

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

DINÁMICA DE LOS LIBROS DE ÓRDENES

TESIS PROFESIONAL PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRÍA EN CIENCIAS

PRESENTA:

JOSUE SAMAYOA VALDEZ

DIRECTOR: DR. RAÚL SALGADO GARCÍA

CUERNAVACA, MORELOS

FEBRERO, 2024

Índice general

Agradecimientos	IX
Resumen	XI
1. Introducción	1
2. Antecedentes	3
2.1. Fenomenología	3
2.1.1. Propiedades estadísticas de los libros de órdenes	5
2.1.2. Hechos estilizados	5
2.2. Modelos	6
2.2.1. Modelos basados en agentes	6
2.2.2. Modelos estocásticos	6
3. Metodología	9
3.1. Procesos estocásticos e irreversibilidad	9
3.1.1. Cadenas de Markov	9
3.1.2. Cadenas de Markov abiertas	13
3.1.3. Entropía	20
3.1.4. Irreversibilidad	22
3.2. Series de tiempo financieras	23
3.3. Modelo propuesto	25
3.3.1. Aspectos generales	25
3.3.2. Simulación de control	27
3.3.3. Simulación tipo Markov	28
4. Resultados	29
4.1. Cálculos analíticos	29
4.1.1. Propagadores	29
4.1.2. Funciones generadoras	42
4.1.3. Primeros momentos	46
4.2. Simulación de control	50
4.2.1. Rendimientos	51
4.2.2. Irreversibilidad	53

4.3. Simulación tipo Markov	55
4.3.1. Órdenes a mercado tipo Markov reversibles	55
4.3.2. Órdenes a mercado tipo Markov irreversibles	59
4.4. Análisis de series reales	62
5. Conclusiones	69
Bibliografía	71

Índice de figuras

3.1.	Esquema de una cadena de Markov abierta de 3 estados, donde podemos observar los protocolos de entrada J_1, J_2 y J_1 así como todas las posibles transiciones y salidas.	14
3.2.	Esquema de la redistribución interna de las partículas en una cadena de Markov.	14
3.3.	Esquema de los elementos que componen al vector \mathbf{A}_i^t .	15
3.4.	Esquema de una cadena de Markov abierta de un solo estado.	19
3.5.	Representación esquemática del modelo de libro de órdenes propuesto, utilizando cadenas de Markov abiertas.	27
3.6.	Esquema de una cadena de Markov en anillo de N estados.	28
4.1.	Esquema del movimiento del precio de compra. El diagrama ilustra el caso en que $y = y'$ tras la ejecución de órdenes a mercado.	31
4.2.	Esquema del movimiento del precio de compra. El diagrama ilustra el caso en que $y < y'$ tras la ejecución de órdenes a mercado.	32
4.3.	Esquema del movimiento del precio de compra. El diagrama ilustra el caso en que $y = y'$ tras el arribo y cancelación de órdenes límite de compra.	33
4.4.	Esquema del movimiento del precio de compra. El diagrama ilustra el caso en que $y > y'$ tras el arribo y cancelación de órdenes límite de compra.	34
4.5.	Esquema del movimiento del precio de compra. El diagrama ilustra el caso en que $y < y'$ tras el arribo y cancelación de órdenes límite de compra.	35
4.6.	Esquema del movimiento del precio de venta. El diagrama ilustra el caso en que $x > x'$ tras la ejecución de órdenes a mercado de venta.	36
4.7.	Esquema del movimiento del precio de venta. El diagrama ilustra el caso en que $x = x'$ tras la ejecución de órdenes a mercado de venta.	37
4.8.	Esquema del movimiento del precio de venta. El diagrama ilustra el caso en que $x = x'$ tras el arribo y cancelación de órdenes límite de venta.	38
4.9.	Esquema del movimiento del precio de venta. El diagrama ilustra el caso en que $x > x'$ tras el arribo y cancelación de órdenes límite de venta.	39
4.10.	Esquema del movimiento del precio de venta. El diagrama ilustra el caso en que $x < x'$ tras el arribo y cancelación de órdenes límite de venta.	39
4.11.	Representación esquemática del modelo de libro de órdenes propuesto, utilizando cadenas de Markov abiertas.	41
4.12.	Precio medio en función del tiempo, de la simulación de control.	50

4.13. Series de tiempo de los rendimientos logarítmicos de la simulación de control. La gráfica a) muestra la serie de tiempo para los rendimientos logarítmicos de periodo 10. La gráfica b) muestra la serie de tiempo para los rendimientos logarítmicos de periodo 490.	51
4.14. Distribuciones de los rendimientos logarítmicos de la simulación de control. La gráfica a) muestra la distribución para los rendimientos logarítmicos de periodo 10. La gráfica b) muestra muestra la distribución para los rendimientos logarítmicos de periodo 490.	52
4.15. Autocorrelaciones de los rendimientos logarítmicos de periodo 200. La línea segmentada representa la autocorelación de los rendimientos. La línea con puntos representa la autocorrelación de lo rendimientos absolutos.	52
4.16. Esquema del procedimiento utilizado para categorizar los rendimientos logarítmicos. Asignamos el valor 0 a aquellos rendimientos $r : r \leq \mu - \alpha\sigma$, el valor 1 a $r : r \in (\mu - \alpha, \mu + \alpha)$ y finalmente asignamos el valor 2 a aquellos rendimientos $r : r \leq \mu + \alpha\sigma$, en donde α es un parámetro que nos permite tener poblaciones similares en las tres categorías.	53
4.17. Divergencia Kullback-Leibler para la distribución de probabilidades de trayectorias de longitud L en sentido directo e inverso. La línea anaranjada muestra el resultado obtenido con los datos, mientras que la línea azul muestra el resultado obtenido al aleatorizar los datos antes del análisis.	54
4.18. Índice de irreversibilidad de patrones de tendencia. La gráfica muestra el IT en función del periodo de los rendimientos logarítmicos.	54
4.19. Esquema de una cadena de Markov en anillo de N estados.	55
4.20. Precio medio en función del tiempo, de la simulación con órdenes a mercado modeladas a partir de una cadena de Markov reversible.	56
4.21. Distribución de los rendimientos logarítmicos de la simulación con órdenes a mercado basadas en una cadena de Markov reversible. La gráfica a) muestra la distribución de los rendimientos logarítmicos con periodo 20. La gráfica b) muestra la distribución de los rendimientos logarítmicos con periodo 300.	57
4.22. Autocorrelaciones de los rendimientos logarítmicos de periodo 300. La línea segmentada representa la autocorelación de los rendimientos. La línea con puntos representa la autocorrelación de lo rendimientos absolutos.	57
4.23. Divergencia Kullback-Leibler para la distribución de probabilidades de trayectorias de longitud L en sentido directo e inverso, de la simulación con órdenes a mercado basadas en una cadena de Markov reversible. La línea anaranjada muestra el resultado obtenido con los datos, mientras que la línea azul muestra el resultado obtenido al aleatorizar los datos antes del análisis.	58
4.24. Índice de irreversibilidad de patrones de tendencia, de la simulación con órdenes a mercado basadas en una cadena de Markov reversible. La gráfica muestra el IT en función del periodo de los rendimientos logarítmicos.	58
4.25. Precio medio en función del tiempo, de la simulación con órdenes a mercado modeladas a partir de una cadena de Markov irreversible.	59

4.26. Distribución de los rendimientos logarítmicos de la simulación con órdenes a mercado basadas en una cadena de Markov irreversible. La gráfica a) muestra la distribución de los rendimientos logarítmicos con periodo 10. La gráfica b) muestra la distribución de los rendimientos logarítmicos con periodo 490.	60
4.27. Autocorrelaciones de los rendimientos logarítmicos de periodo 300. La línea segmentada representa la autocorrelación de los rendimientos. La línea con puntos representa la autocorrelación de los rendimientos absolutos.	60
4.28. Divergencia Kullback-Leibler para la distribución de probabilidades de trayectorias de longitud L en sentido directo e inverso, de la simulación con órdenes a mercado basadas en una cadena de Markov irreversible. La línea anaranjada muestra el resultado obtenido con los datos, mientras que la línea azul muestra el resultado obtenido al aleatorizar los datos antes del análisis.	61
4.29. Índice de irreversibilidad de patrones de tendencia, de la simulación con órdenes a mercado basadas en una cadena de Markov reversible. La gráfica muestra el IT en función del periodo de los rendimientos logarítmicos.	61
4.30. Series de tiempo de los precios de apertura registrados minuto a minuto por el exchange Bitstamp. La gráfica a) muestra el precio de apertura en dólares estadounidenses (USD), de la criptomoneda BTC. La gráfica b) muestra el precio de apertura en USD, de la criptomoneda ETH.	62
4.31. Series de tiempo de los rendimientos logarítmicos de periodo 1 minuto, calculados con los datos extraídos del exchange Bitstamp. La gráfica a) muestra los rendimientos de la criptomoneda BTC. La gráfica b) muestra los rendimientos de la criptomoneda ETH.	63
4.32. Funciones de autocorrelación de los rendimientos logarítmicos de periodo 1 minuto, calculados a partir de la información extraída del exchange Bitstamp. La gráfica a) muestra las funciones de autocorrelación para BTC, mientras que la gráfica b) muestra las autocorrelación para ETH.	63
4.33. Divergencia Kullback-Leibler para la distribución de probabilidades de trayectorias de longitud L en sentido directo e inverso, de los rendimientos logarítmicos de periodo 1 minuto, calculados a partir de la información extraída del exchange Bitstamp. La línea anaranjada muestra el resultado obtenido con los datos, mientras que la línea azul muestra el resultado obtenido al aleatorizar los datos antes del análisis. La gráfica a) muestra los resultados obtenidos para la criptomoneda BTC. La gráfica b) muestra los resultados obtenidos para la criptomoneda ETH.	64
4.34. Índice de irreversibilidad de patrones de tendencia para la criptomoneda BTC. La gráfica a) muestra una pérdida de la irreversibilidad al aumentar el periodo de los rendimientos. La gráfica b) muestra el resultado de calcular el IT para diferentes ventanas de 90 días.	65
4.35. Índice de irreversibilidad de patrones de tendencia para la criptomoneda ETH. La gráfica a) muestra una pérdida de la irreversibilidad al aumentar el periodo de los rendimientos. La gráfica b) muestra el resultado de calcular el IT para diferentes ventanas de 90 días.	65

4.36. Volúmenes en USD registrados minuto a minuto por el exchange Bitstamp. La gráfica a) muestra los volúmenes del BTC. La gráfica b) muestra los volúmenes del ETH.	66
4.37. Divergencia Kullback-Leibler para trayectorias de longitud L extraídas de los volúmenes.	66
4.38. Índice de irreversibilidad de patrones de tendencia aplicado a los volúmenes.	67

Agradecimientos

Resumen

En el presente trabajo estudiamos la formación de precios a través de un libro de órdenes, mediante un modelo estocástico basado en cadenas de Markov abiertas a tiempo discreto, inspirado en el modelo propuesto en [18]. Exploramos analíticamente el modelo utilizando la técnica de las funciones generadoras de momentos, para deducir relaciones de recurrencia para los primeros momentos de los precios de compra y venta. Realizamos simulaciones numéricas para comprobar la capacidad del modelo para reproducir las propiedades estadísticas más reportados en la literatura. Además, realizamos estimaciones sobre la irreversibilidad en los rendimientos logarítmicos y tratamos de caracterizar el flujo de información mediante el ingreso de órdenes a mercado, para evaluar su impacto en la irreversibilidad de los rendimientos. Asimismo, hicimos estimaciones sobre la irreversibilidad de datos reales de las criptomonedas Bitcoin y Ethereum.

Capítulo 1

Introducción

Los mercados financieros son lugares físicos o virtuales, en los cuales se comercian bienes comúnmente llamados instrumentos financieros, entre los que podemos encontrar acciones, bonos y criptomonedas, entre otros.

Los comerciantes, personas que desean obtener un beneficio económico al participar en los mercados financieros, necesitan diseñar estrategias que les permitan reducir sus pérdidas y aumentar sus ganancias en la medida de lo posible. Para favorecer el diseño de dichas estrategias es necesario estudiar la formación de precios, es decir, cómo el precio de los bienes cambia a lo largo del tiempo y cómo se ve afectado por diversos factores, por ejemplo, la información disponible en los medios, como las noticias o redes sociales.

En los mercados financieros, los comerciantes desean comprar o vender una cierta cantidad de un cierto instrumento financiero a un determinado precio. Al conjunto de esta información (instrumento, cantidad y precio) que representan los intereses de los comerciantes, se le denomina *orden*. Estas órdenes son almacenadas en bases de datos llamadas *libros de órdenes*. Estas bases de datos, además de almacenar los intereses de los participantes, también permiten efectuar las transacciones de compraventa y facilitan el acceso al mercado.

Antes del auge de la computación, las órdenes se registraban a mano en libretas, de allí que la herramienta que se utiliza en la actualidad se siga llamando libro de órdenes. En la actualidad, con el auge de los dispositivos electrónicos, resulta indispensable el uso de mejores herramientas, como lo son los libros de órdenes modernos.

La formación de precios a través de modelos de libros de órdenes es un tema ampliamente estudiado [18, 19, 8, 23, 10, 14, 4, 2, 15, 16], para ello se ha propuesto una gran cantidad de modelos [18, 19, 8, 23, 10, 14, 4], todos ellos con sus ventajas y limitaciones. La mayoría de ellos puede catalogarse en una de dos categorías, los modelos de agentes y los modelos estocásticos, dependiendo del enfoque que se le de al modelo.

Describir matemáticamente el comportamiento exacto de todos los comerciantes de un mercado financiero es imposible, sin embargo, aproximar su comportamiento como un conjunto de procesos estocásticos ha demostrado ser una buena aproximación.

En matemáticas, un proceso estocástico es un modelo no determinista usado para

describir la evolución temporal de un fenómeno. Esto resulta adecuado cuando la descripción exacta de un fenómeno muy complicada o cuando el sistema estudiado puede considerarse fundamentalmente aleatorio, como es el caso de los sistemas financieros. Un ejemplo de esta situación es el lanzamiento de una moneda. Sabemos que las leyes de la mecánica rigen la evolución de este experimento; sin embargo una descripción mecánica exacta puede resultar poco práctica. En este caso es claro que una descripción probabilística nos ofrece una manera mas práctica de describir este fenómeno.

La reversibilidad es la capacidad de un proceso para ocurrir en sentido opuesto. Es decir, el proceso que lleva a un sistema del estado A al B , es reversible si, el proceso que lleva al sistema del estado B al A también es posible e igualmente probable. La irreversibilidad es la ausencia de esta capacidad y es muy frecuente en la naturaleza, así mismo, la irreversibilidad suele aparecer en sistemas que involucren la transmisión de información.

El funcionamiento de los mercados financieros es esencialmente discreto, los precios a los que se comercian los instrumentos financieros, sin importar el tipo de cambio, son múltiplos enteros de una cantidad mínima, mientras que los intervalos de tiempo están dados por la velocidad de las herramientas computacionales que se dispongan. De modo que modelar un libro de órdenes como un sistema a tiempo discreto es una propuesta bastante razonable.

En el presente trabajo propondremos un modelo estocástico sencillo de libro de órdenes, estudiaremos la formación de precios y la irreversibilidad dentro del modelo. Probaremos la capacidad del modelo para reproducir algunas de las características estadísticas más reportadas en la literatura. Finalmente utilizando datos reales estimaremos la irreversibilidad de algunas criptomonedas.

Capítulo 2

Antecedentes

Los mercados financieros son espacios físicos o virtuales en los cuales se realiza el intercambio de instrumentos financieros. La herramienta utilizada por la mayoría de los mercados financieros para almacenar los intereses de sus participantes es llamada libro de órdenes límite o simplemente libro de órdenes [6]. En esencia, un libro de órdenes es una base de datos privada que contiene la información de todas las órdenes enviadas al mercado, como lo pueden ser: el tipo de orden, precio, cantidad, fecha, etc. En la literatura generalmente se habla de libros de doble subasta (*double auction* en inglés), esto se refiere al hecho de que en dicho libro existen órdenes de compra y de venta. Se dice que un mercado es impulsado por órdenes (*order-driven* en inglés), si sus participantes interactúan mediante un libro de órdenes límite. En estos sistemas las órdenes son ejecutadas siguiendo la regla “primero en precio, primero en tiempo”, es decir, al decidir que orden ejecutar, el precio tiene prioridad sobre el tiempo en el que las órdenes llegaron al libro [6].

2.1. Fenomenología

Para empezar a estudiar los libros de órdenes es necesario comprender algunos de los conceptos más usados dentro de la literatura, como lo pueden ser:

- Precio de venta (*ask price* en inglés), comúnmente denotado por $a(t)$, es el precio mas bajo que un vendedor aceptará por un bien.
- Precio de compra (*bid price* en inglés), comúnmente denotado por $b(t)$, es el precio mas alto que un comprador pagará por un bien.
- Brecha (*spread* en inglés), comúnmente denotado por $s(t)$, es la diferencia entre el precio de venta y el de compra, es decir,

$$s(t) = a(t) - b(t). \tag{2.1}$$

- Precio medio (*mid price* en inglés), comúnmente denotado por $m(t)$, es el promedio entre el precio de venta y el de compra, es decir,

$$m(t) = \frac{a(t) + b(t)}{2}. \quad (2.2)$$

- La volatilidad es una medida estadística del cambio en el precio de un instrumento financiero.

Otro concepto muy referido en la literatura es la hipótesis de los mercados eficientes, una idea propuesta por Eugene Fama [3], que hace referencia al cómo los precios de un bien reflejan la información disponible sobre el mismo. Esta hipótesis tiene tres formas: débil, semifuerte y fuerte. La forma débil supone que el precio actual de los bienes refleja el historial de precios de los mismos, por lo tanto, bajo esta hipótesis, no es posible aumentar los rendimientos mediante el análisis de series de tiempo. En la forma semifuerte se asume que el precio actual de los bienes además de reflejar el historial de precios, refleja también toda la información pública relacionada al bien, de modo que, la única forma de aumentar los rendimientos es mediante información privilegiada. Finalmente, en la forma fuerte de la hipótesis de los mercados eficientes se asume que el precio de un bien refleja toda la información existente del mismo, por lo tanto, no existe forma alguna de aumentar los rendimientos ya que estos son esencialmente aleatorios.

En los mercados financieros reales existen muchos tipos de órdenes, sin embargo, la mayoría de los modelos consideran solo tres tipos básicos de órdenes [18, 19, 8, 23, 10, 14, 4], los cuales son:

- Orden límite, estas órdenes representan la intención de los comerciantes para comprar o vender una cantidad específica de bienes a un precio específico. Estas órdenes pueden entenderse como ofertas, pues representan el deseo de un comerciante de realizar una transacción muy específica. sin embargo, la culminación de dicha transacción no esta asegurada. Las órdenes límite permanecen en el libro por tiempo indefinido, hasta ser canceladas o ejecutadas.
- Orden a mercado, son órdenes para comprar o vender bienes de forma inmediata al precio disponible en el mercado. Estas órdenes representan las transacciones de compraventa.
- Orden de cancelación, estas órdenes cancelan órdenes límite del libro. Estas órdenes no representan transacciones y se dan por ejemplo, cuando un comerciante ya no desea esperar a que su orden límite sea ejecutada.

Estas definiciones y una lista más extensa sobre los tipos de órdenes existentes puede ser encontrada en [6].

2.1.1. Propiedades estadísticas de los libros de órdenes

La digitalización de los mercados financieros ha facilitado el acceso a la información de los mismos. Esto ha permitido observar y analizar ciertas características dentro de la dinámica interna de los libros de órdenes.

En [6] podemos encontrar características que nos podrían ayudar a construir modelos de libros de órdenes mas elaborados, características como los intervalos de tiempo entre órdenes a mercado, los cuales tienen distribuciones que se asemejan a una distribución tipo Weibull [16] o también una distribución q-exponencial [12]. La caracterización del volumen de las órdenes límite se suele proponer como una distribución tipo ley de potencias [15, 23], mientras que la distribución de órdenes límite asemeja también a una ley de potencias alrededor de los precios de compra y venta [10]. Tal como se muestra en [4] el tiempo que tarda una orden en ser ejecutada o cancelada también asemeja a una ley de potencias.

De igual forma, el acceso a estos sistemas a permitido observar fenómenos como la zona con mayor concentración de órdenes límite, la cual está lejos de los precios de compra y venta [10] así como la diferencia en la actividad financiera al inicio y al final del día [2].

El acceso a la información de estos sistemas a permitido estudiar cosas como el número total de órdenes límite que existen a una distancia Δp de los precios de compra y venta como un indicador de la liquidez del mercado [23] y el cambio en el precio de un bien debido a la ejecución de una orden a mercado [1].

2.1.2. Hechos estilizados

La dinámica de los mercados financieros puede diferir mucho entre uno y otro, debido a factores como el tipo de instrumento que se comercie, el país y el año que se estudie. A pesar de eso, existen una serie de características empíricas frecuentemente observadas en las series de tiempo financieras, estas características se suelen llamar hechos estilizados o *stylized facts*. Entre las más comunes tenemos [1]:

- **Distribución de cola pesada para los rendimientos.** Se ha observado que los rendimientos y rendimientos logarítmicos tienen este tipo de distribución.
- **Ausencia de autocorrelación lineal entre los rendimientos.** Se ha observado que la función de autocorrelación entre los rendimientos sucesivos se aproxima rápidamente a 0 y se mantiene con valores insignificantes [13, 19, 18]. Este hecho se suele considerar una evidencia de la hipótesis de mercados eficientes, pues de haber una correlación significativa, entonces sería posible extraer una ganancia sistemática del mercado. En datos de alta frecuencia se suele observar una autocorrelación negativa en los primeros desfases, este hecho se atribuye al fenómeno llamado *bid-ask bounce* [17].
- **Agrupamiento de volatilidad.** Este fenómeno se refiere a la persistencia o lento decaimiento de la autocorrelación lineal del cuadrado o valor absoluto de los

rendimientos. Esta autocorrelación implica un cierto grado de predictibilidad en la amplitud de los rendimientos, y a menudo se interpreta como una correlación en la volatilidad de los rendimientos y no sobre los rendimientos mismos [17]. Gráficamente podemos notar este hecho cómo una agrupación de periodos de alta volatilidad.

- **Asimetría en la distribución de rendimientos.** Se ha observado que los rendimientos negativos grandes son más frecuentes que los positivos [19].
- **Normalidad agregada.** Se ha observado que al aumentar la escala de tiempo con la cual se calculan los rendimientos, la propiedad de cola larga se vuelve menos pronunciada [1].

2.2. Modelos

Los modelos de libros de órdenes son representaciones simplificadas de la dinámica interna de los mercados financieros. A nivel fundamental buscan proveer algo de entendimiento acerca de cómo las características microscópicas de estos sistemas afectan a las macroscópicas, como lo pueden ser la liquidez, la formación de precios, entre otros. La mayoría de los modelos en la literatura pueden clasificarse en una de dos categorías, los modelos estocásticos y los basados en agentes, de acuerdo a cómo estos tratan de aproximarse a la dinámica de estos sistemas.

2.2.1. Modelos basados en agentes

Los modelos basados en agentes o también llamados perfectamente racionales tratan de caracterizar matemáticamente el comportamiento de uno o más tipos de inversores, a los cuales llaman agentes. Estos agentes “toman decisiones” de acuerdo a su caracterización y la información que tienen. Estos modelos suelen hacer suposiciones auxiliares sobre el comportamiento de los agentes.

En [19] se propone un modelo en donde se consideran dos tipos de agentes basados en el comportamiento de inversores reales. En este trabajo se reproducen algunos de los hechos estilizados, y se estudia el impacto sobre estos al variar la población de los agentes o los parámetros que caracterizan a un mismo tipo de agente, por otro lado en [14] se propone un modelo en donde se asumen dos tipos de agentes, unos que traten siempre de maximizar sus ganancias y otros que suben órdenes de forma aleatoria. En este trabajo se estudia el impacto sobre el mercado al variar la población de dichos agentes.

2.2.2. Modelos estocásticos

Los modelos estocásticos o de cero inteligencia imponen una serie de condiciones a un conjunto de procesos estocásticos con la finalidad de recrear la dinámica de las

órdenes dentro del libro, sin tomar en cuenta el proceso de la toma de decisiones que implica.

En [8] se propone un modelo de agentes, en donde los agentes toman decisiones de forma aleatoria. Su finalidad era comparar los resultados obtenidos con datos reales, teniendo como conclusión que este tipo de modelos, a pesar de su simpleza, son capaces de reproducir ciertas características de sistemas reales. Por otro lado en [18] se propone un modelo a tiempo continuo, cuyos parámetros están basados en observaciones de datos de alta frecuencia. Este modelo está pensado en ser lo suficientemente sencillo como para ser tratado de forma analítica, pero a la vez capaz de reproducir algunas características empíricas de los libros de órdenes, su objetivo es reproducir la dinámica de los libros de órdenes a tiempos cortos, así como estudiar la predictibilidad de ciertos eventos. En un trabajo más reciente [5], se propone un modelo en donde el flujo de órdenes se modela como un conjunto de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, y se busca hacer predicciones sobre características básicas del mercado, como la volatilidad. Al final se concluye que el modelo tiene muchas limitaciones.

