

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MORELOS



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MORELOS

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN  
CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

“Dinámica de plasma frío  
bajo efectos de campo magnético”

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE  
LICENCIADO EN CIENCIAS  
CON ÁREA TERMINAL EN FÍSICA

PRESENTA

CAROLINA MICHELLE GERVACIO MARTÍNEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ALDO FIGUEROA LARA  
CONAHCYT-CInC-UAEM

CUERNAVACA, MOR.

2024

## **Jurado sinodal**

Presidente: Dr. Marco Antonio Rivera Islas, CInC-UAEM

Secretaria: Dra. Ruth Estephania González Narváez, CInC-UAEM

Vocal: Dr. Aldo Figueroa Lara, CONAHCYT-CInC-UAEM

Suplente 1: Dr. Sergio Cuervas García, IER-UNAM

Suplente 2: Dr. Guillermo Hinojosa Aguirre, ICF-UNAM

Lugar donde se realizó la tesis: CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS (CInC),  
UAEM.

# Dedicatoria

Este trabajo está dedicado a mi familia: a mis padres que me han apoyado durante el transcurso de estos años, por su esfuerzo y cariño de cada uno, a mis hermanos por convivir conmigo todos los días a pesar de que en ocasiones el estrés no me dejó relacionarme con ellos, a mi compañera de carrera y amiga, Mayra, por su apoyo incondicional y verdadera amistad, a mis mascotas, Pequeña y Flan, quienes me brindaron sus miradas de cariño y tranquilidad para que las travesías y la vida misma fueran llevaderas, que estoy segura que esta época sin ellos hubiese sido más complicada.



# Agradecimientos

Al CONAHCYT por el apoyo económico otorgado a través del programa *apoyo para ayudantes de investigador SNI III*. Y al Dr. Sergio Cuevas García por su amabilidad y disposición para tramitar dicho apoyo.

Al Dr. Aldo Figueroa Lara, mi director de tesis, quien antes de serlo, se mostró en la mejor disposición para prepararme en el tema y en el lenguaje de programación Fortran, lo cual fue muy útil al momento del desarrollo de este proyecto; por toda su paciencia y ayuda en este proceso, que quizá no fue rápido pero siempre estuvo ahí para animarme a esforzarme más.

Al M. en I. Leonardo Fidel Córdova, quien mientras fue estudiante de doctorado en el laboratorio de plasmas fríos del Centro de Investigación en Ciencias en la UAEM, me apoyó desde lo más básico en el área experimental mostrando el funcionamiento de su prototipo de plasma frío en un frasco de vidrio.

Al Dr. Federico Vázquez Hurtado, quien fue mi tutor de carrera, por escucharme durante la pandemia y creer en mí, además de ser quien me acercó a conocer el trabajo sobre plasmas que se hacía en el laboratorio de Medios Continuos, para después decidir hacer mi tesis en este tema.

A mi comité sinodal por su apoyo, consejos, sugerencias, y por siempre mostrarse dispuestos en el proceso, y por haberme escuchado con atención durante las evaluaciones, donde sus felicitaciones me alegraron bastante.

También me encuentro muy agradecida con las personas que conocí fuera de este ámbito científico, pues me mostraron una manera de ver y sentir la vida que no me dejará jamás. Y a todas las personas que me dieron su apoyo, ya sea en la carrera o en la vida personal, pues el haber compartido un poco de la vida con ellas ha contribuido a quien soy ahora y a quien quiero ser; gracias por recordarme las cualidades que hay en mí.



# Resumen

El presente trabajo es un estudio teórico-experimental de plasmas a baja temperatura. Experimentalmente, se realizaron observaciones del plasma luminoso entre electrodos de placas paralelas y electrodos esféricos, y el efecto que tiene un campo magnético externo. El modelo teórico considera al plasma frío como un medio continuo. Primero se resuelve el problema en una dimensión a través de soluciones asintóticas y una solución numérica basada en diferencias finitas. Ambas soluciones concuerdan cualitativamente. Después el modelo se resuelve numéricamente en dos dimensiones en coordenadas cartesianas y polares. También se modela el efecto sobre el plasma de un campo magnético aplicado. Los resultados numéricos muestran que la distribución del plasma es afectada por el campo magnético externo, al igual que las observaciones experimentales.



# Índice general

Dedicatoria	I
Agradecimientos	III
Resumen	V
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Modelo experimental</b>	<b>5</b>
2.1 Descarga en electrodos de placas paralelas . . . . .	5
2.2 Descarga en electrodos esféricos concéntricos . . . . .	8
2.3 Construcción de electroimanes . . . . .	10
<b>3 Modelo matemático</b>	<b>13</b>
3.1 Solución unidimensional . . . . .	16
3.1.1 Solución analítica . . . . .	18
3.1.2 Solución numérica . . . . .	21
3.2 Solución numérica bidimensional . . . . .	23
3.2.1 Sistema cartesiano . . . . .	23
3.2.2 Sistema cartesiano con campo magnético . . . . .	26
3.3 Sistema en coordenadas polares . . . . .	29
3.3.1 Solución sin campo magnético . . . . .	29
3.3.2 Solución con campo magnético . . . . .	30
<b>4 Resultados</b>	<b>33</b>
4.1 Electrodos paralelos . . . . .	33
4.1.1 Solución analítica unidimensional . . . . .	33
4.1.2 Solución numérica unidimensional . . . . .	35
4.1.3 Comparación solución analítica y numérica unidimensional . . . . .	37
4.1.4 Solución numérica bidimensional . . . . .	38
4.1.5 Solución con campo magnético . . . . .	41
4.2 Solución numérica en coordenadas polares . . . . .	43
4.2.1 Solución numérica en coordenadas polares con campo magnético . . . . .	45
<b>5 Conclusiones</b>	<b>49</b>
Apéndice	51
<b>A Propiedades vectoriales</b>	<b>51</b>
<b>B Método de soluciones asintóticas</b>	<b>53</b>
B.1 Series asintóticas . . . . .	54

C Método de diferencias finitas	57
D Desarrollo de las condiciones de frontera de la solución analítica	59
Bibliografía	61

# Capítulo 1

## Introducción

En nuestro día a día estamos habituados a convivir con tres estados de la materia: sólido, líquido y gaseoso. Sin embargo, no son los únicos, pues existe un cuarto estado que está más presente de lo podemos notar; estamos hablando del estado plasma. En la década de 1920 los físicos estadounidenses I. Langmuir y L. Tonks utilizaron el término para referirse al gas ionizado y desde entonces se ha mantenido [1]. El plasma es un gas monoatómico que ha pasado por un proceso de ionización, de modo que está compuesto por iones, electrones y partículas neutras que en conjunto forman un medio eléctricamente cuasineutral, es decir, es considerado estado plasma cuando la densidad de partículas negativas como positivas son las mismas [2]. Al estar compuesto por partículas cargadas es un medio conductor de electricidad que responde ante campos electromagnéticos. Podemos encontrar plasma desde el núcleo de las estrellas, en los focos ahorradores que tenemos en casa, en los reactores de fusión nuclear que se están implementando, como el ITER [3], así como en la industria espacial o automotriz para el tratamiento de superficies para mejorar sus propiedades y evitar el uso de disolventes [4]. Los plasmas se pueden clasificar según el promedio de la temperatura de las partículas que lo conforman. Los plasmas *calientes o isotérmicos* son aquellos en los que la temperatura de los electrones y las especies pesadas (átomos e iones) es prácticamente la misma, alcanzando temperaturas del orden de  $10^7$  K a presiones altas. Los encontramos en reactores de fusión nuclear, la corona solar, viento solar, nebulosas y en el núcleo de las estrellas. Por otra parte, en los plasmas *fríos o no isotérmicos* la temperatura de las partículas



Figura 1.1: Aurora boreal desde el espacio en contraste con el amanecer en la Tierra. Crédito de la fotografía: <https://images.nasa.gov/details/iss043e059141>, NASA, [5].

neutras es de 300 K, es decir, temperatura ambiente y la de los electrones de  $10^5$  K a presiones bajas. Ejemplo de ello es el plasma que se encuentra en la ionosfera de la Tierra (Figura 1.1), televisiones de plasma, y focos ahorradores. También podemos diferenciar entre los plasmas *débil y fuertemente ionizados*. En general el grado de ionización (relación entre la densidad de las especies cargadas respecto de las neutras del gas) de un plasma típico está en el rango de  $10^{-7} - 10^{-4}$ . Los plasmas fuertemente ionizados contienen átomos y moléculas excitadas, y el grado de ionización es cercano a 1 [2]. En los plasmas débilmente ionizados sólo se considera la interacción de partículas neutras, iones positivos y electrones. El desarrollo de la presente tesis está enfocada en los plasmas fríos débilmente ionizados.

La manera en que se genera un plasma frío en el laboratorio es por *descarga luminiscente de corriente directa* (ver Figura 1.2). Se conectan dos electrodos a una fuente de corriente directa (CD), donde el electrodo que adquiere un voltaje negativo se llama cátodo y el que se aterriza a tierra o tiene un voltaje positivo es el ánodo. Los electrodos son colocados dentro de una cámara de vacío en la cual hay un gas neutro. La cámara está conectada a una bomba de vacío para poder bajar la presión. Una vez que se enciende la bomba se hace pasar corriente eléctrica a través del gas hasta alcanzar el voltaje de rompimiento, el cual es más fácil de alcanzar a bajas presiones (Curva de Paschen [6], [7]), para que el gas se vuelva un medio conductor y se establezca un campo eléctrico debido a la diferencia de potencial y posteriormente los electrones comienzan a salir del cátodo acelerados hacia el ánodo. Cuando los electrones

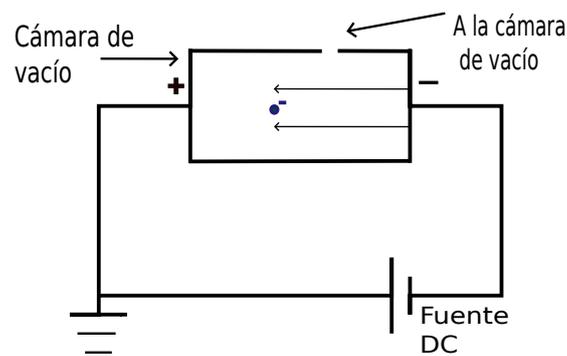


Figura 1.2: Descarga luminiscente de corriente directa.

comienzan a transitar en el gas colisionan con los átomos que encuentran a su paso y son capaces de ionizarlos, es decir, arrancar por lo menos un electrón de ellos, convirtiéndolos en iones positivos. El proceso ocurre en cascada como en la Figura 1.3. Ahora en la cámara habrá partículas de carga positiva y negativa, que naturalmente se van a atraer, y al proceso en que un electrón neutraliza a un ion positivo se conoce como recombinación. La recombinación da lugar a luminescencia que vemos en los plasmas, pues los iones al atrapar al electrón tienen

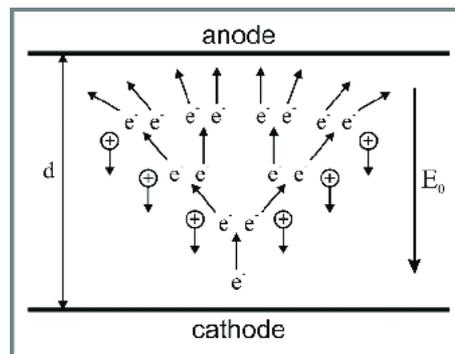


Figura 1.3: Proceso de ionización entre dos electrodos. Créditos de la imagen: <https://doi.org/10.1002/cite.202000075>, [8].

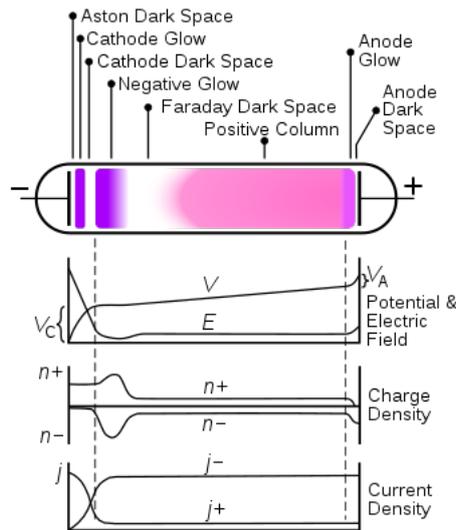


Figura 1.4: Estructura de la descarga luminiscente. Crédito de la imagen: Wikipedia, [10].

que liberar la energía que este les cedió en la colisión y lo hacen en forma de un fotón con una frecuencia característica.

En las descargas luminiscentes CD se presentan regiones con y sin luz (Figura 1.4) donde tal estructura se debe a las diferencias en la movilidad y densidad de los electrones e iones. En cada región su intensidad y extensión depende del gas, voltaje y presión. De las principales características de cada región podemos decir que, el rango de densidades de corriente en que ocurren las descargas es  $10^{-5} - 10^{-3} \text{ A cm}^{-2}$  [9]; en la *Cathode Dark Space* se da la mayor caída de voltaje; la densidad de electrones que crece exponencialmente desde el cátodo da lugar a la luminiscencia negativa, donde hay una alta ionización y excitación, después el campo eléctrico decrece generando la zona conocida como *Faraday Dark Space*, que es la zona de transición hacia la columna positiva, donde los electrones pierden casi toda su energía para después volver a acelerarse por el débil campo eléctrico de la zona hacia el ánodo. La descarga luminiscente se mantiene por los electrones emitidos desde el cátodo debido al bombardeo de iones positivos en esta superficie, lo que se conoce como emisión de electrones secundarios [9], que son acumulados en *Aston Dark Space*, zona con un campo eléctrico fuerte. Dependiendo del gas utilizado será el color de la descarga luminiscente que tendremos, y típicamente solo se necesitan unos cientos de voltios entre los electrodos para mantener la descarga.

El objetivo de ésta tesis es un estudio teórico-experimental del plasma frío en diversas geometrías el cual se hace interactuar con campos magnéticos para observar su dinámica. El estudio de los plasmas en diversas geometrías sirve para saber qué diseños aprovechan mejor las propiedades del plasma en las aplicaciones que se quiera implementar, por ejemplo, en la industria, los sistemas de corte de plasma son utilizados para realizar cortes precisos en los metales. Si la boquilla del torno no estrecha lo suficiente el arco de plasma, entonces no se tendrá un corte de alta precisión. Los plasmas son aplicables a diversas áreas, por lo que su estudio brinda alternativas y mejoras que benefician a la población.



# Capítulo 2

## Modelo experimental

### 2.1 Descarga en electrodos de placas paralelas

El modelo experimental consiste de una cámara de vacío (ver Figura 2.1a), la cual es un frasco de vidrio ( $21.5 \times 10.95 \times 8.45$  cm), donde se colocaron dos electrodos de placas paralelas, que son discos de acero inoxidable de 3.5 cm de diámetro, separados 3.5 cm por cilindros de cerámica. Ambos electrodos están conectados a una fuente de voltaje de corriente directa (Kilovolt Power Supply-SF-9586) en serie y a multímetros para medir voltaje y corriente, el circuito eléctrico se muestra en la Figura 2.1b. El voltmetro en paralelo y el ampermetro en serie. La parte inferior de la cámara está conectada por una válvula de paso de bombeo de acero a una manguera para llegar a la bomba de vacío (Pascal 2005, SD Version). El soporte de la cámara de vacío es, de hecho, una cámara de acero inoxidable tubular. El frasco

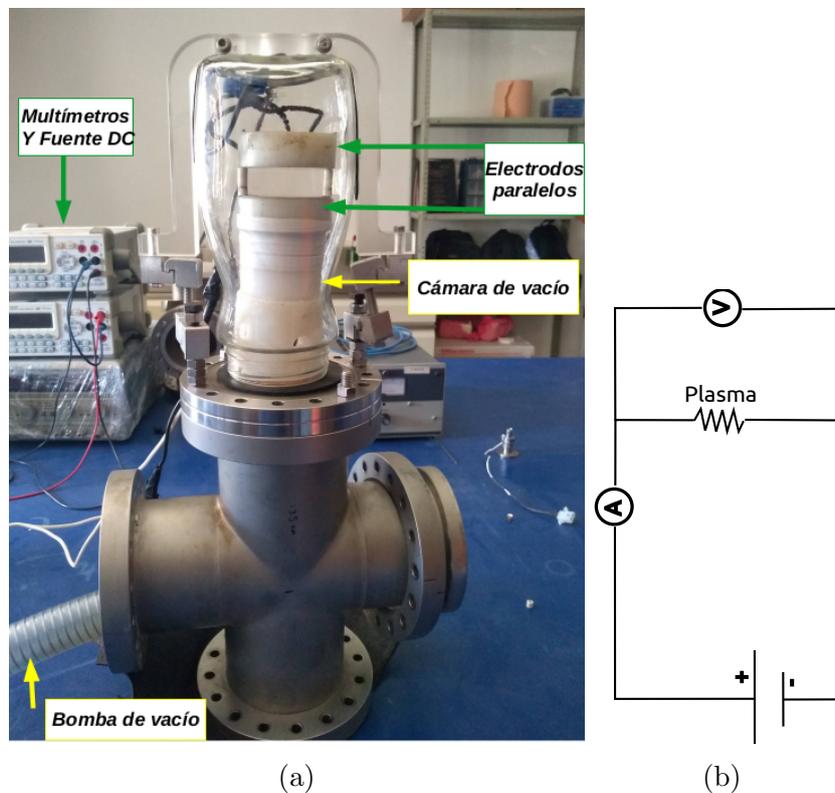


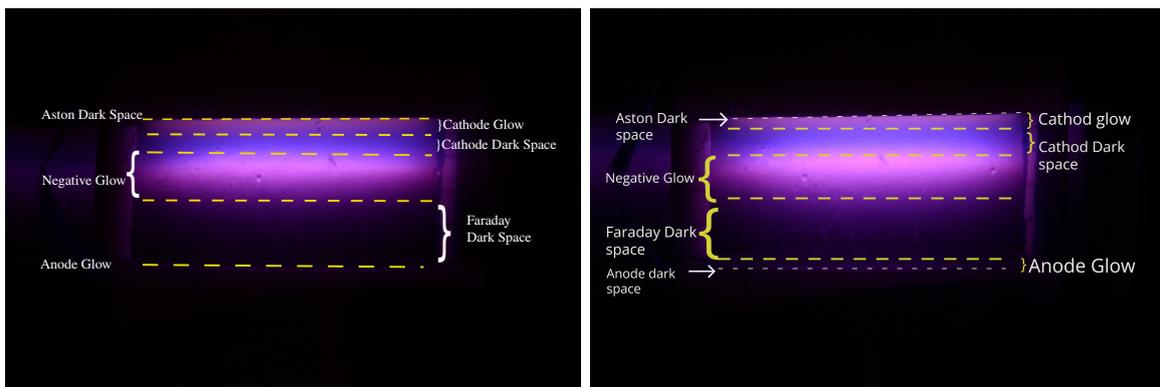
Figura 2.1: Fotografía del modelo experimental de placas de placas paralelas. Está constituido por electrodos de placas paralelas dentro de una cámara de vacío, multímetros y una fuente de voltaje DC. (b) Conexión eléctrica del sistema.

fue perforado en la parte superior para poder conectar los electrodos a la fuente de voltaje teniendo cuidado del sellado y aislamiento en los agujeros y cables. Se considera que el gas utilizado es aire, no obstante dado que está constituido 78% por Nitrógeno es de esperarse que la descarga luminiscente tenga los colores de una descarga típica de Nitrógeno. No se cuenta con un sensor de presión para conocer cuál es la presión final y tampoco con alguna válvula para la administración del gas; esta característica la comparten los experimentos posteriores. Sin embargo la bomba de vacío puede llegar a una presión final de  $5 \times 10^{-4}$  mbar y a  $1 \times 10^{-2}$  mbar con válvula de lastre. La presión atmosférica en Morelos es mayor a 850 mbar [11]. A continuación se describe el procedimiento de arranque del dispositivo.

1. Conectar los electrodos a la fuente de voltaje y multímetros.
2. Encender la bomba de vacío para extraer el aire de la cámara y bajar la presión.
3. Apagar la bomba para que las posibles aberturas en el sellado permitan la entrada de aire.
4. Encender la fuente de voltaje y aplicar potencial hasta la aparición de la descarga luminiscente. Los intervalos de voltaje medidos están entre 250-350 V, mientras que la corriente entre 1-3.5 mA.

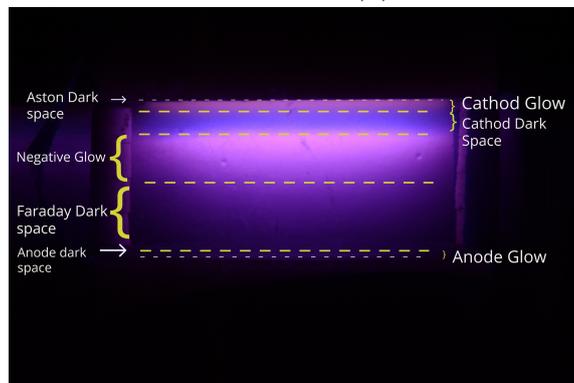
En seguida se presentan el análisis de la descarga luminiscente para tres distintas diferencias de potencial  $\Delta V$  y corrientes  $I$  del modelo experimental. El cátodo es el electrodo superior y el ánodo el inferior. Es decir, los electrones viajan del electrodo superior al inferior, encontrando a su paso el efecto del campo eléctrico generado por la diferencia de potencial aplicado. En este modelo experimental se observó que el plasma apareció a partir de  $\Delta V=273.44$  V,  $I= 0.839$  mA. La Figura 2.2a fue la primera fotografía que se tomó donde se pueden distinguir algunas de las partes principales de la estructura de la descarga. En la Figura 2.2b las regiones parecen estar mejor definidas que en las otras configuraciones. Se observa el *Anode Glow* pero este podría ser también un reflejo del *Negative Glow* que llega hasta tal zona. En la Figura 2.2c se presenta la descarga para el máximo potencial que proporcionó la fuente de voltaje utilizada. Observamos que es más brillante el *Negative Glow* que en las dos anteriores configuraciones, en consecuencia se refleja en el *Farday Dark Space*. En las tres figuras el color de la descarga es bastante similar al que se produce con Nitrógeno, de tonos morado y púrpura. Podemos distinguir las cinco regiones principales: *Anode Dark Space*, *Cathode Glow*, *Cathode Dark Space*, *Negative Glow*, *Farday Dark Space*. No se observa la formación de la columna positiva, lo cual no es preocupante, ya que no es parte fundamental de la descarga, además de que para que pueda aparecer se necesita que el espacio interelectródico sea mayor, sin embargo es importante considerar que el modelo tiene la condición de que esta distancia debe ser menor que el diámetro de los electrodos, por lo cual para que sea posible verla se requiere incrementar ambos parámetros. Se esperaría que el *Cathode Dark Space* sea una región sin luz, pero no es completamente así porque las regiones de *Cathode Glow* y *Negative Glow* no están espaciadas lo suficiente como para lograr este efecto.

