido artificial que refleje las ondas que intentan atravesarlo de regreso.

Este apartado detalla las metodologías de excitación implementadas y validadas a lo largo del desarrollo experimental en Python. Se describe la evolución algorítmica desde la inserción básica de valores numéricos en nodos individuales —conocidas como fuentes duras (*hard sources*) y fuentes suaves (*soft sources*)— utilizadas en las etapas iniciales de calibración unidimensional, hasta llegar a la implementación de la sofisticada frontera de Campo Total / Campo Dispersado (TFSF). Esta última técnica resulta metodológicamente obligatoria para inyectar ondas planas perfectas e iluminar los arreglos bidimensionales de nanotubos sin contaminar las métricas de transmisión y reflexión del cristal.

3.3.1. Fuentes duras y fuentes suaves

La forma más elemental de introducir energía electromagnética en una simulación FDTD es asignar un valor prescrito a un nodo específico de la malla computacional, forzándolo a oscilar según una función matemática temporal predefinida $S(t)$ (como un pulso gaussiano o una onda armónica). Durante el desarrollo experimental en una dimensión (1D), se evaluaron dos metodologías fundamentales para este propósito: la implementación de fuentes duras y el desarrollo de fuentes suaves.

Fuentes duras (*hard sources*)

Una fuente dura se implementa sobrescribiendo directamente el valor del campo en un nodo espacial de inyección (por ejemplo, el nodo k_{src}) en cada paso de tiempo,

ignorando por completo la ecuación de actualización algorítmica de Yee para esa posición específica. Matemáticamente, la asignación es absoluta:

$$E_z^{n+1}(k_{src}) = S(n\Delta t) \quad (108)$$

Aunque este enfoque es computacionalmente simple y logra excitar la malla inyectando la onda deseada, presenta un defecto físico crítico. Al obligar a que el nodo k_{src} posea un valor dictado exclusivamente por la función $S(t)$, el simulador anula el acoplamiento natural de las ecuaciones de Maxwell en ese punto.

Físicamente, esto convierte al nodo de la fuente en un Conductor Eléctrico Perfecto (PEC) reflectante. Si una onda electromagnética dispersada o reflejada por algún obstáculo en la malla (como un cristal fotónico) viaja de regreso y colisiona con el nodo de la fuente dura, la onda no podrá atravesarlo. En su lugar, experimentará una reflexión artificial y espuria del 100%, contaminando irreversiblemente el espacio de simulación y arruinando cualquier cálculo de pérdida o transmisión.

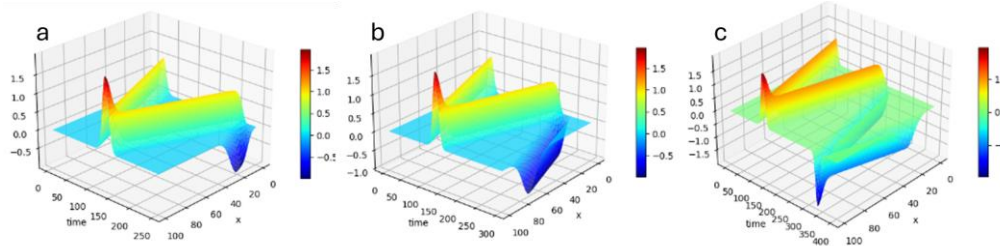


Figura 3.1. Visualización espaciotemporal de la propagación del campo eléctrico E_z en una malla de FDTD 1D con una fuente dura (hard source) [Simulación hecha en Python].

El dominio computacional tiene un tamaño discreto de 100 nodos, los paneles muestran la progresión de la simulación hasta los a.250, b.300 y c.400 pasos de tiempo. Se presentan tres instantáneas sucesivas de la simulación: **a.** Muestra la generación de un pulso en el centro de la malla y su propagación inicial hacia los bordes izquierdo y derecho. **b.** Se observa cómo las ondas alcanzan los límites de la malla y comienzan a reflejarse (asumiendo condiciones de frontera reflectoras o PEC). **c.** Representa el momento crítico en que las ondas reflejadas en los bordes retornan al centro de la malla (posición de la fuente original). Se aprecia claramente que, en lugar de atravesar el nodo de inyección de forma transparente, las ondas chocan contra él y sufren una **reflexión secundaria artificial y espuria**.

La figura 3.1 representa la principal limitación de las fuentes duras: al forzar el valor de un nodo a una función temporal específica, el nodo deja de obedecer las ecuaciones de actualización de Maxwell locales, comportándose numéricamente como un Conductor Eléctrico Perfecto (PEC) inamovible para cualquier onda incidente, contaminando así el espacio de simulación con reflexiones no deseadas.

Fuentes suaves (*soft sources*)

Para solucionar el problema de la retrodispersión artificial y permitir que el simulador registre con precisión la energía reflejada por los cristales magneto-fotónicos, es indispensable implementar una fuente suave o "transparente".

A diferencia de la fuente dura, la fuente suave no sobrescribe el valor del nodo. En su lugar, permite que el algoritmo FDTD actualice el campo eléctrico E_z en el nodo k_{src} de manera normal utilizando la ley de Ampere-Maxwell y, posteriormente, le **suma** la energía de la función de excitación:

$$E_z^{n+1}(k_{src}) = E_z^{n+1}(k_{src})|_{\text{FDTD}} + S(n\Delta t) \quad (109)$$

Al respetar la ecuación de actualización subyacente, el nodo de inyección mantiene la impedancia intrínseca del medio circundante. La consecuencia física directa es que la fuente se vuelve completamente transparente para cualquier onda que incida sobre ella.

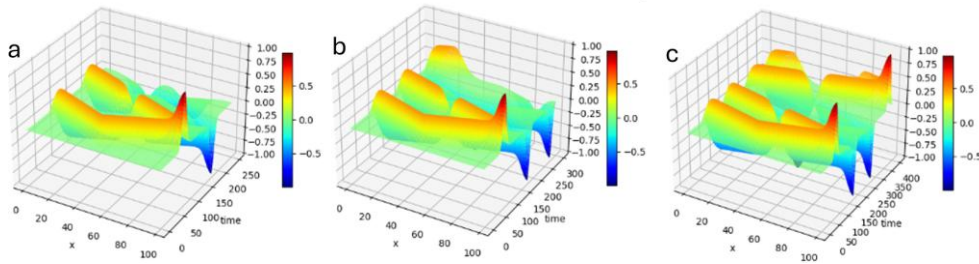


Figura 3.2. Visualización espaciotemporal de la propagación del campo eléctrico E_z en una malla de FDTD 1D excitada por una fuente suave (*soft source*) [Simulación hecha en Python].

El dominio computacional tiene un tamaño discreto de 100 nodos, los paneles muestran la progresión de la simulación hasta los a.250, b.300 y c.400 pasos de tiempo. La secuencia ilustra el comportamiento transparente del nodo de inyección: **a** Muestra la inyección continua de energía en el centro de la malla y su propagación natural hacia los límites espaciales izquierdo y derecho. **b**. Se observa a las ondas alcanzando los bordes del dominio y experimentando la reflexión de retorno hacia el centro (debido a la ausencia de fronteras absorbentes en esta prueba). **c** Representa el evento crucial de validación analítica. A diferencia de lo observado con la fuente dura, cuando las ondas reflejadas cruzan de vuelta por la posición de la fuente original (el centro de la malla), **logran atravesar el nodo sin sufrir ninguna reflexión secundaria o espuria**.

Esta secuencia demuestra exitosamente la ventaja física de la fuente suave o "aditiva". Al sumar el valor de excitación a la ecuación de actualización de Maxwell en lugar de forzar un valor absoluto en el nodo, la malla computacional preserva su impedancia intrínseca original. El nodo de la fuente se vuelve completamente transparente para las ondas dispersadas, permitiendo la correcta superposición de los campos electromagnéticos. Esta característica resulta indispensable para la investigación, ya que

garantiza que el cálculo posterior de la reflectancia en los cristales magneto-fotónicos no se contamine con energía artificial atrapada en la malla.

El dominio algorítmico de esta transición entre fuentes duras y suaves fue un paso preparatorio crucial. En el análisis del cristal magneto-fotónico, la medición exacta de la onda reflejada por los nanotubos de ferrita es imperativa para calcular los espectros, por lo que garantizar la transparencia del plano de inyección se convierte en un requisito analítico innegociable.

3.3.2. Frontera de campo total / campo dispersado (TFSF)

Aunque las fuentes suaves evitan la reflexión espuria en el punto de inyección, presentan una limitación fundamental al escalar el problema a múltiples dimensiones. En el modelado de cristales fotónicos, el estándar analítico exige iluminar la estructura periódica con una onda plana uniforme. Si se intenta generar una onda plana bidimensional inyectando energía a lo largo de una simple línea de nodos, los extremos de dicha línea actuarán como fuentes secundarias puntuales, irradiando ondas cilíndricas no deseadas (difracción de borde) que contaminan la pureza del frente de onda.

Para resolver este desafío y lograr una inyección de onda plana rigurosa, el simulador experimental implementa la sofisticada técnica de la frontera de Campo Total / Campo Dispersado, conocida por sus siglas en inglés como TFSF (*Total-Field/Scattered-Field*).

Fundamento teórico y división espacial

La técnica TFSF se basa en el principio de linealidad de las ecuaciones de Maxwell, el cual establece que el campo electromagnético total en cualquier punto del espacio (E_{tot} , H_{tot}) puede descomponerse analíticamente como la suma del campo incidente original (E_{inc} , H_{inc}) y el campo dispersado por los obstáculos (E_{disp} , H_{disp}):

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{inc}} + E_{\text{disp}} \quad (110)$$

$$H_{\text{tot}} = H_{\text{inc}} + H_{\text{disp}} \quad (111)$$

Aprovechando esta propiedad, el algoritmo TFSF divide lógicamente la malla computacional en dos zonas concéntricas:

1. **Región de campo total (TF):** Es la zona interior del dominio donde se ubica la estructura a estudiar (el cristal magneto-fotónico). En esta región, la simulación

propaga tanto la onda plana incidente como las ondas reflejadas/transmitidas por los nanotubos.

- Región de campo dispersado (SF):** Es la zona exterior que envuelve a la región TF. En esta área, la onda incidente es matemáticamente sustraída, de modo que *solo* existen las ondas que han chocado y rebotado contra el obstáculo. Esto facilita enormemente el cálculo de la sección transversal de dispersión y la reflectancia.

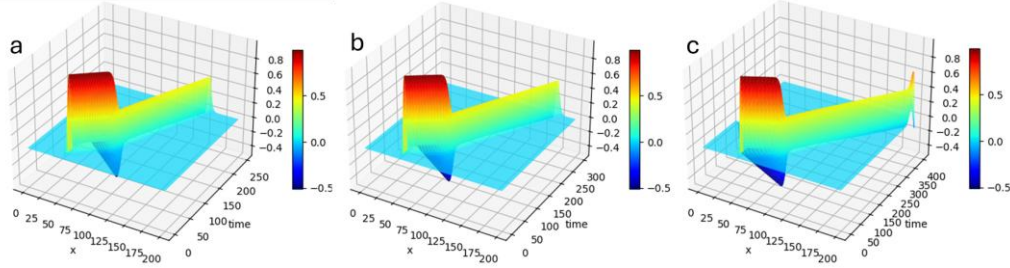


Figura 3.3. Evolución espaciotemporal del campo eléctrico E_z modelando una frontera espacio libre-dieléctrico mediante excitación TFSF en 1D [Simulación hecha en Python].

El dominio computacional tiene un tamaño discreto de 200 nodos, los paneles muestran la progresión de la simulación hasta los a.250, b.300 y c.400 pasos de tiempo. La secuencia ilustra el funcionamiento de la región de Campo Total / Campo Dispersado: **a** Se observa la inyección de una onda armónica continua mediante una frontera TFSF ubicada en el extremo izquierdo del dominio. La onda viaja a través del espacio libre (región de Campo Total) hacia la derecha, acercándose a la interfaz del material dieléctrico. **b**. La onda incidente impacta contra el medio material. En este punto, el haz se divide: una porción se transmite hacia el interior del dieléctrico (notablemente con una longitud de onda más corta debido al alto índice de refracción derivado de $\epsilon_r = 9$), mientras que otra porción se refleja de vuelta hacia la izquierda. **c** Representa la validación analítica de la técnica TFSF. La onda reflejada viaja en retroceso y cruza la frontera de inyección original. A la izquierda de esta frontera (en la región de Campo Dispersado), **solo** existe la onda reflejada, mientras que la onda incidente ha sido matemáticamente restada.

Esta simulación demuestra la capacidad de la frontera TFSF para inyectar energía de forma perfecta y, simultáneamente, permitir que las ondas retrodispersadas por los obstáculos (en este caso, el cambio abrupto de permitividad) crucen hacia la región exterior sin sufrir reflexiones artificiales, aislando así el campo incidente del campo dispersado.

Implementación algorítmica (condiciones de consistencia)

El motor FDTD actualiza los nodos en la región TF utilizando los valores totales, y en la región SF utilizando los valores dispersados. El desafío matemático surge exclusivamente en la interfaz entre ambas regiones. Al aplicar las diferencias finitas centrales en el límite, la ecuación de actualización para un nodo eléctrico en la región SF

requerirá el valor de un nodo magnético vecino que pertenece a la región TF (el cual contiene la suma del campo incidente y dispersado).

Para mantener la coherencia matemática y evitar inestabilidades, el algoritmo aplica un término corrector a las ecuaciones de Yee en la frontera. Si se requiere actualizar un nodo en la región de Campo Dispersado utilizando un nodo de la región de Campo Total, se debe **restar** el valor del campo incidente conocido. Por ejemplo, en una interfaz unidimensional, la actualización del campo eléctrico en el límite SF se expresa algorítmicamente como:

$$E_{SF}^{n+1}(k) = E_{SF}^n(k) - \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta x} \left[\left(H_{TF}^{n+1/2}(k + 1/2) - H_{inc}^{n+1/2}(k + 1/2) \right) - H_{SF}^{n+1/2}(k - 1/2) \right] \quad (112)$$

Inversamente, si la actualización de un nodo en la región TF requiere un vecino de la región SF, se debe **sumar** el campo incidente.

Para obtener los valores exactos de H_{inc} y E_{inc} en cada paso de tiempo, el simulador principal en Python ejecuta, de manera paralela y sincronizada, una simulación auxiliar 1D en el vacío. Esta cuadrícula "virtual" proporciona el perfil perfecto de la onda plana incidente que alimenta los términos correctores de la frontera TFSF bidimensional.

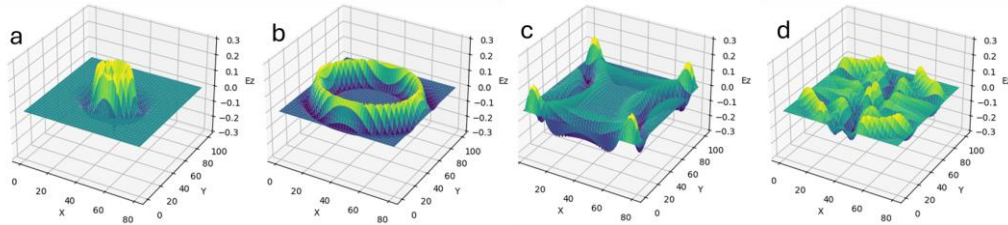


Figura 3.4. Evolución espacial bidimensional del campo eléctrico E_z y efecto de truncamiento abrupto en una malla FDTD [Simulación hecha en Python].

El dominio computacional tiene un tamaño discreto de 100 nodos, la inyección de una fuente puntual en el centro de un dominio bidimensional (Modo TMz). los paneles muestran la progresión de la simulación hasta los 250 pasos de tiempo, ilustrando la distribución topológica del campo en instantes de tiempo discretos: **a.**, **b.** se observa la generación de una onda cilíndrica (originada por una pulsícula de Ricker) propagándose radialmente hacia el exterior sin perturbaciones. **c.** el frente de onda alcanza los límites de la matriz computacional. Al no contar con condiciones absorbentes programadas, las fronteras actúan analíticamente como paredes rígidas (Conductores Eléctricos Perfectos o PEC), forzando una reflexión total. **d** expone el colapso de la simulación: las ondas reflejadas por los cuatro costados convergen en el centro, creando un patrón de interferencia caótico que enmascara por completo el fenómeno físico original. Esta secuencia visualiza el problema fundamental de simular espacios abiertos en mallas finitas truncadas.

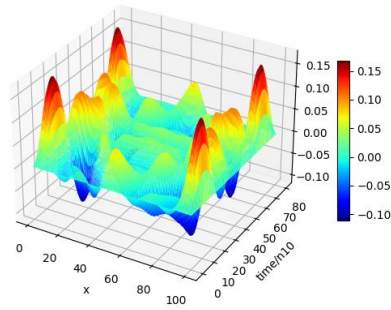


Figura 3.5. Diagrama espaciotemporal de reflexiones espurias en una malla FDTD bidimensional truncada [Simulación hecha en Python].

A diferencia de las vistas topológicas, esta superficie representa un corte transversal (eje x , de 0 a 100) evaluado de forma continua a lo largo del tiempo de simulación (eje de profundidad). Se observa el pulso original naciendo en el centro del dominio espacial y dividiéndose en dos frentes que viajan hacia los extremos. Las crestas diagonales marcan la trayectoria de propagación. Al impactar contra los bordes de la malla, la energía experimenta una reflexión severa (evidenciada por los picos de alta amplitud en los extremos) y retorna hacia el interior. El patrón resultante en forma de "zigzag", donde las ondas se cruzan repetidamente en el centro, demuestra cómo la energía electromagnética queda atrapada numéricamente rebotando entre las paredes del dominio. Esto justifica la necesidad ineludible de aplicar técnicas de absorción matemática en los contornos.

La implementación exitosa de la frontera TFSF en el código experimental garantizó que los arreglos de nanotubos de ferrita fueran excitados bajo condiciones ópticas ideales. Al mantener la onda incidente confinada analíticamente en la región interior, se evitó que la fuente primaria interactuara con las fronteras absorbentes exteriores de la malla, aislando de forma pura los fenómenos de transmisión y los cambios en el estado de polarización objeto de estudio.

3.4. TRUNCAMIENTO DEL DOMINIO COMPUTACIONAL

El modelado de fenómenos electromagnéticos en medios abiertos presenta una contradicción intrínseca entre la física teórica y la computación práctica. Físicamente, las ondas irradiadas por una fuente o dispersadas por una nanoestructura como un cristal fotónico viajan hacia el infinito, alejándose para siempre de su punto de origen. Sin embargo, computacionalmente, los recursos de memoria RAM y el tiempo de procesamiento son estrictamente finitos, lo que impone la necesidad ineludible de confinar la simulación a una cuadrícula espacial de dimensiones limitadas.