En la sección 3.3 proponemos un modelo estocástico capaz de reproducir cualitativamente algunos de los hechos más reportados en la literatura, pero a su vez lo suficientemente sencillo como para ser tratado analíticamente, hasta el punto de obtener relaciones de recurrencia para los valores esperados de los precios de compra y venta.

Capítulo 3

Metodología

3.1. Procesos estocásticos e irreversibilidad

3.1.1. Cadenas de Markov

Las cadenas de Markov fueron introducidas por el matemático ruso Andrey Markov alrededor de 1905. Su intención era crear un modelo probabilístico para analizar la frecuencia con la que aparecen las vocales en poemas y textos literarios. El éxito del modelo propuesto por Markov radica en que es lo suficientemente complejo como para describir ciertas características no triviales de algunos sistemas científicos y sociales, pero al mismo tiempo es lo suficientemente sencillo para ser analizado matemáticamente. Repasaremos los conceptos básicos de las cadenas de Markov siguiendo las definiciones hechas en [11].

Dado que las cadenas de Markov son un tipo de proceso estocástico, empezaremos definiendo estos procesos.

Definición. Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $\{X_t : t \in T\}$ parametrizadas por un conjunto T , llamado espacio parametral, en donde las variables toman valores dentro de un conjunto S llamado espacio de estados.

Definición. Se dice que un proceso estocástico discreto $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cadena de Markov si cumple con la condición de Markov,

$$\mathbb{P}(X_n = x_{n+1} | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n), \quad (3.1)$$

esto quiere decir que el estado de la cadena al tiempo n depende únicamente de su estado en el tiempo inmediatamente anterior.

Probabilidad de Transición. Sean i y j dos estados de una cadena de Markov. A la probabilidad,

$$k_{ij}(n, n+1) \equiv \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i), \quad (3.2)$$

se le denomina probabilidad de transición y representa la probabilidad de pasar del estado i al j en el salto de tiempo de n a $n + 1$. Cuando la probabilidad $k_{ij}(n, n + 1)$ no depende de n , se dice que la cadena es estacionaria u homogénea en el tiempo, de modo que la notación se puede simplificar como k_{ij} , para cadenas de Markov estacionarias.

Distribución de probabilidad. De forma general, el estado de una cadena de Markov a tiempo n se denota mediante un vector llamado distribución, que es de la forma:

$$\rho_n = (\rho_{n,0}, \rho_{n,1}, \dots), \quad \text{tal que,} \quad \sum_i \rho_{n,i} = 1, \quad (3.3)$$

en donde la componente $\rho_{n,i}$ representa la probabilidad de que la cadena se encuentre en el estado i al tiempo n . Adicionalmente la evolución de una cadena de Markov se puede dar a partir de un estado inicial i bien definido, o de forma más general, partiendo de una distribución inicial ρ_0 .

Teorema de Probabilidad total. Sea M un espacio muestral, $\{A_i\}_{i=1}^n$ una partición sobre M y $B \subset M$, entonces,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i), \quad (3.4)$$

es decir, la probabilidad de que un evento suceda en cualquier parte de una partición es igual a la probabilidad de que suceda un elemento de la partición multiplicado por la probabilidad condicional del evento B dado el elemento A de la partición.

Proposición (Ecuación de Chapman-Kolmogorov). Para cualesquiera pares de números enteros r y n , tales que, $0 \leq r \leq n$ y para cualesquiera dos estados i y j , se cumple,

$$k_{ij}(n) = \sum_k k_{ik}(r)k_{kj}(n - r). \quad (3.5)$$

Demostración. Por el teorema de probabilidad total y la propiedad de Markov,

$$\begin{aligned} k_{ij}(n) &= \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) \\ &= \sum_k \frac{\mathbb{P}(X_n = j, X_r = k, X_0 = i)}{\mathbb{P}(X_0 = i)} \\ &= \sum_k \mathbb{P}(X_n = j | X_r = k) \mathbb{P}(X_r = k | X_0 = i) \\ &= \sum_k k_{kj}(n - r) k_{ik}(r). \end{aligned}$$

Proposición La probabilidad de transición en n pasos está dada por la entrada (i, j) de la n -ésima potencia de la matriz de transición K , es decir,

$$k_{ij}(n) = (K^n)_{ij}. \quad (3.6)$$

Demostración. Aplicando el teorema de Chapman-Kolmogorov, tenemos,

$$\begin{aligned} k_{ij}(n) &= \sum_{i_1} k_{ii_1}(1)k_{i_1j}(n-1) \\ &= \sum_{i_1, i_2} k_{ii_1}(1)k_{i_1i_2}(1)k_{i_2j}(n-2) \\ &\quad \vdots \\ &= \sum_{i_1 \dots i_{n-1}} k_{ii_1}(1) \cdots k_{i_{n-1}j}(1) \\ &= (K^n)_{ij}. \end{aligned}$$

Definición. Sea $\{X_t : t \in T\}$ un cadena de Markov con espacio de estados S y sea $i \in S$ un estado cualquiera. Definimos el periodo del estado i como

$$d(i) = \text{m.c.d}\{n \geq 1 : k_{ii}(n) > 0\}, \quad (3.7)$$

en donde m.c.d significa máximo común divisor. Si $d(i) = 1$, se dice que el estado es aperiódico.

Definición. Se dice que una cadena de Markov con espacio de estados S es irreducible si para cualesquiera dos estados $i, j \in S$ se cumple

$$k_{ij}(n) > 0, \quad (3.8)$$

es decir, es posible llegar de un estado cualquiera i a otro estado cualquiera j , en un número finito de pasos.

Proposición En una cadena de Markov irreducible, todos los estados tienen el mismo periodo, por lo que, si un estado tiene periodo k se dice que la cadena tiene periodo k .

Evolución de una distribución

Una matriz de transición establece una dinámica en el conjunto de las distribuciones, sobre el espacio de estados de la correspondiente cadena de Markov. En palabras más simples, la distribución de probabilidades a tiempo 1, dada por ρ_1 , está relacionada con

la distribución inicial ρ_0 a través de la matriz de transición, de la forma:

$$\begin{aligned}\rho_{1,j} &= \mathbb{P}(X_1 = j) \\ &= \sum_i \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i) \mathbb{P}(X_0 = i) \\ &= \sum_i \rho_{0,i} k_{ij},\end{aligned}\tag{3.9}$$

o bien en forma matricial,

$$\rho_1 = \rho_0 K.$$

De forma general para $n \geq 1$,

$$\rho_n = \rho_{n-1} K = \rho_0 K^n.\tag{3.10}$$

Es decir, tenemos una sucesión infinita de distribuciones de probabilidad ρ_i , en donde todas salvo la primera están relacionadas con la anterior mediante la matriz de transición.

Estacionaridad

En procesos estocásticos existen distintos tipos de estacionaridad, pero todas se refieren al grado con el cual el modelo probabilístico de una variable aleatoria indexada en el tiempo permanece “constante”. Entre los diferentes tipos de estacionaridad tenemos:

- Estacionaridad fuerte o de orden N [22]. Sea $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ un proceso estocástico, se dice que el proceso es fuertemente estacionario si,

$$\mathbb{P}((X_1, \dots, X_k) = (x_1, \dots, x_k)) = \mathbb{P}((X_t, \dots, X_{t+k}) = (x_1, \dots, x_k)),\tag{3.11}$$

es decir, la probabilidad conjunta de una trayectoria es invariante ante corrimientos de tiempo.

- Estacionaridad de primer orden [9]. Se dice que un proceso estocástico $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ tiene estacionaridad de primer orden, si su densidad de probabilidad no depende del tiempo, es decir,

$$\mathbb{P}(X_t = x) = \mathbb{P}(X_{t'} = x), \quad \forall t, t'.\tag{3.12}$$

- Estacionaridad débil [22]. Se dice que un proceso estocástico $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ tiene estacionaridad débil, si su valor esperado y autocovarianza son constantes, es decir,

$$\langle X \rangle = \mu,\tag{3.13}$$

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+l}) = \gamma_l.\tag{3.14}$$

- Estacionaridad en cadenas de Markov [11]. Se dice que una cadena de Markov con matriz de transición $K = (k_{ij})$ y distribución de probabilidad $\pi = (\pi_0, \dots)$ es estacionaria, si cumple con la ecuación:

$$\pi_j = \sum_i \pi_i k_{i,j}.\tag{3.15}$$

Distribución límite

Como ya se mencionó antes, la matriz de transición K determina una sucesión de distribuciones de probabilidad $\{\rho_i\}_{i=1}^{\infty}$, sobre el espacio de estados de la correspondiente cadena de Markov. Bajo ciertas condiciones, estas sucesiones pueden converger, por lo que decimos que una distribución de probabilidades converge a una distribución límite si,

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n. \quad (3.16)$$

La distribución límite es estacionaria para cadenas de Markov ergodicas, es decir cadenas de Markov en las cuales se puede pasar de un estado i a un estado cualquiera j en un número finito de pasos.

Definición. Sea K una matriz de transición de una cadena de Markov y sea ρ_0 su distribución inicial. Decimos que su distribución límite es el vector dado por:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_0 K^n, \quad (3.17)$$

cuyas componentes están dadas por:

$$\rho_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i \rho_{0,i} k_{ij}(n). \quad (3.18)$$

3.1.2. Cadenas de Markov abiertas

Estudiaremos las cadenas de Markov abiertas siguiendo el trabajo [20]. Sea S un conjunto finito con cardinalidad $\#S = s$, el espacio de estados de una cadena de Markov irreducible y aperiódica. Consideremos que sobre este espacio de estados transita una colección de partículas siguiendo con la matriz de transición $Q : S \times S \rightarrow [0, 1]$, tal que $\sum_j q_{ij} \leq 1$, con la desigualdad estricta cumpliéndose para al menos un $i \in S$. Podemos interpretar estas probabilidades de la siguiente manera, las partículas pueden pasar de un estado i dentro de la cadena, a un estado j también dentro, con probabilidad q_{ij} o bien pueden salir de la cadena con probabilidad $e_i = 1 - \sum_j q_{ij}$. Por último definiremos $\{\mathbf{J}^t : t \in \mathbb{N}\}$ como una sucesión de vectores aleatorios que toman valores valores en S , que representarán el ingreso de partículas a la cadena. Decimos que $(S, Q, \{\mathbf{J}^t : t \in \mathbb{N}\})$ es una cadena de Markov abierta con espacio de estados S , matriz de transición Q y protocolo de entrada $\{\mathbf{J}^t : t \in \mathbb{N}\}$. La Figura 3.1 ilustra el caso más general de una cadena de Markov abierta de 3 estados, en la cual podemos observar los protocolos de entrada J_i , todas las posibles transiciones $q_{i,j}$ y las posibles salidas e_i .

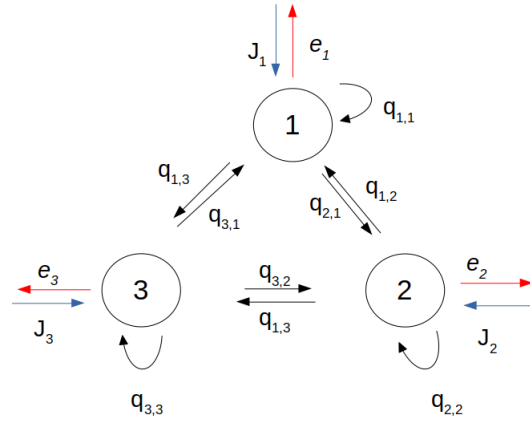


Figura 3.1: Esquema de una cadena de Markov abierta de 3 estados, donde podemos observar los protocolos de entrada J_1, J_2 y J_3 así como todas las posibles transiciones y salidas.

Sea $\{\mathbf{N}^t : t \in \mathbb{N}\}$ la sucesión de vectores aleatorios que representan la distribución de partículas del sistema al tiempo t . Es decir, N_i^t representa el número de partículas en el estado i al tiempo t . En el contexto de cadenas de Markov abiertas se define la evolución de la distribución de partículas en el espacio de estados, partiendo de la distribución inicial \mathbf{N}^0 mediante la ecuación:

$$\mathbf{N}^{t+1} \equiv \mathbf{J}^t + \mathbf{R}^t, \quad (3.19)$$

donde el vector \mathbf{R}^t representa la redistribución interna de las partículas al tiempo t y cuyas componentes están dado por:

$$R_i^t \equiv \sum_{j=1}^s B_{j,i}^t, \quad (3.20)$$

donde $B_{j,i}^t$ representa el número de partículas que pasaron del estado j al i al tiempo t . La Figura 3.2 ilustra esta redistribución.

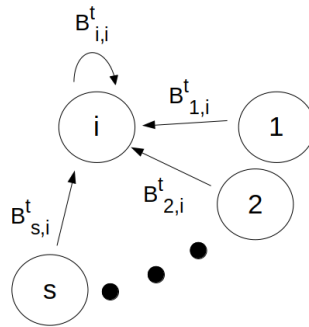


Figura 3.2: Esquema de la redistribución interna de las partículas en una cadena de Markov.

Definamos el vector \mathbf{A}_i^t con componentes,

$$(A_i^t)_j \equiv \begin{cases} B_{i,j} & \text{si } 1 \leq j \leq s \\ N_i - \sum_{j=1}^s B_{i,j} & \text{si } j = s + 1, \end{cases} \quad (3.21)$$

es decir, el vector \mathbf{A}_i^t es una generalización de la redistribución de las N_i partículas que había en el estado i . Las primeras s componentes son la redistribución interna R_i , mientras que la última representa el número de partículas que salieron de la cadena desde el estado i . La Figura 3.3 ilustra esa redistribución generalizada.

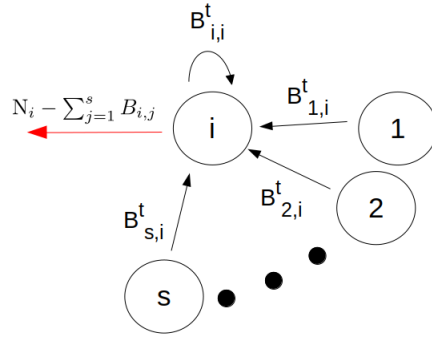


Figura 3.3: Esquema de los elementos que componen al vector \mathbf{A}_i^t .

En cada paso de tiempo, cualquier partícula tiene $s + 1$ posibles transiciones, cada una con su respectiva probabilidad, es decir, cada partícula se comporta como una variable aleatoria categórica. Por lo tanto, el vector \mathbf{A}_i^t es un conjunto de variables aleatorias categóricas, es decir, \mathbf{A}_i^t tiene distribución multinomial con parámetros \mathbf{z}_i y N_i^t , denotada por $\mathbf{A}_i^t \sim \text{multinom}(\mathbf{z}_i, N_i^t)$.

$$(\mathbf{z}_i)_j \equiv \begin{cases} q_{i,j} & \text{si } 1 \leq j \leq s \\ e_i & \text{si } j = s + 1, \end{cases} \quad (3.22)$$

con

$$e_i = 1 - \sum_{j=1}^s q_{i,j}. \quad (3.23)$$

Evolución de la distribución

Para obtener la matriz estocástica que gobierna el comportamiento del proceso $\{\mathbf{N}^t : t \in \mathbb{N}\}$, definimos $p_t(\mathbf{n})$ como la probabilidad asociada al estado $\mathbf{N}^t = \mathbf{n}$, es decir,

$$p_t(\mathbf{n}) \equiv \mathbb{P}(\mathbf{N}^t = \mathbf{n}), \quad (3.24)$$

nos referiremos a $p_t(\mathbf{n})$ cómo **la distribución sobre el espacio de estados**, la cual puede escribirse como:

$$\begin{aligned} p_{t+1}(\mathbf{n}) &= \mathbb{P}(\mathbf{N}^{t+1} = \mathbf{n}) \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^s} \mathbb{P}(\mathbf{N}^t = \mathbf{k}) \mathbb{P}(\mathbf{N}^{t+1} = \mathbf{n} | \mathbf{N}^t = \mathbf{k}) \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^s} p_t(\mathbf{k}) \mathbb{P}(\mathbf{N}^{t+1} = \mathbf{n} | \mathbf{N}^t = \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Llamaremos propagador a la probabilidad condicional de (3.25) y la denotaremos por $K(\mathbf{k}, \mathbf{n})$, es decir,

$$K(\mathbf{k}, \mathbf{n}) \equiv \mathbb{P}(\mathbf{N}^{t+1} = \mathbf{n} | \mathbf{N}^t = \mathbf{k}). \quad (3.26)$$

Utilizando la ec. 3.19 podemos reescribir la ec. 3.26 como,

$$K(\mathbf{k}, \mathbf{n}) \equiv \mathbb{P}(\mathbf{J}^t + \mathbf{R}^t = \mathbf{n}), \quad (3.27)$$

dejando la dependencia de K sobre \mathbf{k} implícita dentro del vector \mathbf{R}^t , ya que éste depende solo de la distribución de las partículas al tiempo t , por lo tanto,

$$p_{t+1}(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^s} p_t(\mathbf{k}) K(\mathbf{k}, \mathbf{n}). \quad (3.28)$$

Suponiendo que \mathbf{J}^t y \mathbf{R}^t son independientes, entonces, la probabilidad conjunta es el producto de las probabilidades, es decir,

$$\mathbb{P}(\mathbf{J}^t + \mathbf{R}^t = \mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{j} + \mathbf{r} = \mathbf{n}} \mathbb{P}(\mathbf{J}^t = \mathbf{j}; \mathbf{R}^t = \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{j} + \mathbf{r} = \mathbf{n}} \mathbb{P}(\mathbf{J}^t = \mathbf{j}) \mathbb{P}(\mathbf{R}^t = \mathbf{r}), \quad (3.29)$$

por lo que podemos reescribir el propagador K como:

$$K(\mathbf{k}, \mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{j} + \mathbf{r} = \mathbf{n}} \mathbb{P}(\mathbf{J}^t = \mathbf{j}) \mathbb{P}(\mathbf{R}^t = \mathbf{r}). \quad (3.30)$$

Funciones generadoras

Para resolver p_t utilizaremos la técnica de las funciones generadoras de momentos (FGM). La función generadora de momentos de \mathbf{N}^t denotada por $G_t : \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ se define como:

$$\mathcal{G}_t(\boldsymbol{\alpha}) \equiv \mathbb{E} \left[e^{\mathbf{N}^t \boldsymbol{\alpha}^T} \right] = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^s} p_t(\mathbf{n}) e^{\mathbf{n} \boldsymbol{\alpha}^T}, \quad (3.31)$$

análogamente definimos:

$$\mathcal{F}_t(\boldsymbol{\alpha}) \equiv \mathbb{E} \left[e^{\mathbf{J}^t \boldsymbol{\alpha}^T} \right] = \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}_0^s} \mathbb{P}(\mathbf{J}^t = \mathbf{j}) e^{\mathbf{j} \boldsymbol{\alpha}^T}, \quad (3.32a)$$

$$\mathcal{H}_t(\boldsymbol{\alpha}) \equiv \mathbb{E} \left[e^{\mathbf{R}^t \boldsymbol{\alpha}^T} \right] = \sum_{\mathbf{r} \in \mathbb{N}_0^s} \mathbb{P}(\mathbf{R}^t = \mathbf{r}) e^{\mathbf{r} \boldsymbol{\alpha}^T}. \quad (3.32b)$$

Nótese que hemos omitido el subíndice en la función generadora \mathcal{H} debido a que los vectores de redistribución \mathbf{R}^t y $\mathbf{R}^{t'}$ son independientes y tienen la misma distribución, por lo tanto, tienen la misma FGM.

Usando (3.32b) y (3.32a) podemos reescribir,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{t+1}(\boldsymbol{\alpha}) &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^s} p_{t+1}(\mathbf{n}) e^{\mathbf{n}\boldsymbol{\alpha}^T} \\
&= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^s} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^s} p_t(\mathbf{k}) K(\mathbf{k}, \mathbf{n}) e^{\mathbf{n}\boldsymbol{\alpha}^T} \\
&= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^s} \sum_{\mathbf{r} \in \mathbb{N}_0^s} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}_0^s} p_t(\mathbf{k}) \mathbb{P}(\mathbf{R}^t = \mathbf{r}) \mathbb{P}(\mathbf{J}^t = \mathbf{j}) e^{(\mathbf{j}+\mathbf{r})\boldsymbol{\alpha}^T} \\
&= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^s} p_t(\mathbf{k}) \mathcal{F}_t(\boldsymbol{\alpha}) \mathcal{H}(\boldsymbol{\alpha}). \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Para resolver \mathcal{H} empezamos por considerar el vector aleatorio \mathbf{X} definido como,

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^s \mathbf{A}_i^t, \tag{3.34}$$

que representa la redistribución de las partículas que había en el estado i , cuya función generadora de momentos está dada por:

$$W(\mathbf{w}) \equiv \mathbb{E} \left[e^{\sum_{i=1}^s \mathbf{A}_i^t \mathbf{w}^T} \right] = \prod_{i=1}^s \mathbb{E} \left[e^{\mathbf{A}_i^t \mathbf{w}^T} \right], \tag{3.35}$$

de donde podemos notar que el término $\mathbb{E} \left[e^{\mathbf{A}_i^t \mathbf{w}^T} \right]$ es una FGM. La cuál resolveremos aprovechando el hecho de que $\mathbf{A}_i^t \sim \text{multinom}(z_i, k_i)$, por lo que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[e^{\mathbf{A}_i^t \mathbf{w}^T} \right] &= \sum_{\sum a_{i,j} = k_i} \frac{k_i!}{\prod_{j=1}^s a_{i,j}} \prod_{j=1}^s z_{i,j}^{a_{i,j}} e^{w_j a_{i,j}} \\
&= \sum_{\sum a_{i,j} = k_i} \frac{k_i!}{\prod_{j=1}^s a_{i,j}} \prod_{j=1}^s [z_{i,j} e^{w_j}]^{a_{i,j}}. \tag{3.36}
\end{aligned}$$

De esta última expresión podemos identificar la última suma como el desarrollo del multinomio,

$$\left(\sum_{j=1}^{s+1} z_{i,j} e^{w_j} \right)^{k_i} = \left(e^{w_{s+1}} e_i + \sum_{j=1}^s q_{i,j} e^{w_j} \right)^{k_i}, \tag{3.37}$$

por lo tanto,

$$W(\mathbf{w}) = \prod_{i=1}^s \left(e^{w_{s+1}} e_i + \sum_{j=1}^s q_{i,j} e^{w_j} \right)^{k_i}. \tag{3.38}$$

Ahora estableceremos la relación entre \mathcal{H} y W ,

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbb{E} \left[e^{\mathbf{R}^t \boldsymbol{\alpha}^T} \right] \quad (3.39)$$

$$= \mathbb{E} \left[e^{\sum_{j=1}^s R_j^t \alpha_j} \right] \quad (3.40)$$

$$= \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^s e^{\sum_{j=1}^s B_{i,j}^t \alpha_j} \right] \quad (3.41)$$

$$= \mathbb{E} \left[e^{\sum_{i,j=1}^s B_{i,j}^t \alpha_j} \right], \quad (3.42)$$

si definimos $\boldsymbol{\alpha}' \equiv (\alpha_1, \dots, \alpha_s, 0)$, entonces,

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\alpha}) = W(\boldsymbol{\alpha}'), \quad (3.43)$$

es decir,

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\alpha}) = \prod_{i=1}^s \left(e_i + \sum_{j=1}^s q_{i,j} e^{\alpha_j} \right)^{k_i}. \quad (3.44)$$

Definiendo

$$H \equiv \sum_{j=1}^s H_j, \quad (3.45)$$

con

$$H_i = \ln \left(e_i + \sum_{j=1}^s q_{i,j} e^{\alpha_j} \right), \quad (3.46)$$

llegamos a

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\alpha}) = e^{kH^T(\boldsymbol{\alpha})}. \quad (3.47)$$

Sustituyendo (3.47) en (3.33), tenemos,

$$\mathcal{G}_{t+1}(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^s} p_t(\mathbf{k}) \mathcal{F}_t(\boldsymbol{\alpha}) e^{kH^T(\boldsymbol{\alpha})}, \quad (3.48)$$

reescribiendo la suma sobre \mathbf{k} como una función generatriz, llegamos a la relación de recurrencia,

$$\mathcal{G}_{t+1}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{F}_t(\boldsymbol{\alpha}) \mathcal{G}_t(H(\boldsymbol{\alpha})), \quad (3.49)$$

cuya solución es,

$$\mathcal{G}_{t+1}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{G}_0(H^{(t)}(\boldsymbol{\alpha})) \prod_{r=0}^{t-1} \mathcal{F}_{t-r}(H^{(r)}(\boldsymbol{\alpha})), \quad (3.50)$$

donde el supraíndice entre paréntesis representa la composición de funciones, es decir $H^{(r)} = H \bullet \dots \bullet H$ r veces. Suponiendo que los vectores $\{\mathbf{J}^t : t \in \mathbb{N}\}$ sean independientes e idénticamente distribuidos, entonces,

$$\mathcal{G}_{t+1}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{G}_0(H^{(t)}(\boldsymbol{\alpha})) \prod_{r=0}^{t-1} \mathcal{F}(H^{(r)}(\boldsymbol{\alpha})), \quad (3.51)$$

cuya solución estacionaria $\mathcal{G}_{\text{stat}}$ está dada por:

$$\mathcal{G}_{\text{stat}}(\boldsymbol{\alpha}) = \prod_{r=0}^{\infty} \mathcal{F}(H^{(r)}(\boldsymbol{\alpha})). \quad (3.52)$$

Cadena de Markov abierta de un solo estado

Consideremos la cadena de Markov abierta de un solo estado representada por el diagrama de la Figura 3.4

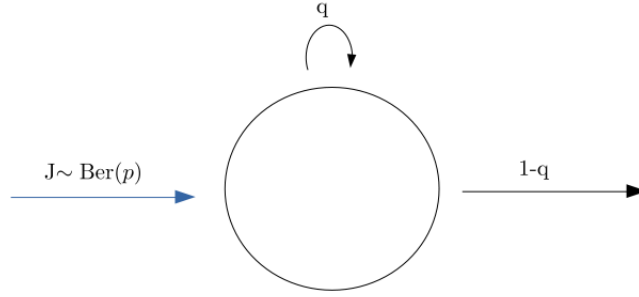


Figura 3.4: Esquema de una cadena de Markov abierta de un solo estado.