En general la estructura de las descargas para los tres arreglos de voltaje y corriente es la misma. Los valores de voltaje aplicados son los que nuestra fuente CD permitió, así que estos parámetros solo fueron usados de forma demostrativa; el voltaje es un parámetro que se puede explorar más para cuantificar que valores nos permiten una mejor visualización. Otro aspecto importante en el área experimental fue aislar todos los materiales conductores dentro de la cámara de vacío, ya que de no hacerlo estos funcionan como otro electrodo, y se genera otro plasma local en esa zona, de modo que ahora al plasma generado entre los electrodos no se le esta administrando la misma corriente, es decir, hay una fuga de corriente. Por otra parte, al momento en que se realizó este montaje experimental no se tomo en cuenta la interacción del plasma con un campo magnético.



(a)  $\Delta V=275.60 \pm 1$  V,  $I= 1.095$  mA.

(b)  $\Delta V=300.03 \pm 1$  V,  $I= 1.267$  mA.

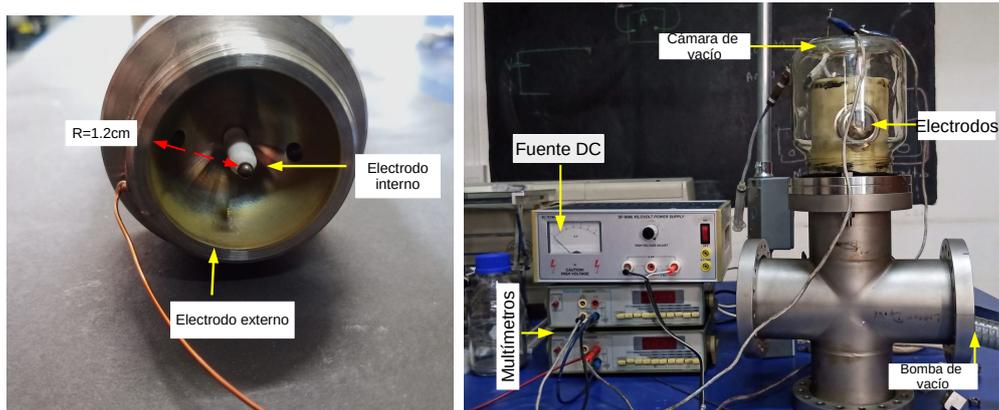


(c)  $\Delta V=347.75 \pm 1$  V,  $I= 3.302$  mA.

Figura 2.2: Descargas lumiscentes entre electrodos de placas paralelas.

## 2.2 Descarga en electrodos esféricos concéntricos

Para el diseño experimental se utilizaron electrodos esféricos de acero inoxidable que juntos forman una esfera hueca de radio interno de 1.2 cm, y dentro se colocó un electrodo esférico el cual es una sonda de contacto con punta de bola de diámetro 0.3 cm hecha de carburo, ver Figura 2.3a. El dispositivo experimental fue manufacturado por el Dr. David Roberto Domínguez Lozoya del IER-UNAM. El dispositivo tiene un soporte recubierto de cerámica, el cuál está acoplado a un cable para que pueda ser energizado por la fuente CD; dependiendo de la conexión se establece la polaridad de los electrodos. No se usan los dos hemisferios de los electrodos externos, puesto que el sistema se cerraría y no podríamos hacer observaciones, por lo tanto solo usamos un hemisferio.



(a) Electrodos esféricos concéntricos. (b) Sistema de descarga para electrodos esféricos.

Figura 2.3: Modelo experimental de electrodos esféricos.

El sistema de electrodos esféricos descrito anteriormente se dispuso dentro de un frasco de vidrio ( $h=15.5$  cm,  $D=14.2$  cm) que cumple la función de cámara de vacío. Fue perforado para la salida de los cables de los electrodos hacia la fuente de voltaje y multímetros. Nuevamente se utilizó la cámara de vacío tubular como soporte, y dentro de esta se selló y conectó a la bomba de vacío con una válvula de paso de bombeo de acero acoplada a una manguera de PVC. El arranque del experimento fue exactamente el mismo que el descrito en la sección anterior 2.1, al igual que la conexión eléctrica del modelo de placas paralelas (ver Figura 2.1). En la Figura 2.3 se muestra el montaje del experimento de descarga luminiscente entre electrodos esféricos; este experimento solo nos permite la visualización de un plasma entre electrodos esféricos.

A continuación se presentan las descargas luminiscentes obtenidas. La Figura 2.4 es la fotografía de la descarga lograda entre electrodos esféricos concéntricos. Recordar que en esta configuración el electrodo interno es el cátodo, de donde salen los electrones, y el electrodo externo el ánodo. Se observa en el plasma que tiene los mismo colores que en la descarga en placas paralelas, incluso algunas regiones bien definidas, como el Cathode Glow, Cathode Dark Space, Negative Glow y Faraday Dark Space como toda la sección oscura que aparece; nuevamente no hay formación de la columna positiva.

Este modelo experimental se hizo interactuar con electroimanes construídos en el laboratorio y no mostró perturbación alguna, sin embargo, al acercar un imán de ferrita se formó un *jett* de plasma. Durante este trabajo no fue posible obtener electroimanes eléctricos para colocarlos dentro de la cámara de vacío y observar su efecto, sin embargo, no se descarta esta implementación y la mejora del sistema experimental para estudiar su comportamiento ante la presencia de uno o varios campos magnéticos.

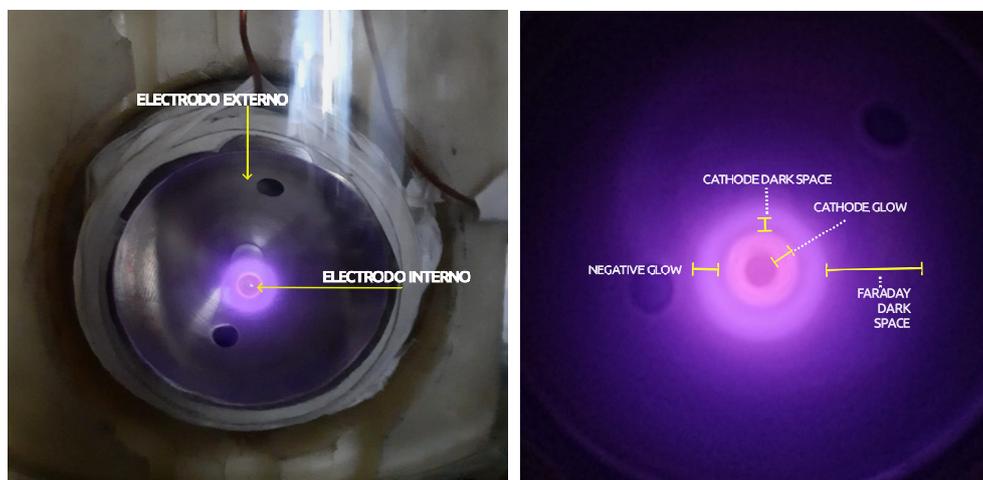


Figura 2.4: Descarga en electrodos esféricos cuando el cátodo es el electrodo interno y el ánodo el electrodo externo; la imagen de la derecha es un zoom para observar las zonas.  $\Delta V = 320$  V.

## 2.3 Construcción de electroimanes

Un electroimán es un dispositivo que genera su propio campo magnético mediante el flujo de corriente eléctrica a través de un gran número de espiras de alambre que le rodean. Por lo general las espiras se enrollan alrededor de un núcleo magnético para intensificar el valor del campo o de un material ferromagnético, como el hierro. Su funcionamiento está basado en la Ley de Ampère [12].

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S},$$

donde  $\vec{B}$  es el campo magnético,  $\vec{j}$  la densidad de corriente, y  $\vec{S}$  una superficie arbitraria. Los electroimanes construidos están basados en el modelo más básico de estos, que consiste de espiras de alambre enrolladas a un cilindro, como un tubo o tornillo, es decir, solenoides. Luego, la Ley de Ampère se simplifica a

$$B = N \frac{\mu I}{L}, \quad (2.3.1)$$

donde  $N$  es el número de espiras,  $L$  la longitud del solenoide y  $\mu$  la permeabilidad magnética. Se elaboraron 3 solenoides utilizando alambre magneto de calibre 16 y 44 alrededor de un tornillo de acero con número de espiras  $N=150$ ,  $N=300$  para el calibre 44, y  $N=100$  del calibre 16. Fueron conectados en serie a una fuente de voltaje DC junto con dos resistencias de  $10 \Omega$ . Se registraron los valores del campo magnético  $\vec{B}$  para distintos valores de corriente  $I$  para observar la relación entre estos. Las mediciones del campo fueron tomadas con un Gaussmetro portátil F.W. Bell modelo 4048 con sonda siguiendo los pasos que ofrece el manual:

1. Conectar la sonda al instrumento.
2. Encender el instrumento y tocar “Enter”.
3. Introducir la sonda en la cámara de campo magnético cero para calibrarla.
4. Seleccionar la función DC o AC.
5. Elegir la unidad de medición: Gauss o Tesla. Seleccionar el rango.
6. Acercar la sonda a los electroimanes para medir el campo en la dirección preferencial.

En la Figura 2.5 podemos apreciar montaje del experimento, un electroimán y la medición del campo magnético. Buscando la relación que hay entre el campo magnético generado

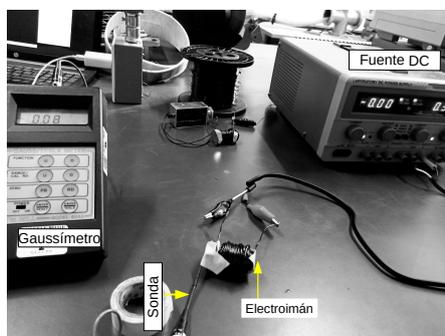


Figura 2.5: Montaje de la medición de campo magnético para el electroimán de 100 espiras calibre 16.

por un electroimán y la corriente aplicada hemos medido ambos parámetros para los tres

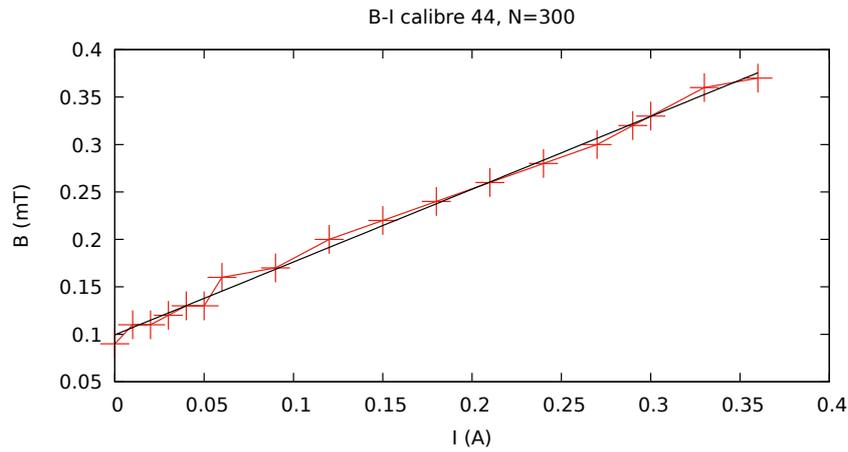


Figura 2.6: Relación del campo magnético generado contra la corriente para 300 espiras del calibre 44. La línea negra representa el ajuste lineal a las mediciones en rojo, siendo el ajuste la función  $f(x) = 0.766x + 0.99$ .

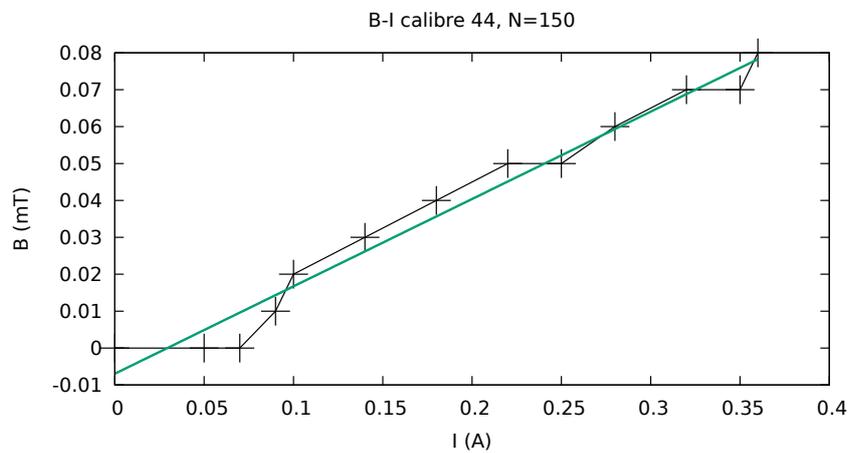


Figura 2.7: Relación del campo magnético generado contra la corriente para 150 espiras del calibre 44. La línea negra representa el ajuste lineal a las mediciones en verde, siendo el ajuste la función  $f(x) = 0.23x - 0.006$ .

electroimanes construidos y se hizo el ajuste de una función con el software Gnuplot. En las tres gráficas el ajuste de la función nos hace ver que hay una relación lineal entre el valor del campo magnético generado y el valor de la corriente aplicada, justo como en la Ley de Ampère para solenoides, ecuación (2.3.1). El calibre 44 es un alambre más delgado en comparación con el 16 y, de hecho, se esperaría que los alambres más gruesos puedan crear campos magnéticos más intensos con menos espiras de las que se usaría con uno más delgado. Sin embargo, al comparar la Figura 2.6 con la Figura 2.8, se nota que el valor máximo obtenido con 100 espiras fue de 0.1 mT a 0.35 A, mientras que con 300 espiras fue 0.4 mT en la misma corriente; el valor del campo magnético obtenido fue cuatro veces menor con el alambre de calibre 16, pero se tiene que considerar los posibles errores en la medición así como que el modelo construido puede mejorarse al hacer las espiras más compactas entre sí. Los valores de las magnitudes de los campos magnéticos generados son del orden de  $10^{-3}$  T, los cuales no son lo suficientemente grandes como para afectar al plasma, pues estos fueron acercados al plasma esférico y no se observó ninguna perturbación, además de que la intensidad de un imán disminuye con la distancia. De modo que si la intensidad medida al contacto del electroimán es baja, a la

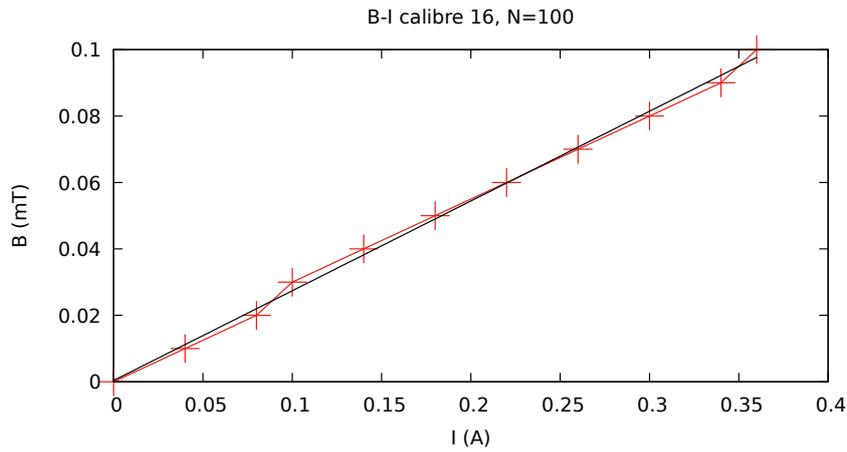


Figura 2.8: Relación del campo magnético generado contra la corriente para 100 espiras del calibre 16. La línea negra representa el ajuste lineal a las mediciones en rojo, siendo el ajuste la función  $f(x) = 0.27x + 0.0003$ .

distancia de alrededor de 3 cm se registró el valor 0 mT. Por lo cual, si la distancia entre el electrodo esférico interno y la pared del vidrio es de 5 cm aproximadamente, la intensidad del campo magnético de los electroimanes contruídos es prácticamente nula, por lo cual no se percibió perturbación alguna en el plasma. De modo que, para poder observar su interacción se tienen las siguientes propuestas: construir electroimanes de mayor intensidad del campo magnético y colocarlos dentro de la cámara de vacío para que la distancia entre estos y el plasma sea menor y el efecto sea mayor; conseguir electroimanes hechos en la industria y que posean una intensidad mayor a militeslas (mT); o utilizar imanes de ferrita, que en nuestro caso fue la opción más accesible, y la elegida.

# Capítulo 3

## Modelo matemático

El modelo matemático que describe el plasma frío con el que se trabaja a lo largo del desarrollo de esta tesis está basado en el artículo de Graves [13] y Kumar [14], el cual es un modelo global para la estructura de la descarga junto con los electrodos, que describe la estructura física de la descarga: la densidad de electrones e iones y el campo eléctrico. En este modelo consideramos al plasma como un medio continuo, es decir, el estudio es macroscópico y se considera isótropo, por lo cual se hacen las siguientes consideraciones:

- La presión en que se trabaja es de 0.5-5.0 Torr.
- El camino libre medio de las partículas es menor que la longitud característica del sistema  $l_m \ll L$ .
- El gas es débilmente ionizado y solo se considera la interacción de partículas neutrales, iones positivos y electrones. No se considera la creación de iones negativos.
- El potencial de rompimiento para ionizar el aire es el voltaje aplicado.
- La presión debe ser lo suficientemente baja para facilitar la descarga luminiscente.
- No se considera efectos del campo magnético para el caso de una dimensión.
- La separación interelectródica debe ser menor que el diámetro o sección transversal de los electrodos empleados.
- Los átomos neutros solo son ionizados una vez.
- La temperatura de los electrones es constante.
- El plasma se estima que es cuasineutral.
- La ionización se da solamente a través de la colisión de los electrones con los átomos neutros del gas, no por excitación vibracional u otros.
- La emisión secundaria de electrones solo tiene lugar en el cátodo por iones positivos.
- La movilidad y difusividad de los electrones e iones es constante.

La ventaja de utilizar el modelo continuo es que se obtiene un sistema de ecuaciones autoconsistente de las densidades de iones y electrones. La principal desventaja es que el rango de presión en que se trabaja es limitado. A continuación se muestran al conjunto de ecuaciones que constituyen el modelo general de plasmas fríos

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_e = K_{i0} N n_e e^{-\frac{E_i}{k_B T_e}} = r_i, \quad (3.0.1)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_i = K_{i0} N n_e e^{-\frac{E_i}{k_B T_e}} = r_i, \quad (3.0.2)$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{e}{\epsilon} (n_e - n_i), \quad (3.0.3)$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi. \quad (3.0.4)$$

El sistema de ecuaciones (3.0.1)-(3.0.4) está conformado por ecuaciones de transporte de electrones (3.0.1) e iones (3.0.2), así como una ecuación tipo Poisson para el potencial eléctrico (3.0.3), y la definición del campo eléctrico (3.0.4), donde  $n_e$  y  $n_i$  son las densidades de electrones e iones,  $J_e$  y  $J_i$  es el flujo de electrones e iones,  $\varphi$  el potencial eléctrico,  $\vec{E}$  el campo eléctrico,  $e$  la carga del electrón, y  $\epsilon$  es la permitividad eléctrica del medio. El término  $r_i$  hace referencia a la tasa de ionización, es decir, la fuente de las partículas cargadas. Dentro de este,  $K_{i0}$  se conoce como factor preexponencial del coeficiente de tasa de ionización,  $E_i$  es la energía de activación,  $N$  concentración de partículas neutras,  $T_e$  la temperatura de los electrones y  $k_B$  la constante de Boltzman. Los flujos de electrones e iones están definidos por

$$\vec{J}_e = -\mu_e n_e (\vec{E} + \vec{V}_e \times \vec{B}) - D_e \nabla n_e, \quad (3.0.5)$$

$$\vec{J}_i = \mu_i n_i (\vec{E} + \vec{V}_i \times \vec{B}) - D_i \nabla n_i, \quad (3.0.6)$$

donde  $\vec{V}_e$  y  $\vec{V}_i$  son las velocidades de los electrones e iones,  $\vec{B}$  el campo magnético aplicado,  $\mu_i$  y  $\mu_e$  son las movilidades, y  $D_e$ ,  $D_i$  las difusividades. Procedemos a acoplar las ecuaciones de flujo (3.0.5), (3.0.6) y (3.0.4) en las ecuaciones de conservación (3.0.1) y (3.0.2). Puesto que el desarrollo es largo, solo se hará para el flujo de iones. Si sustituimos el flujo de iones (3.0.6) en (3.0.2).