Como se evidenció experimentalmente en las validaciones bidimensionales previas (ver Figuras 3.4 y 3.5), la interrupción abrupta de las ecuaciones de actualización en los extremos de la matriz computacional genera un error analítico catastrófico. Al no existir nodos vecinos para calcular las derivadas espaciales, los límites de la malla actúan por defecto como paredes perfectamente reflectoras. Toda la energía electromagnética que

alcanza el borde rebota hacia el interior del dominio, creando un patrón caótico de interferencias que contamina irreversiblemente los datos físicos de transmisión, reflexión y polarización que se desean medir.

Para resolver este conflicto fundamental y transformar una caja cerrada en un "espacio infinito" virtual, es mandatorio implementar técnicas matemáticas rigurosas en los contornos de la malla de Yee. El objetivo de estas técnicas es absorber de manera total (o casi total) cualquier onda saliente, evitando que la energía retorne a la región de interés.

Este apartado detalla el tratamiento de las fronteras implementado en el desarrollo de esta investigación. Se exploran desde los límites rígidamente reflectantes utilizados intencionalmente para modelar obstáculos, hasta las soluciones analíticas de absorción de primer orden, culminando con la formulación del estándar profesional moderno requerido para el estudio de los nanotubos magneto-ópticos: las Capas Perfectamente Adaptadas.

3.4.1. Conductores Eléctricos Perfectos (PEC)

La condición de frontera más elemental en la electrodinámica computacional, y la que el algoritmo FDTD asume por defecto si no se programa ninguna otra instrucción en los extremos de la malla, es el Conductor Eléctrico Perfecto (PEC, por sus siglas en inglés: Perfect Electric Conductor).

Desde el punto de vista físico, un PEC representa un material idealizado que posee una conductividad eléctrica infinita ($\sigma \rightarrow \infty$). De acuerdo con la teoría electromagnética clásica, los campos eléctricos no pueden penetrar ni existir en el interior de un conductor perfecto. Como consecuencia directa impuesta por las condiciones de frontera de las ecuaciones de Maxwell, las componentes tangenciales del campo eléctrico en la superficie del material deben anularse estrictamente para satisfacer la continuidad. Matemáticamente, esto se expresa como:

$$\hat{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad (113)$$

donde \hat{n} es el vector unitario normal a la superficie del conductor. Esta restricción física obliga a que cualquier onda electromagnética que incida sobre la superficie del PEC experimente una reflexión total (100%), sin que exista transmisión alguna de energía hacia su interior.

Implementación algorítmica en FDTD

En la topología discreta de la red de Yee, la implementación de un PEC es computacionalmente trivial y altamente eficiente. No requiere resolver ecuaciones

diferenciales auxiliares ni aplicar tensores. Para forzar la existencia de un obstáculo metálico o una pared reflectora, basta con anular el valor numérico de los nodos del campo eléctrico correspondientes a la ubicación geométrica del conductor, ejecutando esta instrucción inmediatamente después de la ecuación de actualización general en cada iteración del bucle temporal.

Por ejemplo, si el límite derecho de una malla unidimensional (ubicado en el índice espacial K_{\max}) se desea modelar como una pared PEC, el código en Python simplemente impone:

$$E_z^{n+1}(K_{\max}) = 0.0 \quad (114)$$

De manera análoga, esta técnica no se restringe a los contornos del dominio computacional. Durante la etapa metodológica bidimensional (2D) de esta investigación, el concepto de PEC se utilizó explícitamente para modelar obstáculos internos dentro de la malla.

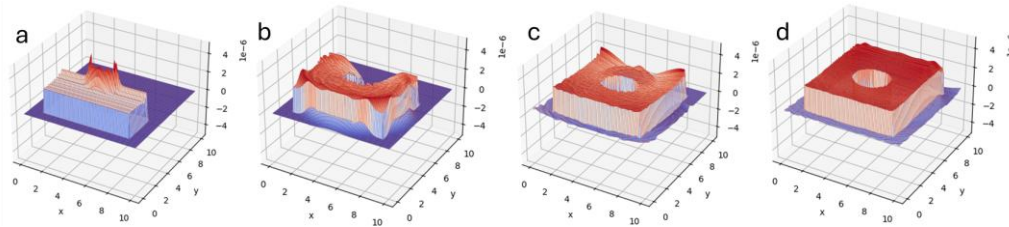


Figura 3.6. Interacción de una onda plana con un dispersor cilíndrico PEC utilizando excitación TFSF y Condiciones de Frontera Absorbentes (ABC) en modo TE [Simulación hecha en Python].

El dominio computacional tiene un tamaño discreto de 100 nodos, los paneles muestran la progresión de la simulación hasta los 200 pasos de tiempo, podemos observar la evolución espaciotemporal del campo eléctrico: **a.** Se observa el frente de una onda plana perfecta generada dentro de la región de Campo Total (la zona rectangular elevada dictada por la frontera TFSF), propagándose hacia un obstáculo ubicado en el centro. **b.** La onda impacta contra el cilindro central. Dado que este obstáculo está programado como un Conductor Eléctrico Perfecto (PEC), la onda es incapaz de penetrarlo, forzando al campo eléctrico a ser estrictamente cero en su interior. Esto genera una fuerte dispersión hacia los costados y el inicio de una "sombra" electromagnética detrás del cilindro. **c., d.** El frente de onda principal logra rodear y sobrepasar el obstáculo, dejando una huella cilíndrica perfectamente hueca en el centro de la matriz, confirmando el éxito de la condición PEC como obstáculo sólido. De manera simultánea y crucial, las ondas dispersadas que viajan hacia los límites del dominio espacial **no sufren reflexiones abruptas**, validando la eficacia de las Condiciones de Frontera Absorbentes (ABCs de segundo orden) para simular un espacio abierto y limpiar la simulación del ruido numérico.

Al evaluar iterativamente las coordenadas (i, j) del espacio, el simulador discrimina si un nodo eléctrico pertenece al interior del radio de un cilindro dispersor. Si la condición

geométrica se cumple, la actualización del campo se ignora y el nodo se mantiene en cero durante toda la simulación:

$$E_z^{n+1}(i, j) = 0.0 \quad \forall (i, j) \in \text{Región PEC} \quad (115)$$

Aunque la condición PEC resulta invaluable para modelar dispersores metálicos internos y evaluar la difracción geométrica de las nanoestructuras, su comportamiento reflectante la inhabilita como solución para truncar el exterior de un dominio que pretende simular un espacio abierto. Como se demostró previamente, si los límites de la matriz se comportan como paredes PEC, la simulación sucumbe ante la interferencia destructiva de las ondas confinadas. Esta limitación hace indispensable la transición hacia condiciones matemáticamente transparentes, conocidas como Condiciones de Frontera Absorbentes (ABC).

3.4.2. Condiciones de Frontera Absorbentes (ABC)

Para evitar las reflexiones catastróficas generadas por el truncamiento de la malla mediante paredes rígidas (como se evidenció en la Figura 3.5), es necesario implementar formulaciones matemáticas en los contornos que emulen la propagación de la luz hacia el infinito. Estas técnicas analíticas se conocen como Condiciones de Frontera Absorbentes (ABC, por sus siglas en inglés: Absorbing Boundary Conditions).

El principio fundamental detrás de una ABC clásica radica en la manipulación de la ecuación de onda. En el interior del dominio computacional, la ecuación de onda admite soluciones que se propagan en todas las direcciones posibles. Sin embargo, en el límite exterior de la malla, sabemos por causalidad física que la energía solo debería viajar en una dirección: hacia afuera, abandonando el dominio [54].

La ecuación de onda unidireccional y la aproximación de Mur

Para forzar matemáticamente esta salida de energía y suprimir cualquier onda entrante (reflexión), se utiliza la ecuación de onda unidireccional (o ecuación de advección). Por ejemplo, si consideramos el límite exterior derecho de una malla (donde las ondas deben viajar exclusivamente en la dirección positiva de x), la ecuación diferencial parcial que rige este nodo fronterizo se define analíticamente como:

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (116)$$

donde c representa la velocidad de fase de la onda en el medio adyacente a la frontera.

Para implementar esta condición en el algoritmo FDTD, la ecuación analítica se discretiza utilizando diferencias finitas centrales tanto en el espacio como en el tiempo alrededor

del punto de frontera. Esta formulación general, conocida en la literatura como la condición absorbente de Mur de primer orden, define la actualización del último nodo espacial (K_{max}) como:

$$E_z^{n+1}(K_{max}) = E_z^n(K_{max} - 1) + \left(\frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \right) [E_z^{n+1}(K_{max} - 1) - E_z^n(K_{max})] \quad (117)$$

A través de esta expresión, el algoritmo interpola los valores de los campos en los nodos interiores contiguos durante el paso de tiempo anterior para predecir el valor exacto que debe tener la frontera en el instante actual, forzando a la onda a abandonar la matriz computacional. Para mejorar el coeficiente de absorción en simulaciones bidimensionales, donde la luz incide con variaciones angulares, esta formulación base se expande matemáticamente incorporando las derivadas tangenciales del campo, dando lugar a las **Condiciones de Frontera Absorbentes de segundo orden**.

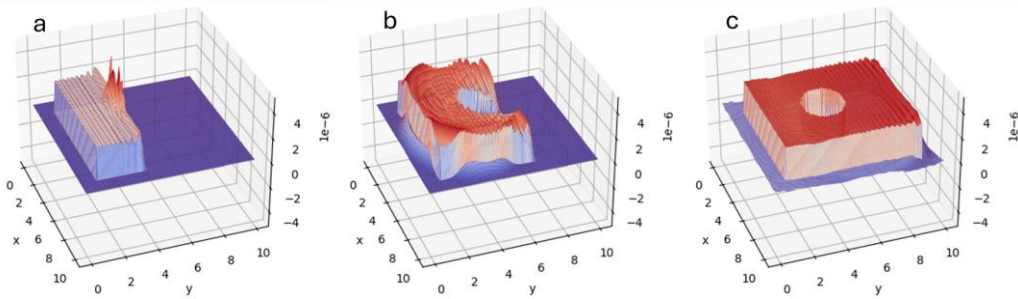


Figura 3.7. Muestra la evolución espaciotemporal de una simulación bidimensional (modo TE) en un dominio truncado por ABCs análisis de segundo orden [Simulación hecha en Python].

El dominio computacional tiene un tamaño discreto de 100 nodos, los paneles muestran la progresión de la simulación hasta los 200 pasos de tiempo y corresponden a la consolidación de múltiples técnicas algorítmicas en una sola simulación, esta secuencia temporal de paneles revela la interacción electromagnética: **a.** Se observa el frente de una onda plana inyectada mediante una frontera TFSS, propagándose hacia un obstáculo central. **b.** El frente de onda ha alcanzado un obstáculo circular ubicado en el centro. Dado que este dispersor está programado como un Conductor Eléctrico Perfecto (PEC), la onda es incapaz de penetrarlo y es fuertemente dispersada en múltiples ángulos hacia los costados y hacia atrás. **c.** El frente de onda principal y las ondas dispersadas se aproximan a los límites del dominio computacional. Se observa claramente que las ondas logran alcanzar las fronteras y son absorbidas eficazmente por las ABCs analíticas, sin generar reflexiones numéricas significativas que contaminan el espacio de simulación.

Limitaciones de las ABC analíticas en ángulos oblicuos

Aunque las condiciones ABC analíticas demostraron ser computacionalmente eficientes y lograron limpiar la simulación base en incidencias normales, presentan una limitación geométrica específica al escalar el problema a arreglos periódicos complejos.

La formulación matemática de las ABC asume por defecto que la onda electromagnética incide de manera perpendicular a la frontera. Sin embargo, cuando las nanoestructuras dispersan la luz, los frentes de onda impactan los bordes de la matriz en múltiples ángulos oblicuos. A medida que el ángulo de incidencia se desvía de la normalidad, la efectividad de la ecuación unidireccional disminuye, produciendo un coeficiente de reflexión artificial que crece gradualmente.

Dado que el análisis riguroso de la polarización circular en los cristales magneto-fotónicos exige una precisión extrema de fase y amplitud, este margen de error reflexivo introducido por las ABC oblicuas resultó incompatible con las exigencias del modelo final. Esta barrera analítica justificó la transición metodológica definitiva hacia la técnica de truncamiento más avanzada disponible en el electromagnetismo computacional: las Capas Perfectamente Adaptadas (PML).

3.4.3. Capas Perfectamente Adaptadas (PML)

La limitación fundamental de las Condiciones de Frontera Absorbentes (ABC) analíticas radica en su dependencia del ángulo de incidencia. Para superar esta barrera, Jean-Pierre Berenger introdujo en 1994 un cambio de paradigma radical en el electromagnetismo computacional: las Capas Perfectamente Adaptadas (PML, por sus siglas en inglés: Perfectly Matched Layers) [7]. A diferencia de las ABC, que intentan predecir matemáticamente el comportamiento de la onda en una línea perimetral exacta mediante ecuaciones diferenciales unidireccionales, la técnica PML no es una condición de frontera estricta, sino un medio material artificial que envuelve el dominio computacional operando como una región de atenuación volumétrica.

El objetivo de este medio artificial es doble: primero, garantizar que ninguna onda electromagnética sufra reflexión al ingresar a la capa, independientemente de su frecuencia, ángulo de incidencia o estado de polarización; segundo, atenuar exponencialmente la energía de la onda una vez que se encuentra propagándose dentro de la región, de modo que al llegar al límite exterior físico de la matriz (donde inevitablemente existe un truncamiento abrupto por defecto de la cuadrícula), la energía de la onda se haya desvanecido por completo.

Condición de Adaptación de Impedancias

Para que la interfaz geométrica entre el espacio de simulación (o el medio dieléctrico interior) y la región PML sea matemáticamente "invisible" a las ondas incidentes, la impedancia intrínseca de la capa PML (η_{PML}) debe acoplarse de manera exacta a la impedancia del medio adyacente (η_0).

Para lograr este acoplamiento omnidireccional, Berenger formuló una expansión de las ecuaciones de Maxwell introduciendo conductividades eléctricas (σ) y conductividades magnéticas artificiales (σ^*). La condición analítica de adaptación perfecta exige que la razón entre la conductividad y la permitividad/permeabilidad del medio se mantenga estrictamente constante:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma^*}{\mu} \quad (118)$$

Cuando esta proporción se satisface, la onda electromagnética penetra en el medio PML sin experimentar ninguna transición de impedancia, lo que teóricamente elimina por completo la reflexión interfacial ($R = 0$) para cualquier vector de onda.

Perfil de atenuación y discretización numérica

Una vez que los campos eléctricos y magnéticos ingresan a la PML, experimentan un decaimiento exponencial dictado por la magnitud de las conductividades artificiales. No obstante, al trasladar este modelo analítico a un entorno discreto como la malla de Yee, surge un desafío numérico: si el valor de la conductividad σ experimenta un salto abrupto desde cero (en la región de interés) hacia un valor máximo (en la primera celda de la PML), el escalón espacial genera una reflexión espuria conocida como "error de discretización".

Para mitigar este artefacto numérico, la implementación algorítmica de la PML requiere forzosamente un **perfil de conductividad gradual**. En la práctica computacional, se estandariza el uso de un perfil de escalamiento polinomial. Con este enfoque, la conductividad aumenta de forma progresiva y suave desde la interfaz interior hasta el borde exterior de la capa PML (la cual posee un espesor total d constituido por un número específico de celdas):

$$\sigma(x) = \sigma_{max} \left(\frac{x}{d}\right)^m \quad (119)$$

donde x representa la profundidad de penetración de la onda dentro de la capa PML, σ_{max} es la conductividad máxima en el límite exterior para asegurar la absorción total, y m es el orden del polinomio de escalamiento (típicamente seleccionado entre $m = 3$ y $m = 4$ para optimizar la transición).

Implementación en el estudio de cristales magneto-fotónicos

Para el desarrollo de esta investigación, la adopción de la técnica de truncamiento PML resultó un requisito analítico ineludible.

La propagación de la luz a través de una red periódica de nanotubos de ferrita magnetizados desencadena patrones de difracción altamente complejos, múltiples reflexiones internas (ondas de Bloch) y, de manera crítica, la separación de fase de los estados de polarización ortogonales que dan origen a la rotación de Faraday. Si las ondas difractadas en ángulos oblicuos experimentaran incluso un coeficiente de reflexión mínimo en los bordes del dominio computacional, la interferencia constructiva y destructiva resultante alteraría irreparablemente la diferencia de fase relativa entre las componentes transversales del campo electromagnético.

Al rodear el arreglo magneto-fotónico con un marco perimetral PML rigurosamente calibrado (típicamente estructurado entre 10 y 20 celdas de espesor), se emuló con extrema precisión la apertura hacia el espacio infinito. Esto garantizó que el estado de polarización circular cuantificado en los resultados finales de transmisión y reflexión se derive pura y exclusivamente de la anisotropía magnética inducida por el tensor giromagnético, aislando el fenómeno físico de cualquier aberración algorítmica de frontera.

3.5. INCORPORACIÓN DE MEDIOS MATERIALES COMPLEJOS

Hasta este punto del desarrollo metodológico, el algoritmo FDTD se ha formulado bajo la premisa de que las ondas electromagnéticas se propagan en el vacío o a través de medios dieléctricos ideales. En estos entornos simples, la relación constitutiva entre los campos electromagnéticos (\mathbf{E} , \mathbf{H}) y las densidades de flujo (\mathbf{D} , \mathbf{B}) es lineal, instantánea, isotrópica y carente de pérdidas. Esto permite que las ecuaciones de actualización de Yee utilicen valores constantes y puramente escalares para la permitividad (ϵ) y la permeabilidad (μ).

Sin embargo, para modelar rigurosamente los cristales magneto-fotónicos objeto de esta investigación, es imperativo dotar al simulador numérico de la capacidad para interactuar con materiales reales. La estructura geométrica a simular está compuesta por arreglos periódicos de nanotubos de ferrita, un material que presenta características electromagnéticas que invalidan las ecuaciones de actualización estándar.

Por un lado, los materiales físicos exhiben conductividad finita, lo que introduce mecanismos de atenuación y disipación de energía (pérdidas óhmicas) a medida que la onda electromagnética penetra en la estructura. Ignorar esta conductividad resultaría en un modelo idealizado incapaz de predecir la transmitancia real del cristal.

Por otro lado, y de manera fundamental para esta tesis, la ferrita es un material giromagnético. Cuando los nanotubos son sometidos a un campo magnético estático

externo continuo (típicamente para alcanzar la saturación), su simetría espacial se rompe abruptamente. Bajo estas condiciones, la permeabilidad magnética deja de ser un simple escalar estacionario y se transforma en un **tensor complejo de 3×3** , cuyas componentes dependen fuertemente de la frecuencia de operación (dispersión). Físicamente, los términos extra-diagonales de este tensor son los responsables de acoplar las componentes transversales de los campos electromagnéticos, constituyendo el mecanismo analítico subyacente que da origen a la rotación de Faraday y a la modificación del estado de polarización de la luz incidente.