Como se muestra en el diagrama, el protocolo de ingreso $\{J^t : t \in \mathbb{N}\}$ consiste en una sucesión de variables aleatorias tipo Bernoulli con parámetro p .

Por (3.33) sabemos que la FGM está dada por:

$$\mathcal{G}_{t+1}(\alpha) = \mathcal{F}_t(\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} p_t(k) \mathcal{H}(\alpha), \quad (3.53)$$

con \mathcal{F}_t dada por:

$$\mathcal{F}_t(\alpha) = \sum_j \mathbb{P}(J = j) e^{j\alpha} = (1 - p + pe^\alpha), \quad (3.54)$$

mientras que \mathcal{H} , está dado por:

$$\mathcal{H}(\alpha) = \sum_r \mathbb{P}(R = r) e^{\alpha r}. \quad (3.55)$$

Al haber solo un estado R se reduce de una variable aleatoria multinomial a una binomial, es decir, $R \sim \text{binom}(k, q)$, por lo que,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\alpha) &= \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} q^r (1-q)^{k-r} e^{\alpha r} \\ &= \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} (1-q)^{k-r} (qe^\alpha)^r \\ &= (1-q + qe^\alpha)^k, \end{aligned} \quad (3.56)$$

es decir,

$$\mathcal{H}(\alpha) = (1 - q + qe^\alpha)^k. \quad (3.57)$$

Sustituyendo (3.57) y (3.54) en (3.53), tenemos,

$$\mathcal{G}_{t+1}(\alpha) = (1 - p + pe^\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} p_t(k)(1 - q - qe^\alpha)^k, \quad (3.58)$$

haciendo $H = \ln(1 - q - qe^\alpha)$, tenemos,

$$\mathcal{G}_{t+1}(\alpha) = (1 - p + pe^\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} p_t(k)e^{Hk}, \quad (3.59)$$

identificando la suma como una FGM obtenemos la relación de recurrencia,

$$\mathcal{G}_{t+1}(\alpha) = (1 - p + pe^\alpha)G_t(H(\alpha)), \quad (3.60)$$

cuya solución es,

$$\mathcal{G}_t(\alpha) = G_0(H^{(t)}(\alpha)) \prod_{r=0}^{t-1} (1 - pq^r + pq^r e^\alpha), \quad (3.61)$$

con solución estacionaria,

$$\mathcal{G}_{\text{stat}}(\alpha) = \prod_{r=0}^{\infty} (1 - pq^r + pq^r e^\alpha), \quad (3.62)$$

de donde podemos notar que el término entre paréntesis corresponde a la FGM de una variable tipo Bernoulli con parámetro pq^r , entonces,

$$\mathbf{N}^t = \sum_{r=0}^{\infty} X_r, \quad (3.63)$$

con $X_r \sim \text{Ber}(pq^r)$, con esto podemos calcular el valor esperado de N^t ,

$$\mathbb{E}[\mathbf{N}^t] = \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{E}[X_r] = \sum_{r=0}^{\infty} pq^r = \frac{p}{1 - q}, \quad (3.64)$$

y como las variables X_r son independientes, entonces,

$$\text{Var}(N^t) = \sum_{r=0}^{\infty} \text{Var}(X_r) = \sum_{r=0}^{\infty} pq^r(1 - pq^r) = \frac{p}{1 - q} + \frac{p^2}{1 - q^2}. \quad (3.65)$$

3.1.3. Entropía

La entropía es un concepto que nació en la física, sin embargo, el concepto se extendió a otras áreas de la ciencia. En teoría de la información, para toda distribución de probabilidad se define una cantidad llamada entropía, esta cantidad es usada como una forma de medir la información. Dentro de la teoría de la información podemos encontrar más de una definición de entropía, a continuación presentaremos aquellas que utilizaremos, siguiendo las definiciones hechas en [24].

Definición. Sea X una variable aleatoria discreta con espacio de estados \mathcal{X} y densidad de probabilidad $p(x) = \mathbb{P}(X = x)$, $x \in \mathcal{X}$. Definimos la entropía de Shannon como:

$$H(X) \equiv - \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \ln(p(x)). \quad (3.66)$$

Esta entropía es una medida de la incertidumbre de una variable aleatoria y es la más relacionada con la entropía física, ya que al multiplicar por la constante de Boltzmann k_b y hacer $p(x) = 1/\Omega$, donde Ω es representa el número de estados posible de un sistema físico, recuperamos la entropía Boltzmann,

$$H = k_b \ln(\Omega). \quad (3.67)$$

Definición. Sean $\{X_i\}_{i=1}^n$ un conjunto de n variables aleatorias discretas con espacio de estados \mathcal{X}_i respectivamente y densidad de probabilidad conjunta $p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}((X_1, X_2, \dots, X_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n))$. Definimos la entropía conjunta como:

$$H(X_1, X_2, \dots, X_n) \equiv - \sum_{x_1 \in \mathcal{X}_1} \cdots \sum_{x_n \in \mathcal{X}_n} p(x_1, x_2, \dots, x_n) \ln [p(x_1, x_2, \dots, x_n)]. \quad (3.68)$$

Definición. Sean X y Y dos variables aleatorias discretas con el mismo espacio de estados \mathcal{X} y con densidades de probabilidad $p(x) = \mathbb{P}(X = x)$, $x \in \mathcal{X}$ y $q(x) = \mathbb{P}(Y = x)$, $x \in \mathcal{X}$. Definimos la entropía relativa como:

$$D(p||q) \equiv - \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \ln \left(\frac{p(x)}{q(x)} \right). \quad (3.69)$$

También llamada divergencia Kullback-Leibler, es una medida de la diferencia entre dos distribuciones.

Entropía en procesos estocásticos

Dado que en los procesos estocásticos tenemos una sucesión infinita de variables aleatorias, resulta natural preguntarse a qué ritmo crece la entropía de un conjunto infinito de variables aleatorias. La tasa de entropía se define como ese ritmo de crecimiento.

Definición. Sea $\{X_i\}_{i=1}^n$ una sucesión de variables aleatorias. Definimos la tasa de entropía como [24]:

$$h \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (3.70)$$

La tasa de entropía es también una medida de la entropía por símbolo de un conjunto de variables aleatorias.

Definición. Sea $\{X_i\}_{i=1}^n$ una sucesión de variables aleatorias, $p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}((X_1, X_2, \dots, X_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n))$ la probabilidad de ocurrencia de una trayectoria y $p_R(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}((X_1, X_2, \dots, X_n) = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_1))$ la probabilidad de ocurrencia de la trayectoria en sentido opuesto. Definimos la tasa de producción de entropía [21] como:

$$e_p \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{x_1 \in \mathcal{X}_1} \cdots \sum_{x_n \in \mathcal{X}_n} p(x_1, x_2, \dots, x_n) \ln \left[\frac{p(x_1, x_2, \dots, x_n)}{p_R(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right]. \quad (3.71)$$

Esta es una cantidad que cuantifica el grado de irreversibilidad de un proceso estocástico y puede ser calculada como:

$$e_p = h_R - h, \quad (3.72)$$

donde

$$h_R \equiv - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{x_1 \in \mathcal{X}_1} \cdots \sum_{x_n \in \mathcal{X}_n} p(x_1, x_2, \dots, x_n) \ln [p_R(x_1, x_2, \dots, x_n)]. \quad (3.73)$$

3.1.4. Irreversibilidad

Reversibilidad

El concepto de reversibilidad hace referencia a la posibilidad de revertir un proceso o trayectoria. Su definición depende del contexto y aun así puede variar. Por ejemplo, en procesos estocásticos podemos encontrar las siguientes definiciones:

- Se dice que un proceso estacionario es reversible en el tiempo si $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}((X_1, \dots, X_n) = (x_1, \dots, x_n)) = \mathbb{P}((X_1, \dots, X_n) = (x_n, \dots, x_1)), \quad (3.74)$$

es decir, la probabilidad de ocurrencia de una trayectoria es la misma que la de la trayectoria en sentido opuesto [11].

- En el contexto de cadenas de Markov, se dice que una cadena irreducible y aperiódica es reversible si cumple con la ecuación de balance detallado, [11]

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}. \quad (3.75)$$

Irreversibilidad

Se dice que un sistema es irreversible, si no cumple con su correspondiente condición de reversibilidad. En algunos casos, dada la complejidad de los sistemas, es imposible evaluar la condición de reversibilidad, para ello existen indicadores que nos dan una medida de la reversibilidad de un proceso. En el presente trabajo utilizaremos la tasa de producción de entropía y el índice de irreversibilidad de patrones de tendencia para cuantificar el grado de reversibilidad del sistema propuesto.

Tasa de producción de entropía. Como ya se definió antes, la tasa de entropía está dada por:

$$e_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{x_1 \in \mathcal{X}_1} \cdots \sum_{x_n \in \mathcal{X}_n} p(x_1, x_2, \dots, x_n) \ln \left[\frac{p(x_1, x_2, \dots, x_n)}{p_r(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right], \quad (3.76)$$

sin embargo, en la práctica no es posible evaluar el límite, por lo que aproximaremos la tasa de producción de entropía como:

$$e'_p = \frac{1}{n} \sum_{x_1 \in \mathcal{X}_1} \cdots \sum_{x_n \in \mathcal{X}_n} p(x_1, x_2, \dots, x_n) \ln \left[\frac{p(x_1, x_2, \dots, x_n)}{p_r(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right], \quad (3.77)$$

con $n \in \mathbb{N}$.

Índice de irreversibilidad de patrones de tendencia Como se propone en [7], dada una sucesión $\{r_t : t \in \mathbb{N}\}$, podemos definir la sucesión de tendencia de subida como:

$$U_t^{t+n} \equiv \{r_i : r_i < r_{i+1} \dots < r_{i+n}\}, \quad (3.78)$$

y la sucesión de tendencia de bajada como:

$$D_t^{t+n} \equiv \{r_i : r_i > r_{i+1} \dots > r_{i+n}\}, \quad (3.79)$$

en base a estas sucesiones podemos definir las sucesiones de duración de tendencias, cuyos elementos están dados por,

$$T_{\uparrow}(t) = \text{máx}\{n : r_t < \dots < r_{t+n}\}, \quad (3.80)$$

$$T_{\downarrow}(t) = \text{máx}\{n : r_t > \dots > r_{t+n}\}. \quad (3.81)$$

Definimos el índice de irreversibilidad de patrones de tendencia como:

$$I_T \equiv D(p_{\uparrow} || p_{\downarrow}), \quad (3.82)$$

en donde P_{\uparrow} y P_{\downarrow} son las distribuciones de probabilidad de la duración de las tendencias de subida y bajada respectivamente, es decir, $p_{\uparrow}(n) = \mathbb{P}(T_{\uparrow} = n)$, $p_{\downarrow}(n) = \mathbb{P}(T_{\downarrow} = n)$ con $n \in \mathbb{N}$.

3.2. Series de tiempo financieras

El análisis de series de tiempo financieras se centra en el estudio del valor de los instrumentos financieros o activos como función del tiempo, es una disciplina altamente empírica que cuenta con elementos de incertidumbre, como lo puede ser la volatilidad de los rendimientos [22].

Rendimientos

La mayoría de los estudios financieros involucran los rendimientos de un activo en lugar de los precios del mismo. Esto se debe a que los rendimientos son un indicador adimensional sobre las oportunidades de inversión, por lo que resultan más interesantes para los inversores. Por lo tanto, centraremos nuestro análisis en los rendimientos, concretamente en los rendimientos logarítmicos ya que estos son los que exhiben las propiedades estadísticas más estudiadas.

En economía, existe más de una definición para el rendimiento de un activo, por lo que presentaremos aquellas que utilizaremos a lo largo de este trabajo siguiendo las definiciones hechas en [22], para activos que no pagan dividendos.

- **Rendimiento simple de un activo.** Sea P_t el precio de un activo al tiempo t . Definimos el rendimiento simple de periodo k como:

$$R_t(k) \equiv \frac{P_t - P_{t-k}}{P_{t-k}} = \prod_{j=0}^{k-1} (1 + R_{t-j}) - 1. \quad (3.83)$$

- **Rendimiento logarítmicos.** Sea P_t el precio de un activo al tiempo t . Definimos el rendimiento logarítmico de periodo k como:

$$r_t(k) \equiv \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-k}} \right) = \sum_{j=0}^{k-1} r_{t-j}. \quad (3.84)$$

Por simplicidad, nos referiremos al rendimiento logarítmico de periodo 1 como rendimiento logarítmico, es decir. sin especificar su periodo.

- **Rendimiento absoluto.** Sea P_t el precio de un activo al tiempo t . Definimos el rendimiento absoluto de periodo k como:

$$|r_t(k)| \equiv \left| \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-k}} \right) \right|. \quad (3.85)$$

Función de autocorrelación

En estadística, la función de autocorrelación de una serie de tiempo $\{r_t\}$ nos indica el grado de dependencia lineal entre r_t y sus valores rezagados r_{t-l} , también es utilizada como una herramienta para encontrar patrones repetitivos dentro de una serie de tiempo.

Sea r_t una serie de tiempo débilmente estacionaria. Definimos la autocorrelación de lag- l , como la correlación entre r_t y su valor rezagado r_{t-l} , es decir,

$$\rho_l(r_t, r_{t-l}) = \frac{\text{Cov}(r_t, r_{t-l})}{\sqrt{\text{Var}(r_t)\text{Var}(r_{t-l})}} = \frac{\text{Cov}(r_t, r_{t-l})}{\text{Var}(r_t)}, \quad (3.86)$$

en donde Cov es la covarianza y Var la varianza. Bajo la hipótesis de estacionaridad débil, ρ_l debe ser una función únicamente de l con valores entre $[-1, 1]$, algunas de sus propiedades son las siguientes [22]:

- $p_0 = 1$.
- $p_l = p_{-l}$.
- Se dice que una serie de tiempo no está autocorrelacionada, sí y solo si $\rho_l = 0$ para toda $l > 0$.

Para un conjunto $\{r_t\}_{t=1}^T$ con media \bar{r} la autocorrelación de lag- l se puede estimar como [22]:

$$\hat{\rho}_l(r_t, r_{t-l}) = \frac{\sum (r_t - \bar{r})(r_{t-l} - \bar{r})}{\sum (r_t - \bar{r})^2}, \quad 0 \leq l \leq T - 1. \quad (3.87)$$

3.3. Modelo propuesto

El modelo que proponemos a continuación se trata de un modelo estocástico basado en cadenas de Markov a tiempo discreto para un libro de órdenes de doble subasta. La idea es que el modelo sea lo suficientemente sencillo como para ser tratado analíticamente, pero que a su vez pueda reproducir algunas de las características más observadas en series de tiempo financieras. Además utilizaremos el modelo para estudiar la irreversibilidad en series de tiempo financieras.

3.3.1. Aspectos generales

El modelo representa un libro de órdenes dentro del cual podemos distinguir los tres tipos básicos de órdenes, las cuales son:

- Orden límite
- Orden de cancelación
- Orden a mercado

Para representar el estado del libro construiremos dos vectores acoplados que representarán las órdenes de venta y compra respectivamente. Sean A_p^t y B_p^t el número de órdenes de venta y compra respectivamente a precio p y tiempo t . Definimos los vectores A^t y B^t que representarán estado del sistema a tiempo t como:

$$A^t = (A_1^t, A_2^t, \dots), \quad B^t = (B_1^t, B_2^t, \dots). \quad (3.88)$$

Definimos el precio de compra $a(t)$ y el precio de venta $b(t)$ como:

$$a(t) \equiv \min\{p : A_p^t \neq 0\}, \quad (3.89)$$

$$b(t) \equiv \max\{p : B_p^t \neq 0\}, \quad (3.90)$$

Para describir el flujo de órdenes definiremos los siguientes vectores aleatorios

- Flujo de órdenes límite de venta a tiempo t , representado por el vector aleatorio $I^t(b)$, cuyas componentes están dadas por,

$$I^t(b) \equiv \begin{cases} I_p^t, & p > b(t), \\ 0, & p \leq b(t), \end{cases} \quad (3.91)$$

es decir, el flujo de órdenes límite de venta está restringido a los precios por encima del precio de compra $b(t)$.

- Flujo de órdenes límite de compra a tiempo t , representado por el vector aleatorio $J^t(a)$ cuyas componentes están dadas por,

$$J^t(a) \equiv \begin{cases} J_p^t, & p < a(t), \\ 0, & p \geq a(t), \end{cases} \quad (3.92)$$

es decir, el flujo de órdenes límite de compra está restringido a los precios por debajo del precio de venta $a(t)$.

- Flujo de órdenes de cancelación de venta, representado por el vector C^t cuyas componentes están dadas por,

$$C^t \equiv \begin{cases} C_p^t(A_p^t), & A_p^t \neq 0, \\ 0, & A_p^t = 0, \end{cases} \quad (3.93)$$

- Flujo de órdenes de cancelación de compra, representado por el vector D^t cuyas componentes están dadas por,

$$D^t \equiv \begin{cases} D_p^t(B_p^t), & B_p^t \neq 0, \\ 0, & B_p^t = 0, \end{cases} \quad (3.94)$$

- Flujo de órdenes a mercado de venta representado por M^t cuyas componentes están dadas por,

$$M^t \equiv \begin{cases} M_p^t, & p = a(t), \\ 0, & p \neq a(t), \end{cases} \quad (3.95)$$

- Flujo de órdenes a mercado de compra representado por N^t cuyas componentes están dadas por,

$$N^t \equiv \begin{cases} N_p^t, & p = b(t), \\ 0, & p \neq b(t). \end{cases} \quad (3.96)$$

Ya que hemos establecido los tipos de órdenes a considerar, y que hemos introducido los vectores que representarán el movimiento de las mismas. Proponemos la dinámica a cuatro tiempos dada por:

1. Arribo de órdenes a mercado de compra $t \rightarrow t + 1$:

$$B_p^{t+1} \equiv B_p^t - N_p^t(B_p^t), \quad p = b(t), \quad (3.97)$$

2. Arribo y cancelación de órdenes de compra $t + 1 \rightarrow t + 2$:

$$B^{t+2} \equiv B^{t+1} + J^{t+1} - D^{t+1}. \quad (3.98)$$

3. Arribo de órdenes a mercado de venta $t + 2 \rightarrow t + 3$:

$$A_p^{t+3} \equiv A_p^{t+2} - M_p^{t+2}(A_p^{t+2}), \quad p = a(t + 2), \quad (3.99)$$

4. Arribo y cancelación de órdenes de venta $t + 3 \rightarrow t + 4$:

$$A^{t+4} \equiv A^{t+3} + I^{t+3} - C^{t+3}. \quad (3.100)$$

La dinámica propuesta se ilustra en la Figura 3.5 y se estudiará de forma analítica en el siguiente capítulo.

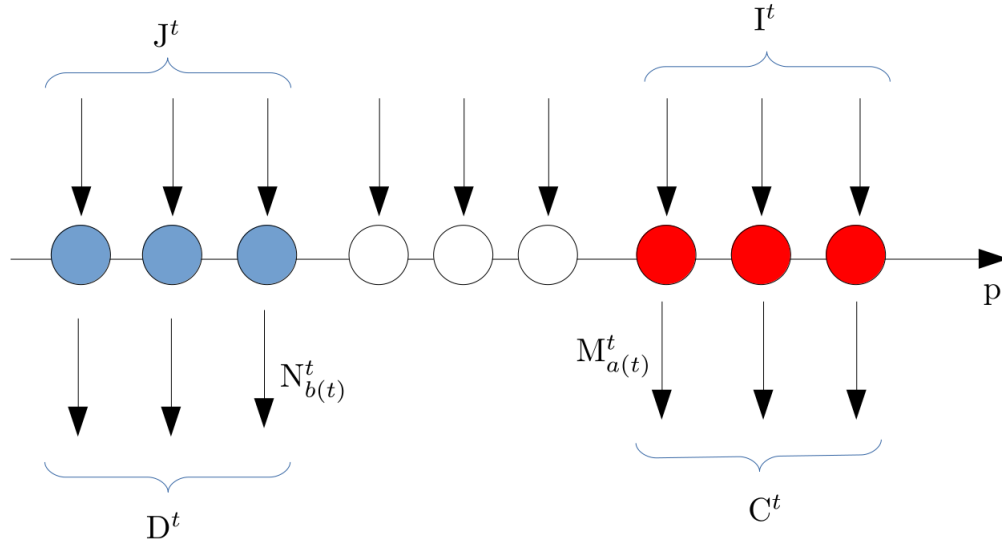


Figura 3.5: Representación esquemática del modelo de libro de órdenes propuesto, utilizando cadenas de Markov abiertas.

3.3.2. Simulación de control

Utilizando la dinámica propuesta se realizaron simulaciones de control, con las siguientes distribuciones

$$\text{(Órdenes límite)} \quad I^t \sim \text{Ber}(q_s) \quad J^t \sim \text{Ber}(q_s) \quad (3.101)$$

$$\text{(Órdenes de cancelación)} \quad C^t \sim \text{Binom}(A^t, p_s) \quad D^t \sim \text{Binom}(B^t, p_s) \quad (3.102)$$

$$\text{(Órdenes a mercado)} \quad M^t \sim \text{Binom}(A_{a(t)}^t, r_s) \quad N^t \sim \text{Binom}(B_{b(t)}^t, r_s) \quad (3.103)$$

con las cuales se evaluó la calidad del modelo y se estimó la irreversibilidad del mismo.

3.3.3. Simulación tipo Markov

Es un hecho que las órdenes a mercado no se comportan como variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, pues el precio de un bien refleja al menos una parte de la información referente al mismo. Partiendo de esta idea modelamos las órdenes a mercado de manera tal que podamos introducir una fuente de irreversibilidad y estudiar su impacto sobre la irreversibilidad en los rendimientos. Para ello implementamos la siguiente cadena de Markov.

Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una cadena de Markov con espacio de estados $s = \{0, 1, \dots, N\}$ y matriz de transición $Q : N \times N \rightarrow [0, 1]$, cuyas componentes están dadas por:

$$Q_{i,j} = \begin{cases} q & \text{si } j = (i + 1) \bmod(N + 1) \\ 1 - q & \text{si } j = (N + i - 1) \bmod(N + 1) \\ 0 & \text{cualquier otro caso,} \end{cases} \quad (3.104)$$

en donde mod es la función modulo. Esta cadena tiene una estructura de anillo como se muestra en la Figura 3.6.

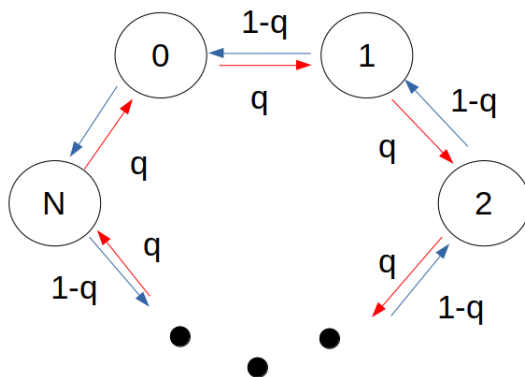


Figura 3.6: Esquema de una cadena de Markov en anillo de N estados.

Esta cadena de Markov tiene la propiedad de ser reversible si $q = \frac{1}{2}$, e irreversible cuando $q \neq \frac{1}{2}$, lo que nos permitirá comparar los resultados para ambos casos. Denotaremos la distribución generada por esta cadena como $X \sim \text{Markov}(N, q)$.