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot [\mu_i n_i (\vec{E} + \vec{V}_i \times \vec{B}) - D_i \nabla n_i] &= r_i, \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot [\mu_i n_i \vec{E} + \mu_i n_i (\vec{V}_i \times \vec{B}) - D_i \nabla n_i] &= r_i. \end{aligned}$$

Desarrollando la divergencia del producto de un campo escalar y un vector del primer término tenemos

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \mu_i [n_i \nabla \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \nabla n_i + \nabla \cdot [n_i (\vec{V}_i \times \vec{B})]] - D_i \nabla^2 n_i = r_i, \quad (3.0.7)$$

se sustituye el campo eléctrico (3.0.4) por el potencial eléctrico, teniendo así

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \mu_i \left[ -n_i \nabla^2 \varphi - \nabla \varphi \cdot \nabla n_i + \nabla \cdot [n_i (\vec{V}_i \times \vec{B})] \right] - D_i \nabla^2 n_i = r_i. \quad (3.0.8)$$

Se recomienda la adimensionalización de las ecuaciones del modelo. Para ello se eligen magnitudes de referencia del sistema que dividen cada variable de las ecuaciones para obtener variables adimensionales

$$\begin{aligned} n_e^* = \frac{n_e}{n_0}, \quad n_i^* = \frac{n_i}{n_0}, \quad \varphi^* = \frac{\varphi}{\varphi_0}, \quad t^* = \frac{t}{\tau}, \quad \vec{E}^* = \frac{\vec{E}}{E_0}, \quad \nabla^* = \nabla L_0, \\ \vec{V}_i^* = \frac{\vec{V}_i}{V_0}, \quad \vec{B}^* = \frac{\vec{B}}{B_0}, \end{aligned} \quad (3.0.9)$$

donde el símbolo \* representa los parámetros adimensionales. Utilizamos  $n_0$  como la cantidad de gas inicial que se utiliza en la descarga,  $\varphi_0$  es el potencial aplicado al cátodo,  $L_0$  es la longitud característica del sistema, tomada como el espacio interelectrónico,  $E_0 = V_0/L_0$ ,  $\tau$ ,  $V_0$ ,  $B_0$  son cantidades características.

$$\beta \xi \frac{\partial n_i}{\partial t} - P_i \nabla \varphi \cdot \nabla n_i = \nabla^2 n_i + P_i n_i \nabla^2 \varphi + \beta D_a n_e - C_i \nabla \cdot [n_i (\vec{V}_i \times \vec{B})], \quad (3.0.10)$$

$$\beta\xi\frac{\partial n_i}{\partial t} + P_i\vec{E}\cdot\nabla n_i = \nabla^2 n_i + P_i n_i \Gamma(n_e - n_i) + \beta D_a n_e - C_i \nabla\cdot[n_i(\vec{V}_i\times\vec{B})], \quad (3.0.11)$$

lo siguiente es desarrollar el producto vectorial del término multiplicado por  $C_i$ . Usando las propiedades vectoriales del Apéndice A obtenemos

$$\beta\xi\frac{\partial n_i}{\partial t} + P_i\vec{E}\cdot\nabla n_i = \nabla^2 n_i + P_i n_i \Gamma(n_e - n_i) + \beta D_a n_e - C_i \left[ n_i \left( \vec{B}\cdot\nabla\times\vec{V}_i - \vec{V}_i\cdot\nabla\times\vec{B} \right) + (\vec{V}_i\times\vec{B})\cdot\nabla n_i \right], \quad (3.0.12)$$

hemos obtenido la ecuación de transporte adimensional de  $n_i$  en su forma vectorial. De manera análoga se puede obtener la ecuación de transporte correspondiente para  $n_e$

$$\xi\frac{\partial n_e}{\partial t} - P_e\vec{E}\cdot\nabla n_e = \nabla^2 n_e - P_e n_e \Gamma(n_e - n_i) + D_a n_e + C_e \left[ n_e \left( \vec{B}\cdot\nabla\times\vec{V}_e - \vec{V}_e\cdot\nabla\times\vec{B} \right) + (\vec{V}_e\times\vec{B})\cdot\nabla n_e \right]. \quad (3.0.13)$$

Las ecuaciones (3.0.3)-(3.0.4) en su forma adimensional son

$$\nabla^2\varphi = \Gamma(n_e - n_i), \quad (3.0.14)$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi. \quad (3.0.15)$$

Los parámetros característicos fueron renombrados por parámetros adimensionales

$$P_e = \frac{\mu_e\varphi_0}{D_e}, \quad P_i = \frac{\mu_i\varphi_0}{D_i}, \quad \xi = \frac{L_0^2}{D_e t_0}, \quad C_i = \frac{\mu_i V_0 B_0 L_0}{D_i}, \quad C_e = \frac{\mu_e V_0 B_0 L_0}{D_e},$$

$$D_a = \frac{k_{i0} N L_0^2 e^{\frac{-E_i}{k_B T_e}}}{D_e}, \quad \Gamma = \frac{e n_0 L_0^2}{\varphi_0 \epsilon}, \quad \beta = \frac{D_e}{D_i}, \quad (3.0.16)$$

donde  $P_e$ ,  $P_i$  se conocen como números Péclet para electrones e iones, este parámetro cuantifica el arrastre que el campo eléctrico tiene sobre los electrones y los iones, expresando la importancia relativa del arrastre sobre la difusión. El número de tasa de ionización Damkohler [13],  $D_a$ , es una medida relativa de la creación de partículas con respecto al transporte de partículas,  $\xi$  es el tiempo característico de los electrones, y  $\beta\xi$  el tiempo característico de los iones,  $\Gamma$  cuantifica la intensidad del campo eléctrico adimensional;  $C_i$  y  $C_e$  son los parámetros adimensionales que involucran el efecto del campo magnético en la dinámica del plasma.

### 3.1 Solución unidimensional

En esta sección se presenta el desarrollo del modelo de plasmas fríos en una dimensión en coordenadas cartesianas. Considerando el conjunto de ecuaciones (3.0.12)-(3.0.15), que están en su forma vectorial y adimensionalizadas, y haciendo el campo magnético cero  $C_i = C_e = 0$ , desarrollamos las ecuaciones para el caso unidimensional.

$$\xi \frac{\partial n_e}{\partial t} - P_e E_x \frac{\partial n_e}{\partial x} = \frac{\partial^2 n_e}{\partial x^2} - P_e n_e \Gamma(n_e - n_i) + D_a n_e, \quad (3.1.1)$$

$$\xi \beta \frac{\partial n_i}{\partial t} + P_i E_x \frac{\partial n_i}{\partial x} = \frac{\partial^2 n_i}{\partial x^2} + P_i n_i \Gamma(n_e - n_i) + \beta D_a n_e, \quad (3.1.2)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \Gamma(n_e - n_i), \quad (3.1.3)$$

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (3.1.4)$$

Para resolverlas es necesario establecer condiciones iniciales y de frontera para  $n_e$  y  $n_i$ , y condiciones de frontera para  $\vec{E}$ ,  $\varphi$ .

#### Condiciones de frontera

Usamos la configuración de electrodos de placas paralelas de igual área, de tal manera que uno este conectado a una fuente de corriente directa CD y el otro conectado a tierra (ver Figura 3.1). Para que la aproximación de una dimensión sea válida, la distancia interelectródica debe ser menor comparada con el diámetro de los electrodos. La distancia interelectródica tanto las condiciones de frontera tienen que ser adimensionalizadas, de modo que presentamos el conjunto de condiciones de frontera en su forma adimensional. Tomaremos como norma

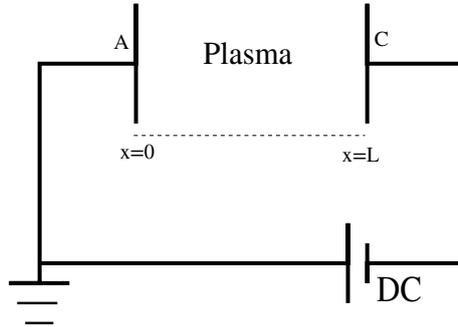


Figura 3.1: Esquema de la descarga unidimensional. Se trata de una cámara de vacío conectada a una fuente de corriente directa con voltaje  $V_0$ . Las letras A y C hacen referencia al ánodo y cátodo respectivamente.

general que el cátodo es el electrodo con un potencial negativo o distinto de cero en  $x = 1$ , mientras que el ánodo es el electrodo aterrizado en  $x = 0$ . Las condiciones de frontera del potencial eléctrico  $\varphi$  se establecen de acuerdo al potencial aplicado. El cátodo por ser el electrodo alimentado satisface la condición tipo Dirichlet

$$\varphi(1) = -1, \quad (3.1.5)$$

mientras que en el ánodo que es el electrodo aterrizado

$$\varphi(0) = 0. \quad (3.1.6)$$

En el ánodo los electrones se difunden para recircular y por ello no hay densidad de electrones cerca del ánodo, es decir, hay una recombinación rápida.

$$n_e(0) = 0. \quad (3.1.7)$$

Puede haber acumulación de iones cerca del cátodo debido a que son atraídos por este, formando así una acumulación de iones, entonces la densidad de iones es distinta de cero, por lo cual se genera un campo eléctrico puntual cerca de la frontera que sigue atrayendo los iones hacia el cátodo y no permite la difusión de los iones en el plasma. Se quedan ahí hasta que algún electrón que salga del cátodo los neutralice. Por lo tanto el proceso difusivo de los iones es mucho menor que el efecto de arraste que les ocasiona el campo eléctrico, lo cual se expresa como

$$-\nabla n_i \cdot \hat{n}|_{x=1} = 0. \quad (3.1.8)$$

En el ánodo algunos iones pueden ser atraídos por los electrones que se difunden en esta región, pero los iones son repelidos por la placa, de tal manera que tampoco se absorben ni emergen. Además, al haber una acumulación de carga positiva, nuevamente se origina un campo eléctrico que dificulta la difusión de iones hacia el plasma, teniendo la misma condición de frontera tipo Neumann

$$-\nabla n_i \cdot \hat{n}|_{x=0} = 0. \quad (3.1.9)$$

En el cátodo, para la densidad de electrones  $n_e$  se establece que el flujo de electrones es proporcional al flujo de iones por una constante  $\gamma$ , llamada constante de emisión secundaria que depende del material de los electrodos, y a la vez inversamente proporcionales a  $\beta$ , el cociente entre las difusividades de las partículas.

$$(-\nabla n_e + P_e n_e \nabla \varphi) \cdot \hat{n} = -\frac{\gamma}{\beta} (-\nabla n_i - P_i n_i \nabla \varphi) \cdot \hat{n}, \quad (3.1.10)$$

es una condición de frontera tipo Robin. Estas condiciones pueden ser modificaciones al momento de resolver las ecuaciones, de ser así se especifica en los resultados.

### 3.1.1 Solución analítica

Para la solución analítica de las ecuaciones (3.1.1)-(3.1.4) utilizaremos *el método de soluciones asintóticas*. Este método es utilizado para resolver sistemas de ecuaciones no-lineales y desacoplarlas. Iniciamos con una solución propuesta en expansiones asintóticas para cada una de las variables que deseamos conocer:  $n_e$ ,  $n_i$ ,  $E_x$ ,  $\varphi$ .

$$n_e = n_e^{(0)} + n_e^{(1)}D_a^1 + n_e^{(2)}D_a^2 + n_e^{(3)}D_a^3 \dots, \quad (3.1.11)$$

$$n_i = n_i^{(0)} + n_i^{(1)}D_a^1 + n_i^{(2)}D_a^2 + n_i^{(3)}D_a^3 \dots, \quad (3.1.12)$$

$$E_x = E_x^{(0)} + E_x^{(1)}D_a^1 + E_x^{(2)}D_a^2 + E_x^{(3)}D_a^3 \dots, \quad (3.1.13)$$

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)}D_a^1 + \varphi^{(2)}D_a^2 + \varphi^{(3)}D_a^3 \dots, \quad (3.1.14)$$

utilizamos el parámetro Damkohler  $D_a$  porque está relacionado a la generación del plasma, es decir, es el parámetro característico del sistema, de modo que representa las potencias de la serie con su superíndice, mientras que los términos que le acompañan son funciones desconocidas. De este modo, el parámetro Damkohler es el parámetro asintótico y para que las series propuestas converjan suponemos que es pequeño ( $D_a \ll 1$ ). Si se desea conocer más sobre el método se recomienda consultar el Apéndice B. El siguiente paso es sustituir las expansiones (3.1.11)-(3.1.14) en las ecuaciones (3.1.1)-(3.1.4) considerando el estado estacionario, es decir, sin el término temporal. De esta manera el sistema de ecuaciones se desacopla y resolvemos para cada orden con sus correspondientes condiciones de frontera y así encontramos las funciones desconocidas que juntas forman parte de la solución general. Primero haremos la sustitución en la ecuación (3.1.1) del transporte de electrones y obtendremos un sistema de ecuaciones diferenciales desacopladas de primer y segundo orden que son resueltas con *Mathematica 12*. Posteriormente repetiremos el proceso en el resto de las ecuaciones del modelo. Además, para el término relacionado a la ionización se propone la expansión

$$D_a n_e = D_a(1 + D_a^1 n_e^{(1)} + D_a^2 n_e^{(2)}), \quad (3.1.15)$$

para que las ecuaciones tengan solución distinta de cero. De modo que al sustituir en la ecuación de  $n_e$  tenemos

$$\begin{aligned} & -P_e [E_x^{(0)} + E_x^{(1)}D_a^1 + E_x^{(2)}D_a^2] \frac{\partial}{\partial x} [n_e^{(0)} + n_e^{(1)}D_a^1 + n_e^{(2)}D_a^2] \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} [n_e^{(0)} + n_e^{(1)}D_a^1 + n_e^{(2)}D_a^2] - P_e [n_e^{(0)} + n_e^{(1)}D_a^1 + n_e^{(2)}D_a^2] \Gamma [(n_e^{(0)} + n_e^{(1)}D_a^1 + n_e^{(2)}D_a^2) \\ & \quad - (n_i^{(0)} + n_i^{(1)}D_a^1 + n_i^{(2)}D_a^2)] + D_a [1 + n_e^{(1)}D_a^1 + n_e^{(2)}D_a^2], \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

agrupamos los términos por órdenes del Damkohler para obtener ecuaciones diferenciales desacopladas.

#### Orden cero $D_a^0$

$$-P_e E_x^{(0)} \frac{\partial n_e^{(0)}}{\partial x} = \frac{\partial^2 n_e^{(0)}}{\partial x^2} - P_e n_e^{(0)} \Gamma (n_e^{(0)} - n_i^{(0)}), \quad (3.1.17)$$

que tiene como solución  $n_e^{(0)} = n_i^{(0)} = E_x^{(0)} = \varphi^{(0)} = 0$  puesto que si no hay término de ionización, no hay plasma. Por lo tanto, las ecuación para orden cero del Damkohler se desprecian. Por otra parte, también deben ser sustituidas las expansiones asintóticas en las condiciones en las frontera, de tal manera que agruparemos las ecuaciones y las condiciones de frontera por los órdenes del Damkohler.

**Primer orden  $D_a^1$** 

$$0 = \frac{d^2 n_e^{(1)}}{dx^2} D_a + D_a, \quad (3.1.18)$$

es la ecuación de densidad de electrones. La ecuación para la densidad de iones (3.1.2)

$$0 = \frac{d^2 n_i^{(1)}}{dx^2} D_a + D_a \beta. \quad (3.1.19)$$

La ecuación del potencial eléctrico

$$\frac{d^2 \varphi^{(1)}}{dx^2} D_a = D_a \Gamma [n_e^{(1)} - n_i^{(1)}], \quad (3.1.20)$$

y el campo eléctrico

$$E_x^{(1)} D_a = -\frac{d\varphi^{(1)}}{dx} D_a. \quad (3.1.21)$$

Y las respectivas condiciones de frontera para  $D_a$  de primer orden son

**Cátodo**

$$-\frac{\partial n_e^{(1)}}{\partial x} = \frac{\gamma}{\beta} \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial x} \Big|_{x=1}, \quad (3.1.22)$$

$$\frac{dn_i^{(1)}}{dx} \Big|_{x=1} = 0, \quad (3.1.23)$$

$$\varphi^{(1)}(1) = -1/D_a. \quad (3.1.24)$$

**Ánodo**

$$n_e^{(1)}(0) = 0, \quad (3.1.25)$$

$$\varphi^{(1)}(0) = 0. \quad (3.1.26)$$

Al tratarse de una solución analítica notamos que para resolver la ecuación de transporte de iones tenemos dos condiciones de frontera tipo Neumann, lo cual hace que el sistema no sea posible de resolver. Para evadir este problema cambiaremos la condición en el ánodo a una condición tipo Dirichlet.

$$n_i^{(1)}(0) = n_a/D_a, \quad (3.1.27)$$

donde  $n_a=0.6$ . Este valor fue obtenido de la solución numérica del modelo de plasmas fríos al aplicar las condiciones de frontera tipo Neumann en el artículo [15]. En las soluciones numéricas sí se pueden usar las dos condiciones tipo Neumann para la densidad de iones.

**Segundo orden  $D_a^2$** 

$$\frac{d^2 n_e^{(2)}}{dx^2} = -P_e E_x^{(1)} \frac{dn_e^{(1)}}{dx} + P_e \Gamma n_e^{(1)} (n_e^{(1)} - n_i^{(1)}) - n_e^{(1)}, \quad (3.1.28)$$

$$\frac{d^2 n_i^{(2)}}{dx^2} = P_i E_x^{(1)} \frac{dn_i^{(1)}}{dx} - P_i n_i^{(1)} \Gamma (n_e^{(1)} - n_i^{(1)}) - \beta n_e^{(1)}, \quad (3.1.29)$$

$$\frac{d^2 \varphi^{(2)}}{dx^2} = \Gamma [n_e^{(2)} - n_i^{(2)}], \quad (3.1.30)$$

$$E_x^{(2)} D_a^2 = -\frac{d\varphi^{(1)}}{dx} D_a^2. \quad (3.1.31)$$

De manera análoga escribimos las ecuaciones de frontera para el segundo orden.

**Cátodo**

$$-P_e n_e^{(1)} E_x^{(1)} - \frac{\partial n_e^{(2)}}{\partial x} = -\frac{\gamma}{\beta} \left( P_i n_i^{(1)} E_1^{(1)} - \frac{\partial n_i^{(2)}}{\partial x} \right) \Big|_{x=1}, \quad (3.1.32)$$

$$\frac{\partial n_i^{(2)}}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad (3.1.33)$$

$$\varphi^{(2)}(1) = 0. \quad (3.1.34)$$

**Ánodo**

$$n_e^{(2)}(0) = 0, \quad (3.1.35)$$

$$n_i^{(2)}(0) = 0, \quad (3.1.36)$$

$$\varphi^{(2)}(0) = 0. \quad (3.1.37)$$

### 3.1.2 Solución numérica

La solución numérica utilizada consiste en discretizar las ecuaciones (3.1.1)-(3.1.4) y las condiciones de frontera (3.1.5)-(3.1.10) usando el método de diferencias finitas y la metodología Gauss-Seidel para resolverlas. Si se desea conocer más sobre estas metodologías consultar el Apéndice C y [16]. Las derivadas espaciales de primer orden fueron discretizadas con diferencia hacia adelante, las derivadas de segundo orden y temporales como lo indica el Apéndice C.

Por simplicidad en la escritura renombraremos las variables:

$$n_e = u, \quad n_i = v, \quad E_x = E.$$

Comenzamos discretizando la ecuación (3.1.1). El índice  $i$  hace referencia a la variación en el eje  $x$ , y el índice  $n$  a la variación temporal.

$$\begin{aligned} & \xi \left( \frac{u^{n+1}(i) - u^n(i)}{\delta t} \right) - P_e E^n(i) \left( \frac{u^n(i+1) - u^n(i)}{\delta x} \right) = \\ & \left[ \frac{u^n(i+1) - 2u^n(i) + u^n(i-1)}{\delta x^2} \right] + P_e u^n(i) \Gamma \left( v^n(i) - u^n(i) \right) + D_a u^n(i). \end{aligned} \quad (3.1.38)$$

Despejamos el término temporal del futuro ( $n+1$ )

$$\begin{aligned} u^{n+1}(i) = u^n(i) + \frac{\delta t}{\xi} & \left[ P_e E^n(i) \left( \frac{u^n(i+1) - u^n(i)}{\delta x} \right) + \right. \\ & \left. \left[ \frac{u^n(i+1) - 2u^n(i) + u^n(i-1)}{\delta x^2} \right] + D_a u^n(i) + P_e u^n(i) \Gamma \left( v^n(i) - u^n(i) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.1.39)$$

esta es la expresión que utilizaremos. A continuación expresamos de manera similar la forma discreta de las ecuaciones restantes. Forma discreta de (3.1.2)

$$\begin{aligned} v^{n+1}(i) = v^n(i) + \frac{\delta t}{\beta \xi} & \left[ -P_i E^n(i) \left( \frac{v^n(i+1) - v^n(i)}{\delta x} \right) + \right. \\ & \left. \left[ \frac{v^n(i+1) - 2v^n(i) + v^n(i-1)}{\delta x^2} \right] + \beta D_a v^n(i) + P_i v^n(i) \Gamma \left( u^n(i) - v^n(i) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.1.40)$$

Forma discreta de (3.1.4)

$$E^n(i) = - \left[ \frac{\varphi^n(i+1) - \varphi^n(i)}{\delta x} \right]. \quad (3.1.41)$$

Para que la ecuación (3.1.3) pueda ser resuelta necesitamos modificarla. La reescribimos como

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \Gamma(n_e - n_i),$$

donde  $\tau$  es un tiempo ficticio, tal que cuando el sistema regresa al estado estacionario volvemos a tener nuestra ecuación original. Necesitamos hacer este paso porque la ecuación para el potencial es la primera que es resuelta y es la forma de hacerla converger [17]. Así, la discretización queda como

$$\varphi^{n+1}(i) = \left( \frac{\varphi^n(i+1) - 2\varphi^n(i) + \varphi^n(i-1)}{\delta x^2} - \Gamma[u^n(i) - v^n(i)] \right) \delta \tau + \varphi^n(i). \quad (3.1.42)$$

Ahora que contamos con las ecuaciones discretizadas usamos el método Gauss-Seidel para resolverlas, que consiste en una iteración en donde a través de la asignación de valores iniciales a las incógnitas se resuelve una primera ecuación para así determinar un nuevo valor de la variable que será utilizado para resolver las ecuaciones sucesivas. En la ecuación (3.1.42) observamos que se conocen los valores de  $u$  y  $v$  una vez que conocemos el potencial, es decir, hablamos de una discretización explícita e implícita, respectivamente [17]. Se puede observar mejor este método en el algoritmo (1). El programa fue escrito en el lenguaje de programación Fortran 90.

---

**Algoritmo 1** Algoritmo para la solución numérica 1D.

---

1. Definición de variables.
  2. Definir el paso temporal  $dt$ .
  3. Asignación de memoria a las variables.
  4. Definir malla  $dx$ .
  5. Dar condiciones iniciales.
  6. Dar condiciones de frontera.
  7. Definir e iniciar ciclo temporal  $t$ .
  8. Definir e iniciar ciclo temporal de  $\tau$ .
  9. Resolver la ecuación tipo Poisson  $\varphi^{n+1}$ .
  10. Cierre del ciclo temporal para  $\tau$ .
  11. Definir e iniciar ciclo espacial para las ecuaciones (3.1.41), (3.1.2), (3.1.2) en este orden.
  12. Resolver las ecuaciones en su forma  $u^{n+1}$ ,  $v^{n+1}$ ,  $E^{n+1}$ .
  13. Cierre del ciclo espacial.
  14. Asignación de los valores obtenidos para volver a iniciar el ciclo  $u^n = u^{n+1}$ ,  $v^n = v^{n+1}$ .
  15. Cierre del ciclo temporal  $t$ .
- 

Finalmente se exportaron los datos obtenidos y se grafican utilizando con el programa *Gnuplot*.

## 3.2 Solución numérica bidimensional

### 3.2.1 Sistema cartesiano

La solución de las ecuaciones del modelo de plasmas fríos será únicamente numérica en su desarrollo bidimensional a través del método de diferencias finitas y la metodología Gauss-Seidel. Iniciaremos resolviendo el caso donde el campo magnético es cero. Para ello desarrollamos las ecuaciones (3.0.12), (3.0.13), (3.0.14), (3.0.15) en la geometría cartesiana, considerando

$$\vec{E} = (E_x, E_y),$$

obteniendo así el conjunto de ecuaciones que vamos a utilizar para la programación

$$\xi \frac{\partial n_e}{\partial t} - P_e E_x \frac{\partial n_e}{\partial x} - P_e E_y \frac{\partial n_e}{\partial y} = \frac{\partial^2 n_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n_e}{\partial y^2} - P_e n_e \Gamma(n_e - n_i) + D_a n_e, \quad (3.2.1)$$

$$\beta \xi \frac{\partial n_i}{\partial t} + P_i E_x \frac{\partial n_i}{\partial x} + P_i E_y \frac{\partial n_i}{\partial y} = \frac{\partial^2 n_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n_i}{\partial y^2} + P_i n_i \Gamma(n_e - n_i) + \beta D_a n_e, \quad (3.2.2)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \Gamma(n_e - n_i), \quad (3.2.3)$$

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ E_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

La discretización en dos dimensiones se hace siguiendo la estructura del Apéndice C, donde la variación de  $i$  es en la dirección  $x$ , y  $j$  en la dirección  $y$ .