El tratamiento computacional de estos medios materiales complejos presenta un desafío superlativo en el dominio del tiempo. Mientras que en el dominio de la frecuencia las relaciones constitutivas dispersivas y anisotrópicas se resuelven mediante multiplicaciones matriciales algebraicas directas, el algoritmo FDTD opera estrictamente mediante la evolución temporal paso a paso. De acuerdo con los teoremas fundamentales del análisis de Fourier, la multiplicación por una función dependiente de la frecuencia (como el tensor giromagnético) exige resolver inexorablemente una **integral de convolución** sobre toda la historia pasada de los campos eléctricos y magnéticos en cada nodo espacial de la malla.

Resolver de manera directa y acumulativa estas integrales de convolución requeriría un almacenamiento de memoria computacional que colapsaría cualquier infraestructura de simulación. Por lo tanto, para integrar el cristal magneto-fotónico en el simulador, es mandatorio expandir el núcleo del algoritmo FDTD utilizando técnicas matemáticas avanzadas de discretización que permitan modelar tanto las pérdidas óhmicas como la anisotropía magnética dispersiva, garantizando al mismo tiempo la eficiencia y la estabilidad incondicional de la red de Yee.

3.5.1. Dieléctricos con pérdidas óhmicas

En un entorno ideal o en el vacío, las ondas electromagnéticas se propagan sin experimentar atenuación, ya que no existe un mecanismo físico que disipe su energía. Sin embargo, los materiales reales que componen estructuras como los cristales magneto-fotónicos poseen una conductividad eléctrica finita ($\sigma > 0$). Cuando un campo eléctrico oscilante atraviesa un medio conductor, induce corrientes de conducción ($\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$) que transfieren energía del campo electromagnético a la estructura atómica del material, disipándose en forma de calor. Este fenómeno se conoce como pérdidas óhmicas.

Para incorporar esta atenuación física en el algoritmo FDTD, es necesario regresar a la ley de Ampere-Maxwell original e incluir el término de densidad de corriente de conducción:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (120)$$

El problema de la interpolación temporal

Al intentar discretizar esta ecuación diferencial en la malla de Yee, surge un conflicto algorítmico debido a la naturaleza intercalada (*leapfrog*) del método. Para calcular el futuro campo eléctrico \mathbf{E}^{n+1} , la derivada temporal requiere evaluar el rotor del campo magnético en el instante intermedio $\mathbf{H}^{n+1/2}$. Para que la ecuación sea matemáticamente consistente, el término de conducción ($\sigma \mathbf{E}$) también debe evaluarse en el instante $n + 1/2$.

Sin embargo, el algoritmo FDTD solo almacena los valores del campo eléctrico en pasos de tiempo enteros ($n, n + 1$).

Solución semiimplícita

Para resolver esta asimetría temporal sin destruir la estabilidad del algoritmo, se emplea una aproximación semiimplícita. El valor del campo eléctrico en el instante intermedio se aproxima mediante el promedio aritmético de los valores en los pasos de tiempo adyacentes:

$$\mathbf{E}^{n+1/2} \approx \frac{\mathbf{E}^{n+1} + \mathbf{E}^n}{2} \quad (121)$$

Sustituyendo esta aproximación y la aproximación en diferencias finitas para la derivada temporal en la ley de Ampere, se obtiene:

$$\nabla \times \mathbf{H}^{n+1/2} = \sigma \left(\frac{\mathbf{E}^{n+1} + \mathbf{E}^n}{2} \right) + \varepsilon \left(\frac{\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n}{\Delta t} \right) \quad (122)$$

Ecuación de actualización explícita

Al reorganizar algebraicamente esta expresión para despejar la incógnita futura (\mathbf{E}^{n+1}), se obtiene la ecuación de actualización explícita que rige el comportamiento de un campo eléctrico dentro de un material con pérdidas. Por ejemplo, para la componente E_z en un medio isótropo, la ecuación discreta se formula como:

$$E_z^{n+1} = \left(\frac{1 - \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}} \right) E_z^n + \left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}} \right) (\nabla \times \mathbf{H}^{n+1/2})_z \quad (123)$$

Esta formulación revela que la presencia de la conductividad σ modifica los coeficientes multiplicadores estándar de la matriz de Yee. A medida que la onda avanza en el tiempo, el coeficiente que multiplica a E_z^n se vuelve menor a 1, lo que algorítmicamente produce el decaimiento exponencial (atenuación) característico de la propagación en medios con pérdidas.

La correcta implementación de estos coeficientes de actualización dependientes del material es el cimiento algorítmico sobre el cual se construirá el modelo mucho más complejo de la ferrita, donde la permeabilidad dejará de ser un escalar para convertirse en una matriz acoplada.

3.5.2. Modelo analítico de la ferrita magnetizada

El modelado computacional riguroso de un cristal magneto-fotónico requiere definir simultáneamente dos parámetros fundamentales: su topología espacial (la distribución geométrica de los índices de refracción) y la física constitutiva que rige la interacción de los campos electromagnéticos en su interior.

Topología espacial del cristal

Para las simulaciones numéricas de esta investigación, el dominio computacional abarca un área de $4.65 \mu\text{m} \times 4.65 \mu\text{m}$. En el centro de este dominio se ubica la estructura periódica bidimensional que constituye el cristal fotónico. El arreglo geométrico consiste en una matriz cuadrada de 9×9 elementos dispersores. Cada elemento es un pilar de sección transversal cuadrada, con una longitud de lado de $0.15 \mu\text{m}$.

Para garantizar la periodicidad de la red cristalina, estos pilares mantienen una separación constante de $0.45 \mu\text{m}$ entre estructuras vecinas, medida tanto en la dirección horizontal como en la vertical. El medio intermedio que separa los pilares, así como la región circundante que llena el resto del dominio, se modela como aire con un índice de refracción $n = 1$. Por su parte, en la configuración estructural base, los pilares dispersores poseen un índice de refracción constante de $n = 3.4$, correspondiente a las propiedades ópticas del silicio, sobre los cuales o entre los cuales se aprovecha la actividad magneto-óptica de la ferrita.

Ecuaciones Gobernantes y el Tensor de Polder

Para describir el comportamiento de la propagación electromagnética a través de esta red periódica y dispersiva, el punto de partida analítico son las ecuaciones de Maxwell expresadas en el dominio de la frecuencia armónica (ω). Las leyes fundamentales de Faraday y Ampere se definen como:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega[\boldsymbol{\mu}]\mathbf{H} \quad (124)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{E} \quad (125)$$

A partir de estas relaciones rotacionales, se derivan las ecuaciones de onda gobernantes (problema de valores propios) específicas para los cristales fotónicos con materiales complejos, las cuales rigen la distribución espacial de los campos eléctrico (\mathbf{E}) y magnético (\mathbf{H}) en función de la posición (\mathbf{r}):

$$\nabla \times \hat{\boldsymbol{\mu}}^{-1}(\mathbf{r})\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \omega^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (126)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}^{-1}(\mathbf{r})\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \omega^2\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (127)$$

El mecanismo físico central que rompe la simetría de inversión temporal en este sistema y genera los fenómenos magneto-ópticos es el comportamiento de la permeabilidad magnética ($\hat{\boldsymbol{\mu}}$) de la ferrita. Cuando este material se encuentra totalmente magnetizado bajo la influencia de un campo magnético estático externo (típicamente orientado en el eje z), pierde su naturaleza isotrópica. Su permeabilidad escalar es reemplazada analíticamente por el **tensor giromagnético de Polder**, cuya representación matricial es:

$$[\boldsymbol{\mu}] = \begin{pmatrix} \mu_r & ik & 0 \\ -ik & \mu_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (128)$$

En este tensor, los términos cruzados extradiagonales ($\pm ik$) son puramente imaginarios e introducen un desfase de 90 grados entre las componentes ortogonales del campo electromagnético en el plano transversal (xy). Estas componentes no son constantes, sino que exhiben una fuerte dependencia dispersiva dictada por la frecuencia angular de la onda incidente (ω), la frecuencia de resonancia giromagnética (ω_0) y la frecuencia de magnetización de saturación (ω_m):

$$\mu_r = 1 + \frac{\omega_m\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (129)$$

$$k = \frac{\omega_m\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (130)$$

La presencia de la frecuencia ω en el denominador de estas expresiones evidencia la alta dispersión del material. Esta dispersión en el dominio de la frecuencia representa el mayor obstáculo para la simulación en el dominio del tiempo temporal (FDTD), ya que la multiplicación por el tensor $[\boldsymbol{\mu}]$ se traduce en integrales de convolución continuas, lo cual

exige la aplicación de métodos numéricos auxiliares para su correcta implementación algorítmica.

3.5.3. Implementación algorítmica de tensores giromagnéticos en FDTD (método ADE)

Como se estableció en el apartado anterior, la relación constitutiva entre la densidad de flujo magnético (\mathbf{B}) y el campo magnético (\mathbf{H}) en la ferrita magnetizada está regida por el tensor de Polder ($[\mu]$). En el dominio de la frecuencia, esta relación se expresa mediante un producto matricial directo:

$$\mathbf{B}(\omega) = \mu_0 [\mu(\omega)] \mathbf{H}(\omega) \quad (131)$$

Dado que las componentes del tensor $[\mu(\omega)]$ son funciones altamente dispersivas dependientes de la frecuencia, la transformación directa de esta ecuación al dominio del tiempo mediante la transformada inversa de Fourier resulta en una integral de convolución:

$$\mathbf{B}(t) = \mu_0 \int_0^t [\mu(t - \tau)] \mathbf{H}(\tau) d\tau \quad (132)$$

Resolver numéricamente esta convolución en cada nodo espacial requeriría almacenar el historial completo del campo magnético a lo largo de toda la simulación, lo cual es computacionalmente inviable en términos de memoria RAM y tiempo de procesamiento (un problema conocido como *Convolución Recursiva*). Para sortear este obstáculo, la metodología de esta investigación implementa el Método de la Ecuación Diferencial Auxiliar (ADE).

Transformación de la susceptibilidad al dominio del tiempo

El método ADE evita la convolución redefiniendo la relación material en términos de la magnetización (\mathbf{M}) y la susceptibilidad magnética ($[\chi]$). La densidad de flujo magnético total se define físicamente como la suma del campo magnético en el vacío y la magnetización inducida en el material:

$$\mathbf{B}(\omega) = \mu_0 (\mathbf{H}(\omega) + \mathbf{M}(\omega)) \quad (133)$$

Donde la magnetización está relacionada con el campo magnético a través del tensor de susceptibilidad giromagnética:

$$\mathbf{M}(\omega) = [\chi(\omega)] \mathbf{H}(\omega) \quad (134)$$

Al extraer las componentes del tensor de Polder definido previamente, se obtienen las expresiones dispersivas acopladas para la magnetización en el plano transversal (xy) perpendicular al campo de saturación en z :

$$M_x(\omega) = \left(\frac{\omega_m \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) H_x(\omega) + \left(\frac{j\omega_m \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) H_y(\omega) \quad (135)$$

$$M_y(\omega) = \left(\frac{-j\omega_m \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) H_x(\omega) + \left(\frac{\omega_m \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) H_y(\omega) \quad (136)$$

La clave analítica del método ADE radica en manipular estas ecuaciones algebraicas en el dominio de la frecuencia para eliminar los denominadores. Multiplicando ambos lados de la primera ecuación por $(\omega_0^2 - \omega^2)$, se obtiene:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)M_x(\omega) = \omega_m \omega_0 H_x(\omega) + j\omega \omega_m H_y(\omega) \quad (137)$$

A continuación, se aplica la transformada inversa de Fourier utilizando las propiedades operacionales fundamentales, donde el producto por $j\omega$ se convierte en una primera derivada temporal $(\frac{\partial}{\partial t})$ y el producto por $-\omega^2$ se convierte en una segunda derivada temporal $(\frac{\partial^2}{\partial t^2})$. Esto transforma la relación algebraica en una Ecuación Diferencial Auxiliar ordinaria en el dominio del tiempo:

$$\frac{\partial^2 M_x(t)}{\partial t^2} + \omega_0^2 M_x(t) = \omega_m \omega_0 H_x(t) + \omega_m \frac{\partial H_y(t)}{\partial t} \quad (138)$$

(Un procedimiento análogo se aplica para obtener la ecuación diferencial correspondiente a $M_y(t)$).

Discretización y el ciclo de actualización modificado

Esta ecuación diferencial de segundo orden representa la física de precesión de los espines electrónicos en la ferrita. Para integrarla en la matriz de Yee, las derivadas temporales se aproximan utilizando diferencias finitas centrales. Esto genera una nueva ecuación de actualización explícita para la magnetización \mathbf{M}^{n+1} que se resuelve *antes* de actualizar el campo magnético.

Con la implementación de estas Ecuaciones Diferenciales Auxiliares, el bucle temporal clásico del algoritmo FDTD se modifica, ejecutando la siguiente secuencia lógica en cada iteración para las celdas que contienen ferrita:

Con la implementación de estas Ecuaciones Diferenciales Auxiliares, el bucle temporal clásico del algoritmo FDTD se modifica, ejecutando la siguiente secuencia lógica en cada iteración para las celdas que contienen ferrita:

1. **Ley de Faraday:** Se calcula el futuro flujo magnético $\mathbf{B}^{n+1/2}$ a partir del rotor del campo eléctrico espacial \mathbf{E}^n .
2. **Ecuación ADE:** Se actualiza la magnetización $\mathbf{M}^{n+1/2}$ utilizando su historial previo y los valores actuales de los campos. Es en este paso donde el desfase y el acoplamiento cruzado (H_y afectando a M_x) se materializan algorítmicamente.
3. **Relación constitutiva:** Se extrae el nuevo campo magnético $\mathbf{H}^{n+1/2}$ restando la magnetización obtenida del flujo total: $\mathbf{H}^{n+1/2} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^{n+1/2} - \mathbf{M}^{n+1/2}$.
4. **Ley de Ampere:** Finalmente, se actualiza el campo eléctrico \mathbf{E}^{n+1} a partir del rotor del nuevo campo magnético $\mathbf{H}^{n+1/2}$.

El uso del método ADE demostró ser matemáticamente robusto y computacionalmente eficiente. Permitió emular la anisotropía magnética y la dispersión giromagnética responsable de la rotación de Faraday sin comprometer la estabilidad incondicional de la simulación FDTD, exigiendo únicamente la reserva de matrices de memoria adicionales para almacenar los estados pasados de \mathbf{M} , una inversión mínima en comparación con el costo prohibitivo de la convolución recursiva.

3.6. ARQUITECTURA Y ENSAMBLAJE DEL CÓDIGO PRINCIPAL EN PYTHON

El desarrollo de un simulador numérico integral, basado en el método FDTD requiere una organización precisa de múltiples formulaciones matemáticas. El código principal, desarrollado en Python, actúa como el motor central que unifica las ecuaciones de actualización de Yee, el modelado de materiales complejos (método ADE), las técnicas de inyección de campo (TFSF) y las condiciones de frontera absorbentes (PML).

Para garantizar la estabilidad numérica y la conservación de la energía, estas piezas algorítmicas deben ejecutarse en una secuencia y cronología estricta. La arquitectura del simulador se divide lógicamente en tres etapas principales: la inicialización del dominio, el bucle de evolución temporal y la fase de posprocesamiento.

3.6.1. Inicialización y mapeo espacial

Antes de iniciar la propagación de las ondas electromagnéticas, el algoritmo reserva la memoria computacional y establece las condiciones iniciales del experimento. Utilizando

la librería NumPy, se dimensionan los arreglos matriciales bidimensionales que almacenarán las componentes de los campos eléctricos y magnéticos (E_z, H_x, H_y), así como los vectores de magnetización (M_x, M_y). Inicialmente, todos estos arreglos se definen con valor cero, representando un espacio electromagnético en reposo.

Inmediatamente después, el código ejecuta una rutina de mapeo topológico para construir la geometría del cristal magneto-fotónico dentro de la cuadrícula de simulación.

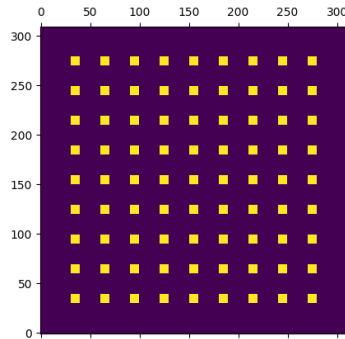


Figura 3.8. Topología espacial del cristal magneto-fotónico implementada en el dominio computacional bidimensional.

La estructura consiste en un arreglo periódico de 9×9 pilares de sección cuadrada ($0.15 \mu\text{m}$ de lado y separación de $0.45 \mu\text{m}$) impregnados en aire. Las coordenadas matriciales asignan las propiedades dieléctricas ($n = 3.4$) y giromagnéticas correspondientes a cada región.

A través de este mapeo, el algoritmo asigna localmente a cada nodo espacial los coeficientes de actualización específicos de su material (aire, silicio dieléctrico o ferrita anisótropa). Finalmente, en esta etapa preparatoria se calculan los perfiles polinomiales de conductividad para las capas PML en los márgenes de la matriz y se delimitan las coordenadas exactas de la región de inyección TFSF.

3.6.2. El bucle de evolución temporal (*time loop*)

El núcleo de procesamiento del simulador es un ciclo iterativo que avanza de manera discreta a través del tiempo, desde $t = 0$ hasta el paso temporal máximo definido para el experimento. Debido a la naturaleza intercalada (*leapfrog*) del algoritmo FDTD, el orden de las operaciones dentro de este bucle es físicamente inalterable. En cada iteración, el código ejecuta la siguiente secuencia de integración:

1. **Actualización del campo magnético (Ley de Faraday):** El ciclo comienza calculando las nuevas componentes del flujo y campo magnético ($\mathbf{H}^{n+1/2}$) en todo el dominio, basándose en los rotacionales espaciales del campo eléctrico del instante temporal anterior (\mathbf{E}^n).