Capítulo 4

Resultados

4.1. Cálculos analíticos

En esta sección estudiaremos el comportamiento conjunto de las variables aleatorias $a(t)$ y $b(t)$ definidas en las ecuaciones 3.89 y 3.90 respectivamente. Al igual que en la Sección 3.1 utilizaremos la técnica de las funciones generadoras de momentos, por lo que empezaremos calculando las matrices de transición o propagadores.

4.1.1. Propagadores

Sea $p_t(x, y) \equiv \mathbb{P}(a(t) = x, b(t) = y)$ la distribución de probabilidad conjunta de las variables aleatorias $a(t)$ y $b(t)$ y sea $p_0(x, y)$ la distribución inicial. En términos de los propagadores, las distribuciones a tiempos posteriores están dadas por:

$$p_{t+1}(x, y) = \sum_{x', y'} k_1(x', y'; x, y) p_t(x', y'), \quad (4.1)$$

$$p_{t+2}(x, y) = \sum_{x', y'} k_2(x', y'; x, y) p_{t+1}(x', y'), \quad (4.2)$$

$$p_{t+3}(x, y) = \sum_{x', y'} k_3(x', y'; x, y) p_{t+2}(x', y'), \quad (4.3)$$

$$p_{t+4}(x, y) = \sum_{x', y'} k_4(x', y'; x, y) p_{t+3}(x', y'), \quad (4.4)$$

donde $t = 4n$, $n \in \mathbb{N}$ y

$$k_1(x', y'; x, y) = \mathbb{P}(a(t+1) = x; b(t+1) = y \mid a(t) = x', b(t) = y'), \quad (4.5)$$

$$k_2(x', y'; x, y) = \mathbb{P}(a(t+2) = x; b(t+2) = y \mid a(t+1) = x', b(t+1) = y'), \quad (4.6)$$

$$k_3(x', y'; x, y) = \mathbb{P}(a(t+3) = x; b(t+3) = y \mid a(t+2) = x', b(t+2) = y'), \quad (4.7)$$

$$k_4(x', y'; x, y) = \mathbb{P}(a(t+4) = x; b(t+4) = y \mid a(t+3) = x', b(t+3) = y'). \quad (4.8)$$

Durante esta sección se buscará una expresión para cada uno de estos propagadores, bajo la suposición de independencia y estacionaridad.

Evolución de t a $t + 1$

Para describir el propagador k_1 correspondiente a la ecuación:

$$B_p^{t+1} = B_p^t - N_p^t(B_p^t), \quad p = b(t), \quad (4.9)$$

notemos que no hay cambio en el vector A^t , es decir $A^{t+1} = A^t$, por lo tanto,

$$k_1 = \mathbb{P}(b(t+1) = y \mid b(t) = y') \mathbb{P}(a(t+1) = x \mid a(t) = x') \quad (4.10)$$

$$= \mathbb{P}(b(t+1) = y \mid b(t) = y') \delta_{x,x'}, \quad (4.11)$$

lo que nos deja con tres posibles relaciones entre y y y' , que son:

1. $y > y'$,
2. $y = y'$,
3. $y < y'$.

Trataremos cada uno de estos casos por separado, bajo las siguientes hipótesis de estacionaridad e independencia entre componentes

- La probabilidad de que no existan órdenes límite de compra en p al tiempo t es constante y está dada por:

$$\mathbb{P}(B_p^t = 0) \equiv \gamma. \quad (4.12)$$

- La probabilidad de que al tiempo t las órdenes a mercado ejecuten todas las órdenes límite de compra existentes en el precio de compra es constante y está dada por:

$$\mathbb{P}(B_{y'}^t = N_p^t) \equiv \mu. \quad (4.13)$$

Análisis de los casos

1. $y > y'$, dado que las órdenes a mercado remueven órdenes límite, el precio de compra no puede crecer, es decir,

$$k_1(x', y'; x, y) = 0, \quad y > y'. \quad (4.14)$$

2. El diagrama de la Figura 4.1 ilustra el caso $y = y'$, para que esto ocurra solo es necesario que en $p = y'$ las órdenes a mercado no ejecuten todas las órdenes límite existentes, es decir,

$$k_1(x', y'; x, y) = 1 - \mu, \quad y = y'. \quad (4.15)$$

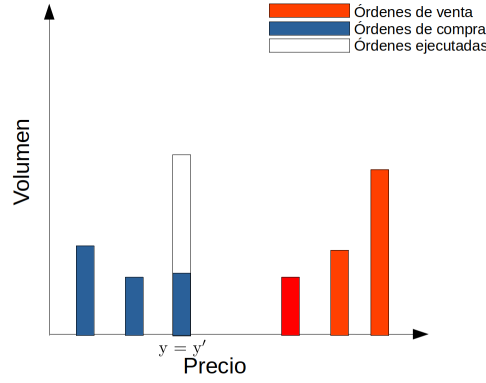


Figura 4.1: Esquema del movimiento del precio de compra. El diagrama ilustra el caso en que $y = y'$ tras la ejecución de órdenes a mercado.

3. El diagrama de la Figura 4.2 ilustra el caso $y < y'$, para que esto ocurra se debe cumplir que:

- Las órdenes a mercado ejecuten todas las órdenes límite existentes en el precio de compra, lo cual ocurre con probabilidad,

$$\mathbb{P}(B_{y'}^t = N_{y'}^t) = \mu. \quad (4.16)$$

- En los precios $p \in [y' - 1, y + 1]$ no debe haber órdenes límite, lo cual tiene probabilidad,

$$\mathbb{P}(B_{y+1}^t = 0, \dots, B_{y'-1}^t = 0) = \prod_{p=y+1}^{y'-1} \mathbb{P}(B_p^t = 0) = \gamma^{y'-y-1}. \quad (4.17)$$

- Por último, en $p = y$ debe haber al menos una orden límite, es decir,

$$\mathbb{P}(B_y^t \neq 0) = 1 - \gamma. \quad (4.18)$$

Por lo tanto,

$$k_1(x', y'; x, y) = \mu(1 - \gamma)\gamma^{y'-y-1}, \quad y < y'. \quad (4.19)$$

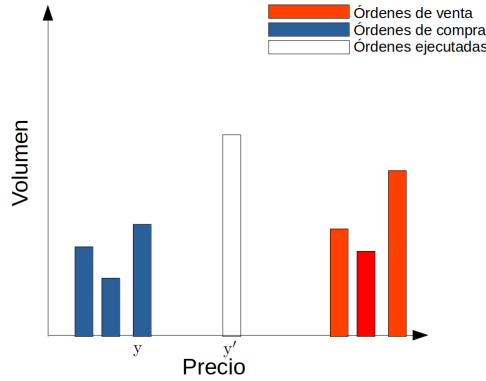


Figura 4.2: Esquema del movimiento del precio de compra. El diagrama ilustra el caso en que $y < y'$ tras la ejecución de órdenes a mercado.

Por lo tanto, de forma general de propagador k_1 es:

$$k_1(x', y'; x, y) = \delta_{x, x'} \begin{cases} 0, & y > y' \\ 1 - \mu, & y = y' \\ \mu(1 - \gamma)\gamma^{y'-y-1}, & y < y'. \end{cases} \quad (4.20)$$

Evolución de $t + 1$ a $t + 2$

Para describir el propagador k_2 correspondiente a la ecuación:

$$B^{t+2} = B^{t+1} + J^{t+1} - D^{t+1}, \quad (4.21)$$

notemos nuevamente que no hay cambio en el vector A^t , por lo tanto,

$$k_2(x', y'; x, y) = \mathbb{P}(b(t+2) = y' | b(t+1) = y) \delta_{x, x'}. \quad (4.22)$$

Al igual que en el caso anterior, empezaremos por realizar algunas hipótesis, bajo la suposición de independencia entre las componentes B_p^t y D_p^t y asumiendo que el sistema se encuentra en el estado estacionario.

- La probabilidad de que todas las órdenes límite en p sean canceladas es constante y está dada por:

$$\mathbb{P}(B_p^{t+1} = D_p^{t+1}) \equiv \xi, \quad (4.23)$$

- La probabilidad de que al tiempo $t + 1$ no lleguen órdenes límite de compra en p es constante y está dada por:

$$\mathbb{P}(J_p^{t+1} = 0) \equiv \zeta. \quad (4.24)$$

Al igual que en el caso anterior existen tres posibles relaciones entre y y y'

Análisis de los casos

1. El diagrama de la Figura 4.3 ilustra el caso $y = y'$, para este caso necesitamos que:

- En los precios $p \in [y' + 1, x - 1]$ no lleguen órdenes límite, lo cual ocurre con probabilidad,

$$\mathbb{P}(J_{y'+1}^{t+1} = 0, \dots, J_{x-1}^{t+1} = 0) = \zeta^{x-y-1}. \quad (4.25)$$

- En $p = y'$ debe haber al menos una orden límite, lo cual tiene probabilidad,

$$\mathbb{P}(B_{y'}^t \neq 0) = 1 - \zeta\xi. \quad (4.26)$$

por lo tanto,

$$k_2(x', y'; x, y) = \zeta^{x-y-1}(1 - \zeta\xi), \quad y = y'. \quad (4.27)$$

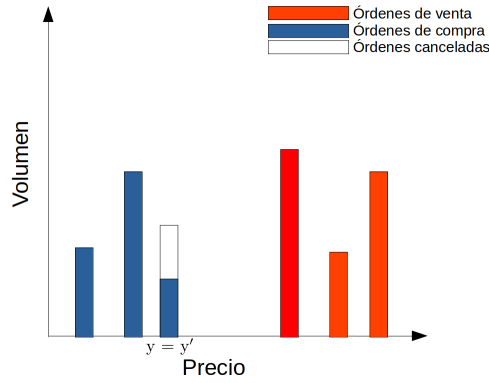


Figura 4.3: Esquema del movimiento del precio de compra. El diagrama ilustra el caso en que $y = y'$ tras el arribo y cancelación de órdenes límite de compra.

2. El diagrama de la Figura 4.4 ilustra el caso $y > y'$, para este caso necesitamos que:

- En los precios $p \in [y + 1, x - 1]$ no lleguen órdenes límite, lo cual ocurre con probabilidad,

$$\mathbb{P}(J_{y+1}^{t+1} = 0, \dots, J_{x-1}^{t+1} = 0) = \zeta^{x-y-1}. \quad (4.28)$$

- En $p = y$ debe llegar al menos una orden límite, lo cual ocurre con probabilidad,

$$\mathbb{P}(J_y^{t+1} \neq 0) = 1 - \zeta. \quad (4.29)$$

Por lo tanto, para este caso,

$$k_2(x', y'; x, y) = \zeta^{x-y-1}(1 - \zeta), \quad y > y'. \quad (4.30)$$

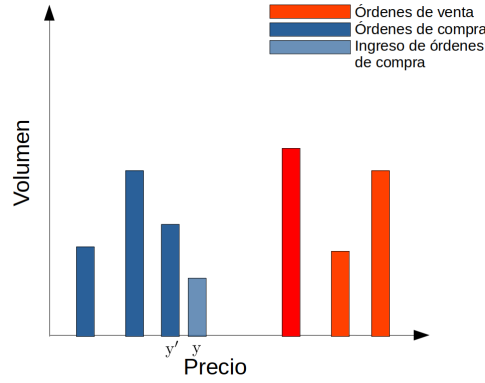


Figura 4.4: Esquema del movimiento del precio de compra. El diagrama ilustra el caso en que $y > y'$ tras el arribo y cancelación de órdenes límite de compra.

3. El diagrama de la Figura 4.5 ilustra el caso $y < y'$, para este caso necesitamos que:

- En $p = y$ haya al menos una orden límite, lo cual tiene probabilidad,

$$\mathbb{P}(B_y^{t+1} \neq 0) = 1 - \xi\zeta. \quad (4.31)$$

- En los precios $p \in [y', x']$ no deben llegar órdenes límite, lo cual tiene probabilidad,

$$\mathbb{P}(J_{y'}^{t+1} = 0, \dots, J_{x'}^{t+1}) = \zeta^{x-y'-1}. \quad (4.32)$$

- En los precios $p \in [y + 1, y']$ se deben cancelar todas las órdenes límite existentes y no deben llegar nuevas órdenes, lo cual tiene probabilidad,

$$\mathbb{P}((J_{y'}^{t+1} = 0, D_{y'}^{t+1} = B_{y'}^{t+1}), \dots, (J_{y+1}^{t+1} = 0, D_{y+1}^{t+1} = B_{y+1}^{t+1})) = (\zeta\xi)^{y'-y}. \quad (4.33)$$

Por lo tanto, para este caso,

$$k_2(x', y'; x, y) = \zeta^{x-y'-1}(1 - \xi\zeta)(\zeta\xi)^{y'-y}, \quad y < y'. \quad (4.34)$$

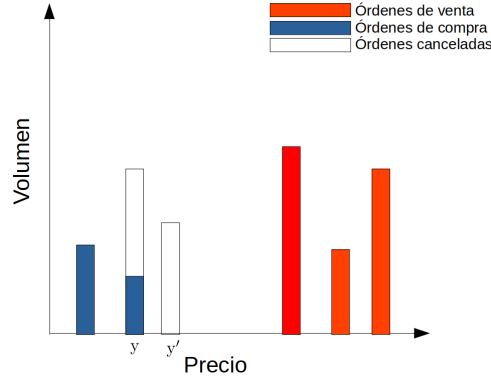


Figura 4.5: Esquema del movimiento del precio de compra. El diagrama ilustra el caso en que $y < y'$ tras el arribo y cancelación de órdenes límite de compra.

Por lo tanto, la forma general del propagador k_2 es:

$$k_2(x', y'; x, y) = \delta_{x, x'} \begin{cases} \zeta^{x-y-1} (1 - \zeta \xi) \xi^{y'-y} & y \leq y' \\ \zeta^{x-y-1} (1 - \zeta) & y > y'. \end{cases} \quad (4.35)$$

Evolución de $t + 2$ a $t + 3$

Para describir el propagador k_3 correspondiente a la ecuación:

$$A_p^{t+3} = A_p^{t+2} - M_p^{t+2}(A_p^{t+2}), \quad p = a(t), \quad (4.36)$$

notemos que no hay cambio en el vector B^t , por lo tanto,

$$k_3(x', y'; x, y) = \mathbb{P}(a(t+3) = x \mid a(t+2) = x') \delta_{y, y'}, \quad (4.37)$$

lo que nos deja con tres posibles relaciones entre x y x' , las cuales resolveremos por separado bajo las siguientes hipótesis

- La probabilidad de que en p a tiempo $t + 2$ no haya órdenes límite de venta es constante y está dada por:

$$\mathbb{P}(A_p^{t+2} = 0) \equiv \gamma. \quad (4.38)$$

- La probabilidad de que al tiempo $t + 2$ las órdenes a mercado ejecuten todas las órdenes límite en el precio de venta es constante y está dada por:

$$\mathbb{P}(A_{x'}^{t+2} = M_{x'}^{t+2}) \equiv \mu. \quad (4.39)$$

Análisis de los casos

1. El diagrama de la Figura 4.6 ilustra el caso $x > x'$, para este caso necesitamos que:

- En $p = x'$, las órdenes a mercado ejecuten todas las órdenes límite existentes, lo cual tiene probabilidad,

$$\mathbb{P}(A_{x'}^{t+2} = M_{x'}^{t+2}) = \mu. \quad (4.40)$$

- En los precios $p \in [x + 1, x' - 1]$ no debe haber órdenes límite de venta, lo cual tiene probabilidad,

$$\mathbb{P}(A_{x+1}^{t+2} = 0, \dots, A_{x'-1}^{t+2} = 0) = \gamma^{x-x'-1}. \quad (4.41)$$

- Por último, en $p = x$ debe haber al menos una orden límite de venta, es decir,

$$\mathbb{P}(A_x^{t+2} \neq 0) = 1 - \gamma. \quad (4.42)$$

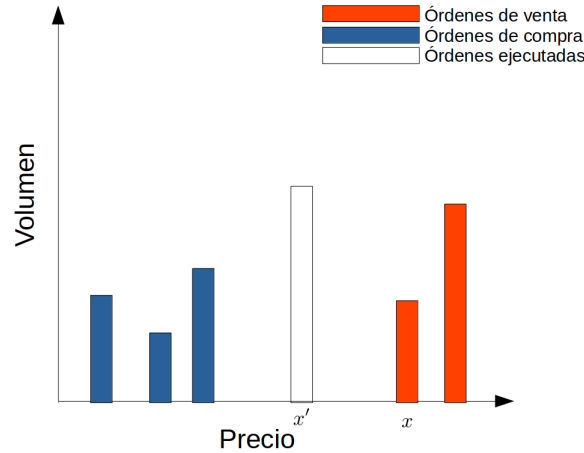


Figura 4.6: Esquema del movimiento del precio de venta. El diagrama ilustra el caso en que $x > x'$ tras la ejecución de órdenes a mercado de venta.

Por lo tanto,

$$k_3(x', y'; x, y) = \mu(\gamma^{x-x'-1})(1 - \gamma) \quad x > x'. \quad (4.43)$$

2. El diagrama de la Figura 4.7 ilustra el caso $x = x'$, para que esto ocurra solo necesitamos que en $p = x'$ las órdenes a mercado no ejecuten todas las órdenes límite existente, por lo tanto,

$$k_3(x', y'; x, y) = 1 - \mu \quad x = x'. \quad (4.44)$$

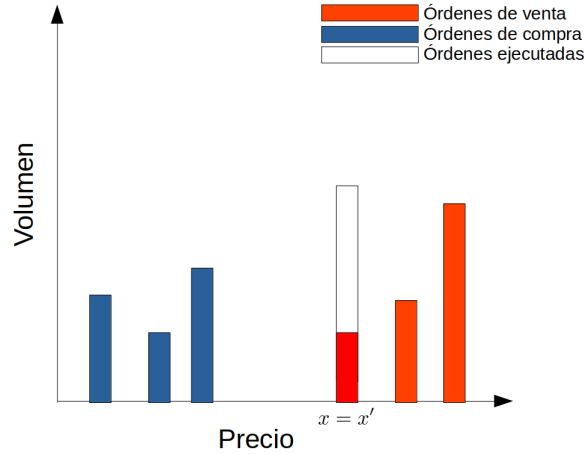


Figura 4.7: Esquema del movimiento del precio de venta. El diagrama ilustra el caso en que $x = x'$. tras la ejecución de órdenes a mercado de venta.

3. $x < x'$, nuevamente dada la naturaleza de las órdenes a mercado este caso tiene probabilidad 0.

Por lo tanto, la forma general del propagador k_3 es:

$$k_3(x', y'; x, y) = \delta_{y, y'} \begin{cases} 1 - \mu, & x = x' \\ \mu(1 - \gamma)\gamma^{x-x'-1}, & x > x' \\ 0 & x < x'. \end{cases} \quad (4.45)$$

Evolución de $t + 3$ a $t + 4$

Para describir el propagador k_4 correspondiente a la ecuación:

$$A^{t+4} = A^{t+3} + I^{t+3} - C^{t+3}, \quad (4.46)$$

notemos que no hay cambio en el vector B^t , por lo tanto,

$$k_4(x', y'; x, y) = \mathbb{P}(a(t+4) = x \mid a(t+3) = x') \delta_{y, y'}, \quad (4.47)$$

lo que nos deja con tres posibles relaciones entre x y x' las cuales resolveremos bajo las siguientes hipótesis

- La probabilidad de que todas las órdenes límite de venta en p sean canceladas es constante y está dada por:

$$\mathbb{P}(A_p^{t+3} = C_p^{t+3}) \equiv \xi. \quad (4.48)$$

- La probabilidad de que no ingresen órdenes límite de venta en p al tiempo $t + 3$ es constante y está dada por:

$$\mathbb{P}(I_p^{t+3} = 0) \equiv \zeta. \quad (4.49)$$

Analizando los casos

1. El caso $x = x'$ se ilustra en la Figura 4.8,

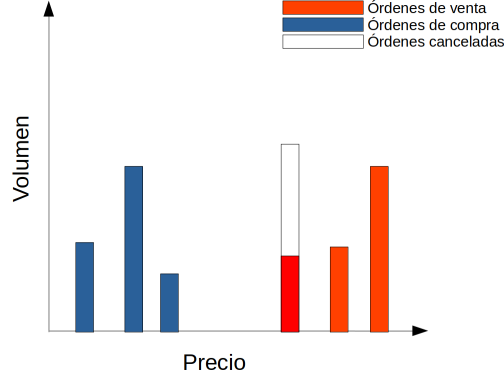


Figura 4.8: Esquema del movimiento del precio de venta. El diagrama ilustra el caso en que $x = x'$ tras el arribo y cancelación de órdenes límite de venta.

para que esto ocurra es necesario que:

- En los precios $p \in [y + 1, x - 1]$ no lleguen órdenes límite, lo cual ocurre con probabilidad,

$$\mathbb{P}(I_{y+1}^{t+3} = 0, \dots, I_{x-1}^{t+3}) = \zeta^{x-y-1}. \quad (4.50)$$

- En $p = x$ debe haber al menos una orden límite, lo cual tiene probabilidad,

$$\mathbb{P}(I_x^{t+3} \neq 0, C_x^{t+3} \neq A_x^{t+3}) = 1 - \zeta\xi. \quad (4.51)$$

Por lo tanto para este caso,

$$k_4(x', y'; x, y) = \zeta^{x-y-1}(1 - \zeta\xi)\delta_{y,y'}, \quad x = x'. \quad (4.52)$$

2. El caso $x > x'$ se ilustra en la Figura 4.9, para que esto ocurra es necesario que:

- En los precios $p \in [y + 1, x - 1]$ no lleguen órdenes límite, lo cual ocurre con probabilidad,

$$\mathbb{P}(I_{y+1}^{t+3} = 0, \dots, I_{x-1}^{t+3} = 0) = \zeta^{x-y-1}. \quad (4.53)$$

- En los precios $p \in [x', x - 1]$ se deben cancelar todas las órdenes límite, lo cual tiene probabilidad,

$$\mathbb{P}(C_{x'}^{t+3} = A_{x'}^{t+3}, \dots, C_{x-1}^{t+3} = A_{x-1}^{t+3}) = \xi^{x-x'}. \quad (4.54)$$

- En $p = x$ debe haber al menos una orden límite, lo que tiene probabilidad,

$$\mathbb{P}(C_x^{t+3} \neq A_x^{t+3}, I_x^{t+1} \neq 0) = 1 - \zeta\xi. \quad (4.55)$$

Por lo tanto para este caso,

$$k_4(x', y'; x, y) = \zeta^{x-y-1}(1 - \zeta\xi)\xi^{x-x'}\delta_{y,y'} \quad x > x'. \quad (4.56)$$

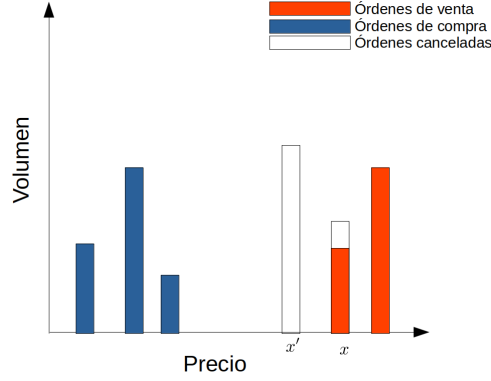


Figura 4.9: Esquema del movimiento del precio de venta. El diagrama ilustra el caso en que $x > x'$ tras el arribo y cancelación de órdenes límite de venta.

3. El caso $x < x'$ se ilustra en la Figura 4.10, para que esto ocurra necesitamos:

- En $p = x$, llegue al menos una orden límite, lo cual que tiene probabilidad,

$$\mathbb{P}(I_x^{t+3} \neq 0) = 1 - \zeta. \quad (4.57)$$

- En los puntos $p \in [y + 1, x - 1]$ no lleguen órdenes límite, lo cual que tiene probabilidad,

$$\mathbb{P}(I_{y+1}^{t+3} = 0, \dots, I_{x-1}^{t+3} = 0) = \zeta^{x-y-1}. \quad (4.58)$$

Por lo tanto para este caso,

$$k_4(x', y'; x, y) = \zeta^{x-y-1}(1 - \zeta)\delta_{y,y'} \quad x < x'. \quad (4.59)$$

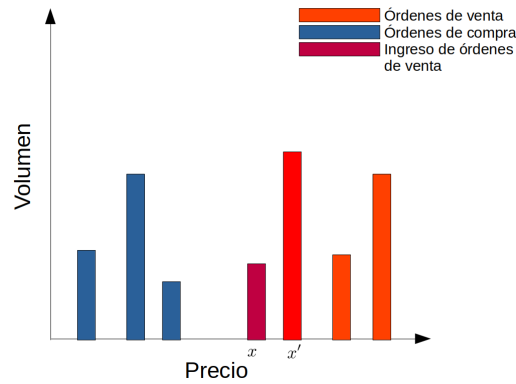


Figura 4.10: Esquema del movimiento del precio de venta. El diagrama ilustra el caso en que $x < x'$ tras el arribo y cancelación de órdenes límite de venta.