Para discretizar la ecuación (3.2.1) se hace considerando a  $n_e = u$  y  $n_i = v$

$$\begin{aligned} &\xi \left[ \frac{u^{n+1}(i, j) - u^n(i, j)}{\delta t} \right] - P_e E_x^n(i, j) \left[ \frac{u^n(i+1, j) - u^n(i, j)}{\delta x} \right] - \\ &P_e E_y^n(i, j) \left[ \frac{u^n(i, j+1) - u^n(i, j)}{\delta y} \right] = \frac{u^n(i+1, j) - 2u^n(i, j) + u^n(i-1, j)}{\delta x^2} + \\ &\frac{u^n(i, j+1) - 2u^n(i, j) + u^n(i, j-1)}{\delta y^2} - P_e u^n(i, j) \Gamma[u^n(i, j) - v^n(i, j)] + D_a u^n(i, j). \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Despejando  $u^{n+1}(i, j)$  podemos escribirlo como

$$u^{n+1}(i, j) = u^n(i, j) + \frac{\delta t}{\xi} \left[ P_e E_x^n(i, j) \left[ \frac{u^n(i+1, j) - u^n(i, j)}{\delta x} \right] + \right. \quad (3.2.6)$$

$$\left. P_e E_y^n(i, j) \left[ \frac{u^n(i, j+1) - u^n(i, j)}{\delta y} \right] + \frac{u^n(i+1, j) - 2u^n(i, j) + u^n(i-1, j)}{\delta x^2} + \frac{u^n(i, j+1) - 2u^n(i, j) + u^n(i, j-1)}{\delta y^2} - P_e u^n(i, j) \Gamma[u^n(i, j) - v^n(i, j)] + D_a u^n(i, j) \right]. \quad (3.2.7)$$

Esta es la versión discretizada de la ecuación (3.2.1) y es la que se utiliza para la solución numérica. Si seguimos la misma metodología para la ecuación (3.2.2) y (3.2.4) obtenemos

$$\begin{aligned}
 v^{n+1}(i, j) = v^n(i, j) + \frac{\delta t}{\xi\beta} & \left[ -P_i \left( E_x^n(i, j) \left[ \frac{v^n(i+1, j) - v^n(i, j)}{\delta x} \right] + \right. \right. \\
 E_y^n(i, j) & \left. \left[ \frac{v^n(i, j+1) - v^n(i, j)}{\delta y} \right] \right) + \frac{v^n(i+1, j) - 2v^n(i, j) + v^n(i-1, j)}{\delta x^2} + \\
 \frac{v^n(i, j+1) - 2v^n(i, j) + v^n(i, j-1)}{\delta y^2} & \left. + P_i v^n(i, j) \Gamma[u^n(i, j) - v^n(i, j)] + \beta D_a u^n(i, j) \right], \tag{3.2.8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_x^n(i, j) &= - \left( \frac{\varphi^n(i+1, j) - \varphi^n(i, j)}{\delta x} \right), \\
 E_y^n(i, j) &= - \left( \frac{\varphi^n(i, j+1) - \varphi^n(i, j)}{\delta y} \right). \tag{3.2.9}
 \end{aligned}$$

Para el caso de la ecuación (3.2.3) se modifica igual que para el caso unidimensional.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \Gamma(n_e - n_i) = Q,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - Q = 0,$$

que se puede expresar como

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - Q. \tag{3.2.10}$$

Ya que si se considera el caso estacionario volvemos a la ecuación (3.2.3). Discretizamos la expresión y despejamos el tiempo  $n + 1$  en el potencial

$$\begin{aligned}
 \varphi^{n+1}(i, j) = \varphi^n(i, j) + \delta \tau & \left[ \frac{\varphi^n(i+1, j) - 2\varphi^n(i, j) + \varphi^n(i-1, j)}{\delta x^2} \right. \\
 + \frac{\varphi^n(i, j+1) - 2\varphi^n(i, j) + \varphi^n(i, j-1)}{\delta y^2} & \left. - Q^n(i, j) \right], \tag{3.2.11}
 \end{aligned}$$

donde

$$Q^n(i, j) = \Gamma[u^n(i, j) - v^n(i, j)].$$

El algoritmo fue escrito en lenguaje de programación Fortran 90.

---

**Algoritmo 2** Algoritmo para la solución numérica bidimensional cartesiana.

---

1. Definición de variables.
  2. Definir el paso temporal  $dt$ .
  3. Asignación de memoria a las variables.
  4. Definir malla  $dx, dy$ .
  5. Dar condiciones iniciales.
  6. Dar condiciones de frontera.
  7. Definir e iniciar ciclo temporal  $t$ .
  8. Definir e iniciar ciclo temporal de  $\tau$ .
  9. Resolver la ecuación tipo Poisson  $\varphi^{n+1}$  (3.2.11).
  10. Cierre del ciclo temporal para  $\tau$ .
  11. Definir e iniciar ciclo espacial para las ecuaciones (3.2.9), (3.2.7), (3.2.1) en este orden.
  12. Resolver las ecuaciones en su forma  $u^{n+1}, v^{n+1}, E^{n+1}$ .
  13. Cierre del ciclo espacial.
  14. Asignación de los valores obtenidos para volver a iniciar el ciclo  $u^n = u^{n+1}, v^n = v^{n+1}$ .
  15. Cierre del ciclo temporal  $t$ .
-

### 3.2.2 Sistema cartesiano con campo magnético

Al considerar el efecto del campo magnético utilizamos las ecuaciones vectoriales del modelo de plasmas fríos del Capítulo 3, es decir, (3.0.12)-(3.0.13) junto con (3.0.14), (3.0.15). Para

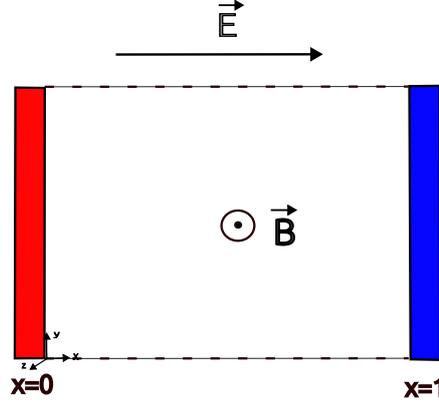


Figura 3.2: Esquema bidimensional del sistema de descarga entre placas paralelas con campo magnético en la dirección  $z$ . La placa roja es considerada el cátodo, mientras que la placa azul el ánodo.

desglosar las componentes y productos vectoriales de las ecuaciones consideremos el esquema de la Figura 3.2 y lo siguiente

$$\vec{E} = (E_x, E_y, 0), \quad \vec{B} = (0, 0, B_z), \quad \vec{V}_i = (V_x, V_y, 0),$$

donde  $B_z$  es un valor constante en la dirección  $z$ . Comenzamos haciendo el desarrollo para la ecuación del transporte de iones (3.0.12)

$$\begin{aligned} \beta\xi \frac{\partial n_i}{\partial t} + P_i E_x \frac{\partial n_i}{\partial x} + P_i E_y \frac{\partial n_i}{\partial y} &= \frac{\partial^2 n_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n_i}{\partial y^2} + P_i n_i \Gamma(n_e - n_i) + \beta D_a n_e - \\ C_i n_i B_z \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) + C_i n_i \left( V_x \frac{\partial B_z}{\partial y} - V_y \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) - C_i \left( V_y B_z \frac{\partial n_i}{\partial x} - V_x B_z \frac{\partial n_i}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Agrupando términos obtenemos

$$\begin{aligned} \beta\xi \frac{\partial n_i}{\partial t} + P_i E_x \frac{\partial n_i}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ C_i n_i B_z V_y - \frac{\partial n_i}{\partial x} \right] + P_i E_y \frac{\partial n_i}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left[ C_i n_i B_z V_x + \frac{\partial n_i}{\partial y} \right] \\ = P_i n_i \Gamma(n_e - n_i) + \beta D_a n_e. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Observamos que en la ecuación anterior hay términos de las velocidades de los iones tanto en  $x$  como en  $y$ . Estos valores son desconocidos así que para librarnos de ellos procedemos a realizar la siguiente estrategia matemática. Consideremos la ecuación (3.0.6), donde el artículo de Kumar [14] hace la consideración de que el flujo de iones (y electrones) es equivalente al producto de la densidad de iones por su velocidad.

$$\vec{J}_i = n_i \vec{V}_i = \mu_i n_i (\vec{E} + \vec{V}_i \times \vec{B}) - D_i \nabla n_i,$$

esta expresión puede sustituirse en la ecuación (3.2.12), sin embargo, recordemos que estamos trabajando con ecuaciones adimensionalizadas, y la ecuación del flujo de iones no lo está. Para la adimensionalización utilizamos los mismos parámetros característicos que utilizamos para adimensionalizar la ecuación de transporte con campo magnético (3.0.9).

$$J_0 \vec{J}_i^* = n_0 \mu_i n_i^* \left( \frac{\varphi_0}{L_0} \vec{E}^* + V_0 B_0 \vec{V}_i \times \vec{B} \right) - \frac{n_0 D_i}{L_0} \nabla^* n_i^*,$$

quitando los asteriscos

$$\vec{J}_i \frac{J_0 L_0}{D_i} = n_0 n_i (P_i \vec{E} + C_i \vec{V} \times \vec{B}) - n_0 \nabla n_i,$$

hacemos la consideración  $J_0 = D_i n_0 / L_0$  para obtener la ecuación adimensionalizada del flujo de iones

$$\vec{J}_i = n_i \vec{V}_i = n_i (P_i \vec{E} + C_i \vec{V}_i \times \vec{B}) - \nabla n_i. \quad (3.2.13)$$

Lo que nos interesan son las componentes  $x$  e  $y$  de esta ecuación, así que

$$n_i V_x = n_i (P_i E_x + C_i V_y B_z) - \frac{\partial n_i}{\partial x}, \quad (3.2.14)$$

$$n_i V_y = n_i (P_i E_y - C_i V_x B_z) - \frac{\partial n_i}{\partial y}, \quad (3.2.15)$$

si sumamos y restamos entre sí las expresiones anteriores, obtenemos dos nuevas

$$n_i V_y = \frac{1}{1 + (C_i B_z)^2} \left[ n_i P_i (E_y - C_i B_z E_x) - \frac{\partial n_i}{\partial y} + C_i B_z \frac{\partial n_i}{\partial x} \right], \quad (3.2.16)$$

$$n_i V_x = \frac{1}{1 + (C_i B_z)^2} \left[ n_i P_i (E_x + C_i B_z E_y) - \frac{\partial n_i}{\partial x} - C_i B_z \frac{\partial n_i}{\partial y} \right],$$

después de sustituir en la ecuación (3.2.12) obtenemos

$$\begin{aligned} & \beta \xi \frac{\partial n_i}{\partial t} + P_i E_x \frac{\partial n_i}{\partial x} - \frac{\partial^2 n_i}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{C_i B_z}{1 + (C_i B_z)^2} \left[ n_i P_i (E_y - C_i B_z E_x) + \frac{\partial n_i}{\partial x} C_i B_z - \frac{\partial n_i}{\partial y} \right] \right\} \\ & + P_i E_y \frac{\partial n_i}{\partial y} - \frac{\partial^2 n_i}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{C_i B_z}{1 + (C_i B_z)^2} \left[ n_i P_i (E_x + C_i B_z E_y) - \frac{\partial n_i}{\partial x} - C_i B_z \frac{\partial n_i}{\partial y} \right] \right\} = \\ & + P_i n_i \Gamma(n_e - n_i) + \beta D_a n_e. \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Esta es la ecuación de transporte del flujo de iones en el sistema cartesiano adimensionalizada. Es importante notar que si  $B_z = 0$ , la ecuación se reduce a la (3.2.2). De manera similar se puede obtener la ecuación de transporte del flujo de electrones adimensional; las ecuaciones del campo y potencial eléctrico no tienen cambios

$$\begin{aligned} & \xi \frac{\partial n_e}{\partial t} - P_e E_x \frac{\partial n_e}{\partial x} - \frac{\partial^2 n_e}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{C_e B_z}{1 + (C_e B_z)^2} \left[ n_e P_e (C_e B_z E_x + E_y) + C_e B_z \frac{\partial n_e}{\partial x} + \frac{\partial n_e}{\partial y} \right] \right\} \\ & - P_e E_y \frac{\partial n_e}{\partial y} - \frac{\partial^2 n_e}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{C_e B_z}{1 + (C_e B_z)^2} \left[ n_e P_e (C_e B_z E_y - E_x) - \frac{\partial n_e}{\partial x} + C_e B_z \frac{\partial n_e}{\partial y} \right] \right\} = \\ & - P_e n_e \Gamma(n_e - n_i) + D_a n_e, \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \Gamma(n_e - n_i), \quad (3.2.19)$$

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ E_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

Estas ecuaciones son las que se utilizaron para hacer la simulación bidimensional con campo magnético en la geometría cartesiana. Las ecuaciones fueron discretizadas y resueltas a través del algoritmo Gauss-Seidel escrito en el lenguaje de programación Fortran 90. Para mostrar

la discretización consideremos que la variación de  $i$  es en la dirección  $x$ , y  $j$  en la dirección  $y$ , además  $n_e = u, n_i = v$ . De modo que la forma discreta de la ecuación del transporte del flujo de iones (3.2.17) es

$$\begin{aligned} & \xi\beta \left( \frac{v^{n+1}(i, j) - v^n(i, j)}{\delta t} \right) + P_i E_x^n(i, j) \left( \frac{v^n(i+1, j) - v^n(i, j)}{\delta x} \right) \\ & - \frac{v^n(i+1, j) - 2v^n(i, j) + v^n(i-1, j)}{\delta x^2} + \frac{F^n(i+1, j) - F^n(i, j)}{\delta x} \\ & + P_i E_y^n(i, j) \frac{v^n(i, j+1) - v^n(i, j)}{\delta y} - \frac{v^n(i, j+1) - 2v^n(i, j) + v^n(i, j-1)}{\delta y^2} \\ & - \frac{H^n(i, j+1) - H^n(i, j)}{\delta y} = P_i v^n(i, j) \Gamma(u^n(i, j) - v^n(i, j)) + \beta D_a u^n(i, j), \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

donde

$$\begin{aligned} F(i, j) &= \frac{C_i B_z}{1 + (C_i B_z)^2} [v^n(i, j) P_i (E_y^n(i, j) - C_i B_z E_x^n(i, j)) - \frac{\partial n_i}{\partial y} + C_i B_z \frac{\partial n_i}{\partial x}], \\ H(i, j) &= \frac{C_i B_z}{1 + (C_i B_z)^2} [v^n(i, j) P_i (E_x^n(i, j) - C_i B_z E_y^n(i, j)) - \frac{\partial n_i}{\partial x} + C_i B_z \frac{\partial n_i}{\partial y}]. \end{aligned}$$

Del mismo modo, la forma discreta de la ecuación (3.2.18) es

$$\begin{aligned} & \beta \left( \frac{u^{n+1}(i, j) - u^n(i, j)}{\delta t} \right) + P_e E_x^n(i, j) \left( \frac{u^n(i+1, j) - u^n(i, j)}{\delta x} \right) \\ & - \frac{u^n(i+1, j) - 2u^n(i, j) + u^n(i-1, j)}{\delta x^2} + \frac{M^n(i+1, j) - M^n(i, j)}{\delta x} \\ & - P_e E_y^n(i, j) \frac{u^n(i, j+1) - u^n(i, j)}{\delta y} - \frac{u^n(i, j+1) - 2u^n(i, j) + u^n(i, j-1)}{\delta y^2} \\ & + \frac{S^n(i, j+1) - S^n(i, j)}{\delta y} = -P_e u^n(i, j) \Gamma(u^n(i, j) - v^n(i, j)) + D_a u^n(i, j), \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

donde

$$\begin{aligned} M(i, j) &= \frac{C_e B_z}{1 + (C_e B_z)^2} [u^n(i, j) P_e (E_y^n(i, j) + C_e B_z E_x^n(i, j)) + \frac{\partial n_e}{\partial y} + C_e B_z \frac{\partial n_e}{\partial x}], \\ S(i, j) &= \frac{C_e B_z}{1 + (C_e B_z)^2} [u^n(i, j) P_e (C_e B_z E_y^n(i, j) - E_x^n(i, j)) - \frac{\partial n_e}{\partial x} + C_e B_z \frac{\partial n_e}{\partial y}]. \end{aligned}$$

Para el campo y potencial eléctrico

$$\begin{aligned} E_x^n(i, j) &= - \left( \frac{\varphi^n(i+1, j) - \varphi^n(i, j)}{\delta x} \right), \\ E_y^n(i, j) &= - \left( \frac{\varphi^n(i, j+1) - \varphi^n(i, j)}{\delta y} \right), \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

$$\begin{aligned} \varphi^{n+1}(i, j) &= \varphi^n(i, j) + \delta\tau \left[ \frac{\varphi^n(i+1, j) - 2\varphi^n(i, j) + \varphi^n(i-1, j)}{\delta x^2} \right. \\ & \left. + \frac{\varphi^n(i, j+1) - 2\varphi^n(i, j) + \varphi^n(i, j-1)}{\delta y^2} - \Gamma[u^n(i, j) - v^n(i, j)] \right]. \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

El algoritmo que soluciona este sistema de ecuaciones es similiar al que resuelve las ecuaciones sin campo magnético, algoritmo (2), ya que sólo es un valor constante añadido dentro de las ecuaciones.

### 3.3 Sistema en coordenadas polares

#### 3.3.1 Solución sin campo magnético

Para el desarrollo del sistema de ecuaciones del modelo de plasmas fríos en coordenadas polares utilizamos los productos vectoriales del Apéndice A y la Figura 3.3. Para este desarrollo consideramos la ausencia del campo magnético, es decir, las ecuaciones (3.0.12), (3.0.13), (3.0.14), (3.0.15) con  $B_z = 0$ .

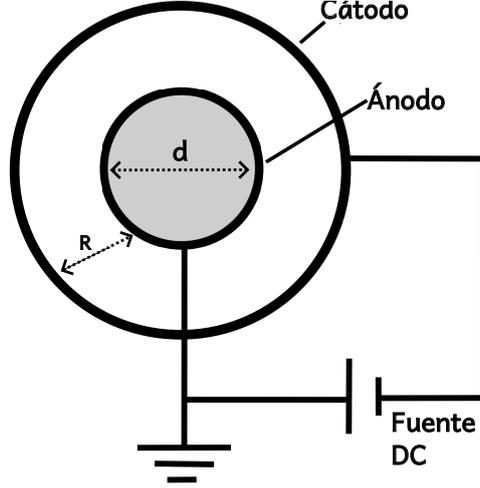


Figura 3.3: Esquema experimental de la descarga de corriente directa en cilindros concéntricos.

Las componentes del campo eléctrico son radial y azimutal

$$\vec{E} = (E_r, E_\theta).$$

Considerando el operador gradiente y laplaciano en coordenadas cilíndricas desarrollamos la ecuación de transporte de electrones

$$\xi \frac{\partial n_e}{\partial t} - P_e \left[ E_r \frac{\partial n_e}{\partial r} + \frac{E_\theta}{r} \frac{\partial n_e}{\partial \theta} \right] = \frac{\partial^2 n_e}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial n_e}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 n_e}{\partial \theta^2} - P_e n_e \Gamma(n_e - n_i) + D_a n_e, \quad (3.3.1)$$

y para el transporte de iones, potencial y campo eléctrico

$$\xi \beta \frac{\partial n_i}{\partial t} + P_i \left[ E_r \frac{\partial n_i}{\partial r} + \frac{E_\theta}{r} \frac{\partial n_i}{\partial \theta} \right] = \frac{\partial^2 n_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial n_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 n_i}{\partial \theta^2} + P_i n_i \Gamma(n_e - n_i) + \beta D_a n_e, \quad (3.3.2)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \Gamma(n_e - n_i), \quad (3.3.3)$$

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (3.3.4)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}.$$

Estas ecuaciones son discretizadas considerando que  $i$  es la variación en el ángulo  $\theta$  y  $j$  es la variación en  $r$ . Posteriormente se resuelven con la metodología Gauss-Seidel construyendo un programa análogo al bidimensional en el lenguaje de programación Fortran, algoritmo (2). Las condiciones de frontera que usamos para esta geometría, independientemente si es sin campo magnético o no, son periódicas

$$\begin{aligned}
 u_{0,j} &= u_{imax-1,j}, & v_{0,j} &= v_{imax-1,j}, \\
 u_{imax,j} &= u_{1,j}, & v_{1,j} &= v_{imax,j}, \\
 v_{imax+1,j} &= v_{2,j}, \\
 P_{0,j} &= P_{1,j}, & P_{imax+1,j} &= P_{imax,j},
 \end{aligned}$$

frontera superior

$$u_{i,jmax} = 0, \quad u_{i,jmax+1} = 0, \quad P_{i,jmax+1} = -1,$$

frontera inferior

$$v_{i,0} = 0, \quad u_{i,0} = 0, \quad P_{i,0} = 0,$$

presentadas en su forma discreta, que es como se escriben en el programa. Se pueden consultar con detalle en [17, pg. 30-32].