2. **Integración giromagnética (Método ADE):** En los nodos espaciales previamente identificados como ferrita, se resuelven las Ecuaciones Diferenciales Auxiliares. Se actualiza el vector de magnetización (\mathbf{M}) utilizando el tensor de Polder, lo cual acopla las componentes ortogonales del campo y genera el efecto de rotación de Faraday de manera algorítmica.
3. **Condiciones de frontera magnéticas:** Se aplican las correcciones de la frontera TFSF sobre los nodos correspondientes, restando el campo incidente analítico para separar la región dispersada. Simultáneamente, se aplican los factores de atenuación de las PML a las ondas magnéticas que alcanzan los límites físicos del dominio.
4. **Actualización del campo eléctrico (Ley de Ampere):** Con los campos magnéticos completamente actualizados, el algoritmo calcula las nuevas componentes del campo eléctrico (\mathbf{E}^{n+1}). En este paso se incorporan analíticamente las pérdidas óhmicas para las regiones con conductividad finita.
5. **Inyección de la fuente de excitación:** Se evalúa el valor analítico de la onda electromagnética incidente (pulso gaussiano o señal continua) para el instante de tiempo actual. Estos valores se inyectan en la matriz del campo eléctrico sumándolos estrictamente en los contornos de la región TFSF.
6. **Condiciones de frontera eléctricas:** Se aplican las ecuaciones de atenuación exponencial de las PML a las componentes del campo eléctrico que se propagan hacia el exterior de la malla.
7. **Registro de datos (sondas espaciales):** Antes de concluir la iteración temporal, el simulador extrae el valor exacto de las componentes del campo electromagnético en las coordenadas espaciales definidas por el usuario como "detectores" (por ejemplo, el nodo [20, 50]). Estos valores discretos se almacenan en arreglos unidimensionales para construir el historial completo de la señal a lo largo de toda la simulación.

3.6.3. Posprocesamiento y visualización de resultados

Una vez que el bucle temporal concluye y la propagación de las ondas ha finalizado, la arquitectura del código entra en su fase final: la renderización gráfica de los datos almacenados. El simulador está programado para generar un panel integral de resultados que valida tanto el comportamiento espacial como el temporal del campo electromagnético.

Las rutinas de visualización procesan la información para entregar las siguientes métricas clave:

- **Distribución espacial del campo:** Se genera un mapa de color bidimensional que captura una instantánea de la amplitud del campo eléctrico (E_z) en todo el

dominio computacional en el último instante de tiempo. Esto permite observar cualitativamente los patrones de interferencia, difracción y confinamiento de la luz en el cristal magneto-fotónico.

- **Evolución temporal en detectores:** A partir de los datos almacenados en el paso 7 del bucle temporal, se grafican las series de tiempo de las componentes de campo (H_x , H_y y E_z) en función del tiempo t . Estas gráficas demuestran el comportamiento transitorio inicial y la eventual estabilización de la onda en un régimen estacionario periódico.
- **Análisis del estado de polarización:** Para evidenciar el acoplamiento inducido por el tensor giromagnético, el código grafica paramétricamente la componente H_y contra la componente H_x a lo largo del tiempo. Mientras que en un medio isotrópico ideal esta relación mantendría una trayectoria de polarización lineal fija, en presencia de la ferrita, la gráfica revela el desfase característico mediante trayectorias circulares o elípticas. Esta representación paramétrica constituye la prueba observable y cuantificable del efecto Faraday dentro de la simulación.

3.7. CONFIGURACIÓN DE LA PRUEBA Y PARÁMETROS DE SIMULACIÓN

Para garantizar la rigurosidad y reproducibilidad de los experimentos numéricos, es imperativo establecer con exactitud las variables físicas, geométricas y computacionales que rigen el modelo. Con este propósito, se diseñó un entorno de parametrización que alimenta al algoritmo FDTD y define el escenario de propagación electromagnética a través del cristal magneto-fotónico.

3.7.1. Interfaz Gráfica de Usuario (GUI) para parametrización

Para sistematizar la ejecución de las pruebas y aislar el núcleo matemático del algoritmo de la configuración manual, se desarrolló una Interfaz Gráfica de Usuario (GUI) personalizada en Python. Esta herramienta permite modificar dinámicamente las propiedades ópticas, las dimensiones del dominio y las características de la excitación, admitiendo incluso la entrada de expresiones aritméticas directas para un ajuste fino de los valores.

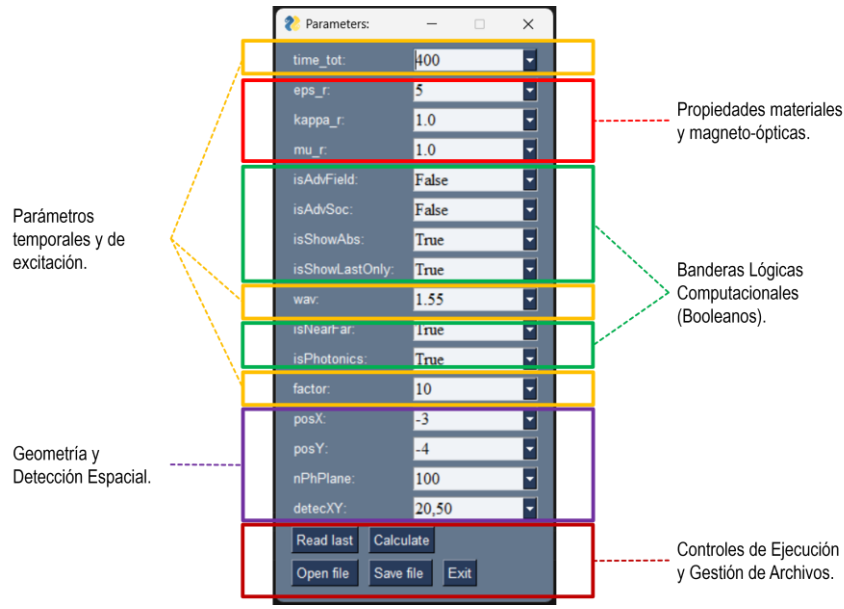


Figura 3.9. Interfaz Gráfica de Usuario (GUI) del simulador FDTD.

La Interfaz Gráfica de Usuario (GUI) consolida un total de 16 parámetros de entrada y 5 botones de ejecución, los cuales controlan íntegramente el comportamiento del algoritmo FDTD. Estos elementos se clasifican en las siguientes categorías funcionales:

1. Parámetros temporales y de excitación

- **time_tot:** Define el tiempo total de simulación, expresado en número de iteraciones o pasos temporales discretos (N_t). Un valor mayor (ej. 3800) permite que la onda alcance un estado estacionario periódico en toda la red de dispersores.
- **wav:** Establece la longitud de onda (λ) de la fuente electromagnética incidente. Es el parámetro clave manipulado durante el barrido paramétrico para encontrar las resonancias del cristal y los estados de polarización circular (ej. 1.67, 1.675 y 1.68 μm).
- **factor:** Actúa como un multiplicador o factor de escalamiento para la resolución de la malla espacial, garantizando que el tamaño de la celda de Yee (Δx , Δy) cumpla con los criterios de estabilidad numérica de Courant respecto a la longitud de onda.

2. Propiedades materiales y magneto-ópticas

- **eps_r:** Asigna la permitividad eléctrica relativa (ϵ_r) del material base de los dispersores que conforman el cristal fotónico.

- **kappa_r**: Representa la magnitud de la componente extra-diagonal (κ) del tensor giromagnético de Polder. El cuadro de texto permite el ingreso de expresiones aritméticas (ej. $12.4*0.9$) para realizar ajustes finos de la anisotropía.
- **mu_r**: Representa la magnitud de la componente diagonal principal (μ_r) del tensor de permeabilidad. Junto con kappa_r, gobierna la intensidad del efecto Faraday.

3. Banderas lógicas computacionales (booleanos)

- **isAdvField (Advanced Field)**: Interruptor para activar cálculos o visualizaciones avanzadas de las componentes del campo electromagnético durante la propagación.
- **isAdvSoc (Advanced Source)**: Activa perfiles de inyección de fuente complejos (por ejemplo, frentes de onda modulados o pulsos de banda ancha) en lugar de una excitación armónica simple.
- **isShowAbs**: Cuando es verdadero (True), el motor gráfico renderiza la magnitud absoluta o la envolvente de la energía del campo electromagnético, facilitando la visualización de los patrones de intensidad.
- **isShowLastOnly**: Bandera de optimización de rendimiento. Al establecerse en True, el simulador suprime la animación gráfica iteración por iteración en tiempo real, liberando memoria RAM y renderizando exclusivamente el fotograma final del dominio al concluir el tiempo total.
- **isNearFar**: Habilita el módulo de transformación de Campo Cercano a Campo Lejano (*Near-to-Far Field Transformation*). Es útil para extrapolar los datos de los bordes de la simulación y calcular el patrón de radiación o dispersión a distancias macroscópicas.
- **isPhotonics**: Funciona como el interruptor maestro de la topología. Si es True, el algoritmo construye la matriz de 9×9 del cristal magneto-fotónico. Si es False, el simulador puede ejecutar pruebas de calibración en el vacío o en medios homogéneos.

4. Geometría y detección espacial

- **posX y posY**: Coordenadas de referencia utilizadas para definir el centro geométrico de la fuente de inyección (TFSF) o el desplazamiento espacial de la estructura fotónica dentro del dominio bidimensional.
- **nPhPlane**: Define el tamaño total de la matriz computacional o el número de nodos espaciales designados para el plano de simulación físico (ej. 2500 celdas).
- **detecXY**: Coordenadas topológicas discretas (x, y) donde el algoritmo posiciona una sonda o "detector virtual" (ej. 20,50). Este nodo extrae y almacena la serie

temporal completa de los campos, dato indispensable para graficar las trayectorias de polarización paramétricas.

5. Controles de ejecución y gestión de archivos

- **Calculate:** Ejecuta el motor numérico FDTD utilizando los parámetros actualmente cargados en pantalla.
- **Save file / Open file:** Módulos de gestión de datos que permiten almacenar una configuración paramétrica exitosa en el disco duro o cargar una plantilla previa, garantizando la repetibilidad de los experimentos.
- **Read last:** Recupera automáticamente la configuración exacta utilizada en la última ejecución del simulador.
- **Exit:** Termina los procesos en segundo plano de manera segura y cierra la interfaz.

3.7.2. Barrido paramétrico para polarización circular

El objetivo central de las simulaciones es aislar e identificar las condiciones exactas bajo las cuales el cristal magneto-fotónico induce una rotación de Faraday que resulte en un estado de **polarización circular**. Dado el comportamiento altamente dispersivo de la estructura, esto requiere realizar un barrido paramétrico (ajuste fino) de la longitud de onda de inyección.

Para los experimentos que generaron los resultados definitivos, la simulación se configuró para alcanzar un régimen estacionario maduro, utilizando los siguientes parámetros base inamovibles:

- **Tiempo de estabilización (time_tot):** 3800 iteraciones.
- **Permitividad relativa (eps_r):** 5.0
- **Tensor Giromagnético ajustado:**
 - Componente diagonal (μ_r): 14×0.99 (13.86)
 - Componente extra-diagonal (κ_r): 12.4×0.9 (11.16)
- **Coordenada de detección (detecXY):** Nodo [20, 50].

Manteniendo esta configuración física constante, se ejecutaron múltiples escenarios de inyección modificando exclusivamente la longitud de onda incidente. Específicamente, se analizó el espectro cercano a la resonancia, evaluando los casos para $\lambda = 1.67 \mu\text{m}$, $1.675 \mu\text{m}$ y $1.68 \mu\text{m}$.

Esta variación sistemática es la que permitió capturar la transición del estado de polarización de la onda transmitida, documentando la evolución desde trayectorias

elípticas hasta converger en el comportamiento circular buscado, cuyos resultados y gráficas paramétricas se analizan a detalle en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 4 RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este capítulo se presentan y analizan los resultados numéricos obtenidos a partir de las simulaciones computacionales desarrolladas mediante el algoritmo FDTD. El objetivo central de esta fase experimental es evidenciar y cuantificar la interacción electrodinámica entre una onda electromagnética incidente y el arreglo periódico bidimensional de nanotubos de ferrita, validando la capacidad de la estructura para inducir rotación de Faraday y modificar el estado de polarización de la luz.

Como se estableció en la configuración del modelo metodológico, la respuesta de un cristal magneto-fotónico es altamente dispersiva. Por lo tanto, para localizar el régimen exacto donde la anisotropía magnética maximiza su efecto cruzado, se diseñó un barrido paramétrico. A continuación, se exponen **casos de estudio** fundamentales, los cuales corresponden a variaciones controladas en la longitud de onda de inyección (λ), manteniendo constantes las propiedades físicas de la red y el tensor giromagnético.

Para garantizar una comparación sistemática y rigurosa, cada uno de los escenarios evaluados despliega representaciones gráficas. Estas figuras extraen la información capturada por las sondas espaciales (específicamente en el nodo de detección [20, 50]) y la traducen en las siguientes métricas analíticas:

1. **Distribución espacial del campo eléctrico (mapa de calor):** Una imagen bidimensional que captura la amplitud topológica del campo (E_z) en el dominio de simulación durante el último instante de tiempo ($t = 3800$). Esta representación permite observar cualitativamente los patrones de interferencia, el confinamiento de energía y la difracción de la onda al atravesar la matriz cilíndrica de 9×9 .
2. **Evolución temporal de las componentes magnéticas transversales:** Una gráfica que contrasta las amplitudes de H_x y H_y a lo largo de las 3800 iteraciones. Es crucial para demostrar la superación del régimen transitorio inicial y la consecución de un estado estacionario periódico y estable.
3. **Análisis complejo del campo magnético:** Gráfica temporal que desglosa la componente H_x en su parte real e imaginaria, validando el comportamiento

analítico de las Ecuaciones Diferenciales Auxiliares (ADE) implementadas para el medio dispersivo.

4. **Análisis complejo del campo eléctrico:** Gráfica homóloga a la anterior, pero aplicada a la componente longitudinal E_z , asegurando la consistencia de fase en la actualización de la Ley de Ampere.
5. **Gráfica paramétrica de polarización (H_y vs H_x):** Constituye la evidencia física y visual más importante del estudio. Al graficar la amplitud de la componente y frente a la componente x en el dominio del tiempo, se traza la evolución geométrica del vector de campo magnético. Esta curva permite diagnosticar inmediatamente el estado de polarización resultante (lineal, elíptico o circular) producto de la actividad magneto-óptica inducida por la ferrita.

A través del análisis secuencial de estos tres casos, se demostrará la sensibilidad del arreglo fotónico frente a variaciones frecuenciales, culminando con la identificación de las condiciones óptimas para la generación de polarización circular.

Propagación a una longitud de onda de $\lambda = 1.67 \mu m$

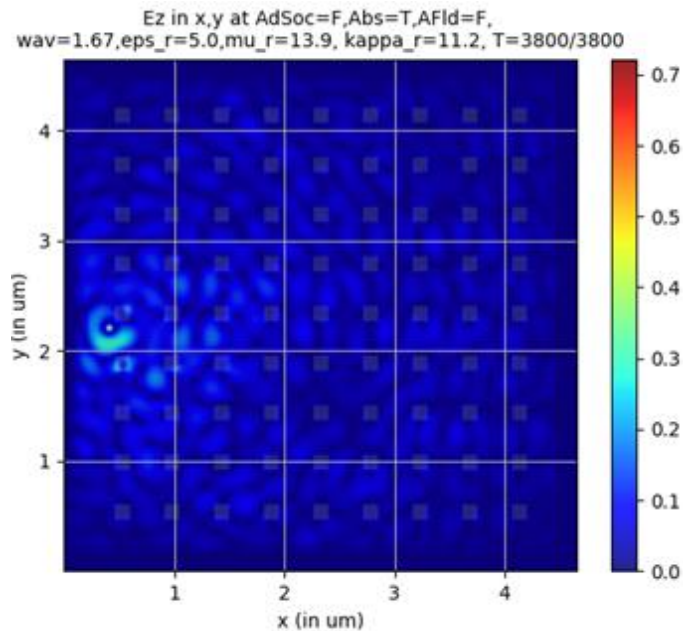


Figura 4.1. Imagen final de la animación de la propagación de las ondas electromagnéticas en el cristal magneto-fotónico. La escala de color representa la distribución espacial de la amplitud absoluta del campo eléctrico (E_z) en el dominio bidimensional para una longitud de onda de inyección de $\lambda = 1.67 \mu m$, capturada en el instante $t = 3800$.

La **Figura 4.1** presenta el mapa de intensidad que documenta el estado final de la propagación de la onda dentro de la malla computacional FDTD. Sobre este mapa de color se aprecia sutilmente superpuesta la cuadrícula correspondiente al arreglo

periódico de 9×9 pilares de ferrita, lo que permite correlacionar directamente la topología del cristal con el comportamiento de la luz. Del análisis de esta gráfica se extraen las siguientes observaciones físicas:

Se identifica la zona de inyección principal de la onda (ubicada en la región centro-izquierda del dominio, $0.5\mu m, y \approx 2.2\mu m$, evidenciada por la máxima amplitud en la escala de color). Al impactar contra las primeras columnas del cristal, la onda experimenta una fuerte difracción. Las múltiples reflexiones internas entre los pilares generan un patrón de interferencia constructiva y destructiva altamente complejo en todo el interior de la matriz.

Es evidente que la propagación de la energía electromagnética se ve fuertemente alterada por la presencia de los dispersores anisótropos. La energía (representada por las zonas en tonos azules y verdes) tiende a canalizarse y dispersarse a través de los intersticios de la red periódica, demostrando la fuerte interacción magneto-óptica entre el campo eléctrico y el material.

Dado que la captura corresponde a la iteración $t = 3800$, la imagen confirma que la simulación ha superado la fase transitoria. El campo electromagnético ha saturado el dominio de manera estable. Adicionalmente, se observa que en los límites perimetrales de la gráfica (zona azul oscuro continua), la amplitud del campo decae drásticamente, lo cual valida el correcto funcionamiento de las Capas Perfectamente Adaptadas (PML) implementadas en el Capítulo 3, absorbiendo la energía saliente sin generar reflexiones espurias hacia el centro del cristal.

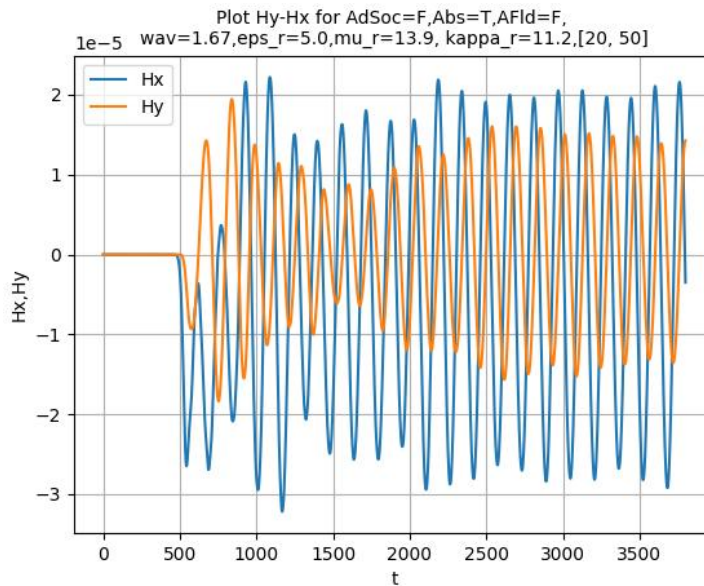


Figura 4.2. Gráfica de la evolución temporal de las componentes transversales del campo magnético (H_x y H_y) capturadas por el detector virtual en el nodo $[20, 50]$, para la simulación con longitud de onda de $\lambda = 1.67\mu m$.