Por lo tanto, la forma general del propagador k_4 es:

$$k_4(x', y'; x, y) = \delta_{y, y'} \begin{cases} \zeta^{x-y-1}(1 - \zeta\xi)\xi^{x-x'} & x \geq x' \\ \zeta^{x-y-1}(1 - \zeta) & x < x'. \end{cases} \quad (4.60)$$

Resumen

En resumen, la evolución del sistema está dada por los núcleos:

$$k_1 = \delta_{x, x'} \begin{cases} 0, & y > y' \\ 1 - \mu, & y = y' \\ \mu(1 - \gamma)\gamma^{y'-y-1}, & y < y', \end{cases} \quad (4.61a)$$

$$k_2 = \delta_{x, x'} \begin{cases} \zeta^{x-y-1}(1 - \zeta\xi)\xi^{y'-y} & y \leq y' \\ \zeta^{x-y-1}(1 - \zeta) & y > y', \end{cases} \quad (4.61b)$$

$$k_3 = \delta_{y, y'} \begin{cases} 1 - \mu, & x = x' \\ \mu(1 - \gamma)\gamma^{x-x'-1}, & x > x' \\ 0, & x < x', \end{cases} \quad (4.61c)$$

$$k_4 = \delta_{y, y'} \begin{cases} \zeta^{x-y-1}(1 - \zeta\xi)\xi^{x-x'} & x \geq x' \\ \zeta^{x-y-1}(1 - \zeta) & x < x'. \end{cases} \quad (4.61d)$$

La probabilidad de que no haya órdenes límite en p al tiempo t , sin importar el tiempo de orden está dada por:

$$\mathbb{P}(A_p^t = 0) = \mathbb{P}(B_p^t = 0) = \gamma. \quad (4.62)$$

Dado que cada punto dentro del libro puede describirse con el diagrama de la Figura [4.11](#)

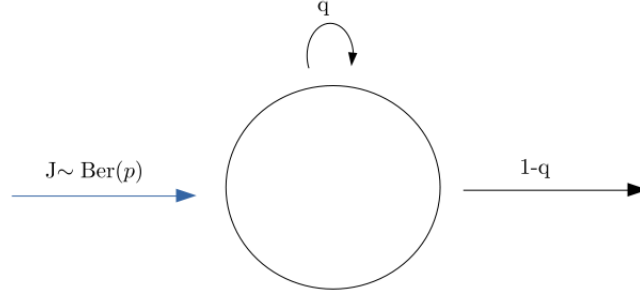


Figura 4.11: Representación esquemática del modelo de libro de órdenes propuesto, utilizando cadenas de Markov abiertas.

correspondiente al ejemplo de la Subsección 3.1.2, entonces, el número de órdenes en p , sin importar el tipo está dado por

$$\mathbb{P}(A_p^t = 0) = \mathbb{P}(B_p^t = 0) = \mathbb{P}\left(\sum_{r=0}^{\infty} X_r = 0\right), \quad (4.63)$$

donde $X_r \sim \text{Ber}(pq^r)$, es decir,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{r=0}^{\infty} X_r = 0\right) = \prod_{r=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_r = 0) = \prod_{r=0}^{\infty} (1 - pq^r) = e^{\ln\left(\prod_{r=0}^{\infty} (1 - pq^r)\right)} = e^{\sum_{r=0}^{\infty} \ln(1 - pq^r)}, \quad (4.64)$$

utilizando la aproximación de Taylor a primer orden

$$e^{\sum_{r=0}^{\infty} \ln(1 - pq^r)} \approx e^{-\sum_{r=0}^{\infty} pq^r} = e^{-\frac{p}{1-q}}, \quad (4.65)$$

es decir

$$\gamma \approx e^{-\frac{p}{1-q}}. \quad (4.66)$$

La probabilidad de que a tiempo t no ingresen órdenes límite en p , sin importar su tipo está dada por:

$$\mathbb{P}(J_p^t = 0) = \mathbb{P}(I_p^t = 0) = \zeta, \quad (4.67)$$

dado que $I, J \sim \text{Ber}(p)$, entonces

$$\zeta = 1 - p. \quad (4.68)$$

La probabilidad de que las órdenes a mercado ejecuten todas las órdenes límite en p a tiempo t está dada por:

$$\mathbb{P}(M_p^t \geq A_p^t) = \mathbb{P}(N_p^t \geq B_p^t) = \mu, \quad (4.69)$$

es decir

$$\mu = \mathbb{P}(M_p^t \geq A_p^t) = \sum_{m=A_p^t}^{\infty} \mathbb{P}(M_p^t = m). \quad (4.70)$$

4.1.2. Funciones generadoras

De la misma manera que en la Sección 3.1.2, usaremos los propagadores para determinar las funciones generadoras, una por cada propagador. Recordemos que la función generadora está definida como:

$$G(\alpha, \beta) = E[e^{\alpha x + \beta y}], \quad (4.71)$$

utilizando la definición de esperanza,

$$G_t(\alpha, \beta) = E[e^{\alpha x + \beta y}] = \sum_{x,y} p_t(x, y) e^{\alpha x + \beta y}, \quad (4.72)$$

de modo que, G_{t+i} está dada por:

$$G_{t+i}(\alpha, \beta) = \sum_{x,y} \sum_{x',y'} k(x', y'; x, y) p_{t+i-1}(x', y') e^{\alpha x + \beta y}, \quad (4.73)$$

con $t = 4n, n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Por simplicidad, se omitirán los argumentos de k durante el desarrollo de las funciones generadoras, mientras que la suma $\sum_{x',y'}$ y la distribución $p_t(x', y')$ se abreviarán como \sum' y p' cuando sea posible.

Primer función generadora G_{t+1}

Partiendo de la definición:

$$G_{t+1}(\alpha, \beta) = \sum_{x,y} p_{t+1}(x, y) e^{\alpha x + \beta y} = \sum_{x',y'} p_t(x', y') \sum_{x,y} k_1 e^{\alpha x + \beta y}, \quad (4.74)$$

sustituyendo k_1 por su expresión en (4.61a) y reacomodando las sumas, tenemos,

$$G_{t+1} = \sum' p' e^{\alpha x'} \left\{ (1 - \mu) e^{\beta y'} + \mu(1 - \gamma) \sum_{y=y'-1}^{-\infty} \gamma^{y'-y-1} e^{\beta y} \right\}, \quad (4.75)$$

haciendo el cambio de variable $u = y' - y - 1$,

$$G_{t+1} = \sum' p' e^{\alpha x'} \left\{ (1 - \mu) e^{\beta y'} + \mu(1 - \gamma) e^{\beta(y'-1)} \sum_{u=0}^{\infty} (\gamma e^{-\beta})^u \right\}, \quad (4.76)$$

notando que la suma sobre u corresponde a una suma geométrica,

$$G_{t+1} = \sum' p' e^{\alpha x' + \beta y'} \left\{ (1 - \mu) + \frac{\mu(1 - \gamma) e^{-\beta}}{1 - \gamma e^{-\beta}} \right\}, \quad (4.77)$$

finalmente reescribiendo la suma sobre x' y y' como una función generadora, llegamos a,

$$G_{t+1}(\alpha, \beta) = G_t(\alpha, \beta) \left\{ (1 - \mu) + \frac{\mu(1 - \gamma) e^{-\beta}}{1 - \gamma e^{-\beta}} \right\}. \quad (4.78)$$

Segunda función generadora G_{t+2}

Partiendo de la definición:

$$G_{t+2}(\alpha, \beta) = \sum_{x,y} p_{t+2}(x, y) e^{\alpha x + \beta y} = \sum_{x', y'} p_{t+1}(x', y') \sum_{x,y} k_2 e^{\alpha x + \beta y}, \quad (4.79)$$

haciendo $p' = p_{t+1}(x', y')$ y sustituyendo k_2 de (4.61b), tenemos,

$$G_{t+2} = \sum' p' e^{\alpha x'} \left\{ (1 - \zeta) \sum_{y=y'+1}^{x'-1} \zeta^{x'-y-1} e^{\beta y} + (1 - \xi \zeta) \sum_{y=y'}^{-\infty} \zeta^{x'-y-1} \xi^{y'-y} e^{\beta y} \right\}, \quad (4.80)$$

cambiando los índices de las sumas por $n = x' - y - 1$ en la primer suma y $n = y' - y$ en la segunda, llegamos a,

$$G_{t+2} = \sum' p' e^{\alpha x'} \left\{ (1 - \zeta) e^{\beta(x'-1)} \sum_{n=0}^{x'-y'-2} (\zeta e^{-\beta})^n + (1 - \xi \zeta) \zeta^{x'-y'-1} e^{\beta y'} \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta \xi e^{-\beta})^n \right\}, \quad (4.81)$$

ahora notamos que las sumas corresponden a sumas geométricas y por lo tanto,

$$G_{t+2} = \sum' p' e^{\alpha x'} \left\{ (1 - \zeta) e^{\beta(x'-1)} \frac{1 - (\zeta e^{-\beta})^{x'-y'-1}}{1 - \zeta e^{-\beta}} + (1 - \xi \zeta) \zeta^{x'-y'-1} e^{\beta y'} \frac{1}{1 - \zeta \xi e^{-\beta}} \right\}, \quad (4.82)$$

reagrupando,

$$G_{t+2} = \sum' p' e^{\alpha x'} \left\{ \frac{(1 - \zeta) e^{-\beta}}{(1 - \zeta e^{-\beta})} e^{\beta x'} + \left(-\frac{1 - \zeta}{\zeta(1 - \zeta e^{-\beta})} + \frac{1 - \xi \zeta}{\zeta(1 - \zeta \xi e^{-\beta})} \right) \zeta^{x'-y'} e^{\beta y'} \right\}, \quad (4.83)$$

haciendo $c_1(-\beta) = \frac{(1-\zeta)e^{-\beta}}{(1-\zeta e^{-\beta})}$, $c_2(-\beta) = -\frac{1-\zeta}{\zeta(1-\zeta e^{-\beta})} + \frac{1-\xi\zeta}{\zeta(1-\zeta\xi e^{-\beta})}$, tenemos,

$$G_{t+2} = \sum' p' e^{\alpha x'} \left\{ c_1(-\beta) e^{\beta x'} + c_2(-\beta) \zeta^{x'-y'} e^{\beta y'} \right\}, \quad (4.84)$$

haciendo $g = \ln(\zeta) \rightarrow \zeta = e^g$ y $h = \ln(\xi) \rightarrow \xi = e^h$,

$$G_{t+2} = \sum' p' e^{\alpha x'} \left\{ c_1(-\beta) e^{\beta x'} + c_2(-\beta) e^{g x' + (\beta - g) y'} \right\}, \quad (4.85)$$

separando las sumas,

$$G_{t+2} = c_1(-\beta) \sum' p' e^{(\alpha + \beta) x'} + c_2(-\beta) \sum' p' e^{(\alpha + g) x' + (\beta - g) y'}, \quad (4.86)$$

identificando cada una de las sumas como funciones generadoras,

$$G_{t+2}(\alpha, \beta) = c_1(-\beta) G_{t+1}(\alpha + \beta, 0) + c_2(-\beta) G_{t+1}(\alpha + g, \beta - g), \quad (4.87)$$

con $c_1(-\beta) = \frac{(1-\zeta)e^{-\beta}}{(1-\zeta e^{-\beta})}$, $c_2(-\beta) = -\frac{1-\zeta}{\zeta(1-\zeta e^{-\beta})} + \frac{1-\xi\zeta}{\zeta(1-\zeta\xi e^{-\beta})}$.

Tercer función generadora G_{t+3}

Partiendo de la definición:

$$G_{t+3}(\alpha, \beta) = \sum_{x,y} p_{t+3}(x, y) e^{\alpha x + \beta y} = \sum_{x', y'} p_{t+2}(x', y') \sum_{x,y} k_3 e^{\alpha x + \beta y}, \quad (4.88)$$

sustituyendo k_3 por su expresión en (4.61c) y reacomodando las sumas,

$$G_{t+3} = \sum_{y'} p' \sum_y e^{\beta y} \delta_{y, y'} \left\{ (1 - \mu) e^{\alpha x'} + \mu(1 - \gamma) \sum_{x > x'} \gamma^{x' - x - 1} e^{\alpha x} \right\}, \quad (4.89)$$

simplificando,

$$G_{t+3} = \sum_{y'} p' e^{\beta y'} \left\{ (1 - \mu) e^{\alpha x'} + \mu(1 - \gamma) \sum_{x=x'+1}^{\infty} \gamma^{x' - x - 1} e^{\alpha x} \right\}, \quad (4.90)$$

haciendo el cambio de variable $u = x - x' - 1$,

$$G_{t+3} = \sum_{y'} p' e^{\beta y'} \left\{ (1 - \mu) e^{\alpha x'} + \mu(1 - \gamma) e^{\alpha(x'+1)} \sum_{u=0}^{\infty} (\gamma e^{\alpha})^u \right\}, \quad (4.91)$$

notando que la suma sobre u corresponde a una suma geométrica,

$$G_{t+3} = \sum_{y'} p' e^{\alpha x' + \beta y'} \left\{ (1 - \mu) + \frac{\mu(1 - \gamma) e^{\alpha}}{1 - \gamma e^{\alpha}} \right\}, \quad (4.92)$$

finalmente reescribiendo la suma sobre x' y y' como una función generadora, llegamos a,

$$G_{t+3}(\alpha, \beta) = G_{t+2}(\alpha, \beta) \left\{ (1 - \mu) + \frac{\mu(1 - \gamma) e^{\alpha}}{1 - \gamma e^{\alpha}} \right\}. \quad (4.93)$$

Cuarta función generadora G_{t+4}

Por definición:

$$G_{t+4}(\alpha, \beta) = \sum_{x,y} p_{t+4}(x, y) e^{\alpha x + \beta y} = \sum_{x', y'} p' \sum_{x,y} k_4 e^{\alpha x + \beta y}, \quad (4.94)$$

sustituyendo k_4 por su expresión en (4.61d), tenemos,

$$G_{t+4} = \sum_{y'} p' e^{\beta y'} \left\{ (1 - \zeta) \sum_{x=y'+1}^{x'-1} \zeta^{x-y'-1} e^{\alpha x} + (1 - \xi \zeta) \sum_{x=x'}^{\infty} \zeta^{x-y'-1} \xi^{x-x'} e^{\alpha x} \right\}, \quad (4.95)$$

cambiando los índices de las sumas por $n = x - y' - 1$ en la primer suma y $n = x - x'$ en la segunda, llegamos a,

$$G_{t+4} = \sum' p' e^{\beta y'} \left\{ (1 - \zeta) e^{\alpha(y'+1)} \sum_{n=0}^{x'-y'-2} (\zeta e^{\alpha})^n + (1 - \xi \zeta) \zeta^{x'-y'-1} e^{\alpha x'} \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta \xi e^{\alpha})^n \right\}, \quad (4.96)$$

ahora notamos que las sumas corresponden a sumas geométricas y por lo tanto,

$$G_{t+4} = \sum' p' e^{\beta y'} \left\{ (1 - \zeta) e^{\alpha(y'+1)} \frac{1 - (\zeta e^{\alpha})^{x'-y'-1}}{1 - \zeta e^{\alpha}} + (1 - \xi \zeta) \zeta^{x'-y'-1} e^{\alpha x'} \frac{1}{1 - \zeta \xi e^{\alpha}} \right\}, \quad (4.97)$$

reagrupando,

$$G_{t+4} = \sum' p' e^{\beta y'} \left\{ \frac{(1 - \zeta) e^{\alpha}}{(1 - \zeta e^{\alpha})} e^{\alpha y'} + \left(-\frac{1 - \zeta}{\zeta(1 - \zeta e^{\alpha})} + \frac{1 - \xi \zeta}{\zeta(1 - \zeta \xi e^{\alpha})} \right) e^{\alpha x'} \zeta^{x'-y'} \right\}, \quad (4.98)$$

haciendo $c_1(\alpha) = \frac{(1-\zeta)e^{\alpha}}{(1-\zeta e^{\alpha})}$, $c_2(\alpha) = -\frac{1-\zeta}{\zeta(1-\zeta e^{\alpha})} + \frac{1-\xi\zeta}{\zeta(1-\zeta\xi e^{\alpha})}$, tenemos,

$$G_{t+4} = \sum' p' e^{\beta y'} \left\{ c_1 e^{\alpha y'} + c_2 \zeta^{x'-y'} e^{\alpha x'} \right\}, \quad (4.99)$$

haciendo $g = \ln(\zeta) \rightarrow \zeta = e^g$ y $h = \ln(\xi) \rightarrow \xi = e^h$,

$$G_{t+4} = \sum' p' e^{\beta y'} \left\{ c_1 e^{\alpha y'} + c_2 e^{\alpha x'} e^{g(x'-y')} \right\}, \quad (4.100)$$

separando las sumas,

$$G_{t+4} = c_1 \sum' p' e^{(\alpha+\beta)y'} + c_2 \sum' p' e^{(\alpha+g)x'+(\beta-g)y'}, \quad (4.101)$$

identificando cada una de las sumas como funciones generadoras,

$$G_{t+4}(\alpha, \beta) = c_1 G_{t+3}(0, \alpha + \beta) + c_2 G_{t+3}(\alpha + g, \beta - g), \quad (4.102)$$

con $c_1(\alpha) = \frac{(1-\zeta)e^{\alpha}}{(1-\zeta e^{\alpha})}$, $c_2(\alpha) = -\frac{1-\zeta}{\zeta(1-\zeta e^{\alpha})} + \frac{1-\xi\zeta}{\zeta(1-\zeta\xi e^{\alpha})}$.

En resumen

$$G_{t+1}(\alpha, \beta) = c_3(-\beta)G_t(\alpha, \beta), \quad (4.103)$$

$$G_{t+2}(\alpha, \beta) = c_1(-\beta)G_{t+1}(\alpha + \beta, 0) + c_2(-\beta)G_{t+1}(\alpha + g, \beta - g), \quad (4.104)$$

$$G_{t+3}(\alpha, \beta) = c_3(\alpha)G_{t+2}(\alpha, \beta), \quad (4.105)$$

$$G_{t+4}(\alpha, \beta) = c_1(\alpha)G_{t+3}(0, \alpha + \beta) + c_2(\alpha)G_{t+3}(\alpha + g, \beta - g), \quad (4.106)$$

$$(4.107)$$

con:

$$c_1(\alpha) = \frac{(1 - \zeta)e^\alpha}{(1 - \zeta e^\alpha)}, \quad (4.108)$$

$$c_2(\alpha) = \frac{(1 - \xi)(1 - e^\alpha)}{\zeta(1 - \zeta e^\alpha)(1 - \zeta \xi e^\alpha)}, \quad (4.109)$$

$$c_3(\alpha) = (1 - \mu) + \frac{\mu(1 - \gamma)e^\alpha}{1 - \gamma e^\alpha}. \quad (4.110)$$

4.1.3. Primeros momentos

En términos de las funciones generadoras, los momentos de una distribución están dados por:

$$M_n = \left. \frac{d^n G}{d\alpha^n}(\alpha) \right|_{\alpha=0}. \quad (4.111)$$

En nuestro caso, los primeros momentos de la distribución conjunta de los precios de compra y venta denotada por $p_t(x, y) \equiv \mathbb{P}(a(t) = x, b(t) = y)$ están dados por:

$$u_t = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} G_t(\alpha, \beta) \right|_{\alpha, \beta=0}, \quad (4.112)$$

y

$$v_t = \left. \frac{\partial}{\partial \beta} G_t(\alpha, \beta) \right|_{\alpha, \beta=0}, \quad (4.113)$$

los cuales corresponden a los valores esperados $\langle a(t) \rangle$ y $\langle b(t) \rangle$ respectivamente. Utilizando las funciones generadoras obtenidas en la Subsección 4.1.2 calcularemos los primeros momentos de la distribución. La Tabla 4.1 resume los valores más usados durante el desarrollo de los primeros momentos.

$c_1(0) = 1$	$c_2(0) = 0$	$c_3(0) = 1$
$c'_1(0) = \frac{1}{1-\zeta}$	$c'_2(0) = \frac{\xi-1}{\zeta(1-\zeta)(1-\zeta\xi)}$	$c'_3(0) = \frac{\mu}{1-\gamma}$

Tabla 4.1: Funciones y primeras derivadas de c_1, c_2 y c_3 evaluadas en 0.

Primeros momentos de $G_{t+1}(\alpha, \beta)$

Partiendo de la definición:

$$u_{t+1} = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} G_{t+1}(\alpha, \beta) \right|_{\alpha, \beta=0}, \quad (4.114)$$

sustituyendo G_1 por su valor en (4.103),

$$u_{t+1} = c_3(-\beta) \frac{\partial}{\partial \alpha} G_t(\alpha, \beta) \Big|_{\alpha, \beta=0}, \quad (4.115)$$

evaluando

$$u_{t+1} = u_t. \quad (4.116)$$

Partiendo de la definición:

$$v_{t+1} = \frac{\partial}{\partial \beta} G_{t+1}(\alpha, \beta) \Big|_{\alpha, \beta=0}, \quad (4.117)$$

sustituyendo (4.103),

$$v_{t+1} = \frac{\partial}{\partial \beta} c_3(-\beta) G_t(\alpha, \beta) \Big|_{\alpha, \beta=0}, \quad (4.118)$$

evaluando,

$$v_{t+1} = v_t - \frac{\mu}{(1-\gamma)} G_t(0, 0), \quad (4.119)$$

por definición $G_t(0, 0) = 1$, por lo tanto,

$$v_{t+1} = v_t - \frac{\mu}{(1-\gamma)}. \quad (4.120)$$

Primeros momentos de $G_{t+2}(\alpha, \beta)$

Por definición:

$$u_{t+2} = \frac{\partial G_{t+2}}{\partial \alpha},$$

sustituyendo G_2 por su valor en (4.104) tenemos que,

$$u_{t+2} = \frac{\partial G_{t+2}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha, \beta=0} = \frac{\partial}{\partial \alpha} c_1(-\beta) G_{t+1}(\alpha + \beta, 0) \Big|_{\alpha, \beta=0} + \frac{\partial}{\partial \alpha} c_2(-\beta) G_{t+1}(\alpha + g, \beta - g) \Big|_{\alpha, \beta=0},$$

evaluando,

$$u_{t+2} = u_{t+1}. \quad (4.121)$$

Por definición:

$$v_{t+2} = \frac{\partial G_{t+2}}{\partial \beta},$$

sustituyendo G_2 por su valor en (4.104) tenemos,

$$v_{t+2} = \frac{\partial G_{t+2}}{\partial \beta} \Big|_{\alpha, \beta=0} = \frac{\partial}{\partial \beta} c_1(-\beta) G_{t+1}(\alpha + \beta, 0) \Big|_{\alpha, \beta=0} + \frac{\partial}{\partial \beta} c_2(-\beta) G_{t+1}(\alpha + g, \beta - g) \Big|_{\alpha, \beta=0},$$

evaluando la derivada,

$$v_{t+2} = u_{t+1} - \frac{1}{1-\zeta} + \frac{1-\xi}{\zeta(1-\xi\zeta)(1-\zeta)} G_{t+1}(g, -g). \quad (4.122)$$

Primeros momentos de $G_{t+3}(\alpha, \beta)$

Partiendo de la definición:

$$u_{t+3} = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} G_{t+3}(\alpha, \beta) \right|_{\alpha, \beta=0}, \quad (4.123)$$

sustituyendo G_3 por su valor en (4.105),

$$u_{t+3} = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} c_3(\alpha) G_{t+2}(\alpha, \beta) \right|_{\alpha, \beta=0}, \quad (4.124)$$

aplicando reglas de derivación y evaluando,

$$u_{t+3} = u_{t+2} + \frac{\mu}{(1-\gamma)} G_{t+2}(0, 0), \quad (4.125)$$

por definición $G_t(0, 0) = 1$, por lo tanto,

$$u_{t+3} = u_{t+2} + \frac{\mu}{(1-\gamma)}. \quad (4.126)$$

Partiendo de la definición:

$$v_{t+3} = \left. \frac{\partial}{\partial \beta} G_{t+3}(\alpha, \beta) \right|_{\alpha, \beta=0}, \quad (4.127)$$

sustituyendo G_3 por su valor en (4.105),

$$v_{t+3} = \left. \frac{\partial}{\partial \beta} c_3(\alpha) G_{t+2}(\alpha, \beta) \right|_{\alpha, \beta=0}, \quad (4.128)$$

aplicando reglas de derivación y evaluando,

$$v_{t+3} = v_{t+2}. \quad (4.129)$$

Primeros momentos de $G_{t+4}(\alpha, \beta)$

Partiendo de la definición:

$$u_{t+4} = \left. \frac{\partial G_{t+4}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha, \beta=0},$$

sustituyendo G_4 por su valor en (4.103) tenemos,

$$u_{t+4} = \left. \frac{\partial G_{t+4}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha, \beta=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} c_1(\alpha) G_{t+3}(0, \alpha + \beta) \right|_{\alpha, \beta=0} + \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} c_2(\alpha) G_{t+3}(\alpha + g, \beta - g) \right|_{\alpha, \beta=0} \quad (4.130)$$

evaluando,

$$u_{t+4} = v_{t+3} + \frac{1}{1-\zeta} - \frac{1-\xi}{\zeta(1-\xi\zeta)(1-\zeta)} G_{t+3}(g, -g). \quad (4.131)$$

Partiendo de la definición:

$$v_{t+4} = \frac{\partial G_{t+4}}{\partial \beta},$$

sustituyendo G_4 por su valor en (4.106) tenemos,

$$v_{t+4} = \left. \frac{\partial G_{t+4}}{\partial \beta} \right|_{\alpha, \beta=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \beta} c_1(\alpha) G_{t+3}(0, \alpha + \beta) \right|_{\alpha, \beta=0} + \left. \frac{\partial}{\partial \beta} c_2(\alpha) G_{t+3}(\alpha + g, \beta - g) \right|_{\alpha, \beta=0},$$

evaluando,

$$v_{t+4} = v_{t+3}. \quad (4.132)$$

Resumen de la dinámica de los primeros momentos

Las relaciones de recurrencia para los primeros momentos del sistema son:

$$u_{t+1} = u_t, \quad (4.133a)$$

$$v_{t+1} = v_t - \frac{\mu}{1-\gamma}, \quad (4.133b)$$

$$u_{t+2} = u_{t+1}, \quad (4.133c)$$

$$v_{t+2} = u_{t+1} - \frac{1}{1-\zeta} + G_{t+1}(g, -g) \left(\frac{1-\xi}{\zeta(1-\xi\zeta)(1-\zeta)} \right), \quad (4.133d)$$

$$u_{t+3} = u_{t+2} + \frac{\mu}{1-\gamma}, \quad (4.133e)$$

$$v_{t+3} = v_2, \quad (4.133f)$$

$$u_{t+4} = v_{t+3} + \frac{1}{1-\zeta} - G_{t+3}(g, -g) \left(\frac{1-\xi}{\zeta(1-\xi\zeta)(1-\zeta)} \right), \quad (4.133g)$$

$$v_{t+4} = v_{t+3}, \quad (4.133h)$$

Dado que las relaciones de recurrencia obtenidas resultaron más complejas de lo esperado y que por sí solas no son capaces de describir el comportamiento de los precios o los rendimientos, se optó por complementar el estudio del modelo con un análisis numérico.