### 3.3.2 Solución con campo magnético

En este apartado desarrollamos el modelo de plasmas fríos en coordenadas polares interactuando con campo magnético. Para su desarrollo consideraremos las ecuaciones (3.0.12)-(3.0.13), las cuales hay que escribirlas en términos de sus componentes y productos vectoriales correspondientes, usando el apéndice A. Iniciamos desarrollando la ecuación del transporte de iones contemplando

$$\vec{E} = (E_r, E_\theta, 0), \quad \vec{V}_i = (V_r, V_\theta, 0), \quad \vec{B} = (0, 0, B_z),$$

donde  $B_z$  es un valor constante.

$$\begin{aligned}
 \xi\beta \frac{\partial n_i}{\partial t} + P_i \left[ E_r \frac{\partial n_i}{\partial r} + \frac{E_\theta}{r} \frac{\partial n_i}{\partial \theta} \right] &= \frac{\partial^2 n_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial n_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 n_i}{\partial \theta^2} + P_i n_i \Gamma(n_e - n_i) + \beta D_a n_e \\
 -C_i n_i \frac{B_z}{r} \left[ \frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] + C_i n_i \left[ \frac{V_r}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} - V_\theta \frac{\partial B_z}{\partial r} \right] &- C_i \left[ V_\theta B_z \frac{\partial n_i}{\partial r} - \frac{V_r B_z}{r} \frac{\partial n_i}{\partial \theta} \right],
 \end{aligned}$$

reagrupando

$$\begin{aligned}
 \beta\xi \frac{\partial n_i}{\partial t} + P_i E_r \frac{\partial n_i}{\partial r} - \frac{\partial^2 n_i}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial n_i}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[ C_i n_i V_\theta B_z \right] + \frac{C_i B_z n_i V_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ C_i n_i V_r B_z \right] \\
 + \frac{P_i E_\theta}{r} \frac{\partial n_i}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 n_i}{\partial \theta^2} = P_i n_i \Gamma(n_e - n_i) + \beta D_a n_e.
 \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Usamos la técnica de las secciones previas para obtener una expresión que no dependa de las velocidades de los iones y obtenemos

$$\begin{aligned}
 \beta\xi \frac{\partial n_i}{\partial t} + P_i E_r \frac{\partial n_i}{\partial r} - \frac{\partial^2 n_i}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial n_i}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{C_i B_z}{1 + (C_i B_z)^2} \left[ n_i P_i (E_\theta - C_i B_z E_r) + C_i B_z \frac{\partial n_i}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial n_i}{\partial \theta} \right] \right\} \\
 + \frac{C_i B_z}{r} \left\{ \frac{1}{1 + (C_i B_z)^2} \left[ n_i P_i (E_\theta - C_i B_z E_r) - \frac{1}{r} \frac{\partial n_i}{\partial \theta} + C_i B_z \frac{\partial n_i}{\partial r} \right] \right\} \\
 - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{C_i B_z}{1 + (C_i B_z)^2} \left[ n_i P_i (E_r + C_i B_z E_\theta) - \frac{\partial n_i}{\partial r} - \frac{C_i B_z}{r} \frac{\partial n_i}{\partial \theta} \right] \right\} \\
 + \frac{P_i E_\theta}{r} \frac{\partial n_i}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 n_i}{\partial \theta^2} = P_i n_i \Gamma(n_e - n_i) + \beta D_a n_e.
 \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Esta es la expresión que utilizaremos para programar y conocer el comportamiento de los iones en esta geometría. Hacemos un proceso similar para la ecuación de transporte de electrones,

dando así

$$\begin{aligned}
 \xi \frac{\partial n_e}{\partial t} - P_e E_r \frac{\partial n_e}{\partial r} - \frac{\partial^2 n_e}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial n_e}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{C_e B_z}{1 + (C_e B_z)^2} \left[ -n_e P_e (E_\theta + C_e B_z E_r) - \frac{1}{r} \frac{\partial n_e}{\partial \theta} - C_e B_z \frac{\partial n_e}{\partial r} \right] \right\} \\
 - \frac{C_e B_z}{r} \left\{ \frac{1}{1 + (C_e B_z)^2} \left[ -n_e P_e (E_\theta + C_e B_z E_r) - \frac{1}{r} \frac{\partial n_e}{\partial \theta} - C_e B_z \frac{\partial n_e}{\partial r} \right] \right\} \\
 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{C_e B_z}{1 + (C_e B_z)^2} \left[ n_e P_e (C_e B_z E_\theta - E_r) - \frac{\partial n_e}{\partial r} + \frac{C_e B_z}{r} \frac{\partial n_e}{\partial \theta} \right] \right\} \\
 - \frac{P_e E_\theta}{r} \frac{\partial n_e}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 n_e}{\partial \theta^2} = -P_e n_e \Gamma(n_e - n_i) + D_a n_e. \tag{3.3.7}
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones del potencial y campo eléctrico no sufren cambios al agregar el campo magnético

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \Gamma(n_e - n_i), \tag{3.3.8}$$

$$\begin{aligned}
 E_r &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \\
 E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}. \tag{3.3.9}
 \end{aligned}$$

Omitimos el proceso de discretización y la escritura del programa, que en esencia es el mismo que en la geometría cartesiana. Además, se observa que en extensión estas ecuaciones poseen 12 términos más que la versión sin campo magnético, pero su efecto está acoplado al valor del campo magnético, el cual solo puede variar entre  $[0,1]$  debido a la adimensionalización.



# Capítulo 4

## Resultados

### 4.1 Electrodoos paralelos

#### 4.1.1 Solución analítica unidimensional

En esta Sección se presentan los resultados obtenidos de la Subsección 3.1.1 al resolver las ecuaciones y sus respectivas ecuaciones de frontera. Para hacer una comparación correcta entre la solución analítica y numérica hemos modificado las condiciones de frontera de las densidades de partículas

$$n_e(0) = 0, \quad n_e(1) = 0, \quad n_i(0) = 0, \quad n_i(1) = 0, \quad (4.1.1)$$

donde 0 es el ánodo y 1 el cátodo. Las ecuaciones fueron resueltas en el régimen lineal, es decir, los parámetros adimensionales  $D_a$ ,  $\beta$ ,  $\Gamma$ ,  $P_e$ ,  $P_i$ ,  $\gamma$ , toman valores menores a uno, lo que hace que los términos no lineales de las ecuaciones se vuelvan despreciables.

$$D_a = 3.3 \times 10^{-4}, \quad \beta = 0.01, \quad \Gamma = 10^{-2}, \quad P_e = 10^{-2}, \quad P_i = 1, \quad \gamma = 10^{-2}. \quad (4.1.2)$$

Estos valores fueron tomados del artículo [15], donde indica que al estar en el intervalo de 0 a 1 consideramos estar en un régimen lineal. En las Figuras 4.1a - 4.1b tenemos las distribuciones de las densidades de electrones e iones en una dimensión. En general se observa que tienen una distribución tipo campana, es decir, el máximo de densidad es en el centro y cae naturalmente a cero en las fronteras por las condiciones impuestas. La diferencia que observamos es que hay dos órdenes de magnitud de diferencia entre ambas distribuciones; los iones se han difundido más rápido que los electrones porque la densidad de iones en el espacio es menor que la de los electrones. Por otro lado, es importante tener en consideración que esta solución fue hecha en el estado estacionario. De la Figura 4.1c tomando en cuenta la ecuación (3.1.4), sabemos que la diferencia de potencial es la que genera un campo eléctrico, sin embargo, el potencial eléctrico también se ve afectado por las densidades de iones y electrones, como se ve en la ecuación (3.1.3) y en consecuencia también el campo eléctrico. El potencial eléctrico respeta las condiciones de frontera y decae linealmente hasta el ánodo, consecuencia del régimen lineal. Aparentemente el campo eléctrico es constante en el espacio, pero con una escala más fina (ver Figura 4.1d) observamos que en las fronteras tiene un valor distinto; es más intenso en el ánodo que en el cátodo. Que no tenga un valor constante en la distribución interelectródica nos habla de que hay una ligera concentración de carga en las paredes, ya sea positiva o negativa, y se generan campos eléctricos locales.

Puesto que las ecuaciones a resolver se convirtieron en un conjunto de ecuaciones diferenciales desacopladas no lineales fueron resueltas en *Mathematica 12* con el comando DSolve que soluciona ecuaciones diferencias ordinarias y parciales, de la forma

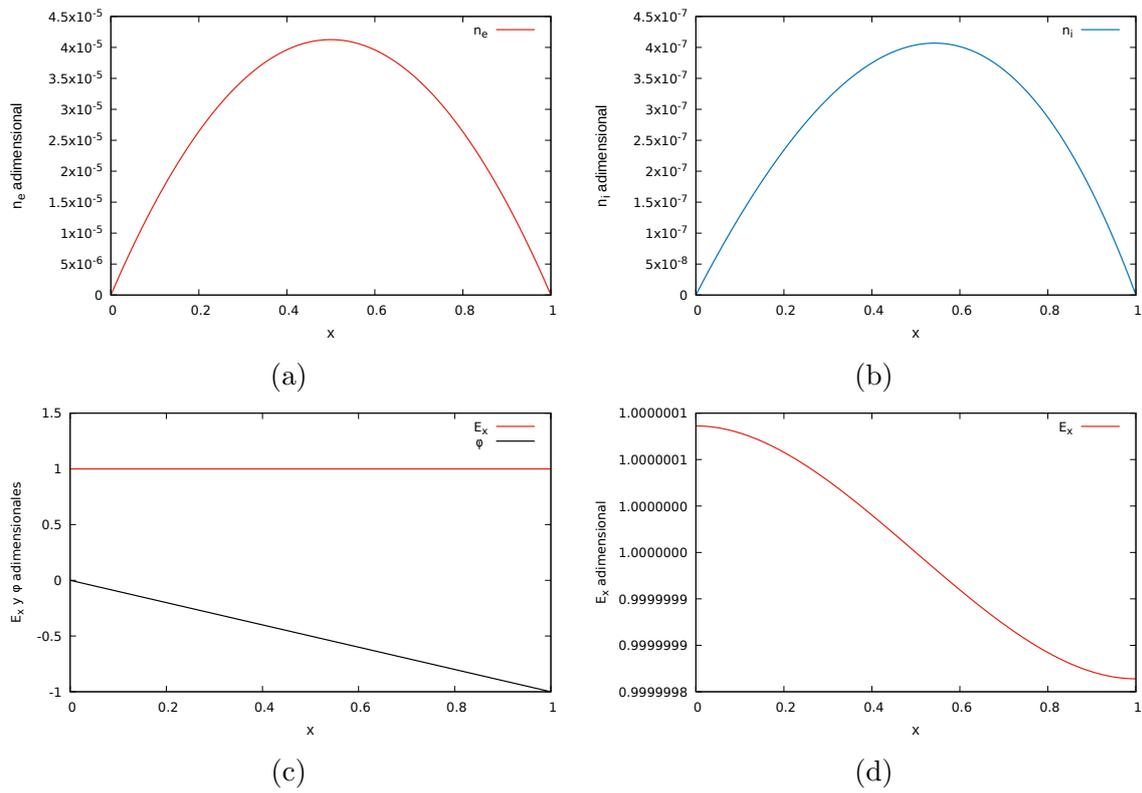


Figura 4.1: Gráficas de la solución analítica a las ecuaciones de plasmas fríos en una dimensión. a) Distribución de la densidad de electrones. b) Distribución de la densidad de iones. c) Distribución del potencial y campo eléctrico. d) Campo eléctrico con una escala más fina.

$$\text{DSolve} [\{ \text{equation}, f[a] == b \}, f[x], x],$$

donde se expresa que  $f[x]$  es función de  $x$ . Considerando lo anterior, se exportaron los datos para realizar las gráficas de las soluciones en *Gnuplot*. Las soluciones obtenidas pueden consultarse en el Apéndice B.1.

### 4.1.2 Solución numérica unidimensional

Se pretende hacer una comparación entre la solución numérica y la analítica, por ello se han usado los mismo valores de los parámetros adimensionales, agregando el valor  $\xi = 1$ , pues en este caso sí consideramos el término temporal; el parámetro  $\xi$  es el tiempo característico de difusión de los electrones, si  $\xi < 1$  los electrones se difunden rápido, lo que hace que la distribución llegue más rápido al estado estacionario, donde la mayoría de las partículas estarían ionizadas, mientras que si  $\xi > 1$  la difusión es lenta y tarda más en llegar al estado estacionario. El valor propuesto en [13] es del orden de  $10^2$  el cual hace que la simulación tarde más en llegar al estado estacionario, que en este caso nos interesa, teniendo que aumentar el tiempo de compilación y los recursos de la computadora, por lo cual, hemos decidido utilizar un valor más pequeño ( $\xi = 1$ ) que nos permita encontrarnos también en el estado estacionario. Hemos utilizado las mismas condiciones de frontera que en la solución analítica (4.1.1). En las

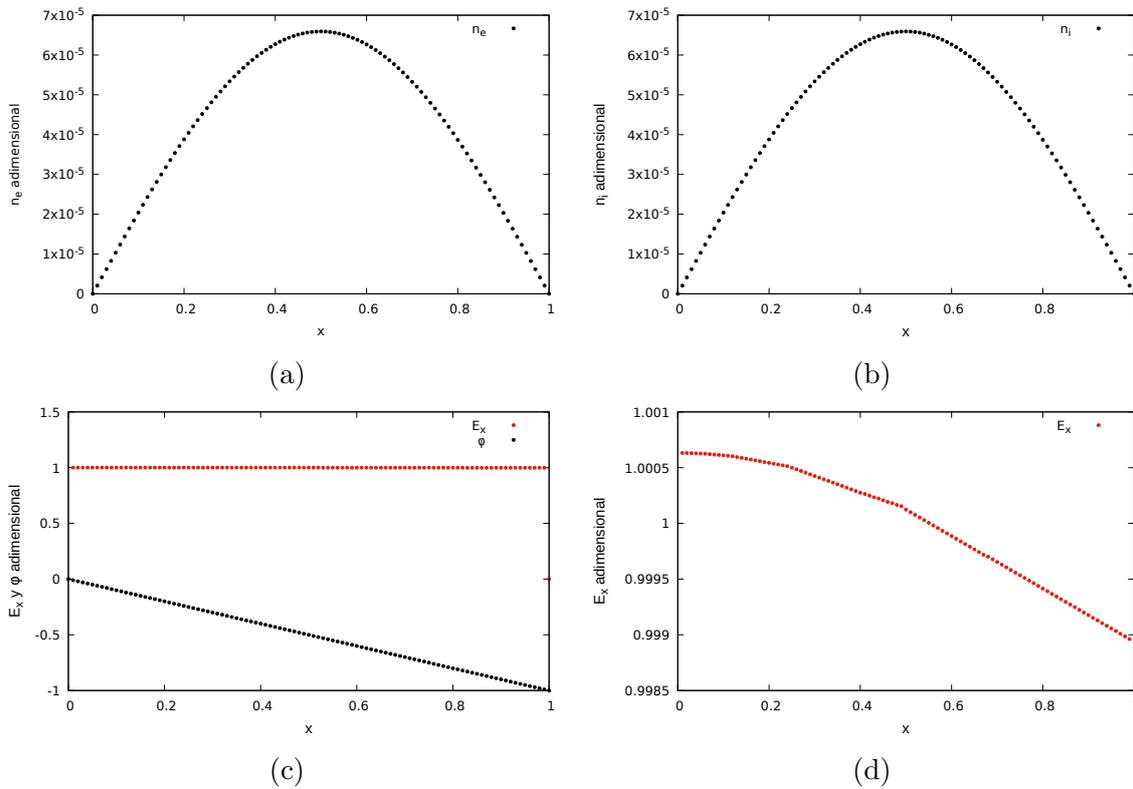


Figura 4.2: Gráficas de la solución numérica a las ecuaciones de plasmas fríos en una dimensión. a) Distribución de la densidad de electrones. b) Distribución de la densidad de iones. c) Distribución del potencial y campo eléctrico. d) Campo eléctrico en una escala más fina.

Figuras 4.2a - 4.2b observamos que la distribución de los electrones y la de los iones es igual y que ambas son cero en las fronteras, presentando su valor máximo en el centro del espacio, de modo que se forma una distribución normal. Podemos decir que el proceso de difusión es mayor que el efecto de arrastre del campo eléctrico en el centro de la distribución. Si queremos observar el efecto de la salida de los electrones del cátodo es necesario la implementación de la condición de frontera tipo Robin. Aunque la simulación puede obtenerse en el estado transitorio, en este caso las gráficas se obtuvieron en el estado estacionario para comparar con la solución analítica. Es por ello que el orden de magnitud de la densidad de partículas es similar  $10^{-5}$  a la solución anterior. En la Figura 4.2c se muestra la distribución del potencial y campo eléctrico generados. El valor del potencial eléctrico decae linealmente hasta el ánodo, mientras que aparentemente el campo eléctrico es uniforme, sin embargo, al cambiar la escala en la Figura 4.2d observamos que su valor es diferente en las paredes, lo cual indica una

concentración de carga y campos eléctricos locales.

### 4.1.3 Comparación solución analítica y numérica unidimensional

A continuación se presenta la comparación entre las soluciones analítica y numérica del modelo de plasmas fríos unidimensional que se encuentran en 4.1.1 y 4.1.2, respectivamente. En general, con las condiciones de frontera especificadas en 4.1.1, tenemos distribuciones bastante similares entre sí. En la Figura 4.3a y 4.3c observamos que la distribución de la densidad de electrones por ambas soluciones es la misma cualitativamente, incluso se encuentran en el mismo orden ( $10^{-5}$ ), tratándose de una distribución normal que indica que la mayor concentración de electrones se encuentra en el centro de la geometría. En cuanto a los iones también presentan una distribución normal, sin embargo, cualitativamente se observa que el valor máximo en la solución analítica 4.3a está ligeramente desplazado hacia la derecha, mientras que en la solución numérica 4.3d el valor máximo sí está centrado. La solución analítica es dos órdenes de magnitud menor que la solución numérica, lo cual puede deberse a que en la solución numérica se eligió un tiempo  $t$  arbitrario para elegir el estado estacionario, que aunque fue verificado, pudo haberse elegido más grande, pero con un tiempo de compilación mayor. En cuanto al potencial eléctrico su comportamiento de decaimiento lineal es el mismo

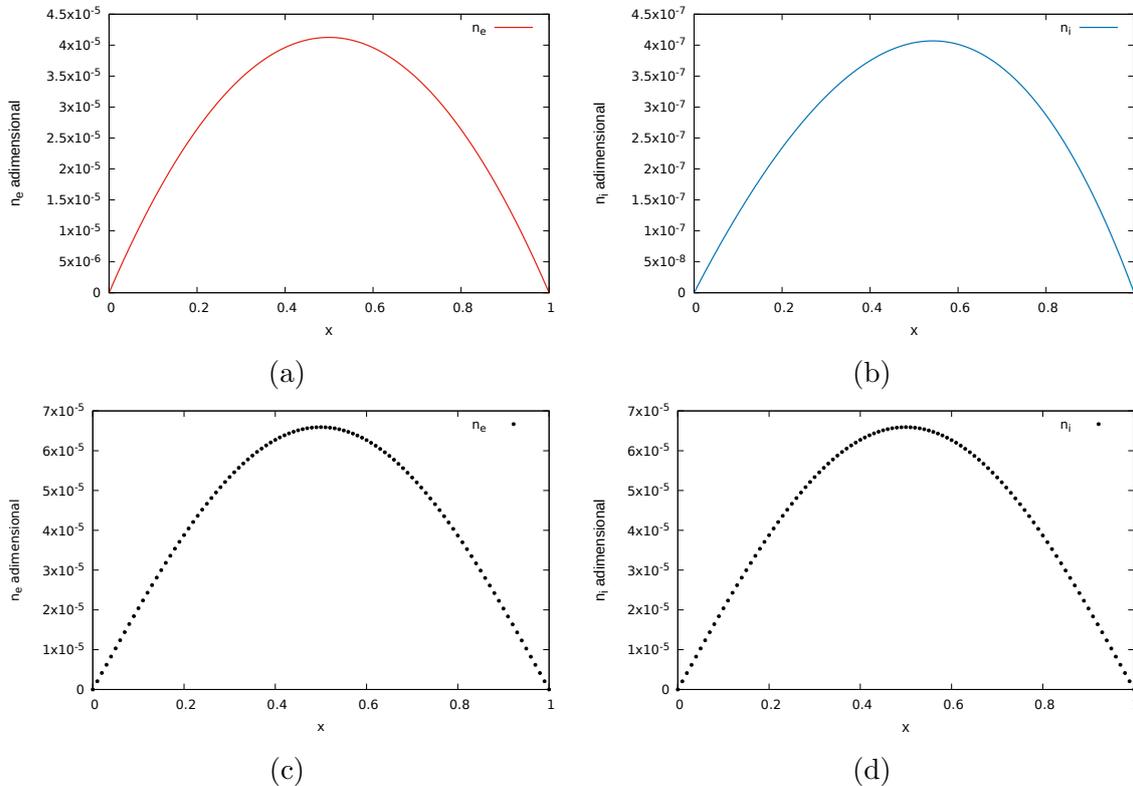


Figura 4.3: Comparación de las distribuciones de partículas obtenidas por solución analítica y numérica. a) y b) son las distribuciones de la densidad de electrones e iones por la solución analítica; c) y d) son las distribuciones de la densidad de electrones e iones por la solución numérica.

en ambas soluciones, y el campo eléctrico también. De modo que podemos decir que las soluciones concuerdan cualitativamente.

#### 4.1.4 Solución numérica bidimensional

En esta Sección se presentan los resultados obtenidos de la simulación numérica de plasmas fríos sin campo magnético en la geometría cartesiana de la Sección 3.2. Considerando el esquema de la Figura 1.2, las gráficas obtenidas se presentan en la Figura 4.4 al tiempo  $t = 0.04$  en el estado transitorio. Los parámetros utilizados son

$$\beta = 0.6, \quad \xi = 1.0, \quad \Gamma = 0.1, \quad P_e = 0.01, \quad P_i = 1.0, \quad D_a = 3.3 \times 10^{-4},$$

que corresponden al caso lineal. Estos valores elegidos fueron tomados como referencia del artículo [15], donde el único valor que cambiamos fue  $\beta$ , pues si se mantenía el valor fijo el programa no convergía, y si se elegían valores más grandes (del orden de  $10^3$ ) el programa convergía demasiado rápido, llevando al estado estacionario donde las partículas se han distribuido por todo el espacio. Es por ello que el valor elegido nos permite visualizar el mapa de distribuciones en el estado transitorio. Los parámetros usados nos sitúan en el régimen lineal. Las condiciones de frontera utilizadas son

Pared izquierda

$$n_e = 0, \quad n_i = 0, \quad \varphi = 0.$$

Pared derecha

$$n_e = 0, \quad n_i = 0, \quad \varphi = -1.$$

Pared superior

$$n_e = 0, \quad n_i = 0, \quad \frac{d\varphi}{dy} = 0.$$

Pared inferior

$$n_e = 0, \quad n_i = 0, \quad \frac{d\varphi}{dy} = 0.$$

Podemos observar que el comportamiento de la densidad de electrones e iones es tipo campana pero en dos dimensiones, donde la mayor concentración se encuentra en el centro de la geometría. Notamos que la línea de contorno que delimita la concentración más alta de los iones (4.4c) tiene un radio mayor que en el caso de los electrones, aunque en el mapa de distribución de los electrones el máximo valor de la densidad (0.4) es el doble que el de los iones (0.2), pero con un rango de distribución menor. Por otro lado podemos decir que el potencial eléctrico decae linealmente, es decir, lo que tenemos no es más una línea, sino un mapa que también muestra decaimiento lineal, respetando que la pared izquierda es el ánodo y la derecha el cátodo. La magnitud del campo eléctrico es cualitativamente uniforme, que se dirige del ánodo al cátodo, un gradiente negativo, como lo indica la ecuación que lo define (3.0.15). De modo que si el potencial eléctrico es uniforme también lo será la distribución del campo eléctrico, por el efecto acoplado entre estos.