Esta gráfica representa una ventana directa a la dinámica de propagación y al régimen transitorio de la onda electromagnética en el interior del cristal fotónico. Al analizar el comportamiento de las componentes H_x (línea azul) y H_y (línea naranja) a lo largo de las 3800 iteraciones, se revelan tres fases físicas claramente definidas:

De 0 a 500 pasos: Durante las primeras 500 iteraciones, la amplitud de ambos campos es estrictamente cero. Esto representa el tiempo físico que tarda el frente de onda electromagnética en viajar desde la frontera de inyección (TFSF) hasta la coordenada espacial exacta donde se encuentra el detector virtual (nodo [20, 50]).

De 500 a 2000: Una vez que la onda alcanza el detector, se observa una fuerte fluctuación caótica en las amplitudes de ambos campos. Esta región transitoria es la evidencia algorítmica de la luz colisionando con la matriz de 9×9 . Las múltiples reflexiones internas entre los cilindros de silicio/ferrita, sumadas a la fuerte dispersión del material, generan interferencias constructivas y destructivas variables hasta que los modos de propagación logran acoplarse a la geometría del cristal.

De 2000 a 3800 paso: A partir de la iteración 2000, la turbulencia desaparece y ambas señales se estabilizan, oscilando de manera armónica y periódica. Aquí radica el hallazgo más importante de esta gráfica:

- Primero, la existencia misma de una componente H_y , oscilando con gran amplitud confirma que el tensor giromagnético (programado mediante el método ADE) está funcionando; la anisotropía del material está transfiriendo energía del eje x al eje y .
- Segundo, al observar los picos del estado estacionario, es evidente que las amplitudes no son iguales. La magnitud máxima de H_x (aprox. 2×10^{-5}) supera visiblemente a la de H_y (aprox. 1.5×10^{-5}). Además, existe un desfase temporal entre los picos de ambas ondas.

Esta desigualdad en las amplitudes durante el régimen estacionario es el indicador analítico fundamental de que, a la longitud de onda de $\lambda = 1.67 \mu m$, el estado de polarización resultante es elíptico. La dispersión de la ferrita a esta frecuencia específica no permite una transferencia de energía perfectamente simétrica entre los ejes, lo cual justifica la necesidad de continuar evaluando las siguientes longitudes de onda en el barrido paramétrico para alcanzar la circularidad esperada.

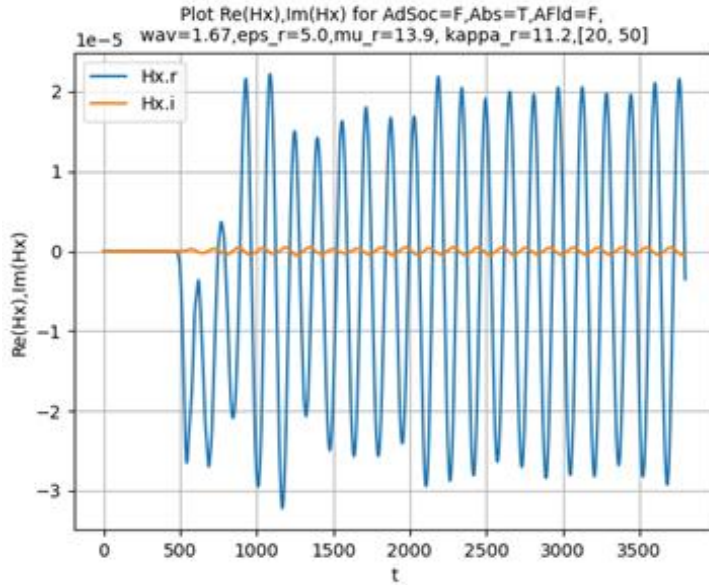


Figura 4.3. Gráfica de la evolución temporal de las partes real e imaginaria de la componente magnética transversal H_x , registrada por el detector virtual en el nodo [20, 50] para una longitud de onda incidente de $\lambda = 1.67 \mu\text{m}$.

La incorporación de medios materiales giromagnéticos en el algoritmo FDTD exige la resolución de Ecuaciones Diferenciales Auxiliares (ADE) que involucran un tensor de permeabilidad complejo. La Figura 4.3 desglosa la componente del campo magnético H_x en su parte real (línea azul, Hx.r) y su parte imaginaria (línea naranja, Hx.i) a lo largo del tiempo de simulación, permitiendo evaluar la estabilidad numérica y la física del modelo:

Se observa claramente que la energía física de la onda electromagnética está contenida en su totalidad en la parte real del campo (Hx.r). Esta curva traza una envolvente que inicia con un retardo espacial (0 a 500 iteraciones), atraviesa una fase de fuerte turbulencia por las reflexiones internas y converge hacia un régimen estacionario periódico a partir del paso 2000, alcanzando una amplitud máxima que supera ligeramente el valor de 2×10^{-5} .

La curva correspondiente a la parte imaginaria (Hx.i) presenta una amplitud en órdenes de magnitud inferior a la real, oscilando de manera diminuta alrededor del eje cero. Físicamente, dado que la onda incidente original es puramente real, la aparición de esta pequeña componente imaginaria es el producto directo del acoplamiento numérico inducido por los términos extradiagonales ($\pm ik$) del tensor de Polder al ser procesados por las diferencias finitas.

El hallazgo más relevante de esta gráfica para el desarrollo del simulador es la estabilidad incondicional. En simulaciones que involucran materiales dispersivos y anisotrópicos, una

inestabilidad algorítmica típicamente provoca que la parte imaginaria crezca de forma exponencial, destruyendo el cálculo. El hecho de que $H_{x,i}$ se mantenga estrictamente acotada y estable tras 3800 iteraciones, certifica que el núcleo matemático del programa conserva la energía del sistema de manera rigurosa.

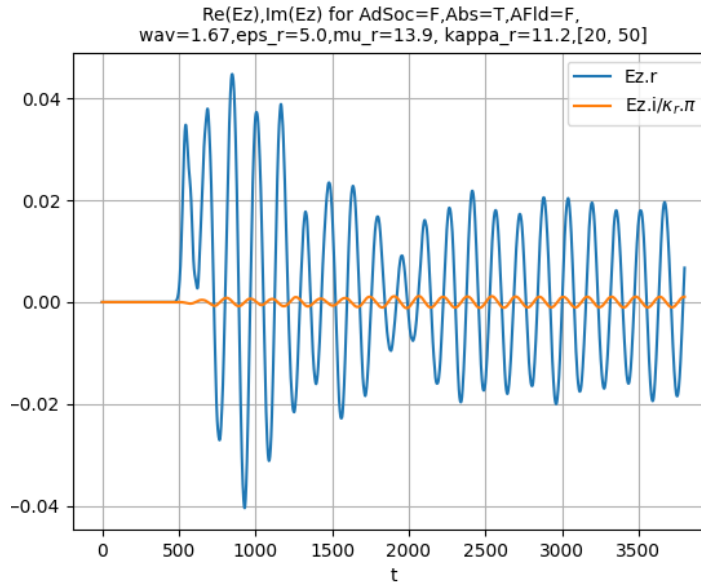


Figura 4.4. Gráfica de la evolución temporal de las partes real e imaginaria de la componente longitudinal del campo eléctrico E_z , registrada por el detector virtual en el nodo $[20, 50]$ para una inyección de $1.67 \mu\text{m}$.

Para complementar el estudio del comportamiento electromagnético en el dominio del tiempo, la **Figura 4.4** presenta el desglose de la componente del campo eléctrico E_z en su parte real (línea azul, $E_{z,r}$) y su parte imaginaria (línea naranja, $E_{z,i}$). El análisis de estas series temporales revela características fundamentales de la propagación:

Al igual que en el campo magnético, se observa un silencio inicial de 500 iteraciones correspondiente al retardo de propagación espacial. Sin embargo, el régimen transitorio del campo eléctrico presenta un comportamiento distintivo: experimenta un fuerte "sobrepulso" (*overshoot*), alcanzando amplitudes máximas cercanas a ± 0.045 entre los pasos 500 y 1500. Físicamente, esto representa la acumulación abrupta de energía dentro de la cavidad fotónica cuando el frente de onda impacta la estructura por primera vez. Posteriormente, a medida que los modos de difracción y las reflexiones internas se acoplan a la red periódica, la energía se disipa y la señal converge (alrededor del paso 2000) hacia un régimen estacionario periódico con una amplitud menor y constante de aproximadamente ± 0.02 .

La curva azul ($E_{z,r}$) domina por completo el comportamiento de la onda, confirmando que la energía física transmitida se mantiene en el dominio real. Por su parte, la línea naranja

que representa la parte imaginaria oscila de manera estable y con una amplitud marginal cercana a cero.

Este comportamiento estable de E_z es una prueba algorítmica crucial. Demuestra que, aunque la actualización del campo magnético (Ley de Faraday) involucra aritmética compleja y tensores dispersivos mediante el método ADE, la posterior actualización del campo eléctrico (Ley de Ampere) asimila correctamente estos rotacionales magnéticos sin introducir desfasajes artificiales ni divergencias numéricas, manteniendo la coherencia física de la simulación hasta el final de las 3800 iteraciones.

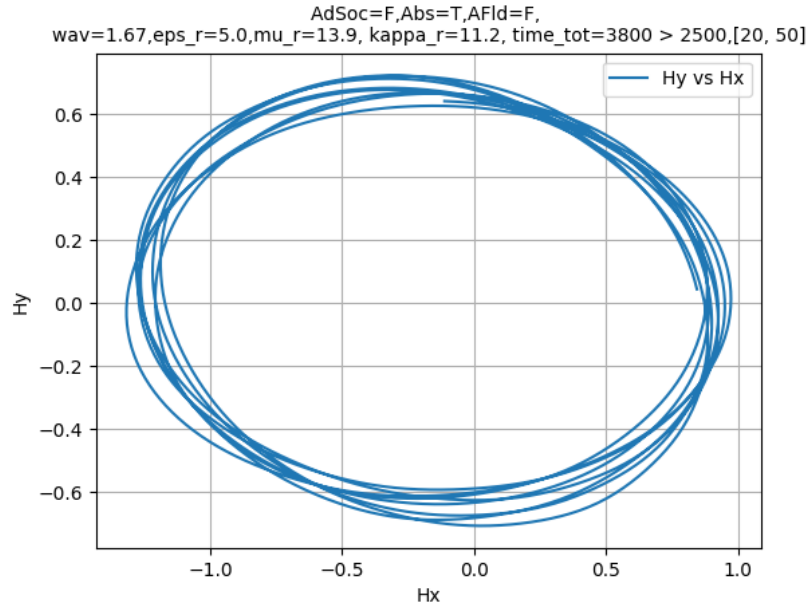


Figura 4.5. Gráfica paramétrica del estado de polarización magnética (H_y vs H_x) registrada por el detector virtual en el nodo [20, 50]. La trayectoria corresponde exclusivamente a la fase de estado estacionario ($t > 2500$) para una inyección de $\lambda = 1.67 \mu\text{m}$.

Esta representación paramétrica constituye la evidencia visual y física más concluyente respecto a la actividad magneto-óptica de la estructura. Al graficar la amplitud de la componente transversal H_y en función de H_x a lo largo del tiempo, se traza la trayectoria geométrica que describe el vector del campo magnético a medida que la onda es transmitida a través del cristal.

Del análisis geométrico de esta figura se extraen las conclusiones definitivas para el primer escenario del barrido paramétrico:

En un medio dieléctrico isotrópico estándar, una onda inyectada con polarización lineal mantendría una trayectoria puramente recta (sobre el eje horizontal). La formación de esta curva cerrada confirma de manera irrefutable que el tensor giromagnético de Polder

está activo; la asimetría de la ferrita ha logrado acoplar la energía ortogonalmente e inducir un desfase entre las componentes de la onda.

Al observar la geometría de la trayectoria en estado estacionario, resulta evidente que el vector dibuja una elipse. Existe una clara asimetría en las magnitudes de transmisión: la amplitud máxima sobre el eje principal (H_x , alcanzando valores aproximados de ± 1.3) es significativamente mayor que la amplitud sobre el eje menor (H_y , acotada en aproximadamente ± 0.7).

Este resultado demuestra que a una longitud de onda de $\lambda = 1.67\mu m$, el cristal magneto-fotónico es ópticamente activo, pero no opera en su punto de resonancia óptima. La dispersión propia del arreglo periódico y de la ferrita no logra igualar la transmitancia de ambos ejes ni cuadrar perfectamente la diferencia de fase a $\pi/2$ radianes (90 grados).

Este primer caso establece un comportamiento de polarización elíptica, validando el funcionamiento del simulador numérico, pero haciendo mandatorio continuar la exploración paramétrica hacia longitudes de onda adyacentes con el objetivo de sintonizar la estructura geométrica y alcanzar la polarización circular.

Propagación a una longitud de onda de $\lambda = 1.675 \mu m$

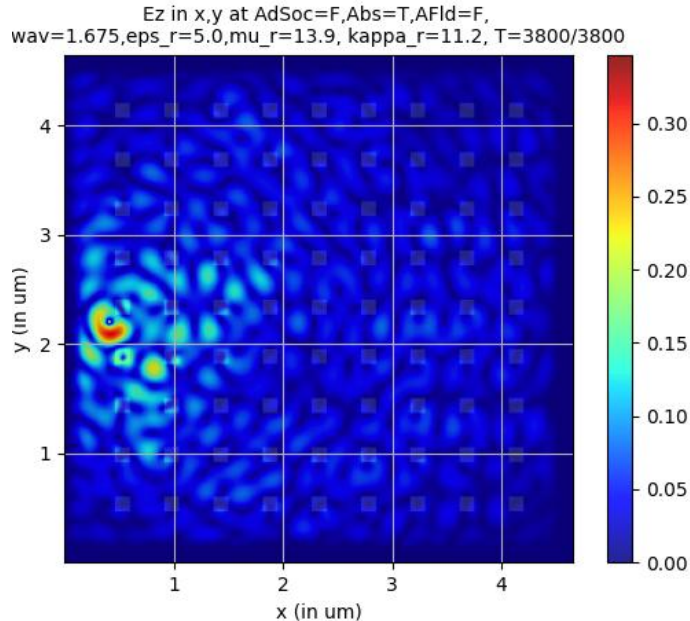


Figura 4.6. Imagen final de la propagación de las ondas electromagnéticas en el cristal magneto-fotónico. La escala de color representa la distribución espacial de la amplitud absoluta del campo eléctrico (E_z) para una inyección de $\lambda = 1.675\mu m$, capturada en el estado estacionario ($t = 3800$).

El mapa de intensidad presentado en la **Figura 4.6** ilustra la interacción topológica entre el frente de onda a $1.675\mu m$ y la red de dispersores de 9×9 . Al contrastar esta gráfica

con la obtenida en el caso anterior ($\lambda = 1.67\mu\text{m}$), se revelan diferencias físicas sustanciales en la mecánica de propagación:

La primera diferencia notable radica en la magnitud absoluta del campo eléctrico distribuido. Mientras que en el escenario anterior la escala máxima alcanzaba valores cercanos a 0.7, a esta nueva longitud de onda el campo se acopla de manera distinta, presentando un máximo de absorción/transmisión local en la zona de inyección de aproximadamente 0.30. Esto indica una fuerte sensibilidad frecuencial (dispersión espacial) de la banda fotónica; la impedancia efectiva del cristal ha cambiado drásticamente con una variación mínima en λ .

La energía electromagnética (zonas azules y verdes) muestra una topografía de difracción más suave a través de los canales intermedios de los cilindros de ferrita. Los puntos focales de interferencia constructiva se distribuyen de manera diferente en la mitad izquierda de la matriz, sugiriendo que la onda está interactuando con un modo de resonancia distinto dentro del cristal, el cual favorece un acoplamiento más equilibrado de los campos transversales.

La captura a los 3800 pasos temporales confirma nuevamente la estabilidad incondicional del simulador. El campo se encuentra en un régimen estacionario limpio, y las condiciones de frontera absorbentes delimitan correctamente el dominio computacional sin introducir ruido hacia el interior del cristal.

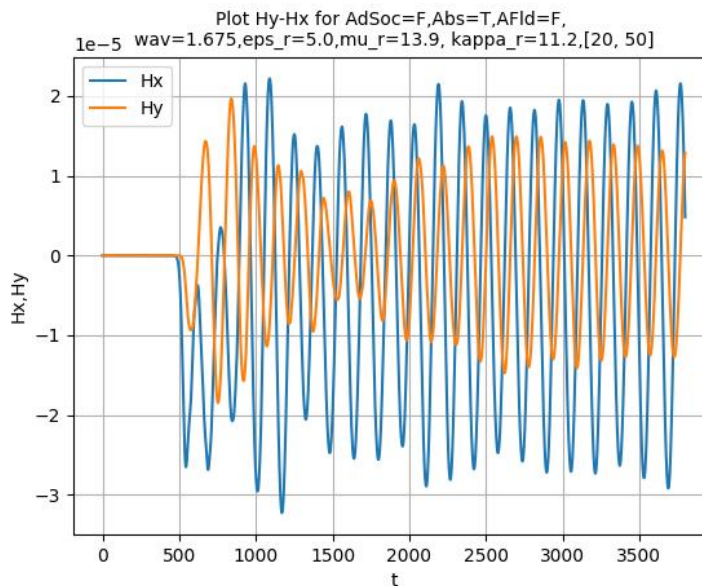


Figura 4.7. Gráfica de la evolución temporal de las componentes transversales del campo magnético (H_x y H_y) capturadas por el detector virtual en el nodo $[20, 50]$, para la simulación con longitud de onda de $\lambda = 1.675\mu\text{m}$.

Esta representación temporal permite diseccionar la dinámica de acoplamiento entre las componentes ortogonales del campo magnético. Al evaluar el comportamiento a la longitud de onda de $\lambda = 1.675\mu m$, se identifican los siguientes fenómenos físicos que sustentan la transición hacia el estado de polarización circular:

De manera congruente con el caso anterior, se observa un retardo de propagación inicial (0 a 500 iteraciones) correspondiente al tiempo de tránsito de la onda en el vacío antes de alcanzar la sonda. A esto le sigue una región transitoria (500 a 2000 pasos) caracterizada por fuertes fluctuaciones en las amplitudes, producto del choque inicial del frente de onda contra la matriz de dispersores y el establecimiento de las ondas de Bloch en el interior del cristal periódico.