4.2. Simulación de control

Utilizando las ecuaciones de movimiento propuestas en el Capítulo 3 realizamos simulaciones de control para comparar los resultados obtenidos del modelo con los hechos reportados en la literatura.

Partiendo de las condiciones:

- Intervalo de precios que se está considerando es $[0, 5000]$.
- Condiciones iniciales son $a_0 = 2510$ y $b_0 = 2500$

$$A_p^0 = \begin{cases} 100, & p \geq a(t), \\ 0, & p < a(t), \end{cases} \quad B_p^0 = \begin{cases} 100, & p \leq b(t), \\ 0, & p > b(t). \end{cases} \quad (4.134)$$

- Entrada de órdenes límite

$$I^t \sim \text{Ber}(0.8), \quad J^t \sim \text{Ber}(0.8). \quad (4.135)$$

- Cancelación de órdenes límite

$$C_p^t \sim \text{Binom}(A_p^t, 0.01), \quad D_p^t \sim \text{Binom}(B_p^t, 0.01). \quad (4.136)$$

- Órdenes a mercado

$$N_p \sim \text{Binom}(20, 0.01), \quad M_p \sim \text{Binom}(20, 0.01). \quad (4.137)$$

Se obtuvo una serie de tiempo de 5×10^7 datos que representa el precio medio o *mid price* de un bien. Esta serie de tiempo se ilustra en la gráfica de la Figura 4.12 y es la que se utilizó para los cálculos de esta sección.

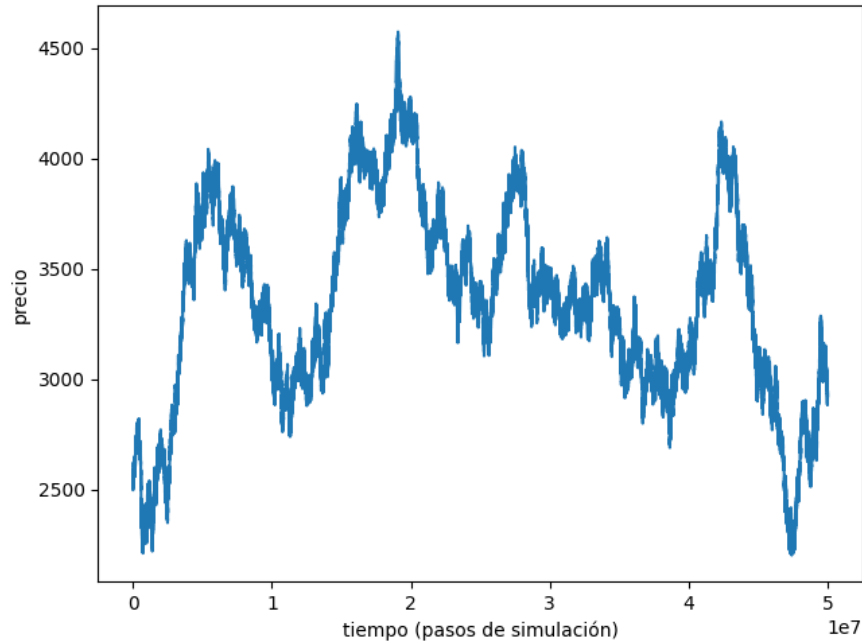


Figura 4.12: Precio medio en función del tiempo, de la simulación de control.

4.2.1. Rendimientos

Para el análisis de los datos calculamos los rendimientos logarítmicos dados por

$$r_t(k) = \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-k}} \right) = \sum_{j=0}^{k-1} r_{t-j}. \quad (4.138)$$

con el periodo k dado en pasos de simulación. Las Figuras 4.13a y 4.13b muestran los rendimientos de periodo $k = 10$ y $k = 490$ respectivamente, mientras que las gráficas de las Figuras 4.14a y 4.14b muestran el fenómeno de normalidad agregada, pues las distribuciones se asemejan a distribuciones gaussianas al aumentar el periodo.

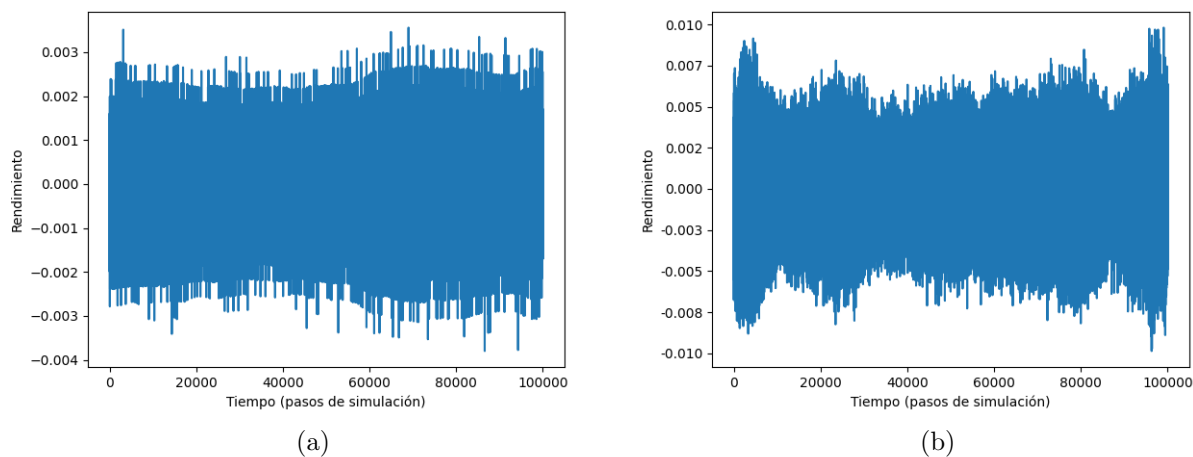


Figura 4.13: Series de tiempo de los rendimientos logarítmicos de la simulación de control. La gráfica a) muestra la serie de tiempo para los rendimientos logarítmicos de periodo 10. La gráfica b) muestra la serie de tiempo para los rendimientos logarítmicos de periodo 490.

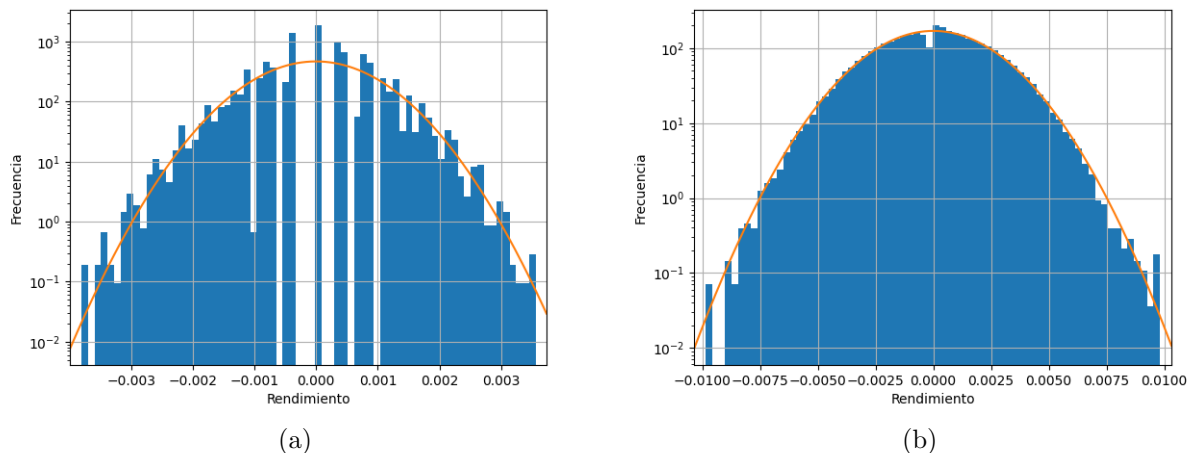


Figura 4.14: Distribuciones de los rendimientos logarítmicos de la simulación de control. La gráfica a) muestra la distribución para los rendimientos logarítmicos de periodo 10. La gráfica b) muestra la distribución para los rendimientos logarítmicos de periodo 490.

El modelo logró reproducir cualitativamente la ausencia de autocorrelación y el agrupamiento de volatilidad, como se muestra en la gráfica de la Figura 4.15 la función de autocorrelación tiene valores cercanos a cero, salvo por una autocorrelación negativa durante los primeros desfases, (fenómeno atribuido a al *bid-ask bounce*). Mientras que podemos apreciar que la autocorrelación de los rendimientos absolutos se mantiene positiva.

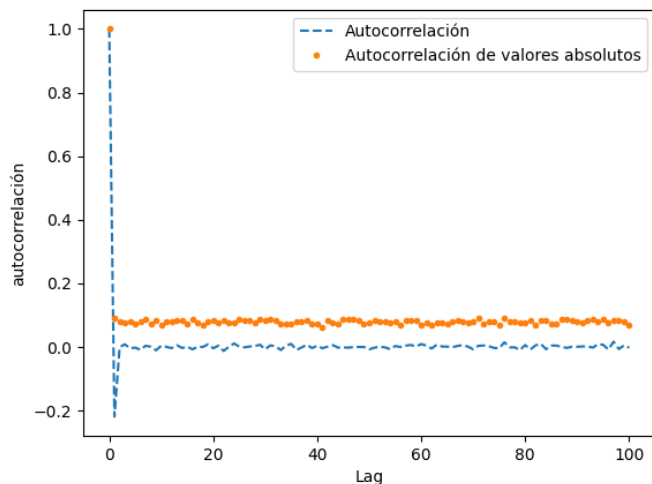


Figura 4.15: Autocorrelaciones de los rendimientos logarítmicos de periodo 200. La línea segmentada representa la autocorrelación de los rendimientos. La línea con puntos representa la autocorrelación de los rendimientos absolutos.

4.2.2. Irreversibilidad

Para el análisis de irreversibilidad, se aleatorizó la serie de datos obtenida de la simulación, con la finalidad de perder toda posible estructura en la serie, dando como resultado una serie en principio reversible. Se comparó el resultado obtenido al calcular los indicadores de ambas series, la original y la aleatorizada.

Como primer indicador de irreversibilidad, aproximamos la tasa de producción de entropía como la divergencia Kullback-Leibler entre trayectorias de longitud L extraídas de las series de tiempo de los rendimientos. Como se ilustra en la Figura 4.16, para este procedimiento dividimos los rendimientos en 3 categorías dependiendo de su valor. Asignamos el valor 0 a aquellos rendimientos $r : r \leq \mu - \alpha\sigma$, el valor 1 a $r : r \in (\mu - \alpha, \mu + \alpha)$ y finalmente asignamos el valor 2 a aquellos rendimientos $r : r \leq \mu + \alpha\sigma$, en donde α es un parámetro que nos permite tener poblaciones similares en las tres categorías.

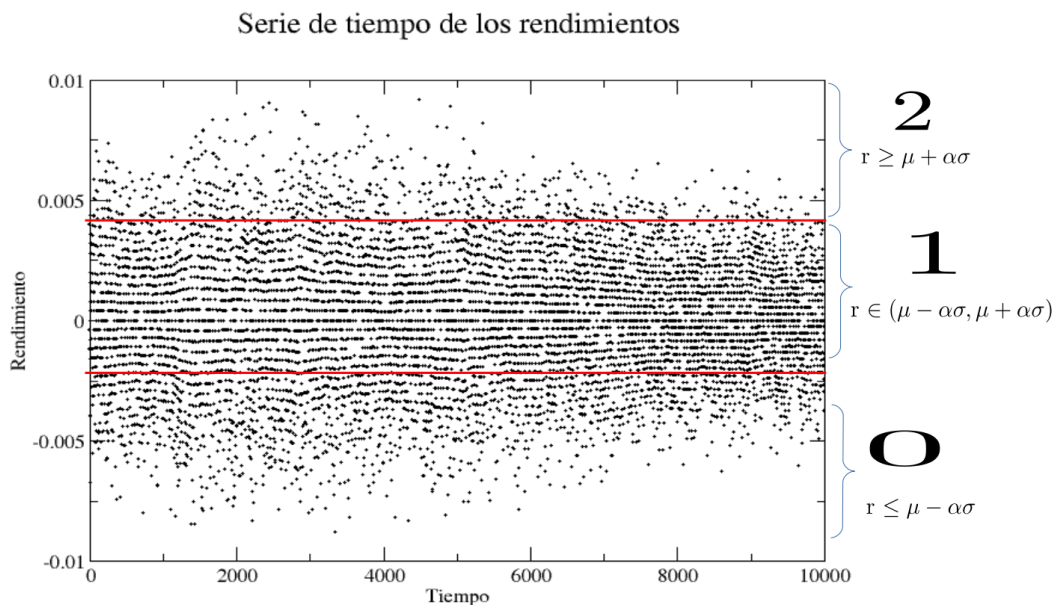


Figura 4.16: Esquema del procedimiento utilizado para categorizar los rendimientos logarítmicos. Asignamos el valor 0 a aquellos rendimientos $r : r \leq \mu - \alpha\sigma$, el valor 1 a $r : r \in (\mu - \alpha, \mu + \alpha)$ y finalmente asignamos el valor 2 a aquellos rendimientos $r : r \leq \mu + \alpha\sigma$, en donde α es un parámetro que nos permite tener poblaciones similares en las tres categorías.

Este primer indicador sugiere que el modelo es reversible, pues como se muestra en la Figura 4.17 tanto la serie original como la aleatorizada tienen el mismo comportamiento.

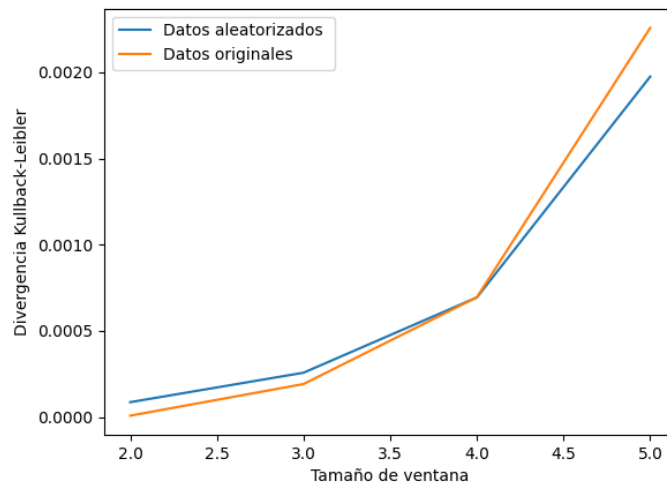


Figura 4.17: Divergencia Kullback-Leibler para la distribución de probabilidades de trayectorias de longitud L en sentido directo e inverso. La línea anaranjada muestra el resultado obtenido con los datos, mientras que la línea azul muestra el resultado obtenido al aleatorizar los datos antes del análisis.

Finalmente, se calculó el indicador de irreversibilidad de patrones de tendencia (IT). La Figura 4.18 muestra el resultado de calcular el indicador de irreversibilidad de patrones de tendencia en función del periodo de los rendimientos, utilizando muestras de tamaño 10^5 extraídas de la misma serie de datos.

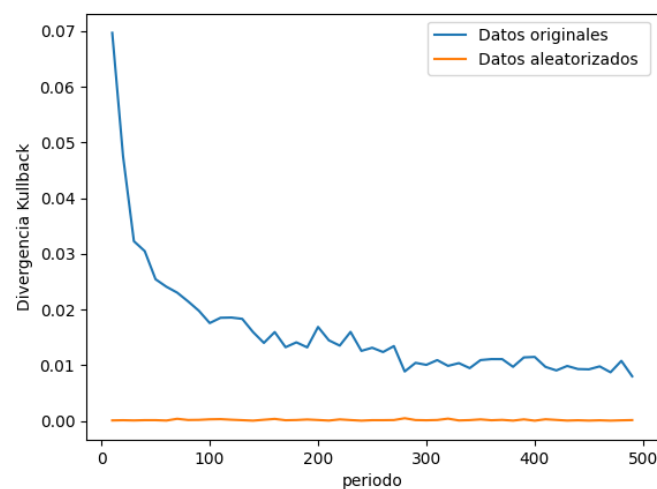


Figura 4.18: Índice de irreversibilidad de patrones de tendencia. La gráfica muestra el IT en función del periodo de los rendimientos logarítmicos.

4.3. Simulación tipo Markov

Siguiendo con en análisis, se modelaron las órdenes a mercado basándose en una cadena de Markov como la mencionada en la Subsección 3.3.3 y que se muestra en la Figura 4.19, en donde el número que representa al estado indica el número de órdenes a ejecutar. Recordemos que la distribución generada por esta cadena la denotamos como $\text{Markov}(N, q)$

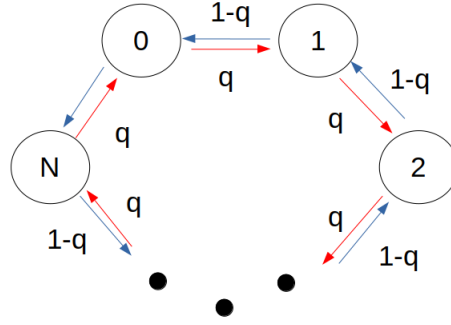


Figura 4.19: Esquema de una cadena de Markov en anillo de N estados.

4.3.1. Órdenes a mercado tipo Markov reversibles

Los resultados de esta sección son a partir de las siguientes condiciones:

- Intervalo de precios que se está considerando es $[0, 5000]$.
- Condiciones iniciales son $a_0 = 2510$ y $b_0 = 2500$

$$A_p^0 = \begin{cases} 100, & p \geq a(t), \\ 0, & p < a(t), \end{cases} \quad B_p^0 = \begin{cases} 100, & p \leq b(t), \\ 0, & p > b(t). \end{cases} \quad (4.139)$$

- Entrada de órdenes límite

$$I^t \sim \text{Ber}(0.8), \quad J^t \sim \text{Ber}(0.8). \quad (4.140)$$

- Cancelación de órdenes límite

$$C_p^t \sim \text{Binom}(A_p^t, 0.01), \quad D_p^t \sim \text{Binom}(B_p^t, 0.01). \quad (4.141)$$

- Órdenes a mercado

$$N_p \sim \text{Markov}(10, 0.5), \quad M_p \sim \text{Markov}(10, 0.5). \quad (4.142)$$

Se obtuvo la serie de tiempo ilustrada en la gráfica de la Figura 4.20, la cual representa el precio medio o *mid price* y es la que se utilizó para los cálculos de esta sección.

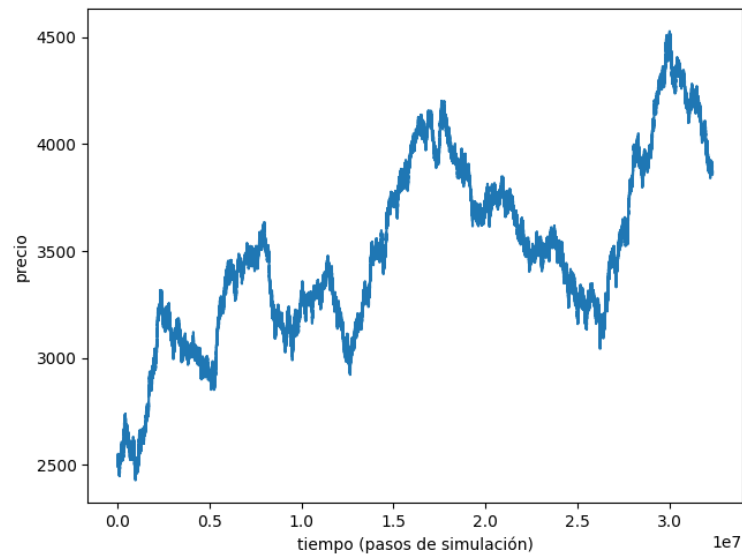


Figura 4.20: Precio medio en función del tiempo, de la simulación con órdenes a mercado modeladas a partir de una cadena de Markov reversible.

Hechos estilizados

Para el análisis de los datos empezamos por verificar el cumplimiento de los hechos estilizados reportados. En la gráfica de la Figura 4.22 podemos notar una atenuación en el agrupamiento de volatilidad, pues la autocorrelación de los rendimientos absolutos se asemeja mucho a la autocorrelación de los rendimientos.

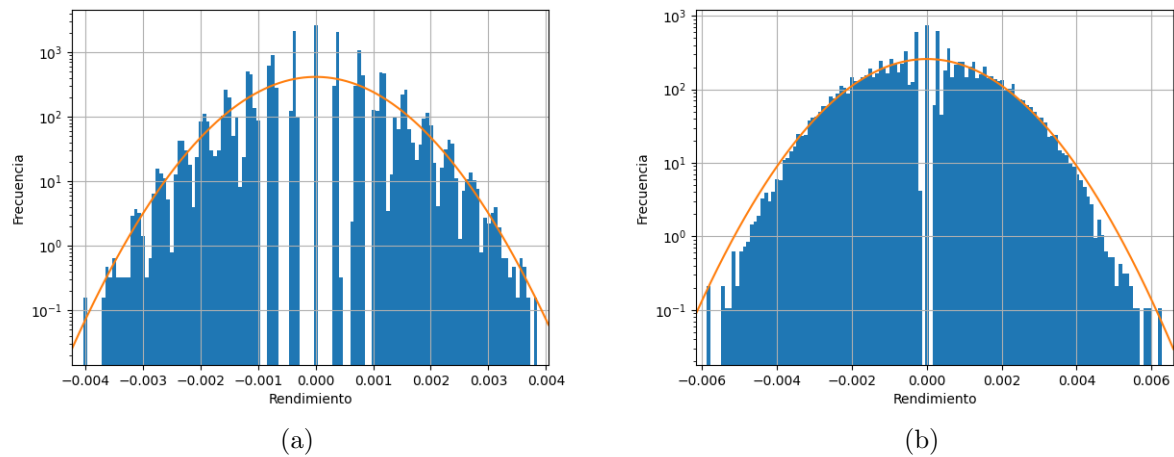


Figura 4.21: Distribución de los rendimientos logarítmicos de la simulación con órdenes a mercado basadas en una cadena de Markov reversible. La gráfica a) muestra la distribución de los rendimientos logarítmicos con periodo 20. La gráfica b) muestra la distribución de los rendimientos logarítmicos con periodo 300.