Por otra parte, en el caso no lineal, cuando variamos los parámetros a  $P_e = 6.01$ ,  $\Gamma = 15.1$ ,  $\beta = 1.5$ , y  $\xi = 0.6$  obtenemos las gráficas 4.5. La modificación de  $\beta$  y  $\xi$  fue para disminuir el tiempo de difusión de las partículas y estar en el estado transitorio, además que esta configuración permite que se observe más el efecto de  $P_e$ . Antes de hablar del efecto acoplado que se observa entre el campo y potencial eléctrico, recordemos que las variables  $P_e$  y  $\Gamma$  cuantifican qué tanto son afectados los electrones por el efecto de arrastre del campo eléctrico y qué tanto es el efecto acoplado de la diferencia de densidades en el potencial eléctrico, que se puede ver en la ecuación (3.0.14), respectivamente. Al variar el valor del Péclet a uno no lineal observamos que el efecto de arrastre del campo eléctrico sobre los electrones es mayor que antes, atrayéndolos hacia la placa positiva, es decir, al ánodo, tal y como es la naturaleza de los electrones de dirigirse hacia zonas de carga positiva. La densidad de iones no está siendo afectada porque no se varió  $P_i$ . En este caso podemos observar que el potencial eléctrico ya no

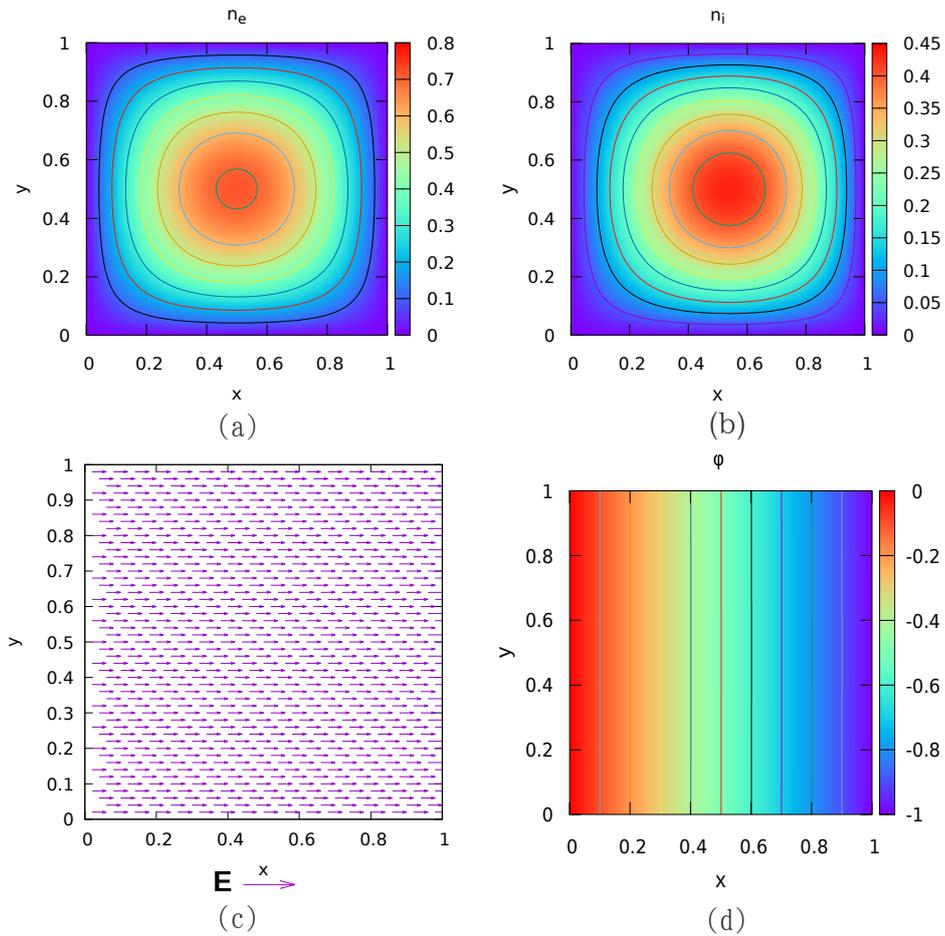


Figura 4.4: Gráficas obtenidas de la solución numérica de plasmas fríos en el régimen lineal. a) y b) son el mapa de distribuciones de la densidad de electrones e iones, respectivamente. c) Campo eléctrico. d) Mapa de distribución del potencial eléctrico.

decae linealmente; las líneas equipotenciales se han deformado, las zonas con potencial eléctrico cercano a cero aumentaron su distribución espacialmente, de modo que las zonas cercanas al potencial eléctrico negativo se redujeron, lo cual se puede comprender mejor al observar el campo eléctrico (Figura 4.5c); en la zona cercana al ánodo la magnitud de los vectores es menor que en el cátodo, lo cual nos indica que en esa zona la magnitud del campo eléctrico es menor, ya que en la gráfica del potencial eléctrico en esa misma zona tiene un potencial cercano a cero, así pues vemos el efecto acoplado entre estas dos variables. Los parámetros adimensionales usados nos posicionan en un régimen no-lineal, pues en las ecuaciones (3.2.1) y (3.2.2) los valores de  $P_e$ ,  $P_i$ , y  $\Gamma$  se encuentran acompañando los términos no lineales, de modo que al incrementar su valor aumenta la no linealidad de las ecuaciones.

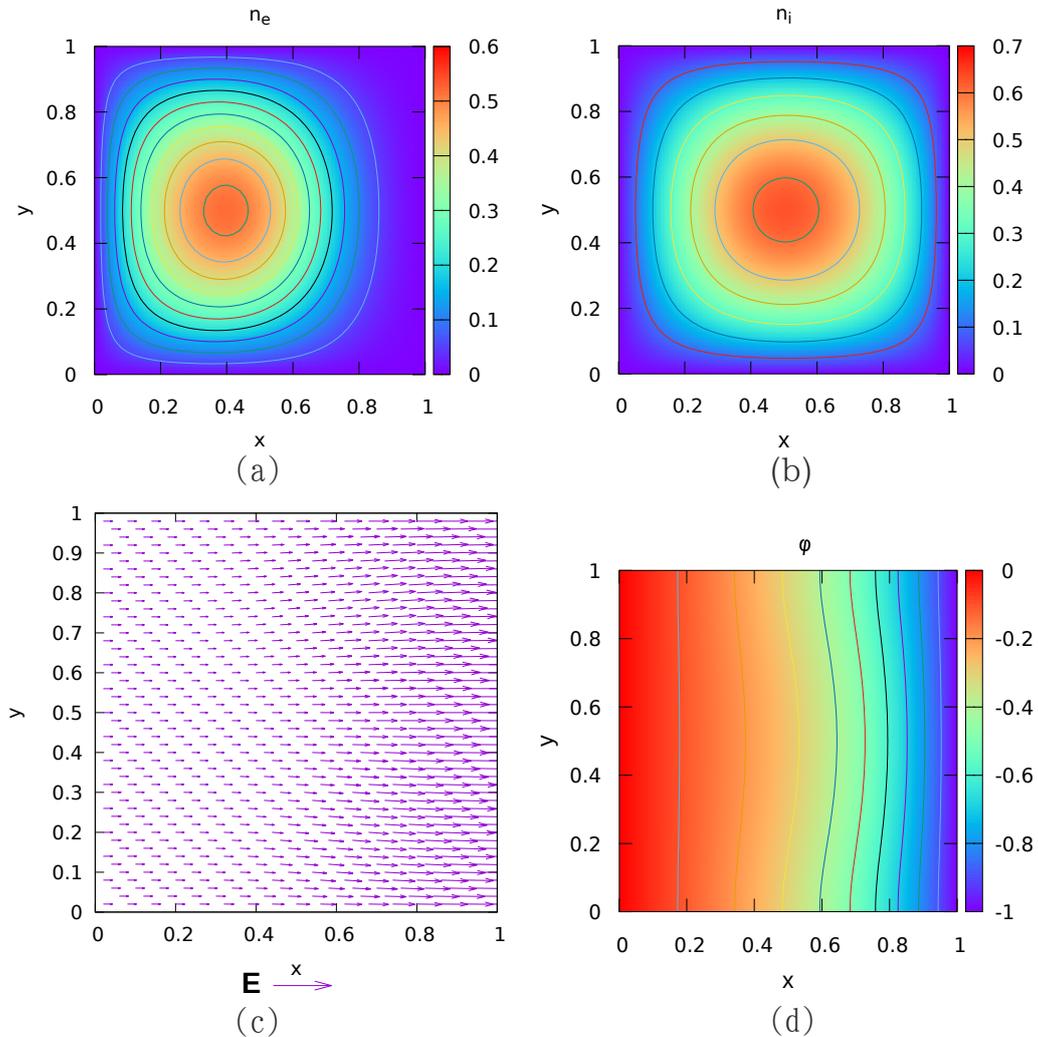


Figura 4.5: Gráficas obtenidas numéricamente de la solución del modelo de plasmas fríos en el régimen no-lineal, donde se usaron los valores  $P_e = 6.01$   $\Gamma = 15.1$   $\beta = 1.5$ , y  $\xi = 0.6$ . a) y b) son el mapa de distribuciones de la densidad de electrones e iones, respectivamente. c) Campo eléctrico. d) Mapa de distribución del potencial eléctrico.

### 4.1.5 Solución con campo magnético

El desarrollo de la simulación con campo magnético se hizo considerando el esquema de la Figura 3.2, donde  $\vec{B}$  es constante y está en la dirección  $z$  (saliendo del plano  $x - y$ ), la cual consideramos positiva. La interacción del campo magnético con cargas eléctricas que están en movimiento da lugar a la conocida Fuerza de Lorentz [12], la cual está adaptada al modelo de plasmas fríos en las ecuaciones (3.0.5) y (3.0.6). Las condiciones de frontera fueron las mismas que en la solución sin campo magnético en la Subsección 4.1.4. Los resultados de la simulación se encuentran en la Figura 4.6 al tiempo  $t = 0.6$  en el estado transitorio, donde los parámetros utilizados son

$$B_z = 1.0, \quad \beta = 1.2, \quad \Gamma = 0.8, \quad P_e = 5.5, \quad P_i = 6.5, \quad D_a = 3.3 \times 10^{-4}, \quad C_i = 1.0, \quad C_e = 1.0, \quad (4.1.3)$$

estos valores son los que le permitieron al programa converger y observar el efecto del campo magnético; no están basados en parámetros reales ni obtenidos de las fuentes referenciadas. Los valores de  $P_e$  y  $P_i$  nos posicionan en el régimen no-lineal, pues acompañan los términos no lineales de las ecuaciones (3.2.17) y (3.2.18). Además  $B_z$ ,  $C_i$  y  $C_e$  tienen el valor máximo que pueden tener, que es 1, pues si observamos en estas ecuaciones juntos forman un cociente que en el numerador es su producto y en el denominador es 1 más su producto al cuadrado, y el valor máximo que puede tener este cociente es 0.5, que es cuando cada parámetro vale 1, por esta razón que se han elegido estos valores, dado que este cociente cuantifica la intensidad de los términos asociados al campo magnético. Observamos que las zonas con mayor concentración de la densidad de electrones como de iones (Figuras 4.6a y 4.6b) fueron desplazadas hacia la pared inferior por el efecto de la fuerza de Lorentz, es decir, sí se muestra perturbación en las distribuciones ante la presencia del campo magnético y, de hecho, si hacemos el análisis de la dirección de la fuerza de Lorentz dada por la regla de la mano derecha podemos corroborar tal dirección. También podemos notar que la densidad de electrones se ha desplazado hacia el ánodo y los iones hacia el cátodo, esto es porque los valores usados para  $P_e$  y  $P_i$  no fueron lineales, de modo que el efecto de arrastre del campo eléctrico se intensificó al incrementar estos parámetros. La distribución del potencial eléctrico muestra un decaimiento lineal, aunque las líneas de contorno no son totalmente rectas, sino que presentan una ligera deformación, y esto es porque la distribución de las partículas afecta al potencial. En cuanto al campo eléctrico posee una distribución uniforme, y cualitativamente su magnitud se mantiene constante en todo el espacio, como en el régimen lineal sin campo magnético.

Al polarizar solo el campo magnético,  $B_z = -1$ , se observa en la Figura 4.7 que se invierten las direcciones de las distribuciones de las partículas, ahora tanto iones como los electrones fueron desplazados hacia la pared superior, tal y como lo indica la regla de la mano derecha; de modo que podemos decir que la simulación respeta las leyes de la física y arroja resultados que podemos predecir fácilmente. Debido a que no se cambiaron los valores de  $P_e$  ni  $P_i$  el efecto de arrastre del campo eléctrico es mayor que la difusión en las partículas. Observamos que las gráficas del campo y potencial eléctrico aparentemente no cambiaron ante la inversión del campo magnético respecto a la Figura 4.6.

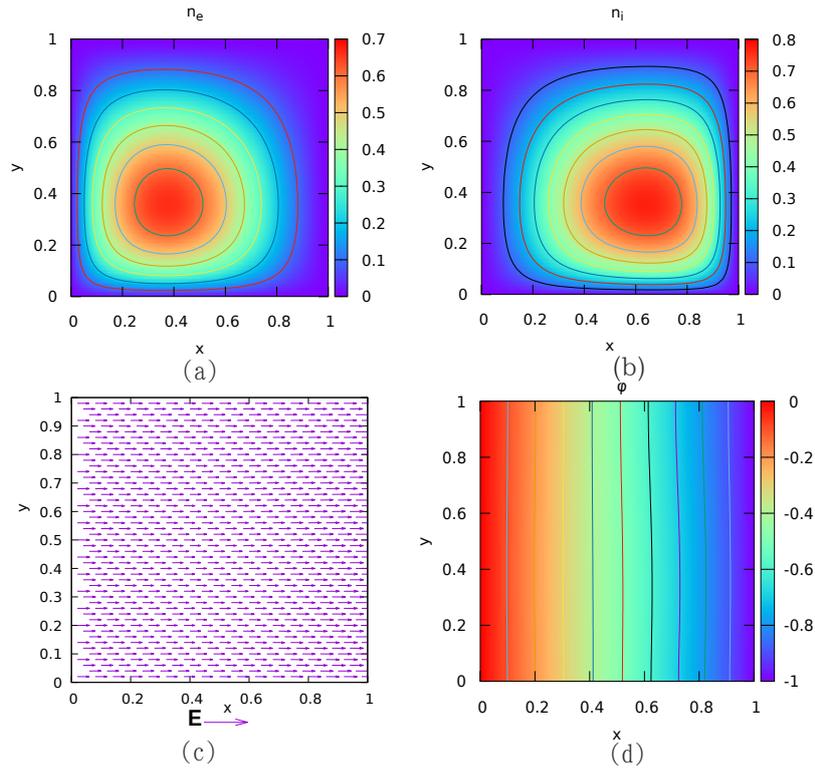


Figura 4.6: Gráficas obtenidas con campo magnético constante  $B_z = 1$ . a) Mapa de distribución de la densidad de electrones. b) Mapa de distribución de la densidad de iones. c) Campo eléctrico. d) Mapa de contornos del potencial eléctrico.

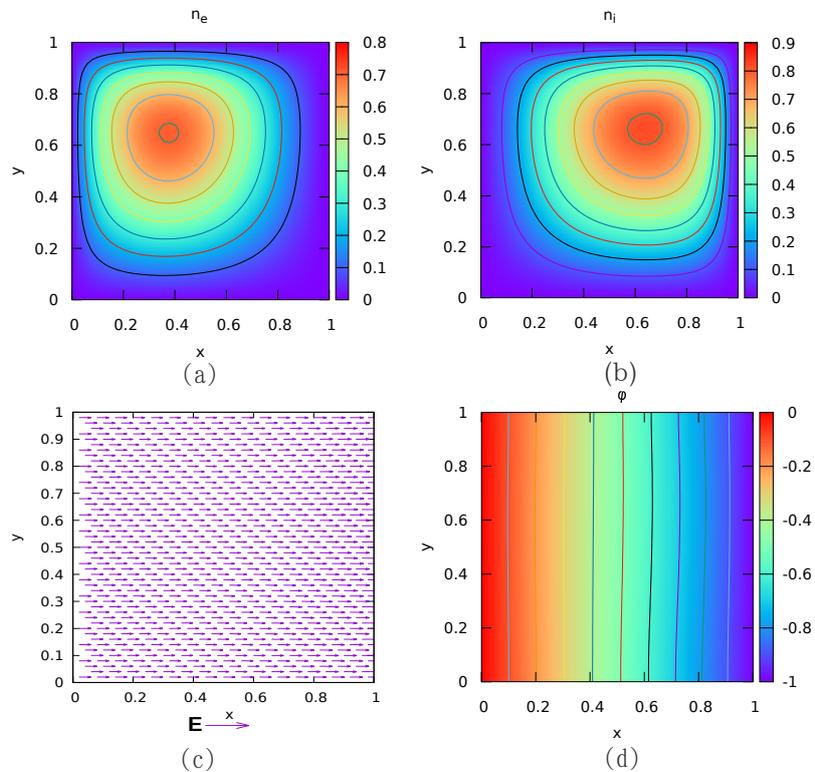


Figura 4.7: Polarización del campo magnético  $B_z = -1$ . a) Mapa de distribución de la densidad de electrones, b) Mapa de distribución de la densidad de iones. c) Campo eléctrico. d) es el mapa de contornos del potencial eléctrico.

## 4.2 Solución numérica en coordenadas polares

A continuación se presentan los resultados de la Sección 3.3.1. Tomemos como referencia el diagrama de la Figura 3.3, el cual muestra la configuración de los electrodos como cilindros concéntricos, de modo que el ánodo es el electrodo interno y el cátodo el externo. Los resultados fueron obtenidos en el estado transitorio al tiempo  $t=0.04$ . Las condiciones de fronteras están dadas en la Sección 3.3. Los valores de los parámetros adimensionales usados son

$$\beta = 1.5, \xi = 0.6, \Gamma = 0.1, P_e = 0.01, P_i = 1.0, D_a = 3.3 \times 10^{-4}, \quad (4.2.1)$$

en el régimen lineal tomados como referencia del artículo [15] exceptuando el valor de  $\beta$ , pues se cambió para que el programa pudiera converger, que simplemente es aumentar la difusión de los iones en el tiempo. Consideramos estar en el régimen lineal porque los valores de  $P_e$ ,  $P_i$  y  $\Gamma$  son menores a uno, por lo tanto hacen que el efecto de los términos no lineales en las ecuaciones (3.3.1) y (3.3.2) sea ínfimo. En las Figuras 4.8a y 4.8b se observa como se distribuyen las densidades de electrones e iones en una geometría de cilindros concéntricos, donde su máximo se encuentra en el centro, es decir, nuevamente encontramos una distribución tipo campana adaptada a esta geometría. Notamos que la magnitud y la distribución de la densidad de iones es mayor que la de los electrones, y esto se debe a que aumentamos el tiempo de difusión de los iones  $\beta$ , y que el valor de  $P_i$  es más grande que  $P_e$ , lo que quiere decir que el arrastre del campo eléctrico sobre los iones es mayor. Por otro lado, debido a la configuración que hemos elegido del potencial aplicado en los electrodos, el campo eléctrico va desde el electrodo interno al externo, además de que es puramente radial y la magnitud de las líneas de campo son más grandes cercanas al ánodo y van disminuyendo su magnitud conforme se acercan al cátodo. Se eligió esta configuración de electrodos para hacer posteriores comparaciones en el caso magnético con el artículo de Shen Gao [18]. En cuanto al potencial eléctrico (Figura 4.8d) observamos una distribución uniforme, donde las zonas con un potencial cercano a 0 y un potencial cercano a -1 espacialmente tienen ancho de 0.2 de radio aproximadamente, y la zona intermedia posee valores negativos porque la magnitud de la densidad de iones es el doble que la de los electrones, lo cual arroja un potencial negativo en la ecuación (3.3.3).

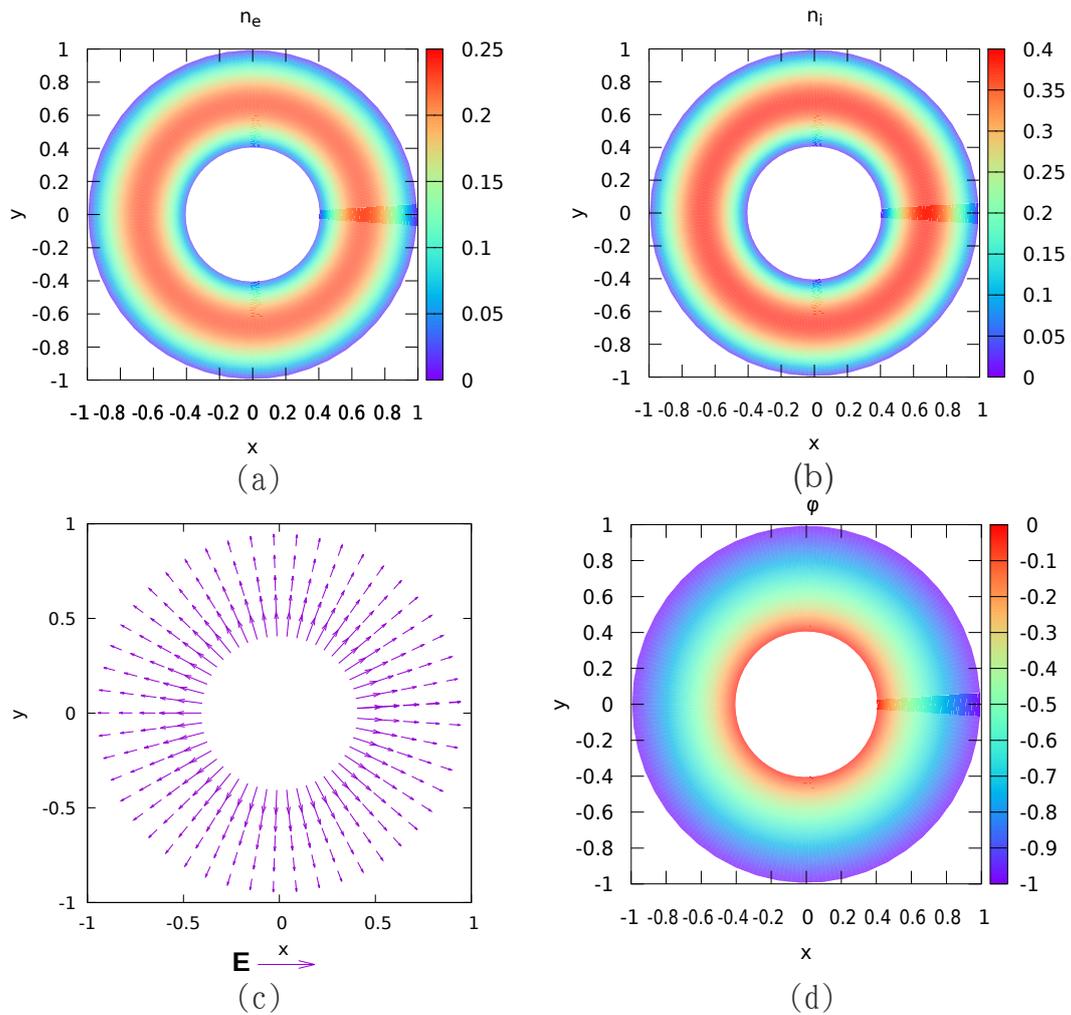


Figura 4.8: Gráficas de solución del modelo de plasmas fríos en coordenadas polares sin campo magnético. a) y b) son los mapas de distribución de las densidades de los electrones e iones, respectivamente. c) Campo eléctrico. d) Mapa de distribución del potencial eléctrico.