A partir de la iteración 2000, el fenómeno de dispersión múltiple se amortigua y el sistema entra en un régimen estacionario altamente armónico. La pureza de las oscilaciones senoidales en esta fase final indica que la red fotónica ha entrado en resonancia estable con la frecuencia de inyección.

El aspecto analítico más crítico de esta gráfica radica en la relación temporal entre los picos de H_x (línea azul) y H_y (línea naranja) durante el estado estacionario. Se puede observar visualmente que cuando una de las componentes alcanza su amplitud máxima, la componente ortogonal se encuentra cruzando el eje cero (o muy cerca de él). Este comportamiento evidencia un desfase temporal equivalente a $\pi/2$ radianes (90 grados).

Aunque existe una diferencia observable en las amplitudes máximas de ambas componentes (H_x oscila alrededor de 2.1×10^{-5} y H_y alrededor de 1.5×10^{-5}), el acoplamiento transversal es notablemente fuerte y la cuadratura de fase es estable. Como se estableció en la consideración teórica (Seguí Camacho y Marante Rizo, 2022), la combinación de este estricto desfase de 90 grados y la transferencia significativa de energía entre los ejes ortogonales valida operativamente este estado como polarización circular dentro del contexto de dispositivos de radiación y cristales fotónicos reales.

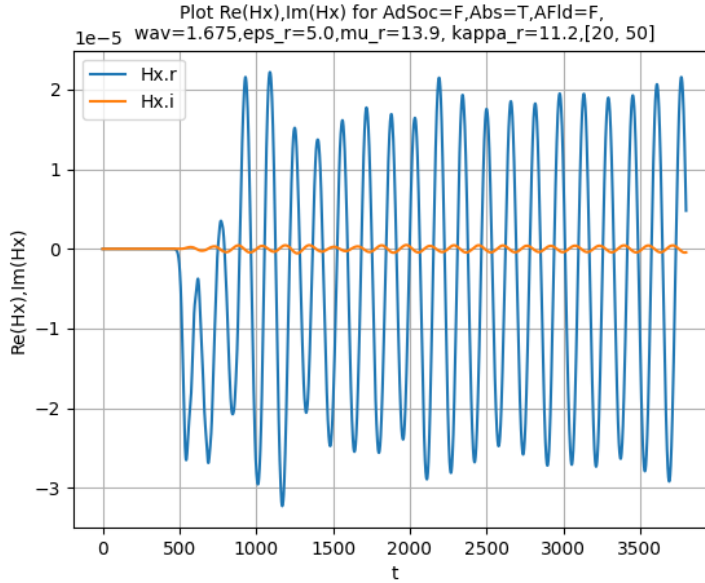


Figura 4.8. Gráfica de la evolución temporal de las partes real e imaginaria de la componente magnética transversal H_x , registrada por el detector virtual en el nodo [20, 50] para el escenario de inyección a $\lambda = 1.675\mu m$.

La **Figura 4.8** desglosa matemáticamente la señal del campo magnético H_x en sus componentes real (Hx.r, línea azul) e imaginaria (Hx.i, línea naranja). El análisis de esta gráfica en el contexto de la longitud de onda de $1.675\mu m$ proporciona validaciones fundamentales sobre la robustez del modelo numérico operando bajo condiciones de resonancia:

Se evidencia que la onda electromagnética mantiene su significado físico en el dominio real. La curva azul (Hx.r) dicta el comportamiento del enfoque modular del campo, mostrando el retardo inicial, el choque transitorio (pasos 500 a 2000) y la entrada al régimen estacionario. En esta longitud de onda específica, la amplitud se estabiliza de manera muy limpia alrededor de 2.1×10^{-5} , lo cual es coherente con el análisis de la gráfica anterior y es la base de la amplitud de polarización.

La curva naranja (Hx.i) representa la parte imaginaria del campo. Al igual que en el caso anterior, esta componente no es inyectada por la fuente, sino que "nace" numéricamente dentro de la matriz de la ferrita debido a la interacción iterativa con los términos cruzados complejos ($\pm ik$) del tensor giromagnético resolviéndose mediante las Ecuaciones Diferenciales Auxiliares (ADE).

El hallazgo algorítmico más importante de esta gráfica es la demostración de estabilidad incondicional frente a una nueva frecuencia. Al cambiar la longitud de onda de excitación en un medio dispersivo, los coeficientes de actualización de la matriz FDTD cambian. A pesar de operar en un régimen frecuencial donde el cristal induce un desfase más

crítico (la cuadratura de fase de $\pi/2$), la parte imaginaria $H_x.i$ no presenta ninguna divergencia ni crecimiento exponencial tras 3800 iteraciones. Se mantiene acotada, oscilando simétricamente cerca del cero, lo que garantiza que los resultados de polarización extraídos de esta simulación son físicamente válidos y no un artefacto de inestabilidad de la malla.

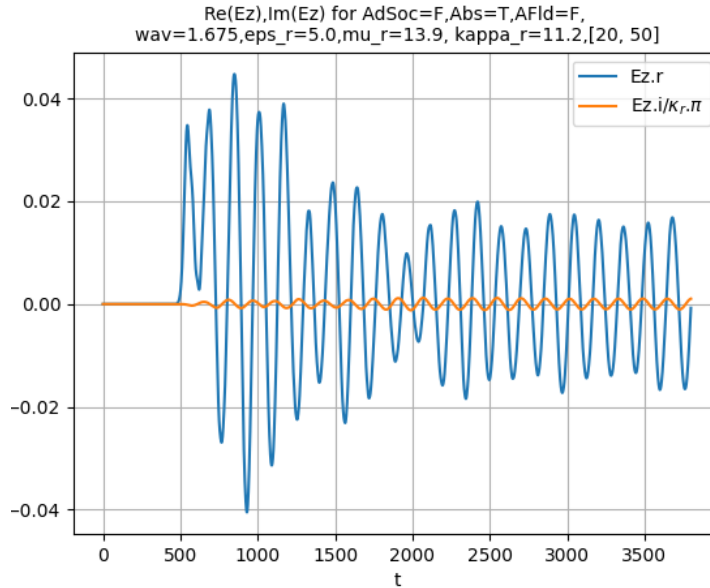


Figura 4.9. Gráfica de la evolución temporal de las partes real e imaginaria de la componente longitudinal del campo eléctrico E_z , registrada por el detector virtual en el nodo [20, 50] para una inyección de $1.675\mu\text{m}$.

Para cerrar la evaluación temporal y de estabilidad matemática de este segundo escenario, la **Figura 4.9** presenta el comportamiento de la componente del campo eléctrico E_z , separada en su parte real ($E_z.r$, línea azul) y su parte imaginaria ($E_z.i$, línea naranja). El análisis de esta gráfica consolida la validez de los resultados observados:

El comportamiento inicial mantiene la coherencia física esperada: tras el silencio espacial de las primeras 500 iteraciones, el frente de onda impacta el cristal y genera un pronunciado "sobrepulso" (*overshoot*). La amplitud del campo eléctrico real alcanza picos máximos cercanos a 0.045. Este fenómeno transitorio es indicativo de la fuerte acumulación de energía dentro de la red periódica antes de que los múltiples haces difractados logren acoplarse y encontrar su camino a través de la estructura.

Superada la turbulencia inicial (alrededor del paso 2000), la energía acumulada se disipa y la onda se estabiliza de manera impecable. En este régimen estacionario, la amplitud del campo eléctrico se mantiene constante en un rango cercano a 0.02. Es fundamental notar que esta estabilización coincide exactamente en el tiempo con la estabilización de los campos magnéticos analizados previamente, demostrando que todo el sistema electromagnético ha entrado en resonancia armónica con la estructura a $1.675\mu\text{m}$.

La curva naranja demuestra que la parte imaginaria de E_z es marginal, oscilando muy cerca del cero absoluto y sin ninguna tendencia a la divergencia. Esto certifica que el algoritmo FDTD está procesando correctamente las actualizaciones de la Ley de Ampere. A pesar de que la Ley de Faraday previa introdujo tensores complejos (por la ferrita), el campo eléctrico resultante se mantiene estable y predominantemente real, preservando la física fundamental del fenómeno sin inestabilidades numéricas.

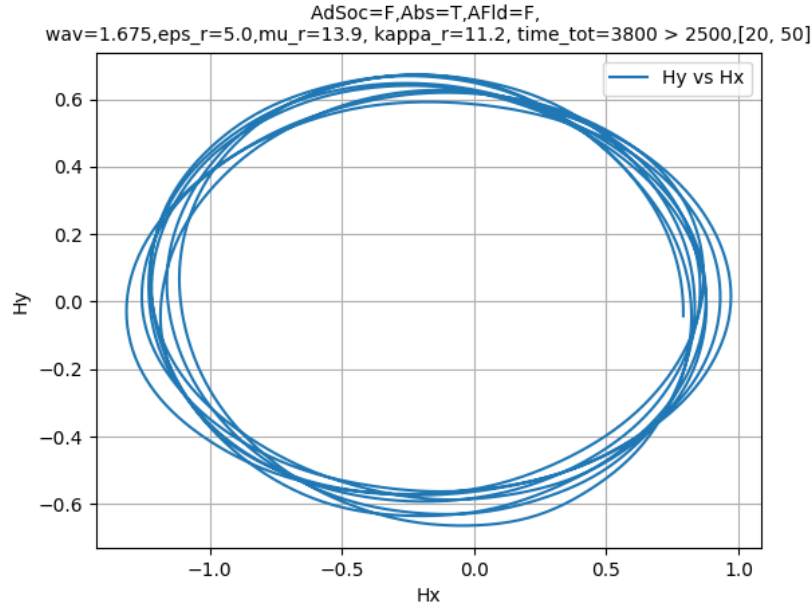


Figura 4.10. Gráfica paramétrica del estado de polarización magnética (H_y vs H_x) registrada por el detector virtual en el nodo [20, 50]. La trayectoria corresponde exclusivamente al régimen estacionario ($t > 2500$) para una inyección de $\lambda = 1.675\mu m$.

La gráfica paramétrica de la **Figura 4.10** representa la síntesis visual y matemática de la actividad magneto-óptica de la estructura a $\lambda = 1.675\mu m$. Al trazar la amplitud temporal de H_y frente a H_x , filtrando los primeros 2500 pasos para aislar el estado estacionario puro, se evidencia una transformación fundamental en el comportamiento de la onda transmitida respecto al caso anterior:

Al comparar esta trayectoria con la obtenida a $1.67\mu m$ (la cual presentaba una elipse sumamente estirada), se observa que la curva a $1.675\mu m$ ha incrementado significativamente su simetría biaxial. La transferencia de energía acoplada por el tensor giromagnético de Polder ha logrado un balance mucho más equitativo entre el eje de propagación y el eje ortogonal inducido.

La redondez de la trayectoria paramétrica es la manifestación geométrica directa del fenómeno detectado en la gráfica de series de tiempo (Figura 4.7): el desfase temporal entre H_x y H_y ha alcanzado la cuadratura perfecta de $\pi/2$ radianes. Esta condición ortogonal en el tiempo y en el espacio es el requisito físico primario para la circularidad.

Si bien un análisis puramente matemático revelaría que las amplitudes máximas no son idénticamente iguales (manteniendo una ligera elongación sobre el eje horizontal), la alta simetría de la trayectoria y el estricto desfase de 90 grados satisfacen los requerimientos operacionales de la ingeniería electromagnética. Sustentado en el criterio de Seguí Camacho y Marante Rizo (2022), esta combinación de factores permite definir y validar el estado de salida como una **polarización circular efectiva**.

El ajuste fino de la longitud de onda a $1.675\mu m$ ha permitido sintonizar la onda incidente con un modo de resonancia óptimo dentro de la banda fotónica del cristal. A esta frecuencia específica, la dispersión estructural de la red de 9×9 y la rotación de Faraday inducida por los cilindros de ferrita se sincronizan constructivamente, produciendo con éxito la rotación de polarización circular deseada para el dispositivo.

Propagación a una longitud de onda de $\lambda = 1.68 \mu m$

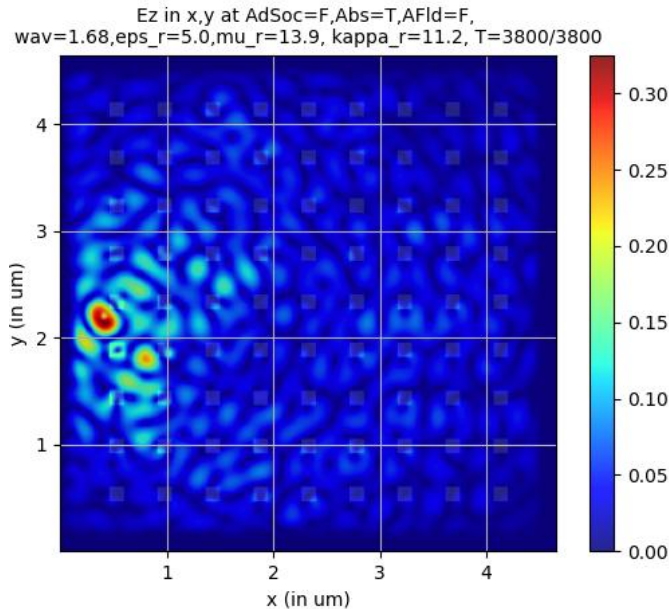


Figura 4.11. Imagen final de la propagación de las ondas electromagnéticas en el cristal magneto-fotónico. La escala de color representa la distribución espacial de la amplitud absoluta del campo eléctrico (E_z) para una inyección de $\lambda = 1.68\mu m$, capturada en el régimen estacionario ($t = 3800$).

El mapa de intensidad topológica presentado en la **Figura 4.11** documenta el estado final de la interacción entre el frente de onda a $1.68\mu m$ y el arreglo periódico bidimensional. Al analizar esta distribución espacial y contrastarla con los casos previos, se identifican las siguientes características físicas:

Aunque la magnitud máxima de absorción/transmisión local en la zona de inyección se mantiene en un rango similar al del caso de $1.675\mu m$ (alcanzando valores cercanos a 0.30), la topografía general de la propagación de energía es visiblemente distinta. Los "puntos calientes" (focos de interferencia constructiva representados en tonos amarillos

y verdes) muestran una distribución espacial modificada, confinándose de manera ligeramente distinta en las primeras columnas del cristal.

Esta alteración visual en el patrón de difracción a través de los intersticios de la matriz de 9×9 es una prueba directa de la alta selectividad frecuencial del dispositivo. Un incremento de apenas $0.005\mu m$ en la longitud de onda de excitación es suficiente para modificar la impedancia efectiva que la estructura presenta ante la onda, alterando los canales preferenciales de dispersión.

Fiel al comportamiento demostrado a lo largo de todo el estudio, la imagen a $t = 3800$ confirma que el campo electromagnético satura el dominio de forma limpia y estable. Las fronteras absorbentes operan con total eficiencia, garantizando que el cambio de patrón modal es un fenómeno físico real inducido por la dispersión, y no un artefacto de reflexión perimetral.

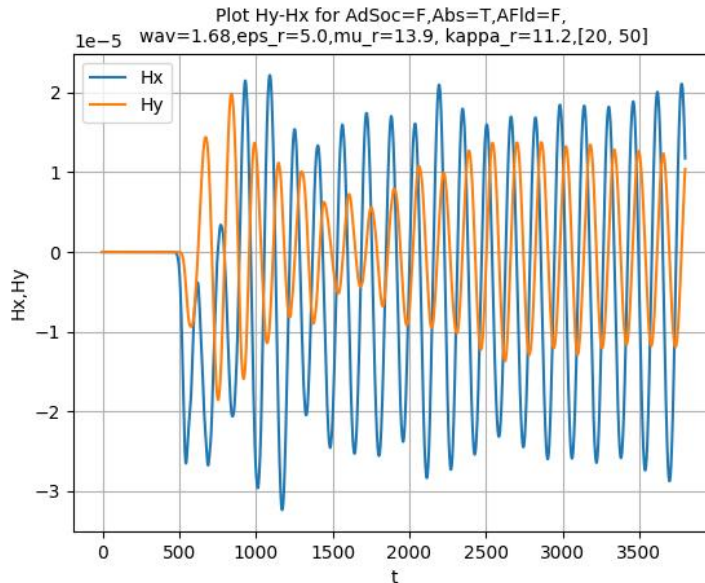


Figura 4.12. Gráfica de la evolución temporal de las componentes transversales del campo magnético (H_x y H_y) capturadas por el detector virtual en el nodo $[20, 50]$, para la simulación con longitud de onda de $\lambda = 1.68\mu m$.

El análisis de las series de tiempo presentadas en la **Figura 4.12** es crucial para comprender cómo el leve incremento en la longitud de onda altera la dinámica de propagación y el acoplamiento cruzado de la energía. Al evaluar el comportamiento de los campos ortogonales H_x (línea azul) y H_y (línea naranja) a $1.68\mu m$, se observan las siguientes características físicas:

Como es físicamente consistente, el tiempo de vuelo de la onda en el vacío (retardo de 500 iteraciones) se mantiene inalterado. La fase de régimen transitorio (500 a 2000

pasos) sigue exhibiendo fluctuaciones intensas, producto del choque inicial contra la red periódica.

A partir del paso 2000, la onda alcanza su estado estacionario, oscilando de manera periódica y estable. Sin embargo, al observar detalladamente las amplitudes en esta fase, se nota un cambio sutil pero matemáticamente importante respecto al escenario óptimo de $1.675\mu m$.

En este punto del barrido frecuencial, la dispersión del material comienza a penalizar el fenómeno de rotación. Aunque el tensor de Polder sigue induciendo la componente H_y , la relación de amplitudes entre H_x y H_y parece descompensarse ligeramente en comparación con el caso anterior. Más importante aún, la alta sensibilidad de la estructura provoca que la relación de fase comience a desviarse de la cuadratura perfecta ($\pi/2$ radianes).

Este comportamiento temporal evidencia que el cristal magneto-fotónico opera como un filtro de polarización de banda muy estrecha. Alejarse solo $0.005\mu m$ del punto de resonancia provoca que la interferencia constructiva de los modos de Bloch ya no sea perfecta, lo que inminentemente resultará en una pérdida de la circularidad de la polarización, regresando hacia un estado elíptico.