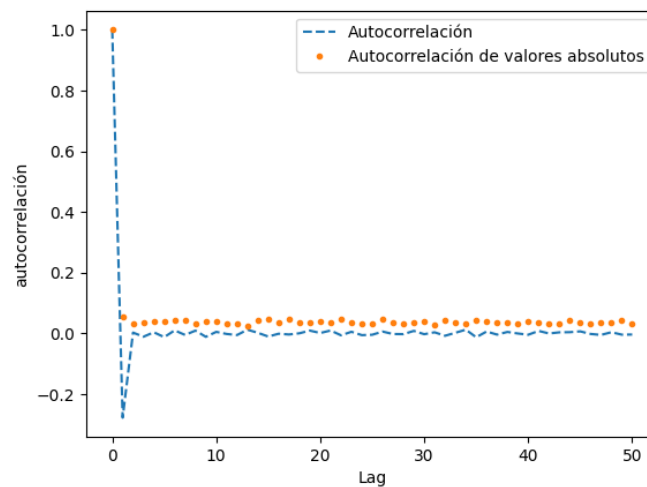


Figura 4.22: Autocorrelaciones de los rendimientos logarítmicos de periodo 300. La línea segmentada representa la autocorrelación de los rendimientos. La línea con puntos representa la autocorrelación de los rendimientos absolutos.

Irreversibilidad

Siguiendo el procedimiento descrito en la sección anterior, aproximamos la entropía relativa y calculamos el indicador de patrones de tendencia como indicadores de la irreversibilidad del sistema

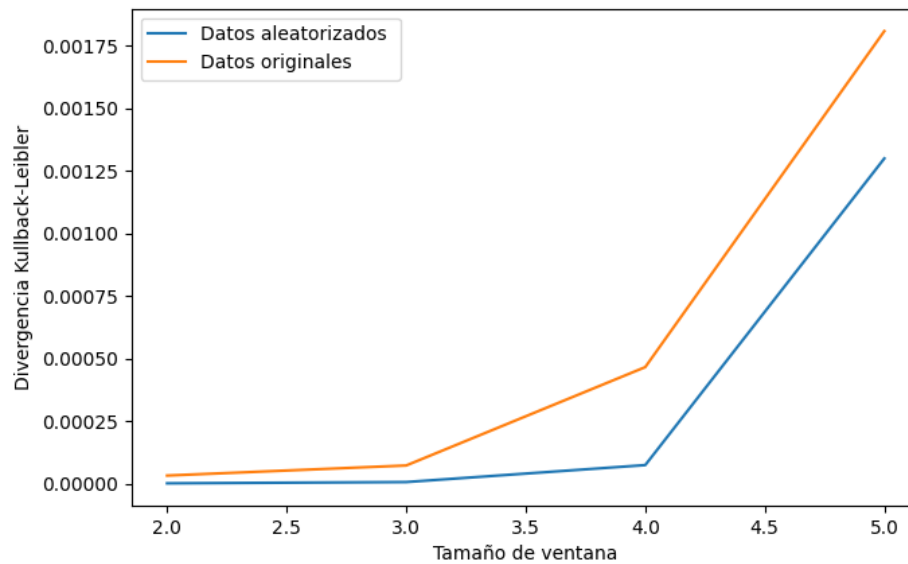


Figura 4.23: Divergencia Kullback-Leibler para la distribución de probabilidades de trayectorias de longitud L en sentido directo e inverso, de la simulación con órdenes a mercado basadas en una cadena de Markov reversible. La línea anaranjada muestra el resultado obtenido con los datos, mientras que la línea azul muestra el resultado obtenido al aleatorizar los datos antes del análisis.

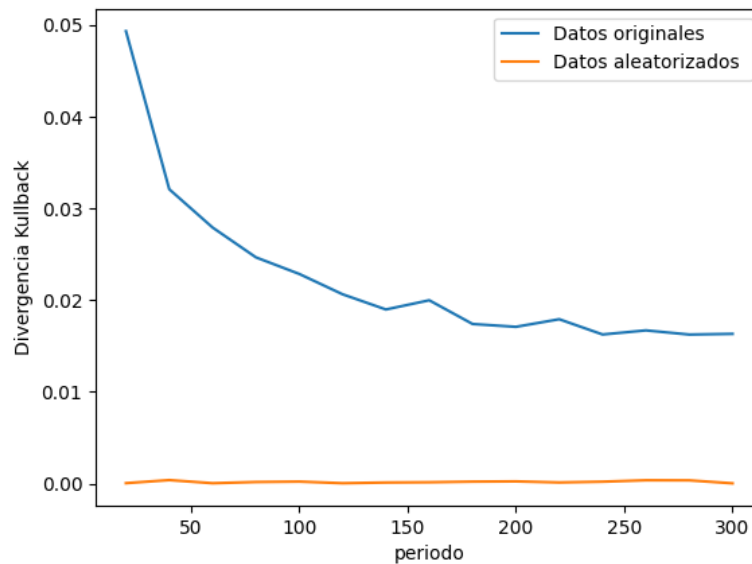


Figura 4.24: Índice de irreversibilidad de patrones de tendencia, de la simulación con órdenes a mercado basadas en una cadena de Markov reversible. La gráfica muestra el IT en función del periodo de los rendimientos logarítmicos.

4.3.2. Órdenes a mercado tipo Markov irreversibles

Los resultados de esta sección son a partir de las siguientes condiciones:

- Intervalo de precios que se está considerando es $[0, 5000]$.
- Condiciones iniciales son $a_0 = 2510$ y $b_0 = 2500$

$$A_p^0 = \begin{cases} 100, & p \geq a(t), \\ 0, & p < a(t), \end{cases} \quad B_p^0 = \begin{cases} 100, & p \leq b(t), \\ 0, & p > b(t). \end{cases} \quad (4.143)$$

- Entrada de órdenes límite

$$I^t \sim \text{Ber}(0.8), \quad J^t \sim \text{Ber}(0.8). \quad (4.144)$$

- Cancelación de órdenes límite

$$C_p^t \sim \text{Binom}(A_p^t, 0.01), \quad D_p^t \sim \text{Binom}(B_p^t, 0.01). \quad (4.145)$$

- Órdenes a mercado

$$N_p \sim \text{Markov}(10, 0.25), \quad M_p \sim \text{Markov}(10, 0.25). \quad (4.146)$$

Se obtuvo la serie de tiempo ilustrada en la gráfica de la Figura 4.25, la cual representa el precio medio o *mid price* y es la que se utilizó para los cálculos de esta sección.

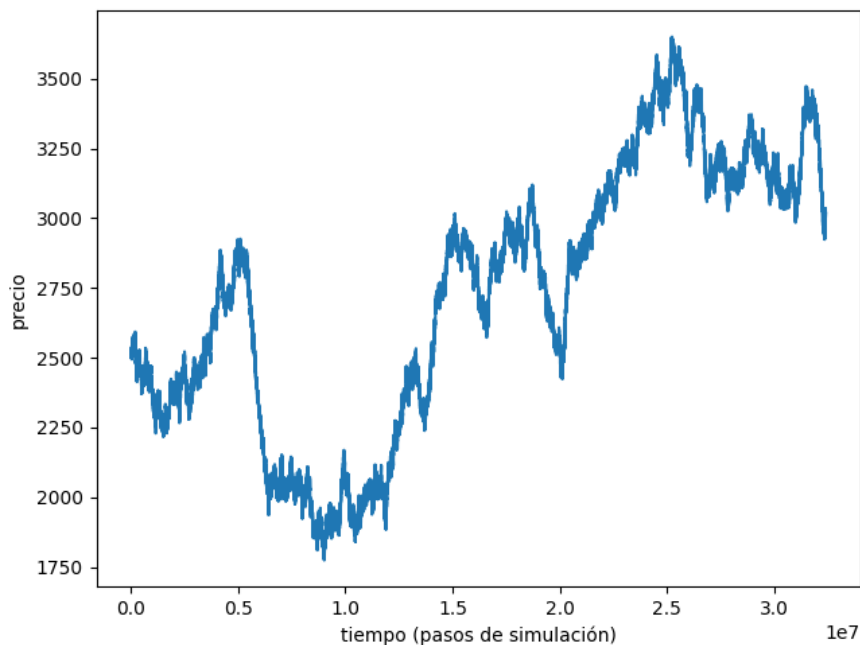


Figura 4.25: Precio medio en función del tiempo, de la simulación con órdenes a mercado modeladas a partir de una cadena de Markov irreversible.

Hechos estilizados

Para el análisis de los datos empezamos por verificar el cumplimiento de los hechos estilizados reportados

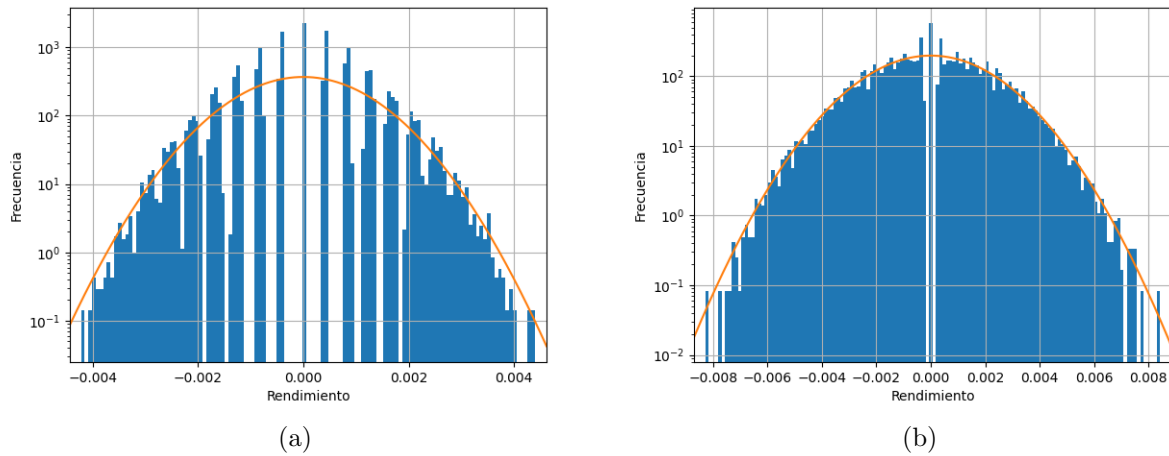


Figura 4.26: Distribución de los rendimientos logarítmicos de la simulación con órdenes a mercado basadas en una cadena de Markov irreversible. La gráfica a) muestra la distribución de los rendimientos logarítmicos con periodo 10. La gráfica b) muestra la distribución de los rendimientos logarítmicos con periodo 490.

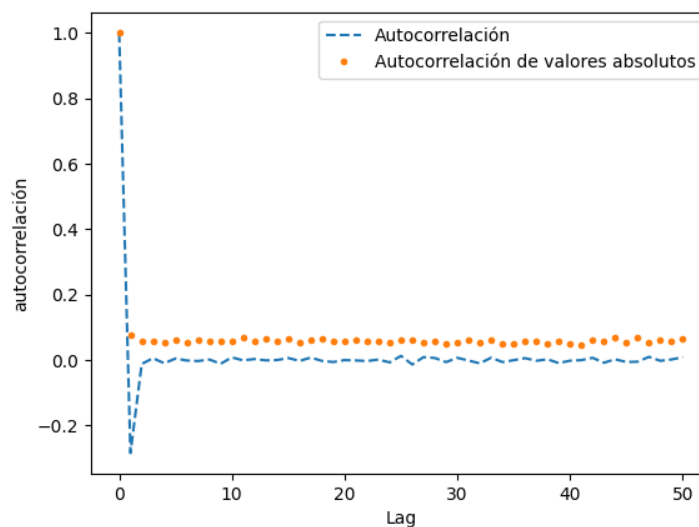


Figura 4.27: Autocorrelaciones de los rendimientos logarítmicos de periodo 300. La línea segmentada representa la autocorrelación de los rendimientos. La línea con puntos representa la autocorrelación de los rendimientos absolutos.

Irreversibilidad

Siguiendo el procedimiento descrito en la sección anterior, aproximamos la entropía relativa y calculamos el indicador de patrones de tendencia como indicadores de la irreversibilidad del sistema

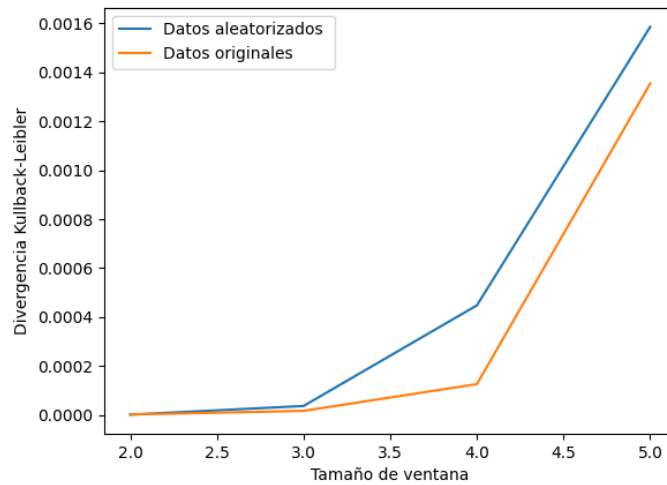


Figura 4.28: Divergencia Kullback-Leibler para la distribución de probabilidades de trayectorias de longitud L en sentido directo e inverso, de la simulación con órdenes a mercado basadas en una cadena de Markov irreversible. La línea anaranjada muestra el resultado obtenido con los datos, mientras que la línea azul muestra el resultado obtenido al aleatorizar los datos antes del análisis.

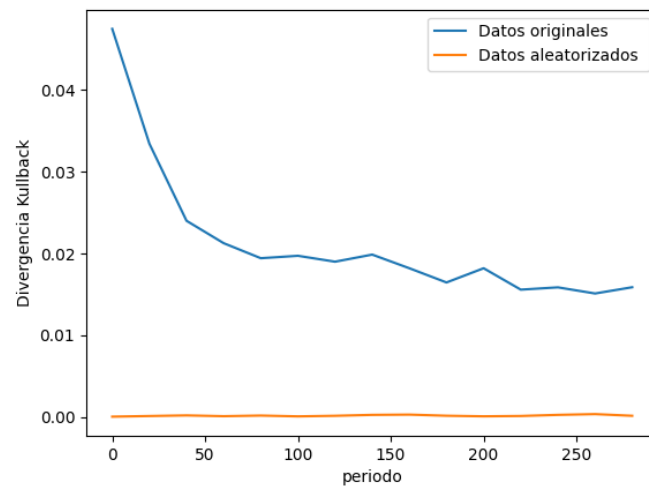


Figura 4.29: Índice de irreversibilidad de patrones de tendencia, de la simulación con órdenes a mercado basadas en una cadena de Markov reversible. La gráfica muestra el IT en función del periodo de los rendimientos logarítmicos.

4.4. Análisis de series reales

Para contrastar los resultados obtenidos con el modelo se realizó el mismo análisis con datos de criptomonedas obtenidos de la página <https://www.cryptodatadownload.com>. Se analizaron los registros obtenidos minuto a minuto de las criptomonedas Bitcoin (BTC) y Ethereum (ETC) provenientes del exchange Bitstamp. El análisis abarcó los registros de los años 2012 a 2022 para el BTC y de 2017 a 2022 para ETC.

Los resultados mostrados en esta sección corresponden al total de los datos recabados de ambas criptomonedas. Las gráficas de las Figuras 4.30a y 4.30b muestran los precios de apertura en dólares estadounidenses (USD) como función del tiempo en minutos de ambas criptomonedas. Adicionalmente en la Subsección 4.4 se realizaron estimaciones de irreversibilidad para los volúmenes comerciados.

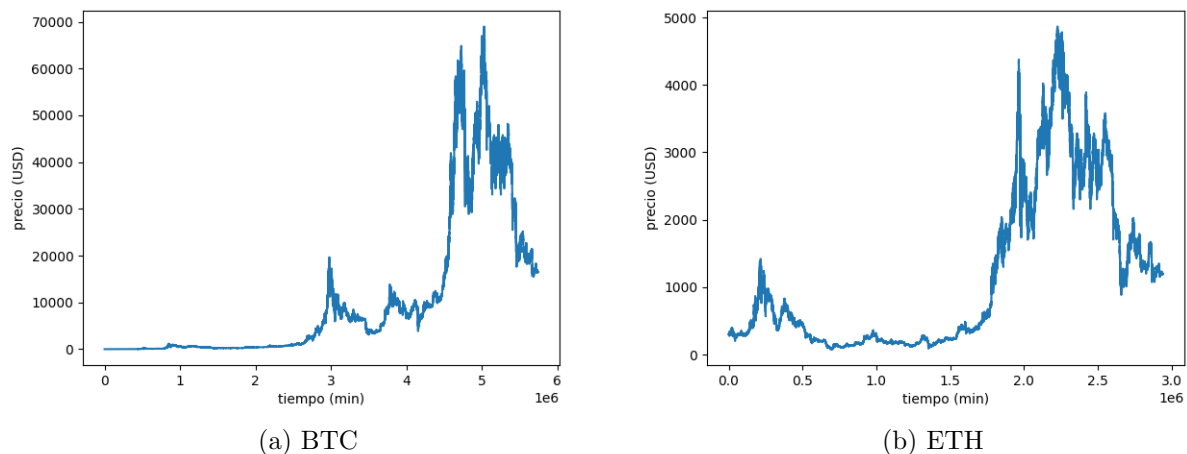


Figura 4.30: Series de tiempo de los precios de apertura registrados minuto a minuto por el exchange Bitstamp. La gráfica a) muestra el precio de apertura en dólares estadounidenses (USD), de la criptomoneda BTC. La gráfica b) muestra el precio de apertura en USD, de la criptomoneda ETH.

Rendimientos

Para el análisis se calcularon los rendimientos logarítmicos de periodo $k = 1$ minuto, como se muestra en las Figuras 4.31a-4.31b, y con ellos se calcularon las funciones de autocorrelación como se muestra en las Figuras 4.32a y 4.32b, con las que verificamos la ausencia de autocorrelación en los rendimientos y el agrupamiento de volatilidad.

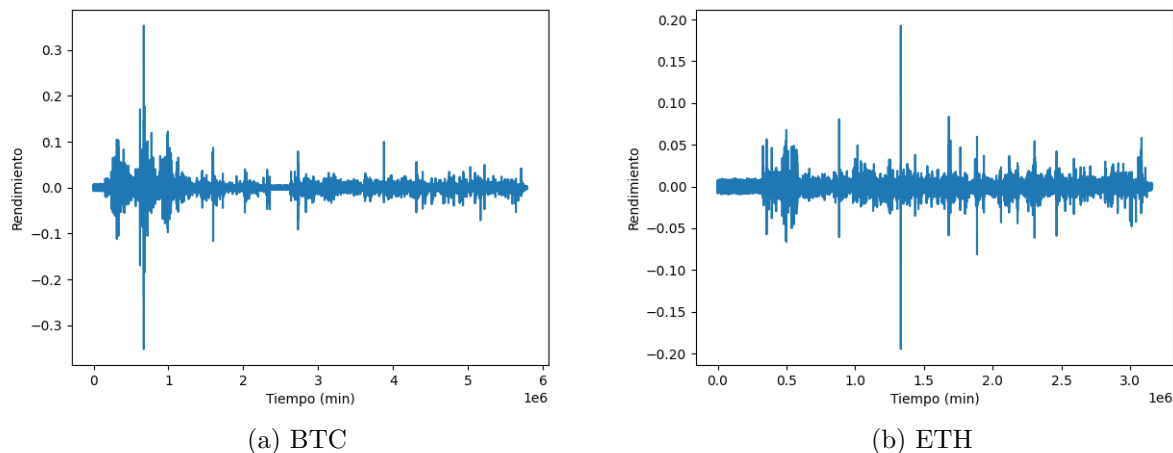


Figura 4.31: Series de tiempo de los rendimientos logarítmicos de periodo 1 minuto, calculados con los datos extraídos del exchange Bitstamp. La gráfica a) muestra los rendimientos de la criptomoneda BTC. La gráfica b) muestra los rendimientos de la criptomoneda ETH.

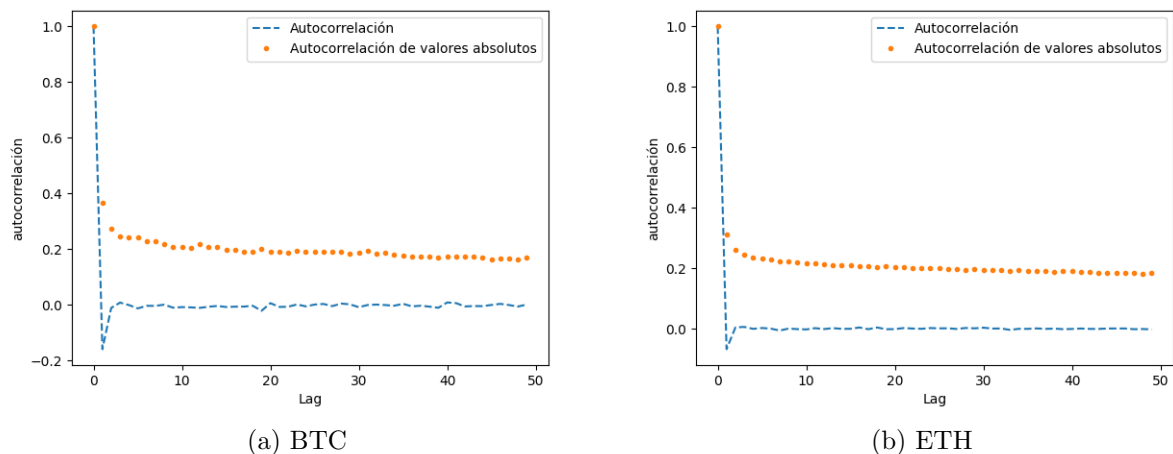


Figura 4.32: Funciones de autocorrelación de los rendimientos logarítmicos de periodo 1 minuto, calculados a partir de la información extraída del exchange Bitstamp. La gráfica a) muestra las funciones de autocorrelación para BTC, mientras que la gráfica b) muestra las autocorrelación para ETH.

Irreversibilidad

Siguiendo el procedimiento descrito en la Subsección 4.2.2 calculamos la divergencia Kullback-Leibler para trayectorias de longitud L extraídas de las series de tiempo de los rendimientos, como se muestra en las gráficas de las Figuras 4.33a y 4.33b.

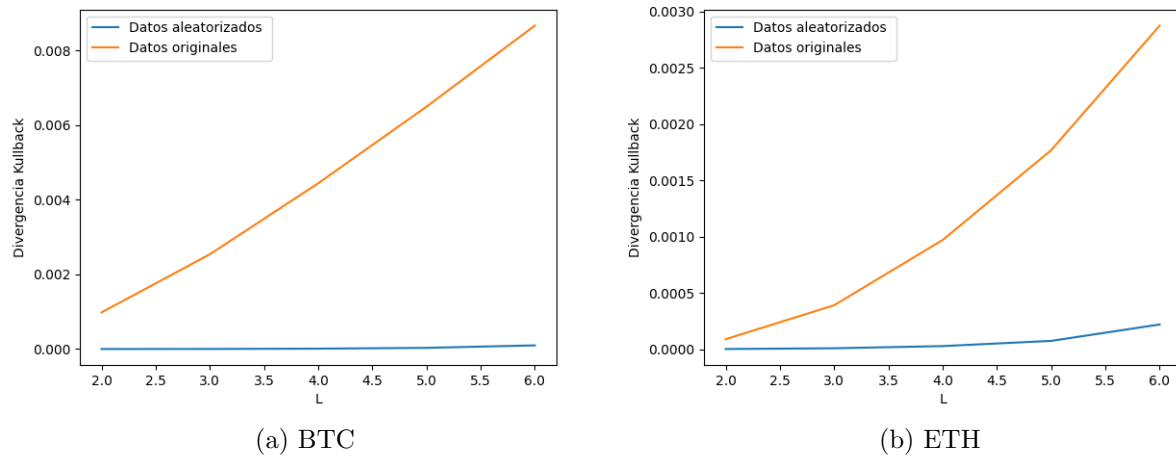


Figura 4.33: Divergencia Kullback-Leibler para la distribución de probabilidades de trayectorias de longitud L en sentido directo e inverso, de los rendimientos logarítmicos de periodo 1 minuto, calculados a partir de la información extraída del exchange Bitstamp. La línea anaranjada muestra el resultado obtenido con los datos, mientras que la línea azul muestra el resultado obtenido al aleatorizar los datos antes del análisis. La gráfica a) muestra los resultados obtenidos para la criptomoneda BTC. La gráfica b) muestra los resultados obtenidos para la criptomoneda ETH.

Calculamos el índice de irreversibilidad de patrones de tendencia para ambas criptomonedas, variando el periodo de los rendimientos como se muestra en las Figuras 4.34a y 4.35a, en donde podemos notar una pérdida de la irreversibilidad al aumentar el periodo, para ambas criptomonedas. También calculamos el IT tomando una ventana de 90 días para después deslizarla a lo largo de todos los rendimientos de periodo 1 minuto, como se muestra en las Figuras 4.34b y 4.38b.