### 4.2.1 Solución numérica en coordenadas polares con campo magnético

Interesados en la interacción con campos magnéticos agregamos un campo magnético constante en la dirección  $z$  positiva, que es saliendo del diagrama 4.9. Las condiciones de frontera para

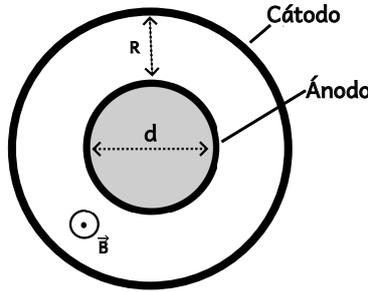


Figura 4.9: Esquema de cilindros concéntricos con campo magnético en la dirección  $z$ .

los electrones, iones y el potencial son las mismas que en la sección 3.3. Los valores de los parámetros usados son

$$\beta = 1.5, \quad \xi = 0.6, \quad \Gamma = 500, \quad P_e = 1.0, \quad P_i = 10.0, \quad D_a = 10.0, \quad B_z = 100, \quad C_e = 0.9, \quad C_i = 0.9, \quad (4.2.2)$$

los cuales no fueron obtenidos de alguna fuente citada en esta tesis, pues con los valores que hemos venido trabajando el programa no convergió. Los valores de  $P_e$ ,  $P_i$ , y  $\Gamma$  nos indican que estamos en un régimen no-lineal porque aumentan el efecto de los términos no lineales de las ecuaciones. Las Figuras 4.10a y 4.10b muestran una distribución anular de las densidades de los electrones e iones; se forman anillos con valores uniformes para varios radios, sin embargo podemos notar que para ambos casos el anillo con mayor concentración de densidad de partículas, ante el valor de un campo magnético aplicado, se encuentra más cerca del cátodo, tal y como en el artículo [18], el cual en su Figura 4 muestra una comparación de la distribución de partículas ante la ausencia y la presencia de un campo magnético. Indica que conforme se incrementa la intensidad del campo magnético aumenta la densidad de partículas, pero si la intensidad del campo es pequeña al electrón no le es posible completar el movimiento de ciclotrón que entra en acción por la fuerza de Lorentz. En cuanto al potencial eléctrico observamos que no está siendo afectado por la distribución anular de las partículas, y el campo eléctrico tiene el mismo comportamiento que en el caso sin campo magnético, donde su magnitud decrece del ánodo al cátodo. Pareciera que solo es radial, pero en los datos exportados observamos que también tiene componente angular del orden  $10^{-2}$ . El valor del campo magnético usado parecería grande en comparación con los demás valores de los parámetros que acompañan en la ecuación, pero en realidad es importante la combinación de los valores  $C_e, C_i$  y  $B_z$  y el cociente que forman en las ecuaciones (3.3.6) y (3.3.7), ya que cuantifica el efecto de los términos del campo magnético, que en este caso el valor del cociente es 0.01, es decir, un efecto del campo magnético muy débil, pero aún así su presencia perturba la distribución de las partículas. Continuando con nuestro análisis, se ha encontrado un valor del campo magnético para el cual hay una inversión del campo eléctrico. Los valores son

$$\beta = 10.0, \quad \xi = 0.6, \quad \Gamma = 100, \quad P_e = 1.0, \quad P_i = 10.0, \quad D_a = 10.0, \quad B_z = 1.0, \quad C_e = 0.9, \quad C_i = 0.9, \quad (4.2.3)$$

los cuales nos indican estar en un régimen lineal. La combinación de los valores de  $B_z$ ,  $C_e$  y  $C_i$  en el cociente que cuantifica el efecto del campo magnético en las ecuaciones (3.3.6) y (3.3.7) es 0.5, el cual es el máximo valor que puede tener este cociente. En la Figura 4.11c, antes de  $r=0.5$  encontramos que las líneas de campo eléctrico se han invertido. Por otro lado, en la Figura 4.11d observamos que el valor del potencial eléctrico ha aumentado en el

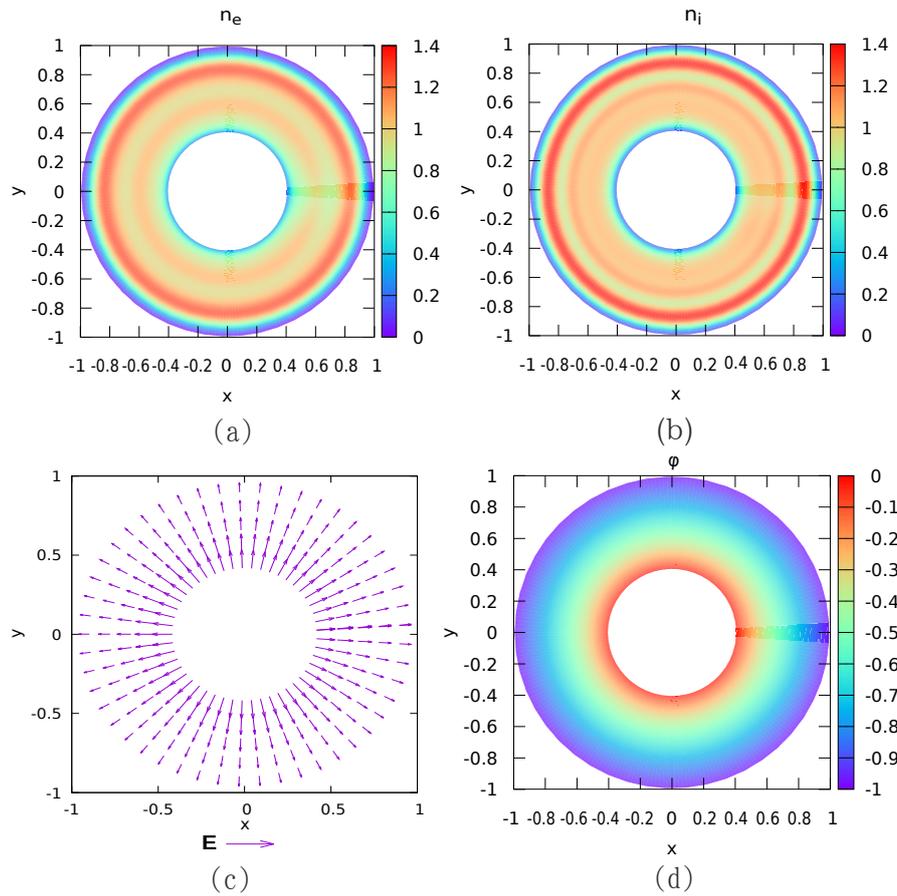


Figura 4.10: Gráficas de solución del modelo de plasmas fríos en coordenadas polares con campo magnético. a) y b) son los mapas de distribución de las densidades de electrones e iones, respectivamente. c) Campo eléctrico. d) Mapa de distribución del potencial eléctrico.

centro de la geometría por encima del valor 0 que tiene el ánodo a 0.6, de modo que esta nueva configuración de diferencia de potencial provoca la inversión del campo eléctrico, pues ahora el ánodo ( $r = 0.4$ ) se ha vuelto negativo con respecto al centro del espacio anular ( $r = 0.6$ ), así que el campo eléctrico va de esta zona positiva cerca del centro del espacio anular hasta el ánodo. Sin embargo, para conocer porqué se ha dispuesto así el potencial debemos observar las distribuciones de las partículas de esta misma Figura. Tenemos casi la misma concentración de iones como de electrones en la misma zona central, aunque si se observa a detalle, es ligeramente mayor la densidad de electrones, por lo cual, en la ecuación de Poisson que relaciona el potencial con la diferencia entre las densidades de partículas (3.3.8), la diferencia es positiva, de modo que hay un aumento de potencial en esta zona.

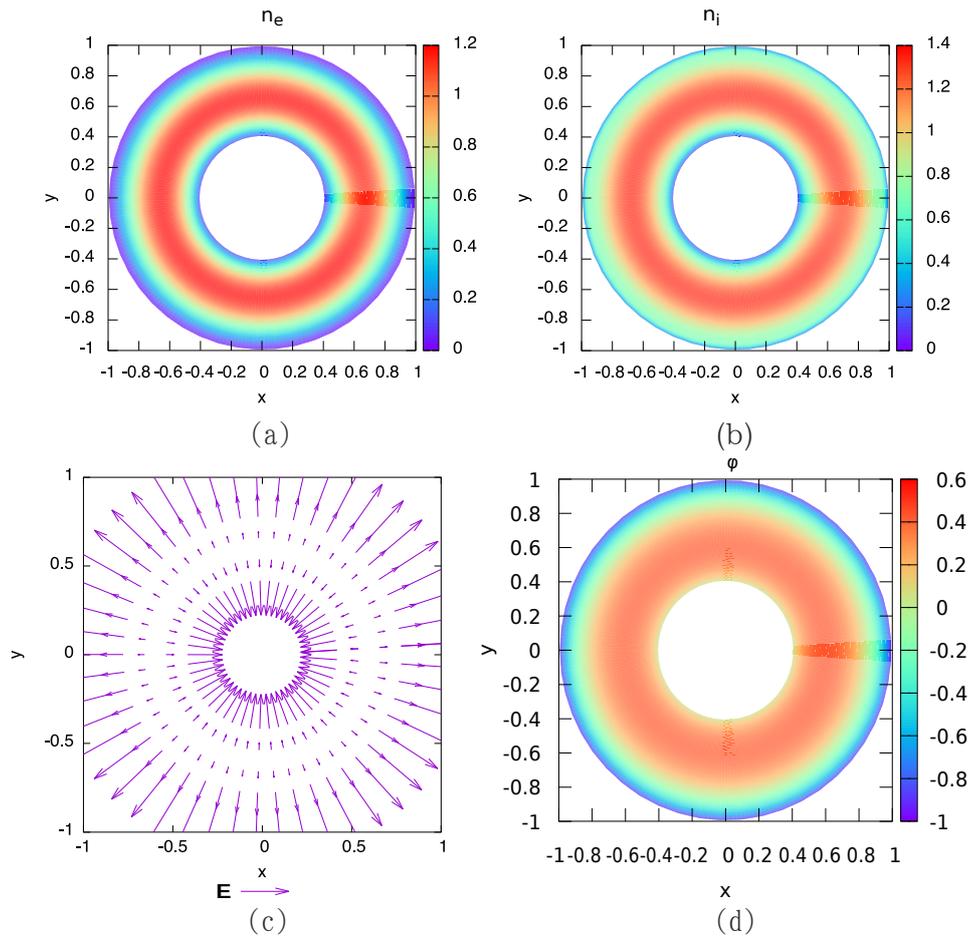


Figura 4.11: Inversión del campo eléctrico en la geometría polar ante la presencia de campo magnético. a) y b) son los mapas de distribución de las densidades de electrones e iones, respectivamente. c) Campo eléctrico y su inversión. d) Mapa de distribución del potencial eléctrico.



# Capítulo 5

## Conclusiones

En esta tesis se presenta un estudio teórico-experimental de los plasmas a baja temperatura, compuestos por electrones, iones y partículas neutras. Estos plasmas son generados en el laboratorio al aplicar una diferencia de potencial en electrodos dentro de una cámara de vacío en la que se suministra un gas, lo cual genera descargas luminiscentes. Estas mismas se realizaron entre electrodos paralelos y esféricos concéntricos, los cuales permitieron observar las distintas capas que el plasma posee, y se notó que al incrementar el voltaje suministrado la intensidad luminosa también lo hace. El modelo teórico que se utilizó considera a los plasmas fríos como un medio continuo.

Primero se resolvió el modelo en una dimensión en la geometría cartesiana. Se solucionó analítica y numéricamente usando el método de expansiones asintóticas y diferencias finitas, respectivamente. Ambas soluciones fueron comparadas cualitativamente bajo las mismas condiciones y parámetros. Posteriormente, el modelo se generalizó a dos dimensiones en coordenadas cartesianas y polares, y se resolvió numéricamente usando el método de diferencias finitas. Además, se agregó el efecto de un campo magnético constante perpendicular al plano. Los resultados teóricos y numéricos muestran que se comparte una distribución gaussiana o normal entre las densidades de los electrones e iones, donde la mayor concentración de estas densidades está en el centro de la geometría. Podemos observarlo tanto en la geometría cartesiana como polar. Al variar los parámetros adimensionales se pudo verificar el significado físico de cada variable en las ecuaciones de transporte: el arrastre del campo eléctrico al modificar los valores de  $P_e$  y  $P_i$ , apreciar más el efecto acoplado entre las densidades de las partículas y el potencial eléctrico a través de la variación de  $\Gamma$ , y la modificación de qué tan rápido nuestras distribuciones podían llegar al estado estacionario por medio de  $\xi$  y  $\beta$ . Al incluir el término del campo magnético, se modificó la distribución de las densidades de partículas por acción de la fuerza de Lorentz. Adicionalmente, en la geometría polar, el efecto del campo magnético invirtió la distribución del campo eléctrico, lo que se debe a concentraciones de carga puntuales que generaron un aumento de potencial eléctrico.

El único modelo experimental que se hizo interaccionar con un imán fue el modelo esférico, pero este no tuvo la suficiente intensidad para perturbar la distribución. El siguiente paso en los experimentos sería implementar técnicas de medición en el plasma para así analizarlo desde adentro y contrastar con la teoría, así como agregar un suministrador de gas y obtener descargas en diferentes gases monoatómicos, y establecer parámetros como: el voltaje en que aparece la descarga, la presión y la cantidad de gas inicial. En ninguno de los experimentos se midió la presión alcanzada ni mediciones internas del plasma, y solo era utilizado el resto del aire que quedaba después de encender la bomba de vacío y el que entraba por las posibles aberturas. Todos estos aspectos pueden ser considerados para mejoras a futuro para un estudio cuantitativo. En cuanto a una mejora en la teoría se puede trabajar en no solo incluir un campo magnético constante, sino la distribución de un campo magnético real, lo cual se apreciaría

mejor en un modelo tridimensional, además de construir un modelo matemático que incluya los términos relacionados a la administración de gas, la emisión de electrones secundarios y simulaciones que nos permitan aplicar las condiciones de frontera e iniciales que se tienen en un experimento real.

Sin duda el área de los plasmas es extensa, y experimentar con ellos no es una tarea fácil, pero este trabajo ha sido el primer acercamiento a comprenderlos y trabajar con ellos, para dar pie a trabajos más completos. Hemos cumplido con el objetivo de estudiar teóricamente la dinámica de los plasmas en la geometría de electrodos paralelos y cilindros concéntricos, ambos interactuando con un campo magnético constante. Observamos que en la distribución de placas paralelas es fácil intuir hacia donde serán desplazadas las concentraciones de partículas ante la presencia del campo magnético, por el contrario, en el caso de cilindros concéntricos, lo que se obtiene son concentraciones en forma de anillos e inversiones del campo eléctrico; todo esto es útil para las personas que desean desarrollar descargas luminiscentes en electrodos de placas paralelas o de cilindros concéntricos a la hora de interactuar con campos magnéticos, pues tomando en cuenta lo anterior, se pueden aprovechar las distribuciones según sea la necesidad o el propósito. En el caso experimental, donde solo la configuración de electrodos esféricos concéntricos se hizo interactuar con un imán de ferrita, observamos la formación de un *jett* de plasma, que básicamente es un chorro de plasma, es decir, las densidades de las partículas eran atraídas por el imán; lo cual ya es aprovechado en la industria, para el grabado y corte de superficies o incluso en la medicina en sus ramas de oftalmología y dermatología. Con esto hemos de darnos cuenta de que dependiendo de la geometría en que se genere un plasma puede tener diversas aplicaciones y ventajas.

# Apéndice A

## Propiedades vectoriales

El siguiente conjunto de propiedades vectoriales presentadas en este apéndice fueron utilizadas para el desarrollo de las soluciones numéricas y analíticas de las ecuaciones del modelo de plasmas fríos presentadas en el Capítulo 3.

En las siguientes relaciones,  $\phi$  es un escalar y  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  vectores.

$$\nabla \cdot (\phi \vec{A}) = \phi \nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla \phi,$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B},$$

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi,$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c},$$

$$\alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = \alpha \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \alpha \vec{b},$$

relaciones vectoriales obtenidas de [19].

### Coordenadas cilíndricas

Para el desarrollo de las ecuaciones en geometría cilíndrica es necesario conocer la forma de los operadores vectoriales. Considere

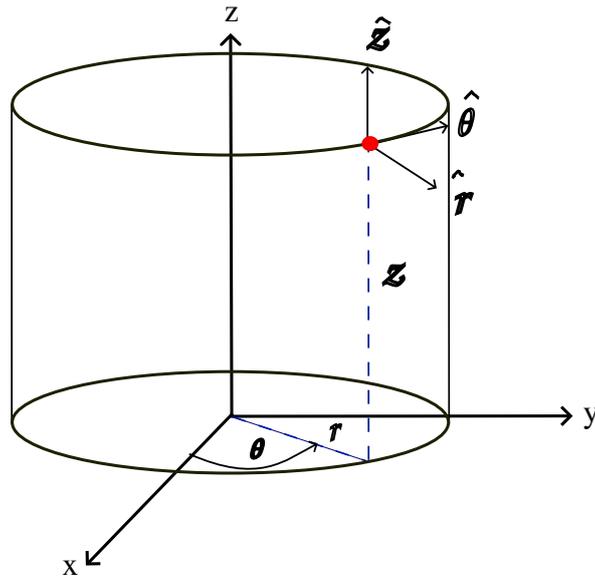


Figura A.1: Coordenadas cilíndricas y los vectores unitarios  $\hat{r}$ ,  $\hat{\theta}$ ,  $\hat{z}$ .

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z,$$

donde  $\hat{r}$  y  $\hat{\theta}$  dependen de la posición. Un vector en coordenadas cilíndricas tiene la forma

$$\vec{A} = \hat{r}A_r + \hat{\theta}A_\theta + \hat{z}A_z.$$

Operador gradiente

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}.$$

La divergencia de un vector en coordenadas cilíndricas es

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r}A_r + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

El producto interno entre dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  es

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_rB_r + A_\theta B_\theta + A_zB_z.$$

El operador laplaciano

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

El rotacional de un vector en coordenadas cilíndricas

$$\nabla \times \vec{A} = \hat{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right) + \hat{\theta}\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \hat{z}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right).$$

El producto vectorial entre dos vectores

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_\theta B_z - B_\theta A_z)\hat{r} + (A_z B_r - A_r B_z)\hat{\theta} + (A_r B_\theta - A_\theta B_r)\hat{z},$$

relaciones obtenidas de [12].

# Apéndice B

## Método de soluciones asintóticas

En el caso particular de esta tesis nos interesa la solución de las ecuaciones diferenciales no lineales de la Sección 3.1.1, las cuales están en el marco de la mecánica de fluidos.

En esta área existen tres maneras de obtener aproximaciones a soluciones a ecuaciones del tipo transporte no lineales, como las de Navier-Stokes; métodos numéricos como diferencias finitas o volumen finito, y soluciones analíticas, balance macroscópico y soluciones asintóticas. El ejemplo de la solución asintótica para bajas frecuencias de un flujo unidimensional en un tubo circular con un gradiente de presión periódico del libro [20] explica en qué consiste el método de manera detalla, aquí solo se dará una breve descripción.

Las soluciones asintóticas de las ecuaciones diferenciales se resuelven para valores característicos del problema, los cuales puede ser muy grandes, como la velocidad de la luz, o muy pequeños como la constante de planck; se les conoce como parámetros asintóticos. Sin embargo, para que estos puedan ser comparados por su magnitud relativa, es necesario que el problema este adimensionalizado y así determinar el parámetro asintótico.

La ecuación del ejemplo es

$$\frac{d^2 H}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dH}{dx} - iHR_\omega = -1,$$

donde  $R_\omega$  es el parámetro asintótico o frecuencia. Se propone una solución en expansión asintótica en potencias de  $R_\omega$

Si  $R_\omega \ll 1$

$$H = H_0(x) + R_\omega H_1(x) + R_\omega^2 H_2(x) + O(R_\omega^3),$$

se conoce como una expansión regular o asintótica de  $H(x)$  porque tiene la misma forma en el dominio  $[0,1]$ . El término  $O(R_\omega^3)$  hace referencia a los terminos de la expansión con potencias mayores a  $R_\omega^3$ , se conoce como el error de la aproximación. De hecho, en este tipo de aproximación agregar más terminos no involucra una mejor aproximación de la solución; solo es óptima para un número finito de términos. Las expresiones  $H_0(x)$ ,  $H_1(x)$ ,  $H_2(x)$  son funciones que conoceremos después.

La solución propuesta se sutituye en la ecuación diferencial y en las condiciones de frontera, de modo que se obtiene una ecuación diferencial más grande que se separa en términos de las potencias de  $R_\omega^n$ :

$$\left[ 1 + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{dH_0}{dx} \right) \right] + R_\omega \left[ \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{dH_1}{dx} - iH_0 \right) \right] \\ + R_\omega^2 \left[ \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{dH_2}{dx} \right) - iH_1 \right] + O(R_\omega^3) = 0,$$

y en donde cada término debe satisfacer la igual a cero. Posteriormente se desacopla el sistema y se resuelven las ecuaciones para encontrar  $H_0(x)$ ,  $H_1(x)$ ,  $H_2(x)$  con sus respectivas condiciones y obtener la solución general del problema.