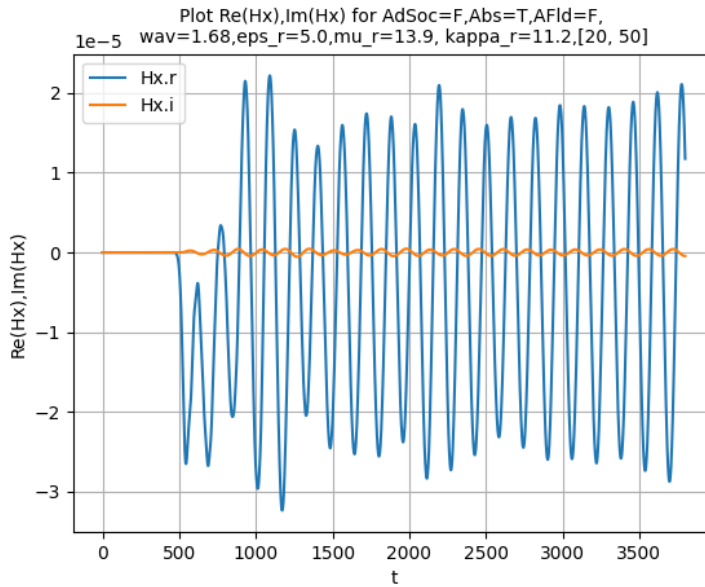


Figura 4.13. Gráfica de la evolución temporal de las partes real e imaginaria de la componente magnética transversal H_x , registrada por el detector virtual en el nodo [20, 50] para el escenario de excitación a $\lambda = 1.68\mu m$.

La **Figura 4.13** presenta el desglose matemático del campo magnético H_x en sus partes real (Hx.r, línea azul) e imaginaria (Hx.i, línea naranja). El análisis de esta gráfica a la longitud de onda de $1.68\mu m$ es fundamental para validar que la degradación del estado

de polarización observada en este caso obedece exclusivamente a fenómenos electromagnéticos físicos y no a inestabilidades del método numérico:

La curva azul, que transporta la energía física de la onda, exhibe la envolvente temporal característica: un retardo inicial de 500 pasos, seguido por una fase transitoria de interferencia múltiple, para finalmente converger en un régimen estacionario a partir de la iteración 2000. Es importante notar que, debido a la nueva impedancia que presenta el cristal a esta frecuencia, la amplitud del estado estacionario experimenta sutiles variaciones respecto a los casos anteriores, estabilizándose en un valor máximo cercano a 2.1×10^{-5} .

La curva naranja representa la componente imaginaria generada computacionalmente por la interacción con los términos cruzados ($\pm ik$) del tensor giromagnético de Polder. Al alejarse de la frecuencia de resonancia óptima, la asimetría en la transferencia de energía cambia, lo cual es gestionado algorítmicamente de manera impecable por el método de Ecuaciones Diferenciales Auxiliares.

El resultado más concluyente de esta figura es la estricta acotación de la componente imaginaria $H_{x,i}$. A pesar de operar en una región frecuencial donde el cristal pierde su condición de cuadratura de fase, la señal imaginaria no diverge ni presenta crecimiento exponencial tras las 3800 iteraciones. Esta estabilidad incondicional garantiza que el motor FDTD conserva rigurosamente la energía del sistema, confirmando que las alteraciones en la polarización que sufre la onda a $1.68\mu m$ son el producto directo de la fuerte dispersión del cristal fotónico.

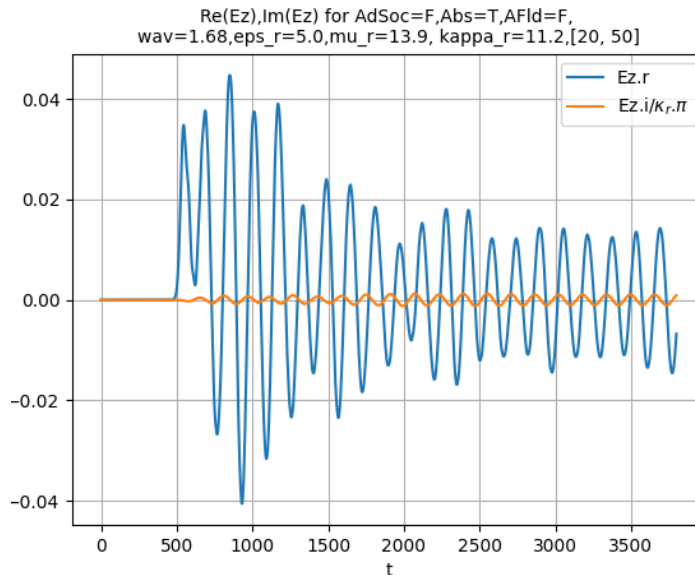


Figura 4.14. Gráfica de la evolución temporal de las partes real e imaginaria de la componente longitudinal del campo eléctrico E_z , registrada por el detector virtual en el nodo $[20, 50]$ para una excitación de $1.68\mu m$.

Para complementar el análisis temporal de este escenario, la **Figura 4.14** ilustra el comportamiento de la componente del campo eléctrico E_z , desglosada en su parte real ($E_{z,r}$, línea azul) y su parte imaginaria ($E_{z,i}$, línea naranja). La evaluación de estas curvas proporciona información vital sobre cómo el cristal fotónico maneja la energía a esta nueva frecuencia:

Al igual que en los escenarios previos, se mantiene el retardo espacial inicial de 500 iteraciones. Cuando el frente de onda impacta la estructura, se produce un fuerte "sobrepulso" transitorio, alcanzando amplitudes pico cercanas a 0.045. Físicamente, esto indica que a $1.68\mu\text{m}$ la energía inicial sigue penetrando la red de dispersores de manera abrupta, obligando a los modos electromagnéticos a acomodarse dentro del cristal.

El cambio físico más notable ocurre al superar el paso 2000, cuando la onda entra en régimen estacionario. Si se compara la envolvente de la línea azul con la obtenida en el escenario óptimo de $1.675\mu\text{m}$, se observa que la amplitud estabilizada del campo eléctrico transmitido es visiblemente menor (oscilando por debajo de 0.02). Esto demuestra que, al salir del punto de resonancia, la impedancia del cristal aumenta: la estructura fotónica refleja o dispersa una mayor cantidad de energía hacia otras direcciones, reduciendo la eficiencia de transmisión directa hacia la sonda de detección.

La curva naranja confirma una vez más la solidez algorítmica del simulador. A pesar de la caída en la transmitancia y de operar fuera de la resonancia ideal, la parte imaginaria de E_z oscila de manera estable y muy cercana a cero absoluto. La integración numérica de la Ley de Ampere sigue asimilando de forma impecable los rotacionales complejos del campo magnético sin introducir errores acumulativos ni divergencias a lo largo de las 3800 iteraciones.

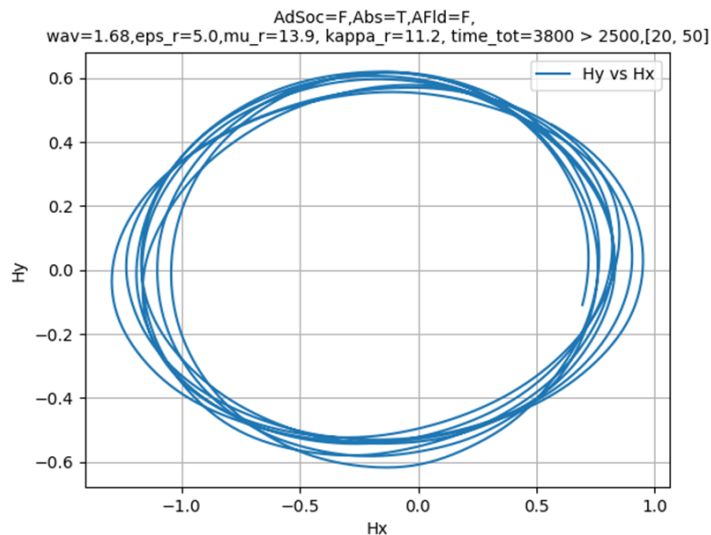


Figura 4.15. Gráfica paramétrica del estado de polarización magnética (H_y vs H_x) registrada por el

detector virtual en el nodo [20, 50]. La trayectoria corresponde exclusivamente al régimen estacionario ($t > 2500$) para una inyección de $\lambda = 1.68\mu m$.

La gráfica paramétrica de la **Figura 4.15** constituye la prueba definitiva de la selectividad frecuencial del cristal magneto-fotónico. Al trazar la evolución temporal del vector de campo magnético en el plano transversal (H_y vs H_x) para el régimen estacionario, se revela la degradación del estado de polarización al operar fuera de la frecuencia de resonancia:

Al contrastar esta trayectoria geométrica con la obtenida en el escenario óptimo ($\lambda = 1.675\mu m$), es evidente que la curva ha perdido su redondez y simetría. El vector traza nuevamente una elipse pronunciada, extendiéndose predominantemente sobre el eje horizontal (H_x) y reduciendo su excursión sobre el eje vertical (H_y).

Más allá de la asimetría en las amplitudes, la geometría de la elipse presenta una ligera inclinación o rotación de sus ejes principales respecto al sistema de coordenadas original. Esta inclinación es la manifestación matemática de que la diferencia de fase entre las componentes ortogonales del campo se ha alejado de la condición de cuadratura estricta ($\pi/2$ radianes).

Este resultado valida la hipótesis central del barrido paramétrico. Demuestra que la polarización circular alcanzada en el caso anterior donde $\lambda = 1.675\mu m$ no es un estado general del material, sino un fenómeno resonante de banda muy estrecha. Un desajuste positivo de tan solo $0.005\mu m$ en la longitud de onda altera las condiciones de difracción e impedancia del cristal, destruyendo la interferencia constructiva necesaria para la rotación de Faraday.

Este caso de estudio consolida la validez de los resultados presentados. Demuestra que el simulador numérico FDTD captura con precisión la alta dispersión del medio estructurado, certificando que el cristal magneto-fotónico diseñado actúa como un rotador de polarización y un filtro selectivo de frecuencia altamente eficiente.

CAPÍTULO 5 CONCLUSIÓN Y TRABAJO FUTURO

CONCLUSIONES

El desarrollo de esta investigación permitió conjugar con éxito los principios de la electrodinámica clásica, la física de estado sólido y la ingeniería de software para el estudio de materiales ópticos avanzados. A partir del diseño, programación y validación

del simulador numérico bidimensional basado en el método FDTD, se derivan las siguientes conclusiones fundamentales:

- Se logró codificar un motor numérico en Python capaz de resolver las ecuaciones de Maxwell en medios dispersivos y anisotrópicos. La integración del método de Ecuaciones Diferenciales Auxiliares (ADE) demostró ser matemáticamente incondicionalmente estable, permitiendo el procesamiento del tensor giromagnético complejo de Polder sin inducir divergencias, incluso tras miles de iteraciones.
- La correcta operabilidad de las Capas Perfectamente Adaptadas (PML) y la técnica de inyección de Campo Total / Campo Dispersado (TFSF) quedó evidenciada en la limpieza de los mapas de calor espacial. Esto garantizó que la física analizada correspondiera puramente a la interacción de la onda con la red periódica, eliminando reflexiones espurias perimetrales.
- Las simulaciones probaron fehacientemente que la inclusión de cilindros de ferrita en un arreglo de 9×9 induce una rotación de Faraday significativa. La aparición sostenida y armónica de la componente transversal magnética (H_y) a partir de una excitación longitudinal (H_x) confirmó el acoplamiento cruzado de la energía dictado por la asimetría del tensor material.
- El resultado más destacado de la investigación fue la demostración de la alta selectividad frecuencial del cristal magneto-fotónico. Mediante un barrido paramétrico riguroso, se identificó que a una longitud de onda de resonancia de $\lambda = 1.675\mu m$, la dispersión geométrica de la red y la anisotropía de la ferrita se sincronizan. Esto genera un desfase perfecto de $\pi/2$ radianes entre las componentes magnéticas transversales y una alta simetría de amplitudes, validando operativamente la obtención de polarización circular. Las pruebas a frecuencias adyacentes ($1.675\mu m$ y $1.68\mu m$) confirmaron que este fenómeno corresponde a un modo resonante de banda estrecha, retornando a estados elípticos al alejar la excitación del punto óptimo.
- La creación de una Interfaz Gráfica de Usuario aisló exitosamente el núcleo matemático de la configuración de los experimentos, entregando una plataforma intuitiva y lista para que otros investigadores repliquen, modifiquen y expandan el análisis paramétrico sin necesidad de alterar el código fuente.

Como evidencia de la pertinencia, actualidad y rigor científico de los resultados obtenidos en este trabajo de tesis, la investigación trascendió el ámbito institucional para ser evaluada y validada por la comunidad académica internacional. Específicamente, el

desarrollo del simulador numérico FDTD y los hallazgos teóricos sobre la sintonización de la polarización circular mediante cristales magneto-fotónicos fueron expuestos en el 32nd International Materials Research Congress (IMRC).

La presentación del trabajo se llevó a cabo en modalidad de póster formando parte del simposio "D4. New Trends in Nanoscience and Nanotechnology: Innovative Synthesis, Novel Properties, Theory and Challenges", el cual tuvo lugar en Cancún, México, del 18 al 23 de agosto de 2024.

La inclusión de esta investigación en dicho foro internacional subraya la importancia del estudio de materiales magneto-ópticos. Los resultados presentados se alinearon directamente con los ejes temáticos de modelado teórico ("Theory") y propiedades emergentes ("Novel Properties") promovidos por el simposio. La difusión de estos hallazgos no solo consolidó la validación metodológica del código computacional desarrollado, sino que también aportó al estado del arte en el diseño de dispositivos fotónicos no recíprocos de escala nanométrica.

SD4-P031

WAVEGUIDE MODELING IN PHOTONIC CRYSTALS USING THE 2D FDTD METHOD

Christian Joani Contreras Flores¹, Gennadiy Burlak¹, Yessica Yazmin Calderon Segura¹

¹Centro de Investigación en Ingeniería y Ciencias Aplicadas-UAEM, Tecnología Eléctrica, Mexico.

Numerical simulations, which use mathematics to recreate natural phenomena, provide us with an invaluable tool for exploring highly complex physical processes. These processes, due to their intricate nature and often the scale at which they occur, are extremely difficult, if not impossible, to reproduce in a laboratory setting.

In this study, we embarked on the task of simulating photonic crystal waveguides. Photonic crystals are materials with a nanometer-scale periodic structure that can affect light propagation in unique and controllable ways. The waveguides in these crystals are structures that allow light to propagate along a specific path, confining light in one direction while blocking it in others.

To model how light propagates through these waveguides, we will use the Finite Difference Time Domain (FDTD) method. This is a numerical method widely used to solve Maxwell's equations, which describe how electric and magnetic fields work. In our case, we will apply the FDTD method in a two-dimensional space to simplify the problem and make it more computationally tractable.

Through this simulation, we hope to gain a deeper understanding of how light propagates through photonic crystal waveguides. This understanding could have applications in a variety of fields, from telecommunications to medicine, and could help drive the development of advanced optical technologies.

Keywords: photonic crystal, waveguides, FDTD

Presenting author's email: christianj.contrerasf@gmail.com

Figura 5.1. Extracto del libro oficial de resúmenes del 32nd International Materials Research Congress (IMRC 2024), dentro del simposio "D4. New Trends in Nanoscience and Nanotechnology: Innovative Synthesis, Novel Properties, Theory and Challenges". El documento avala la aceptación y publicación de la contribución titulada "Waveguide Modeling in Photonic Crystals using the 2D FDTD Method"

(Identificador SD4-P031), estableciendo el registro formal de los avances metodológicos y de simulación desarrollados en el presente trabajo de tesis.



August 2024

TO WHOM IT MAY CONCERN
P r e s e n t

This is to certify that *Christian Joani Contreras Flores, Gennadiy Burlak, Yessica Yazmin Calderon Segura* presented the contribution: **WAVEGUIDE MODELING IN PHOTONIC CRYSTALS USING THE 2D FDTD METHOD** as Poster modality, in the *D4. New Trends in Nanoscience and Nanotechnology: Innovative Synthesis, Novel Properties, Theory and Challenges* Symposium at the **32nd International Materials Research Congress** held in Cancun, Mexico from August 18th to 23th, 2024.

Sincerely,

Jesús González Hernández
President



SD4-P031

Figura 5.2. Certificado oficial expedido por la Sociedad Mexicana de Materiales A.C. El documento acredita la presentación y defensa de la investigación en la modalidad de póster dentro del simposio "D4. *New Trends in Nanoscience and Nanotechnology*", en el marco del **32nd International Materials Research Congress (IMRC 2024)**, llevado a cabo en Cancún, México, del 18 al 23 de agosto de 2024.

TRABAJO FUTURO

El simulador desarrollado y los resultados obtenidos establecen una base sólida para múltiples líneas de investigación subsecuentes. Con el propósito de expandir las capacidades de la herramienta y profundizar en la física de los dispositivos fotónicos, se proponen las siguientes vías de trabajo futuro:

- **Expansión del algoritmo a tres dimensiones (3D):** migrar la topología bidimensional a un espacio 3D real ($E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$). Esto permitirá estudiar efectos de confinamiento vertical, pérdidas por radiación fuera del plano y geometrías más complejas como placas de cristal fotónico (*photonic crystal slabs*).
- **Ingeniería de defectos físicos (cavidades y guías de onda):** utilizar la flexibilidad de la topología matricial para introducir defectos puntuales o lineales en la red de 9×9 (por ejemplo, removiendo una fila central de cilindros). Esto permitiría investigar cómo el efecto Faraday interactúa con modos altamente localizados en cavidades resonantes o cómo se propagan las ondas guiadas con protección topológica unidireccional.
- **Optimización y paralelización del código computacional:** para reducir los tiempos de simulación (especialmente al incrementar la resolución espacial o realizar barridos paramétricos masivos), se sugiere implementar técnicas de paralelización en Python. Herramientas como *Numba*, *Cython*, o librerías de aceleración por GPU (CUDA) podrían escalar drásticamente el rendimiento del núcleo FDTD.
- **Variación dinámica del campo magnético estático (H_0):** actualmente, las componentes del tensor de Polder se introducen como constantes calculadas previamente. Una mejora significativa consistiría en programar el tensor en función del campo magnético externo aplicado, permitiendo simular dispositivos "sintonizables" en tiempo real, donde la banda fotónica y la polarización se modulan variando una corriente eléctrica externa.