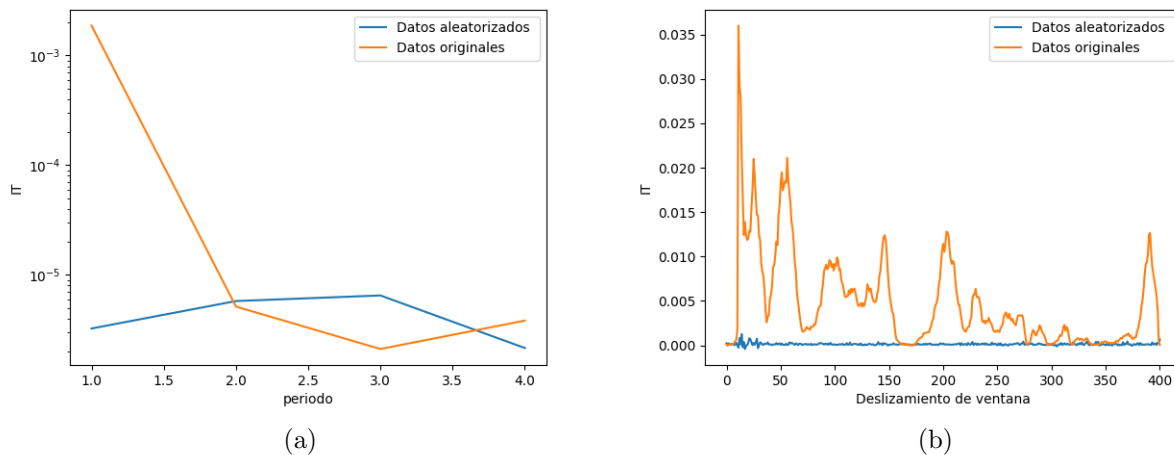


Figura 4.34: Índice de irreversibilidad de patrones de tendencia para la criptomoneda BTC. La gráfica a) muestra una pérdida de la irreversibilidad al aumentar el periodo de los rendimientos. La gráfica b) muestra el resultado de calcular el IT para diferentes ventanas de 90 días.

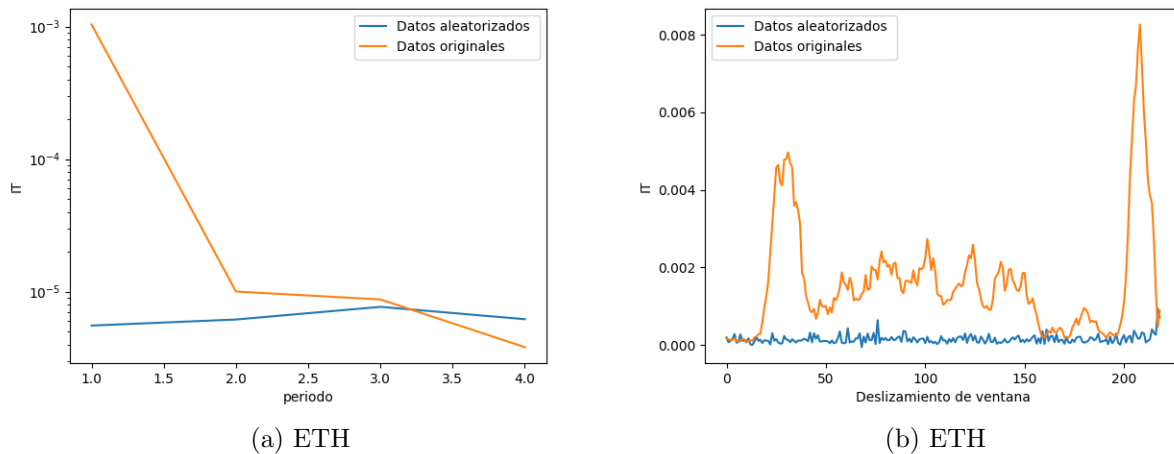


Figura 4.35: Índice de irreversibilidad de patrones de tendencia para la criptomoneda ETH. La gráfica a) muestra una pérdida de la irreversibilidad al aumentar el periodo de los rendimientos. La gráfica b) muestra el resultado de calcular el IT para diferentes ventanas de 90 días.

Irreversibilidad en volúmenes

Para las estimaciones de irreversibilidad de esta subsección se utilizaron los volúmenes en dólares estadounidenses (USD), es decir, la cantidad de dólares invertidos en estas criptomonedas registro a registro, como se muestra en las Figuras 4.36a y 4.36b

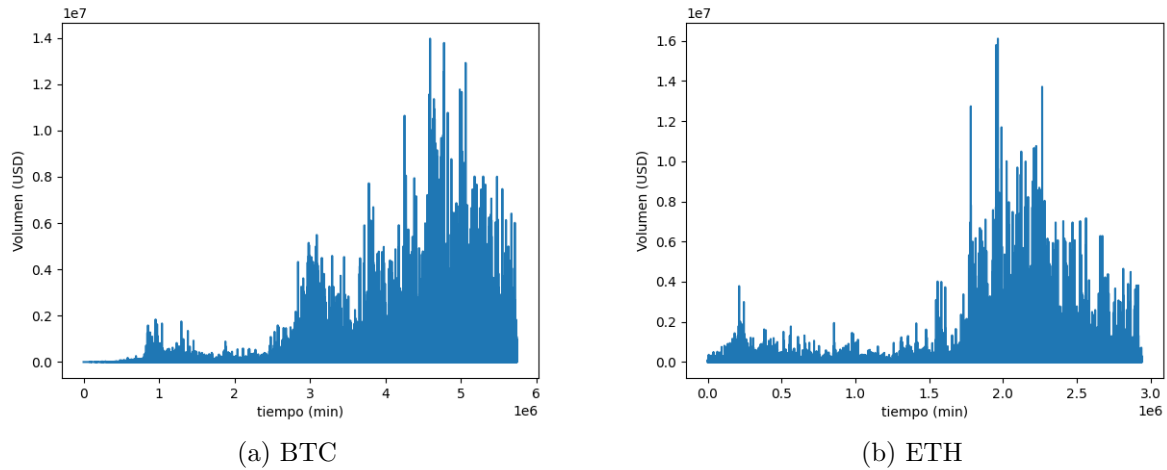


Figura 4.36: Volúmenes en USD registrados minuto a minuto por el exchange Bitstamp. La gráfica a) muestra los volúmenes del BTC. La gráfica b) muestra los volúmenes del ETH.

Las técnicas utilizadas fueron: La divergencia Kullback-Leibler para trayectorias de longitud L como se muestra en las Figuras 4.37a y 4.37b y la índice de patrones de tendencia, calculado tomando una ventana de 90 días y deslizando a lo largo de todos los registros. Ambos indicadores sugieren la existencia de irreversibilidad en estas criptomonedas.

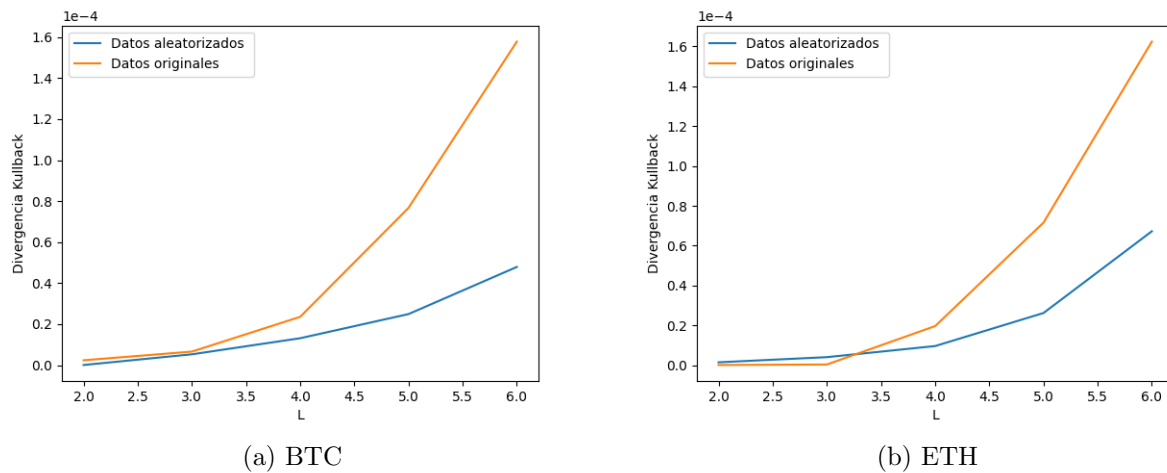


Figura 4.37: Divergencia Kullback-Leibler para trayectorias de longitud L extraídas de los volúmenes.

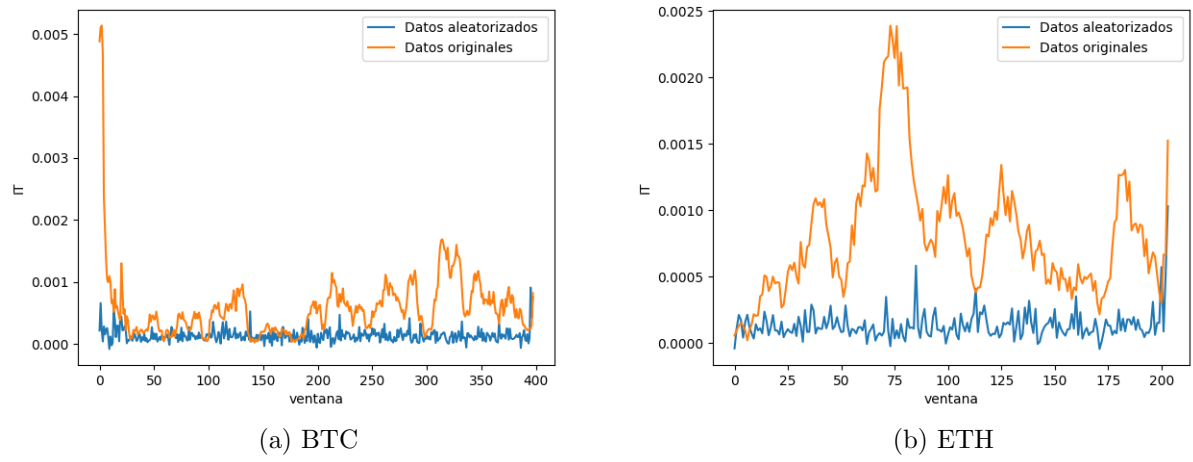


Figura 4.38: Índice de irreversibilidad de patrones de tendencia aplicado a los volúmenes.

Capítulo 5

Conclusiones

En el presente trabajo se propuso un modelo estocástico para el estudio de la dinámica de los libros de órdenes de doble subasta. En el modelo propuesto se han incluido algunas de las características básicas de los libros de órdenes reales. Específicamente: arribo de órdenes límite, cancelación de órdenes límite y arribo de órdenes a mercado.

La simplificación de estas características básicas junto a la teoría de cadenas de Markov estacionarias, nos permitió reducir la complejidad de nuestro análisis. Al centrar el análisis sobre la distribución conjunta de los precios de compra y venta, pasamos de un sistema de N dimensiones a uno de 2. Utilizando la técnica de las funciones generadoras de momentos dedujimos un conjunto de ecuaciones de recurrencia para el primer momento de los precios de compra y venta.

Para complementar el análisis se realizaron simulaciones numéricas. Estas simulaciones ayudaron a comprobar la capacidad del modelo para reproducir las propiedades estadísticas más reportadas en series de tiempo reales, es decir, los hechos estilizados. A través de la simulación pudimos notar que bajo ciertos parámetros el modelo reproduce adecuadamente algunos de los hechos estilizados más reportados en la literatura. Por ejemplo, la ausencia de autocorrelación, la agrupación de volatilidad, la distribución de cola larga para los rendimientos y la agregación de normalidad.

Durante el análisis de los datos provenientes de la simulación, pudimos notar que para reproducir los hechos estilizados es importante una alta variabilidad en los rendimientos. Dentro de la simulación pudimos lograr esto al aumentar el volumen de las órdenes a mercado, o aumentando el periodo de los rendimientos. Sin embargo, duplicar el periodo de los rendimientos, duplica el tiempo de ejecución, por lo que se optó por aumentar el volumen de las órdenes a mercado. Con los parámetros utilizados pudimos notar que el agrupamiento de volatilidad se reproduce débilmente en periodos a partir de ~ 200 pasos de simulación, mientras que con el mismo periodo podemos apreciar más fácilmente propiedades como la cola larga en las distribuciones y la normalidad agregada.

Para contrastar el análisis hecho sobre el modelo analizamos estadísticamente series de tiempo reales. Específicamente estudiamos los precios y volúmenes de las criptomonedas BTC y ETH con registros de periodo 1 minuto. Nos centramos particularmente

en el análisis de la irreversibilidad de los rendimientos y volúmenes de dichas criptomonedas. Para el análisis de la irreversibilidad usamos dos indicadores, el índice de patrones de tendencia y la divergencia kullback-Leibler para trayectorias.

El análisis de datos reales mediante el indicador de patrones de tendencia sugiere que la irreversibilidad en las series de tiempo de los rendimientos se pierde al aumentar el periodo. Mientras que a periodo constante pudimos observar una irreversibilidad persistente. Los datos obtenidos de la simulación sugieren que el modelo es capaz de reproducir cualitativamente esta pérdida de irreversibilidad.

La divergencia Kullback-Leibler para trayectorias simbólicas sugiere irreversibilidad en datos reales, mientras que en la simulación no es del todo claro.

Respecto a los volúmenes, ambos indicadores sugieren irreversibilidad de las series de tiempo de ambas criptomonedas.

Finalmente, como una posible continuación de este trabajo, se podría tratar de resolver las relaciones de recurrencia de los primeros momentos, también se podrían cambiar las distribuciones usada en la simulación por unas más realistas o bien se podría estudiar la amplitud de las tendencias de subida y bajada.

Bibliografía

- [1] Chakraborti A. et al. “Econophysics review: I. Empirical facts”. En: *Quantitative Finance* 11 (jul. de 2011), págs. 991-1012. DOI: [10.1080/14697688.2010.539248](https://doi.org/10.1080/14697688.2010.539248).
- [2] Biais B., Hillton P. y Spatt C. “An empirical analysis of the limit order book and the order flow in the paris bourse”. En: *The Journal of Finance* 50.5 (1995), págs. 1655-1689. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1995.tb05192.x>.
- [3] Malkiel B.G. y Fama E.F. “Efficient capital markets: a review of theory and empirical work*”. En: *The Journal of Finance* 25.2 (1970), págs. 383-417. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1970.tb00518.x>.
- [4] Challet D. y Stinchcombe R. “Analyzing and modeling 1+1d markets”. En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 300.1 (2001), págs. 285-299. ISSN: 0378-4371. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(01\)00335-1](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(01)00335-1).
- [5] Smith E. et al. “Statistical theory of the continuous double auction”. En: *Quantitative Finance* 3.6 (dic. de 2003), págs. 481-514. DOI: [10.1088/1469-7688/3/6/307](https://doi.org/10.1088/1469-7688/3/6/307).
- [6] Abergel F. et al. *Limit order books*. Cambridge University Press, 2016. ISBN: 978-1-107-16398-0.
- [7] Morales Herrera J. y Salgado García R. *Trend patterns statistics for assessing irreversibility in cryptocurrencies: time-asymmetry versus inefficiency*. 2023. arXiv: [2307.08612](https://arxiv.org/abs/2307.08612) [q-fin.ST].
- [8] Farmer J.D., Patelli P. y Zovko I.I. “The predictive power of zero intelligence in financial markets”. En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 102.6 (2005), págs. 2254-2259. DOI: [10.1073/pnas.0409157102](https://doi.org/10.1073/pnas.0409157102).
- [9] Shynk J.J. *Probability, random variables, and random processes*. Jhon Wiley & Sons, Inc., 2013. ISBN: 978-0-470-24209-4.
- [10] Bouchaud J.P., Mézard M. y Potters M. “Statistical properties of stock order books: empirical results and models”. En: *Quantitative Finance* 2.4 (2002), págs. 251-256. DOI: [10.1088/1469-7688/2/4/301](https://doi.org/10.1088/1469-7688/2/4/301).
- [11] Rincón L. *Introducción a los procesos estocásticos*. 2012.

-
- [12] Politi M. y Scalas E. “Fitting the empirical distribution of intertrade durations”. En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 387.8 (2008), págs. 2025-2034. ISSN: 0378-4371. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2007.11.018>.
- [13] Gould M.D. et al. “Limit order books”. En: *Quantitative Finance* 13.11 (2013), págs. 1709-1742. DOI: [10.1080/14697688.2013.803148](https://doi.org/10.1080/14697688.2013.803148).
- [14] Bak P., Paczuski M. y Shubik M. “Price variations in a stock market with many agents”. En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 246.3 (1997), págs. 430-453. ISSN: 0378-4371. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(97\)00401-9](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(97)00401-9).
- [15] Gopikrishnan P. et al. “Statistical properties of share volume traded in financial markets”. En: *Phys. Rev. E* 62 (4 oct. de 2000), R4493-R4496. DOI: [10.1103/PhysRevE.62.R4493](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.62.R4493).
- [16] Ivanov P.C. et al. “Common scaling patterns in intertrade times of U. S. stocks”. En: *Phys. Rev. E* 69 (5 mayo de 2004), pág. 056107. DOI: [10.1103/PhysRevE.69.056107](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.69.056107).
- [17] Cont R. “Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues”. En: *Quantitative Finance* 1.2 (2001), págs. 223-236. DOI: [10.1080/713665670](https://doi.org/10.1080/713665670).
- [18] Cont R., Stoikov S. y Talreja R. “A stochastic model for order book dynamics”. En: *Operations Research* 58.3 (2010), págs. 549-563. ISSN: 0030364X, 15265463. URL: <http://www.jstor.org/stable/40792679> (visitado 28-11-2022).
- [19] Mota Navarro R. y Larralde H. “A detailed heterogeneous agent model for a single asset financial market with trading via an order book”. En: *Plos One* 12.2 (feb. de 2017), págs. 1-27. DOI: [10.1371/journal.pone.0170766](https://doi.org/10.1371/journal.pone.0170766).
- [20] Salgado García R. “Open markov chains: cumulant dynamics, fluctuations and correlations”. En: *Entropy* 23.2 (feb. de 2021), pág. 256. URL: <https://doi.org/10.3390/e23020256>.
- [21] Salgado García R. y Maldonado C. “Estimating entropy rate from censored symbolic time series: A test for time-irreversibility”. En: *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 31.1 (2021), pág. 013131. DOI: [10.1063/5.0032515](https://doi.org/10.1063/5.0032515).
- [22] Tsay R.S. *Analysis of financial time series*. Jhon Wiley & Sons, Inc., 2002. ISBN: 0-471-41544-8.
- [23] Maslov S. y Mills M. “Price fluctuations from the order book perspective—empirical facts and a simple model”. En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 299.1 (2001). Application of Physics in Economic Modelling, págs. 234-246. ISSN: 0378-4371. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(01\)00301-6](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(01)00301-6).
- [24] Cover T.M. y Thomas J.A. *Elements of information theory*. Jhon Wiley & Sons, Inc., 2006. ISBN: 0-471-24194-4.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS



Instituto de
Investigación en
Ciencias
Básicas y
Aplicadas



INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

POSGRADO EN CIENCIAS

Cuernavaca, Mor., a 8 de mayo de 2024

DRA. LINA ANDREA RIVILLAS ACEVEDO
COORDINADORA DEL POSGRADO EN CIENCIAS

PRESENTE

Atendiendo a la solicitud para emitir DICTAMEN sobre la revisión de la tesis titulada: DINÁMICA DE LOS LIBROS DE ÓRDENES, que presenta el L. en C. Josue Samayoa Valdez (10055023) para obtener el título de Maestro en Ciencias.

Dirección de tesis: Dr. Raúl Salgado García

Unidad Académica: Instituto de Investigación en Ciencias Básicas y Aplicadas (IICBA)

Nos permitimos informarle que nuestro voto es:

NOMBRE	DICTAMEN	FIRMA
Dr. Markus Franziskus Müller CInC - UAEM	APROBADO	
Dra. Paola Vanessa Olgúin Rodríguez CInC - UAEM	APROBADO	
Dra. Brenda Ivette García Maya Tec. Mty-Guadalajara	APROBADO	
Dr. Antonio Daniel Rivera López CInC - UAEM	APROBADO	
Dr. Hernán Larralde Ridaura ICF-UNAM	APROBADO	





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

Sello electrónico

MARKUS FRANZISKUS MULLER | Fecha:2024-05-08 12:04:56 | FIRMANTE

hkuAfNzEB4/vnixC0kh+74ojnNlddwNyqDCM/IUcjfrBlc5gl1n2+C22w4gu8FzJkx/2tZsqJ3TIVaO72YHJUvbk4J7LbVApRTsW2eWawK6omM1T43Tq4rnWmHqA6rHkk6cqxzpp1H PF8jq+M1J6jWB1NwBOP2mPIIE3ykFkNRR16x6+D2TDZD2jGSoCg81fxPM+n6toIB95HVtmSthR2Z4WgY14YgyaW6YvVMxHb0QomjQ5V+ZqjD4RmeIn4dg2HNmTpcclUHs+RFE R+80ewa9E2PVPXCxXhwjK3krkOk/HbKEgkHNlggNZC2VGHYB19/9OH2ni78xUbyaVzMw==

ANTONIO DANIEL RIVERA LOPEZ | Fecha:2024-05-08 13:12:02 | FIRMANTE

wGhGLG3ttVf4BAYbJcvtRKs+QxOUtNW2T2c/tWGOY/lamQcVwN1WOFa6jfvccivSF/iDd1lvdDtRdw8ccBlunh/4lx+LKleb099iTRCX9EtbOdMnsV9VjgM2ldi4IV7XpaA2ZLtoeE9r eDPLm6GIQcjq6Pk6Y6sh0CVNiKZxGol1tS3mh9HNgbNj8K0WRJ+hkCxZgp9LW7xYKXx3y5bw4JYn8efdxwTUL3VwlspxNaV6+Nm9dXZQjTxYp6excVXEmWiP6Ej6iY+nGcX1v DYUUFpGhk3xY10Ywb0QEGiQzqyXo4l4IUZ9HF+z6AnNL3RK58akMBoWqZ3f5CPj3A==

PAOLA VANESSA OLGUÍN RODRÍGUEZ | Fecha:2024-05-08 15:20:39 | FIRMANTE

PJPieH5TsE/emSHWvRystvQKn1VNof/umTDO4Wp7gqT9HmGJYJ84vlZ4ZFDaTjiiDnmp47/sCM1fjMMal6c7m3Npm7Jm8MWbJU/rJ7giBEcPoaNKU511yNxXoYCnurH+96KhW5 a8nFPw2sUlHlZ3MP7bNqZn8NW5fzu3/p+J+He5yHE6PI/OY4GckmaeCUb0lxQExyhnbvsifd+xrcg++Uyp8P7WVe+OIL08+uvqu5cBXGntCd9dWOjRdf5HHjlgwp69ju1+ZsLhmRyy 7kRRV45qjsRkuTiRGJZ+qRToBUbWC8AceQ24C1Rfjpz8Q6f7fQ09/kzgvfCEX91MqDGuEQ==

BRENDA IVETTE GARCÍA MAYA | Fecha:2024-05-09 10:46:40 | FIRMANTE

AHRZyXvAWO0mq+tLijZcr8kK/NjsyD7fpCOhcCnHYRquaxhYzxFdXmeh5nanSEvWu0Hf00zkgmWg0/vlbdbKtVxqXM3p/Up/0aCmxGPyhztDfBz3r20Ry2W1Z1xhDX3NHvLwPj V9bE992aQ6rLoaQUD12egn5SHui3dfyHEJA/0CBQ5HheFiwzhQK9o1aQxC3rhc8SEC9s/KAs8O9IXxRYFJS0YfDJKilS2kn5Z2CYDStNI7ohubiywwoXaBuxe+pKqyWhSec8Rww+ 113eoJCPUSCX+35tM+13c0S0UjQ/dR9Vgfoz+kocjuXR7u+J0oQ0JgNCGlC9wXVSo4X6g==

HERNÁN LARRALDE RIDAURA | Fecha:2024-05-14 11:32:18 | FIRMANTE

A/nsFynNAftjKbfmXQZZOzp9PvsK8GckPSA+eNMOorz4nzLlhtcqXaz6AzdhQQWRYBuTPPi6bJmlWnJSZr+5MEylvOxbJkzz1qBoSxCno+i4miCk87WmzI27hloUId+d3Enf8wcp3 ylAsbE0WnIEsACDSaFbr6fybuWR+X41ZLlmbObLHyoGG0GlcUHO6q+htxdMHeqLhJdT/h2q9d0gTR+2qHWFrsNw1oKHnXRFDWBieNvf/eZNGn2zFzChkh0rvRLHfvkLJn9sC2 XTzclffD1+8BmsxS8PXZ3KP09NoHgJhh3N9xOBVjBEEnsEnrZEI46HMKgXOoGMY/pJo4A==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



F06fYPINt

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/JFKwZIPRNGRTsgzkTw5pKLuTqhDyVBD>



UAEM
RECTORÍA
2023-2029