## B.1 Series asintóticas

Cuando resolvimos analíticamente el caso unidimensional utilizamos el método de soluciones asintóticas, el cual propone un desarrollo en serie para las soluciones (3.1.11)-(3.1.14), de modo que en este Apéndice presentamos las expresiones obtenidas con el software *Mathematica 12*.

$$n_i^{(1)}(r) := \frac{1}{2}\beta(r-1)(a-r). \quad (\text{B.1.1})$$

$$\begin{aligned} n_i^{(2)}(r) := & -\frac{\beta(r-1)(a-r)}{288(a-1)} \left[ 3a^4(\beta-1)\Gamma P_i(r-1) + a^3\left((\beta-1)\Gamma P_i(r^2-14r+13) - 12\right) + a^2\left(-13(\beta-1)\Gamma P_i - 8(\beta-1)\Gamma P_i r^3\right) \right. \\ & + 21(\beta-1)\Gamma P_i r^2 - 12r + 48 \left. \right] + a \left( 4(\beta-1)\Gamma P_i r^4 - 3r^2(7(\beta-1)\Gamma P_i - 4) + 14(\beta-1)\Gamma P_i r + 3P_i((\beta-1)\Gamma + 8V_b) - 4(\beta-1)\Gamma P_i r^4 \right. \\ & \left. + 8(\beta-1)\Gamma P_i r^3 + r^2 P_i(\Gamma - \beta\Gamma) - 12\right) - 3r((\beta-1)\Gamma P_i + 16P_i V_b - 4) + 24P_i V_b + 12 \left. \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.1.2})$$

$$n_e^{(1)}(r) := \frac{1}{2}(r-1)(a-r). \quad (\text{B.1.3})$$

$$\begin{aligned} n_e^{(2)}(r) := & \frac{(r-1)(a-r)}{288(a-1)} \left[ 3a^4(\beta-1)\Gamma P_e(r-1) + a^3\left((\beta-1)\Gamma P_e(r^2-14r+13) + 12\right) + a^2\left(-13(\beta-1)\Gamma P_e - 8(\beta-1)\Gamma P_e r^3\right) \right. \\ & + 21(\beta-1)\Gamma P_e r^2 + 12r - 48 \left. \right] + a \left( 4(\beta-1)\Gamma P_e r^4 - 3r^2(7(\beta-1)\Gamma P_e + 4) + 14(\beta-1)\Gamma P_e r + 3P_e((\beta-1)\Gamma + 8V_b) + 48 \right) \\ & - 4(\beta-1)\Gamma P_e r^4 + 8(\beta-1)\Gamma P_e r^3 + r^2(P_e(\Gamma - \beta\Gamma) + 12) - 3r((\beta-1)\Gamma P_e + 16P_e V_b + 4) + 24P_e V_b - 12 \left. \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.1.4})$$

$$\varphi^{(1)}(r) := \frac{(a-r)((a-1)(\beta-1)\Gamma(r-1)(a^2+a(r-3) - r^2 + r + 1) + 24V_b)}{24(a-1)}. \quad (\text{B.1.5})$$

$$\varphi^{(2)}(r) := -d \frac{\Gamma(r-1)(a-r)}{40320(a-1)} \left[ \left( 9a^7(\beta-1)\Gamma(P_e + \beta P_i) + 9a^6(\beta-1)\Gamma(r-8)(P_e + \beta P_i) + 3a^5(\beta-1) \left( 3\Gamma P_e(r^2 - 8r + 28) + 3\beta\Gamma P_i(r^2 - 8r + 28) \right) \right) \right. \quad (\text{B.1.6})$$

$$\left. -56 \right) - a^4(\beta-1) \left( 7(67\Gamma P_e + 67\beta\Gamma P_i - 144) + 26\Gamma r^3(P_e + \beta P_i) - 33\Gamma r^2(P_e + \beta P_i) - 21r(7\Gamma P_e + 7\beta\Gamma P_i - 8) \right) + a^3 \left( -12(\beta-1)\Gamma r^4(P_e + \beta P_i) \right. \\ \left. + 152(\beta-1)\Gamma r^3(P_e + \beta P_i) - 14(\beta-1)r^2(21\Gamma P_e + 21\beta\Gamma P_i - 8) + 7(67(\beta-1)\Gamma P_e + 8P_e V_6 + 67\beta^2\Gamma P_i + \beta(-67\Gamma P_i + 8P_i V_6 - 320) + 320) \right)$$

$$\left. 448(\beta-1)r \right) + a^2 \left( 30(\beta-1)\Gamma r^5(P_e + \beta P_i) - 114(\beta-1)\Gamma r^4(P_e + \beta P_i) + 42(\beta-1)r^2(7\Gamma P_e + 7\beta\Gamma P_i - 16) + 7r(P_e + \beta P_i)(8V_6 - 21(\beta-1)\Gamma) \right) \quad (\text{B.1.7})$$

$$\left. -28 \left( 9(\beta-1)\Gamma P_e + 8P_e V_6 + 9\beta^2\Gamma P_i + \beta(-9\Gamma P_i + 8P_i V_6 - 80) + 80 \right) + 112(\beta-1)r^3 \right) - a \left( 10(\beta-1)\Gamma r^6(P_e + \beta P_i) - 2(\beta-1)r^4(57\Gamma P_e \right. \\ \left. + 57\beta\Gamma P_i - 28) + 152(\beta-1)\Gamma r^3(P_e + \beta P_i) + r^2 \left( 33(\beta-1)\Gamma P_e + 504P_e V_6 + 33\beta^2\Gamma P_i + \beta(-33\Gamma P_i + 504P_i V_6 - 672) + 672 \right) - 8r \left( 9(\beta-1)\Gamma P_e \right. \\ \left. + 112P_e V_6 + 9\beta^2\Gamma P_i + \beta(-9\Gamma P_i + 112P_i V_6 - 56) + 56 \right) + 8 \left( -9(\beta-1)\Gamma P_e + 28P_e V_6 - 9\beta^2\Gamma P_i + \beta(9\Gamma P_i + 28P_i V_6 + 126) - 126 \right) + 168\beta \\ \left. - 9\beta\Gamma P_e + 9\Gamma P_e + 10(\beta-1)\Gamma r^6(P_e + \beta P_i) - 30(\beta-1)\Gamma r^5(P_e + \beta P_i) + 4(\beta-1)r^4(3\Gamma P_e + 3\beta\Gamma P_i + 14) + 2r^3 \left( 13(\beta-1)\Gamma P_e + 168P_e V_6 \right. \right. \\ \left. \left. + 13\beta^2\Gamma P_i + \beta(-13\Gamma P_i + 168P_i V_6 - 56) + 56 \right) - r^2 \left( 9P_e((\beta-1)\Gamma + 56V_6) + 9\beta^2\Gamma P_i + \beta(-9\Gamma P_i + 504P_i V_6 + 112) - 112 \right) + r \left( -9(\beta-1)\Gamma P_e \right. \right. \\ \left. \left. + 56P_e V_6 - 9\beta^2\Gamma P_i + \beta(9\Gamma P_i + 56P_i V_6 + 168) - 168 \right) + 56P_e V_6 - 9\beta^2\Gamma P_i + 9\beta\Gamma P_i + 56\beta P_i V_6 - 168 \right] \Big].$$

$$E^{(1)}(r) := -\varphi^{(1)}(r). \quad (\text{B.1.8})$$

$$E^{(2)}(r) := -\varphi^{(2)}(r). \quad (\text{B.1.9})$$



# Apéndice C

## Método de diferencias finitas

El método de diferencias finitas consiste en discretizar ecuaciones diferenciales aproximándolas a un conjunto de ecuaciones algebraicas, que al resolverlas se obtienen un conjunto de puntos que forman la solución, por eso decimos que pasamos de un problema continuo a uno discreto. A continuación presentaremos un breve resumen de la discretización en una dimensión de ecuaciones diferenciales, tomando como referencia el libro [17], en el cual se puede encontrar información más detallada. El método se generaliza a más dimensiones.

Si en una dimensión tenemos un dominio  $\Omega = [0, L]$  donde el problema está definido, vamos a construir una malla de extensión  $i_{max}$ , que es el número de veces en que vamos a dividir el espacio y del mismo tamaño  $\delta x = L/i_{max}$ . Entonces la malla se construye con  $x_i = i\delta x$  con  $i = 0 \dots i_{max}$ , donde 0 e  $i_{max}$  son las fronteras. Se aproxima el operador continuo  $du/dx$  a un operador discreto de tres formas:

Derivada hacia adelante

$$\left[\frac{du}{dx}\right]_i^r = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{\delta x}.$$

Derivada central

$$\left[\frac{du}{dx}\right]_i^c = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{\delta 2x}.$$

Derivada hacia atrás

$$\left[\frac{du}{dx}\right]_i^l = \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{\delta x}.$$

Y las derivadas de segundo orden

$$\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right]_i = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{\delta x^2}$$

Las derivadas temporales se discretizan con el método de Euler

$$\left[\frac{du}{dt}\right] = \frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{\delta t}$$

Los índices arriba indican una discretización temporal, los índices abajo una discretización espacial. La variación en dos dimensiones considerando  $i$  la variación en  $x$  y  $j$  la variación en  $y$  es de la forma

$$\frac{du}{dx} = \frac{u^n(i+1, j) - u^n(i, j)}{\delta x}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{u^n(i, j+1) - u^n(i, j)}{\delta y},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{u^n(i+1, j) - 2u^n(i, j) + u^n(i-1, j)}{\delta x^2},$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{u^n(i, j+1) - 2u^n(i, j) + u^n(i, j-1)}{\delta y^2}.$$

Para el tiempo

$$\frac{du}{dt} = \frac{u^{n+1}(i, j) - u^n(i, j)}{\delta t}, \quad \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{u^{n+1}(i, j) - 2u^n(i, j) + u^{n-1}(i, j)}{\delta t^2},$$

que es la manera en que fueron discretizadas las ecuaciones a partir de la Sección 3.2.

# Apéndice D

## Desarrollo de las condiciones de frontera de la solución analítica

En este Apéndice se muestra el desarrollo para obtener las condiciones de frontera presentadas en solución analítica unidimensional, Sección 3.1.1.

Comenzamos con sustituir las expansiones asintóticas en la condición de frontera para la densidad de electrones  $n_e$  en el cátodo, ecuación (3.1.10).

$$\begin{aligned}
 & -P_e \left( n_e^{(1)} D_a + n_e^{(2)} D_a^2 + n_e^{(3)} D_a^3 \right) \left( E_x^{(1)} D_a + E_x^{(2)} D_a^2 + E_x^{(3)} D_a^3 \right) \\
 - \frac{\partial}{\partial x} \left( n_e^{(1)} D_a + n_e^{(2)} D_a^2 + n_e^{(3)} D_a^3 \right) &= -\frac{\gamma}{\beta} \left[ P_i \left( n_i^{(1)} D_a + n_i^{(2)} D_a^2 + n_i^{(3)} D_a^3 \right) \left( E_x^{(1)} D_a + E_x^{(2)} D_a^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + E_x^{(3)} D_a^3 \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( n_i^{(1)} D_a + n_i^{(2)} D_a^2 + n_i^{(3)} D_a^3 \right) \right],
 \end{aligned}$$

procedemos a agrupar los términos por potencias del Damkohler para obtener las condiciones de frontera correspondientes a cada orden.

$$\begin{aligned}
 D_a \qquad \qquad \qquad D_a^2 \qquad \qquad \qquad (D.0.1) \\
 - \frac{\partial n_e^{(1)}}{\partial x} = \frac{\gamma}{\beta} \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial x} \Big|_{x=1}, \quad -P_e n_e^{(1)} E_x^{(1)} - \frac{\partial n_e^{(2)}}{\partial x} = -\frac{\gamma}{\beta} \left( P_i n_i^{(1)} E_1^{(1)} - \frac{\partial n_i^{(2)}}{\partial x} \right) \Big|_{x=1}.
 \end{aligned}$$

Repetimos el mismo proceso para el resto de condiciones. Para  $n_e$  (3.1.7) en el ánodo  $x = 0$

$$\begin{aligned}
 n_e(0) &= 0, \\
 D_a n_e^{(1)}(0) + D_a^2 n_e^{(2)}(0) + D_a^3 n_e^{(3)}(0) &= 0,
 \end{aligned}$$

da las condiciones

$$\begin{aligned}
 D_a \qquad \qquad \qquad D_a^2 \qquad \qquad \qquad (D.0.2) \\
 n_e^{(1)} = 0, \qquad \qquad \qquad n_e^{(2)} = 0.
 \end{aligned}$$

La condición de frontera (3.1.8) de  $n_i$  resulta ser la misma para todas las potencias en el cátodo

$$\nabla n_i \Big|_{x=1} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 D_a \qquad \qquad \qquad D_a^2 \qquad \qquad \qquad (D.0.3) \\
 \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial x} = 0, \qquad \qquad \qquad \frac{\partial n_i^{(2)}}{\partial x} = 0.
 \end{aligned}$$

Las condiciones de frontera del potencial eléctrico en el cátodo son

$$\varphi(1) = -1,$$

$$\begin{array}{ll} D_a & D_a^2 \\ \varphi^{(1)} = -1/D, & \varphi^{(2)} = 0. \end{array} \quad (\text{D.0.4})$$

Y en el ánodo las condiciones de frontera del potencial eléctrico en todos los órdenes de Damkohler dan cero. Para la solución analítica notamos que para las ecuaciones de  $n_i$  tenemos dos condiciones de frontera tipo Neumann, lo cual hace que el sistema no sea posible resolver. Por lo cual cambiamos la condición en el ánodo a una condición tipo Dirichlet

$$n_i(0) = n_a,$$

$$\begin{array}{ll} D_a & D_a^2 \\ n_i^{(1)} = n_a/D_a, & n_i^{(2)} = 0. \end{array}$$

# Bibliografía

- [1] V. Milántiev, S. Temkó, Física del plasma, Mir Moscu, 1987.
- [2] A. Fridman, Plasma chemistry (2008). doi:10.1017/cbo9780511546075.
- [3] What is a tokamak?, recuperado 1 de marzo 2024.  
URL <https://www.iter.org/mach/Tokamak>
- [4] Cleaning plasma and where is it used?, recuperado 14 de marzo 2024.  
URL <https://tantec.com/cleaning-plasma-and-where-is-it-used/>
- [5] P. Cristoforetti, Aurora borealis, recuperado 5 de marzo 2024.  
URL <https://images.nasa.gov/details/iss043e059141>
- [6] V. Lisovskiy, S. Yakovin, V. Yegorenkov, Low-pressure gas breakdown in uniform dc electric field, Journal of Physics D: Applied Physics 33 (10 2000). doi:10.1088/0022-3727/33/21/310.
- [7] C. Wadhwa, High Voltage Engineering, New Age International (P) Limited, 2006.
- [8] K. Ollegott, P. Wirth, C. Oberste-Beulmann, P. Awakowicz, M. Muhler, Fundamental properties and applications of dielectric barrier discharges in plasma-catalytic processes at atmospheric pressure, Chemie Ingenieur Technik 92 (08 2020). doi:10.1002/cite.202000075.
- [9] M. Lieberman, A. Lichtenberg, Principles of Plasma Discharges and Materials Processing, Wiley, 2005. doi:10.1002/0471724254.
- [10] Glow discharge structure, recuperado 14 de marzo 2024.  
URL [https://en.wikipedia.org/wiki/File:Glow\\_discharge\\_structure\\_-\\_English.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Glow_discharge_structure_-_English.svg)
- [11] Análisis meterológico, recuperado 20 de octubre 2023.  
URL [https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/240054/Anexo\\_1\\_Meteorologico.pdf](https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/240054/Anexo_1_Meteorologico.pdf)
- [12] H. C. Ohanian, Classical electrodynamics, Allyn and Bacon, Boston, 1988.  
URL <http://lobid.org/resources/990015989750206441>
- [13] D. B. Graves, K. F. Jensen, A continuum model of dc and rf discharges, IEEE Transactions on Plasma Science 14 (2) (1986) 78–91. doi:10.1109/TPS.1986.4316510.
- [14] H. Kumar, S. Roy, Multidimensional hydrodynamic plasma-wall model for collisional plasma discharges with and without magnetic-field effects, Physics of Plasmas 12 (9) (2005) 2.  
URL <https://doi.org/10.1063/1.2044747>

- [15] L. Córdova-Castillo, J. Olvera-Orozco, S. Cuevas, A. Figueroa, F. Vázquez, Asymtotic solutions for a continuum model of a dc gas discharge in cavities with different geometry, *Revista mexicana de Física* (2022). doi:<https://doi.org/10.31349/RevMexFis.68.051502>.
- [16] V. D. P. M. A. S. M. J. J. Cortés Rosas, M. E. González Cárdenas, V. H. T. Pérez, Métodos iterativos de jacobi y gauss-seidel, *Plataforma educativa para el análisis numérico*.
- [17] M. Griebel, T. Dornseifer, T. Neunhoeffler, *Numerical simulation in fluid dynamics: a practical introduction*, SIAM, 1998.
- [18] W. L. J. C. Shen Gao, Jianyuan Feng, Dc radial glow discharge in axial magnetic field at low pressures, *EDP sciences* 88 (2020) 6. doi:<https://doi.org/10.1051/epjap/2019190224>.
- [19] I. Currie, I. Currie, *Fundamental Mechanics of Fluids*, Third Edition, Dekker Mechanical Engineering, Taylor & Francis, 2002.
- [20] L. G. Leal, *Advanced Transport Phenomena: Fluid Mechanics and Convective Transport Processes*, Cambridge Series in Chemical Engineering, Cambridge University Press, 2007.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MORELOS



INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS  
CONTROL ESCOLAR DE LICENCIATURA



VOTOS DE APROBATORIOS

**SECRETARIA EJECUTIVA  
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS**

**P R E S E N T E**

Por medio del presente le informamos que después de revisar la versión escrita de la tesis que realizó la **C. GERVACIO MARTÍNEZ CAROLINA MICHELLE** con número de matrícula **10018798** cuyo título es:

**“Dinámica de plasma frío bajo efectos de campo magnético”**

Consideramos que **SI** reúne los méritos que son necesarios para continuar los trámites para obtener el título de **LICENCIADO EN CIENCIAS ÁREA TERMINAL EN FISICA**

Cuernavaca, Mor a 29 de abril de 2024

Atentamente  
***Por una humanidad culta***

Se adiciona página con la e-firma UAEM de los siguientes:

<b>DR. MARCO ANTONIO RIVERA ISLAS</b>	<b>(PRESIDENTE)</b>
<b>DRA. RUTH ESTEPHANIA GONZÁLEZ NARVÁEZ</b>	<b>(SECRETARIO)</b>
<b>DR. ALDO FIGUEROA LARA</b>	<b>(VOCAL)</b>
<b>DR. SERGIO CUEVAS GARCÍA</b>	<b>(SUPLENTE)</b>
<b>DR. GUILLERMO GUADALUPE HINOJOSA AGUIRRE</b>	<b>(SUPLENTE)</b>

MIE/VRRC/eae





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

### Sello electrónico

**ALDO FIGUEROA LARA | Fecha:2024-04-30 11:57:35 | FIRMANTE**

c61aFw5ya80G2LzWg5E7QlVPMmNsRO87p8zixP1ZMmnyBSGORd+Lxlz2ib5spE9JlhcT7VCivJ7APiuroNuNxn96lp6fWfKne+VSua5DzP2EKJoYhahyTIZ5ABa30EHcgolRfCdfpPmfTwDQ2ovblZNeGxlowi9lciuh/7RD5/ldlWfkGdxfk+luf7t5g/OhD9/sywckbBuqqGNhsRHEkF6Qhs+Hler18HTOR0au/kfL9pwDDdRX2plorYrLNNfT5NyiJ5cmu4CSwksrNSWjWpI8Y9ySAg7uSuXWQqTWNuWJ+8uYdGomW16vf5EAzdsBs1cz10aczYG2wGJ3fxVw==

**GUILHERMO GUADALUPE HINOJOSA AGUIRRE | Fecha:2024-04-30 12:46:38 | FIRMANTE**

sY7Nic8ywlqZns88Iba1VgHjghgG1eeMlvX6belWs+QMqHNps3ITV5E2W8TLiQDu2SodSzW+HOfyQd+x8RP1F0DZ3rRK48sYvwaqBn0sLajyvB2Yo7zhRRptBPYzGBanqzG0I64tI0o+v6GAN/PFR+60BK+ZFvxyC0env9GouENHhFXXY7sX935aFvnbLxNanGnDc84DuA8xFkiRUKU1Kj80yPzsSK6mGYLEIVqdYI6K9WpdmkLcNza5+0kxJ+cj95MBChP3Dq+Dl0pW8iZy2Yi17SLBFTJh3xFLGHG/I0lme0MYaAYiDIK6OfCT5zsk0HV28LOIt7y95KHOA==

**SERGIO CUEVAS GARCÍA | Fecha:2024-04-30 14:10:34 | FIRMANTE**

LhMdDN26A2OFFOEa5xZKyN1L2MQjrWcBdVaGckouQX7dSS92mKfef5zWPCWIC4fbFnMI7QwCkFICRwEW4YalAkWnXdpOSkuWjzMy1yjHodGvZtdWyyVMEaku5dAMluDRpRWrf54/ljNHwfvU1QgTeX32CtXXVn+1zMDJ751BtrGYquHDHliuNnflZU2kpgq06K9EhqkBTJQ61LAab+4ZgG05S1XW3E8HSCuvaXM3n5ITREx/4jan0VKEuBOVoD6bNpB3a32pVTS+RRi/6MNJ360uyZNeBL2xdMObvX7Ze/LXIZQXcW5IVtvRepYnDxwZpuBzP7CtufnJ/z0YMi2JQ==

**MARCO ANTONIO RIVERA ISLAS | Fecha:2024-04-30 21:34:32 | FIRMANTE**

B1CVg5bQv8cRQZUAdkWFUR7wVOUKtufnnDnzX9nfgSXQ8IzGOAanBo/Q48rnQLYJUNfQNj2LOIBa//fAkNuaF9RTDEVSI4ckZhxWiNhlv+6X1co5F0TP0GItVdA6xtmWL+OF0FnXKlW8MwePzqF1QhmUQeHwlb8s54jckL8H9Rc783B+piMydEIUViQa8Hhs4SngyAHsoLJ4a9+oJ/N038Gr2F7+RfxRaf3DVr6yjjWbjgMZmjfv+bgvf7oD1xj6g5GscA/JmVIR0JDGMmpvrJ5x0c0eMDIU/pAc9VdHKLLHKb37OpdyEYVL/YaXb+cmraspd0sFYpfm6adPOP91hQ==

**RUTH ESTEPHANIA GONZALEZ NARVAEZ | Fecha:2024-05-01 13:52:33 | FIRMANTE**

MxnElopV3kd2dXZFxtXB2lopCuRnFUxxMvts2LptOny4n8YLSi0ahudz/Uu9joMZn1byU+LZX9GYH+lwi14LYu7ovyjKM0tfMmEWbl7p8TgMkAUEJnS9bO6XRgmnozPHHzgSJ54dWFLxEMTiz0rVvTfbSQ48qCHnR813AHqQ8wFT31Rs5vQJqwhRmj0a/cYcLn/eZh7cl/ULvuD4N7dGBjc4HViSvWwXZZ+N38WhecY8R+jlE0hGyt5Yd2Xi/IVCRx1U0IYv7dzEEKc7kGGRIHfwL55wOUrbiVauB9uywffs1GcRfhyNIUY3qzXVAqJRpscNLubCxtWovNsbYun3w==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



8VxmuovSa

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/rWqTskUn4WrfMZiYcOv3ToGm9sewPP>



UAEM  
RECTORÍA  
2023-2029