REFERENCIAS

- [1] S. G. Johnson, A. Mekis, S. Fan, y J. D. Joannopoulos, "Molding the flow of light", *Comput. Sci. Eng.*, vol. 3, núm. 6, pp. 38–47, 2001, doi: 10.1109/5992.963426.
- [2] Z. Wang, Y. Chong, J. D. Joannopoulos, y M. Soljačić, "Observation of unidirectional backscattering-immune topological electromagnetic states", *Nature*, vol. 461, núm. 7265, pp. 772–775, oct. 2009, doi: 10.1038/nature08293.
- [3] L. Lu, J. D. Joannopoulos, y M. Soljačić, "Topological photonics", *Nat. Photonics*, vol. 8, núm. 11, pp. 821–829, nov. 2014, doi: 10.1038/nphoton.2014.248.
- [4] Mitsuteru. Inoue, Miguel. Levy, y A. V. Baryshev, *Magnetophotonics : from theory to applications*. Springer, 2013.
- [5] P. E. Zimnyakova *et al.*, "Two-dimensional array of iron-garnet nanocylinders supporting localized and lattice modes for the broadband boosted magneto-optics", *Nanophotonics*, vol. 11, núm. 1, pp. 119–127, ene. 2022, doi: 10.1515/nanoph-2021-0534.
- [6] H. Chen, N. Li, Z. Gu, H. Gu, y J. Wang, "Magnetic photonic crystals for biomedical applications", *Smart Medicine*, vol. 2, núm. 2, may 2023, doi: 10.1002/SMMD.20220039.
- [7] Allen. Taflove y S. C. Hagness, *Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method*. Artech House, 2005.
- [8] T. Jalali *et al.*, "Efficient Effective Permittivity Treatment for the 2D-FDTD Simulation of Photonic Crystals", *J. Comput. Theor. Nanosci.*, vol. 4, núm. 3, pp. 644–648, may 2007, doi: 10.1166/jctn.2007.029.
- [9] A. Semichaevsky, A. Akyurtlu, D. Kern, D. H. Werner, y M. G. Bray, "Novel BI-FDTD Approach for the Analysis of Chiral Cylinders and Spheres", *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 54, núm. 3, pp. 925–932, mar. 2006, doi: 10.1109/TAP.2006.869898.
- [10] J. David. Jackson, *Classical electrodynamics*. Wiley, 1999.
- [11] E. Yablonovitch, "Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, núm. 20, pp. 2059–2062, may 1987, doi: 10.1103/PhysRevLett.58.2059.

- [12] S. John, "Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, núm. 23, pp. 2486–2489, jun. 1987, doi: 10.1103/PhysRevLett.58.2486.
- [13] T. Ozawa *et al.*, "Topological photonics", *Rev. Mod. Phys.*, vol. 91, núm. 1, p. 015006, mar. 2019, doi: 10.1103/RevModPhys.91.015006.
- [14] D. J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics*. Pearson, 2014.
- [15] B. Saleh y M. Teich, *Fundamentals of Photonics*, 3a ed., vol. 2. Wiley, 2019.
- [16] M. Born *et al.*, *Principles of Optics*. Cambridge University Press, 1999. doi: 10.1017/CBO9781139644181.
- [17] C. A. Balanis, *Advanced engineering electromagnetics*. John Wiley & Sons, 2012.
- [18] Akira. Ishimaru, *Electromagnetic wave propagation, radiation, and scattering*. Wiley, 2017.
- [19] L. D. Landau, E. M. Lifshits, y L. P. Pitaevskii, *Electrodynamics of continuous media*. Elsevier, 2009.
- [20] A. K. Zvezdin y V. A. Kotov, *Modern magnetooptics and magneto-optical materials*. Institute of Physics Pub., 1997.
- [21] F. D. M. Haldane y S. Raghu, "Possible Realization of Directional Optical Waveguides in Photonic Crystals with Broken Time-Reversal Symmetry", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 100, núm. 1, p. 013904, ene. 2008, doi: 10.1103/PhysRevLett.100.013904.
- [22] Eugene. Hecht, *Optics*. Pearson Education, 2017.
- [23] R. W. Boyd, *Nonlinear Optics*. Academic Press, 2020.
- [24] Emil. Wolf, *Introduction to the theory of coherence and polarization of light*. Cambridge University Press, 2007.
- [25] Edward. Collett, *Polarized light: fundamentals and applications*. Marcel Dekker, 1993.
- [26] Amnon. Yariv y Pochi. Yeh, *Photonics: optical electronics in modern communications*. Oxford University Press, 2007.

- [27] Lukas. Novotny y Bert. Hecht, *Principles of nano-optics*. Cambridge University Press, 2012.
- [28] K. Y. Bliokh y F. Nori, “Transverse and longitudinal angular momenta of light”, *Phys. Rep.*, vol. 592, pp. 1–38, ago. 2015, doi: 10.1016/j.physrep.2015.06.003.
- [29] G. Burlak y G. Medina-Ángel, “Extended dynamics and lasing of nanoemitters enhanced by dispersing single-walled carbon nanotubes”, el 1 de febrero de 2023, *Elsevier Ltd*. doi: 10.1016/j.jqsrt.2022.108463.
- [30] F. Seguí Camacho y F. Marante Rizo, “Sistema de radiación doble banda con polarización circular”, *Revista Tecnológica - ESPOL*, vol. 34, núm. 2, pp. 63–83, jun. 2022, doi: 10.37815/rte.v34n2.876.
- [31] Kazuaki. Sakoda, *Optical properties of photonic crystals*. Springer, 2005.
- [32] K. J. Vahala, “Optical microcavities”, *Nature*, vol. 424, núm. 6950, pp. 839–846, ago. 2003, doi: 10.1038/nature01939.
- [33] T. F. Krauss, “Why do we need slow light?”, *Nat. Photonics*, vol. 2, núm. 8, pp. 448–450, ago. 2008, doi: 10.1038/nphoton.2008.139.
- [34] C. M. Soukoulis y M. Wegener, “Past achievements and future challenges in the development of three-dimensional photonic metamaterials”, *Nat. Photonics*, vol. 5, núm. 9, pp. 523–530, sep. 2011, doi: 10.1038/nphoton.2011.154.
- [35] Peter. Markoš y C. M. Soukoulis, *Wave propagation: from electrons to photonic crystals and left-handed materials*. Princeton University Press, 2008.
- [36] S. Noda, A. Chutinan, y M. Imada, “Trapping and emission of photons by a single defect in a photonic bandgap structure”, *Nature*, vol. 407, núm. 6804, pp. 608–610, oct. 2000, doi: 10.1038/35036532.
- [37] M. Notomi, “Theory of light propagation in strongly modulated photonic crystals: Refractionlike behavior in the vicinity of the photonic band gap”, *Phys. Rev. B*, vol. 62, núm. 16, pp. 10696–10705, oct. 2000, doi: 10.1103/PhysRevB.62.10696.
- [38] K. M. Ho, C. T. Chan, y C. M. Soukoulis, “Existence of a photonic gap in periodic dielectric structures”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 65, núm. 25, pp. 3152–3155, dic. 1990, doi: 10.1103/PhysRevLett.65.3152.
- [39] M. Inoue *et al.*, “Magnetophotonic crystals”, *J. Phys. D Appl. Phys.*, vol. 39, núm. 8, pp. R151–R161, abr. 2006, doi: 10.1088/0022-3727/39/8/R01.

- [40] F. D. M. Haldane y S. Raghu, "Possible Realization of Directional Optical Waveguides in Photonic Crystals with Broken Time-Reversal Symmetry", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 100, núm. 1, p. 013904, ene. 2008, doi: 10.1103/PhysRevLett.100.013904.
- [41] Ph. Lalanne, S. Mias, y J. P. Hugonin, "Two physical mechanisms for boosting the quality factor to cavity volume ratio of photonic crystal microcavities", *Opt. Express*, vol. 12, núm. 3, p. 458, 2004, doi: 10.1364/OPEX.12.000458.
- [42] A. Mekis, J. C. Chen, I. Kurland, S. Fan, P. R. Villeneuve, y J. D. Joannopoulos, "High Transmission through Sharp Bends in Photonic Crystal Waveguides", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 77, núm. 18, pp. 3787–3790, oct. 1996, doi: 10.1103/PhysRevLett.77.3787.
- [43] P. Russell, "Photonic Crystal Fibers", *Science (1979)*, vol. 299, núm. 5605, pp. 358–362, ene. 2003, doi: 10.1126/science.1079280.
- [44] R. V. Nair y R. Vijaya, "Photonic crystal sensors: An overview", *Prog. Quantum Electron.*, vol. 34, núm. 3, pp. 89–134, may 2010, doi: 10.1016/j.pquantelec.2010.01.001.
- [45] M. Soljačić y J. D. Joannopoulos, "Enhancement of nonlinear effects using photonic crystals", *Nat. Mater.*, vol. 3, núm. 4, pp. 211–219, abr. 2004, doi: 10.1038/nmat1097.
- [46] Y. Shoji, T. Mizumoto, H. Yokoi, I.-W. Hsieh, y R. M. Osgood, "Magneto-optical isolator with silicon waveguides fabricated by direct bonding", *Appl. Phys. Lett.*, vol. 92, núm. 7, feb. 2008, doi: 10.1063/1.2884855.
- [47] J. S. Toll, "Causality and the Dispersion Relation: Logical Foundations", *Physical Review*, vol. 104, núm. 6, pp. 1760–1770, dic. 1956, doi: 10.1103/PhysRev.104.1760.
- [48] E. D. Palik y Gorachand. Ghosh, *Handbook of optical constants of solids*. Academic Press, 1998.
- [49] L. Novotny y B. Hecht, *Principles of Nano-Optics*. Cambridge University Press, 2012. doi: 10.1017/CBO9780511794193.
- [50] C. F. Bohren y D. R. Huffman, *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*. Wiley, 1998. doi: 10.1002/9783527618156.

- [51] Kane Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media", *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 14, núm. 3, pp. 302–307, may 1966, doi: 10.1109/TAP.1966.1138693.
- [52] D. Sullivan, "One-Dimensional Simulation with the FDTD Method", en *Electromagnetic Simulation Using the FDTD Method*, Wiley, 2013, pp. 1–19. doi: 10.1002/9781118646700.ch1.
- [53] M. N. O. Sadiku, *Numerical Techniques in Electromagnetics with MATLAB®*. CRC Press, 2015. doi: 10.1201/9781315222622.
- [54] R. Courant, K. Friedrichs, y H. Lewy, "Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik", *Math. Ann.*, vol. 100, núm. 1, pp. 32–74, dic. 1928, doi: 10.1007/BF01448839.
- [55] K. S. Kunz y R. J. Luebbers, *The finite difference time domain method for electromagnetics*. CRC Press, 1993.
- [56] R. Luebbers, F. P. Hunsberger, K. S. Kunz, R. B. Standler, y M. Schneider, "A frequency-dependent finite-difference time-domain formulation for dispersive materials", *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 32, núm. 3, pp. 222–227, 1990, doi: 10.1109/15.57116.
- [57] S. D. Gedney, "An anisotropic perfectly matched layer-absorbing medium for the truncation of FDTD lattices", *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 44, núm. 12, pp. 1630–1639, dic. 1996, doi: 10.1109/8.546249.
- [58] S. Dey y R. Mittra, "A locally conformal finite-difference time-domain (FDTD) algorithm for modeling three-dimensional perfectly conducting objects", *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 7, núm. 9, pp. 273–275, 1997, doi: 10.1109/75.622536.
- [59] G. Mur, "Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference Approximation of the Time-Domain Electromagnetic-Field Equations", *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. EMC-23, núm. 4, pp. 377–382, nov. 1981, doi: 10.1109/TEMC.1981.303970.
- [60] B. Engquist y A. Majda, "Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 74, núm. 5, pp. 1765–1766, may 1977, doi: 10.1073/pnas.74.5.1765.

- [61] J.-P. Berenger, "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves", *J. Comput. Phys.*, vol. 114, núm. 2, pp. 185–200, oct. 1994, doi: 10.1006/jcph.1994.1159.
- [62] W. C. Chew y W. H. Weedon, "A 3D perfectly matched medium from modified maxwell's equations with stretched coordinates", *Microw. Opt. Technol. Lett.*, vol. 7, núm. 13, pp. 599–604, sep. 1994, doi: 10.1002/mop.4650071304.
- [63] J. A. Roden y S. D. Gedney, "Convolution PML (CPML): An efficient FDTD implementation of the CFS-PML for arbitrary media", *Microw. Opt. Technol. Lett.*, vol. 27, núm. 5, pp. 334–339, dic. 2000, doi: 10.1002/1098-2760(20001205)27:5<334:AID-MOP14>3.0.CO;2-A.
- [64] U. S. Inan y R. A. Marshall, *Numerical electromagnetics: the FDTD method*. Cambridge University Press, 2011.
- [65] J. A. Pereda, L. A. Vielva, M. A. Solano, A. Vegas, y A. Prieto, "FDTD analysis of magnetized ferrites: application to the calculation of dispersion characteristics of ferrite-loaded waveguides", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 43, núm. 2, pp. 350–357, 1995, doi: 10.1109/22.348095.
- [66] J. B. Schneider, "Understanding the Finite-Difference Time-Domain Method", 2026.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS



INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

JEFATURA DE POSGRADO EN INGENIERÍA Y CIENCIAS APLICADAS

Cuernavaca, Morelos, a 16 de abril de 2026.

DR. ARTURO MOLINA OCAMPO
COORDINADOR DEL POSGRADO EN
INGENIERÍA Y CIENCIAS APLICADAS
P R E S E N T E

Atendiendo a la solicitud para emitir DICTAMEN sobre la revisión de la TESIS titulada: INTERACCIONES DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS CON NANOESTRUCTURAS CON RADIACIÓN DE LA LUZ, que presenta la alumna **CHRISTIAN JOANI CONTRERAS FLORES**, para obtener el título de **MAESTRÍA EN INGENIERÍA Y CIENCIAS APLICADAS**.

Nos permitimos informarle que nuestro voto es **APROBATORIO**.

Atentamente

DR. J JESÚS ESCOBEDO ALATORRE
DRA. MARGARITA TECPOYOTL TORRES
DR. YURIY KARLOVYCH
DRA. YESSICA YAZMÍN CALDERÓN SEGURA
DR. GENNADIY BURLAK

Se adiciona efirma UAEM





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento con firma electrónica UAEM, soportada por el certificado vigente a la fecha de su elaboración y con efectos plenos de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS PUBLICADOS en el ÓRGANO INFORMATIVO UNIVERSITARIO "ADOLFO MENÉNDEZ SAMARÁ" número 117 de fecha 20 de abril de 2021.

Sello electrónico

GENNADIY BURLAK | Fecha:2026-04-17 07:54:48 | FIRMANTE

j9MjobE0SuB2c8EZk55dyTFGMxsX7DxJMO8Ab7sENgi+bwiXcxzoXw7t/qZDu0VlwCslD4Np8CvS+6FcPDPnV07K6p7UNvyErz5PRxUNDcqpJqFMU82r1XOrF/qYRbK8Kid9iOIFnoGRaUiRwiSN7L3GJhgOeB5mrjWyULaYzTZBvSMNXW7zBlgmd1ELx18PymGmtxfKp3mHoxOFjFTXeq4dAex9B8vYkipobAL/9S4Zq5qO3IGdJ6urD9sXgYD5eQpj/4FKuGm6IkTGR4vuafvdcOym4WLokTVrYhI5hZsldqZ10n76HuSHDKM60IBgexCPOghDUwU3NnrPd+HFp==

J JESUS ESCOBEDO ALATORRE | Fecha:2026-04-17 10:06:56 | FIRMANTE

h1AjvwJ2AzVUzs1GnshTepNYM3uEMqF2RYtDEcjTYJFM9WxrTbstlRHLcjFbQwglYRegocGsV/s94CjRhelKT4211Apv0fh1XY/7UE0R4UK4LzaNCu5lOrxI5qSU/cDVjai8sHK5jp0S5Tt+CcV7CqOti780esT/LKeiPEFntjxatA8D35R3m5V/v1JJswNbcQFh+v6E8xtnYfqiR8QL035TZQPZZyxx4centpl8tjGwb5qBRmKVoWxIvXBQPJDjI6738OBhqpAFBN4T24uGUagSbNm8BGqWilw+A6FyilCX/UqW9OBfvzTq9HHAkBOoRsQArWZhoJ50xJB6GpQ==

YURIY KARLOVYCH | Fecha:2026-04-17 18:23:59 | FIRMANTE

GgODsVcfp0AxdMuNC1d/R2hfEXf8h9jaaj3UltYEmKPvyAKd6vj3KCKd19EBdCS+uO3UkqkIM0cPPtpu02FNyJFfM0ZXxkYHmZTVWtfEP+I8u/k5SZzx4srL4bB0KeUUh7ZfNpBQfmmL4+dR3IN0eMC3Ehn1GNfXMeY2tQiNelCy4Xf7DbsPLeYN/7fX3gNVe+DUNri0QFBRIGNzroW0GL48nC9awUZWCmQmVlv2WgGFRBmeTaob8Lb/TZ9akegacGsMvTWd/cGyd23TxiWOi/eOuN3u5uPIUMGRReoZkb5zXUKfbqjOFzcS5hAUEPw4LFRZm+rUV+RScF7+Y8yXg==

MARGARITA TECPOYOTL TORRES | Fecha:2026-04-20 13:25:05 | FIRMANTE

sMpOpr89eN+78Wm8d9vcgJ98nzM23b248/JfwFdSrUcf0IDcX4hukWslR9Yv+GCYT+z9wMfK70U8FTO/V/aEGUD3DIK/vPThsZVqH42dkgCtub7x656FiKh6nD/UkRxl0stmijJN23TjOg/zV1Ni3StKlywUqOq5q/zxmWqFXiTSHy7osT0LJ5fajMBV0sCai38MnNaV/L/CyChG0VAuwUrTsu8c6tURy0ZhrXF00BaHpd08fYzaleHJtXzz4s7e6nu1vIv/wNen/kpiXleoKy7JH3e9Ly1SY5pW9UaFOOz0qbnl1O9Qb/5EemX6TzyaKwMdaVAek6J4zDgs6YcQ==

YESSICA YAZMIN CALDERON SEGURA | Fecha:2026-04-20 20:52:38 | FIRMANTE

m6pBKzRovCQKMObbD/N1+U7Z+IcnIhxW5KQ+xnBL8fwZBidWrLKIFXw41AQD3a7r0ZF8eIFYHDrWDrkOGsSdhXLoli4gcVJPXWDzt0BSvHOwjb27dMXfiWfQ04HOZikpEWkMV0rAN+saXCj6lLR/BmZGeOV+P0P18yqlyC5VwOX7lsSGU6bMjxJlff+Mh0u7zYPavnE7+dUtLK64WWDD0Xq4LxiOyRZY/1eZaVvFf6IGHMCae0P8LylSewJvBrqq7uAKpF/wwbvvtuq8lqrxYMiKJnOooiYrRiKCPx1rtCyI9AewYeE8dpMj1EvKYECUONBOF0dqffnJrVs7e8g==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



qwLi1fvOW

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/KzmTRsuZnbTizSIT8yv6zRcOPaHJ6Qau>



UAEM
RECTORÍA
2023-2029