



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS Y CIENCIAS APLICADAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

Un modelo de volatilidad estocástica para precios de activos subyacentes

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS CON AREA TERMINAL EN MATEMATICAS

ALBARRAN CORIA LUCIA FERNANDA

DIRECTOR: DR. RAÚL SALGADO GARCÍA

SINODALES:

DR. ANTONIO DANIEL RIVERA LÓPEZ

DRA. RUTH ESTEPHANIA GONZALEZ NARVAEZ

DR. RAÚL SALGADO GARCÍA

DRA. BRENDA IVETTE GARCIA MAYA

DR. ORLANDO DÍAZ HERNÁNDEZ

CUERNAVACA, MORELOS.

DICIEMBRE, 2023

AGRADECIMIENTOS

A mis profesores y mentores; en especial a la Doctora Mesuma Atakishiyeva (Q.E.P.D.) y al Doctor Raúl Salgado García, quienes han compartido su conocimiento y guiado mi aprendizaje. Sus enseñanzas han dejado una marca indeleble en mi formación académica y personal. A Jessica Morales Herrera por compartirme su base de datos.

DEDICATORIA

*A mis amados padres,
A lo largo de este viaje académico, ustedes han sido mi roca, mi inspiración y mi mayor apoyo. Su amor incondicional y sacrificios han sido la fuerza motriz detrás de cada logro que celebro hoy. Gracias por creer en mí incluso cuando dudaba de mis propias habilidades, por alentarme a perseguir mis sueños.
A mamá, cuyo amor y paciencia infinitos son la fuente de mi fortaleza. Tu sabiduría y aliento constante han sido mi guía a lo largo de los años.
Cuya dedicación y ejemplo de trabajo arduo han sido mi inspiración. Tu firmeza y apoyo inquebrantable me han dado la confianza para enfrentar cualquier desafío.
Gracias por ser faro de luz en los momentos oscuros, por alentarme a perseguir mis sueños y por enseñarme el valor del esfuerzo y la tenacidad.
A mi hermano, fuente inagotable de amor, sabiduría y apoyo incondicional; también por ser mi fuente de risas y diversión.
Gracias por su constante aliento y por creer en mí en cada paso del camino.
A Emanuel tu amor y apoyo han sido mi mayor motivación a lo largo de este desafiante viaje académico. Gracias por ser mi fuente constante de inspiración, paciencia y comprensión. Tus palabras alentadoras y tus abrazos reconfortantes han iluminado incluso los días más oscuros de esta travesía.
Este logro no solo es mío, sino nuestro, cuyo amor y apoyo han sido el cimiento de mi éxito. Su presencia ha sido la brújula que me ha guiado, y su amor incondicional ha sido la fuerza que me ha impulsado a seguir adelante.
Gracias a usted por haber ayudado a mi familia en momentos críticos, que siempre extendió su mano para ayudarnos, estos tres años que estuvo con nosotros fueron momentos muy felices que siempre llevaré conmigo.*

Índice general

INTRODUCCIÓN	6
I. ANTECEDENTES	8
1.1. Objetivos de la investigación	8
1.1.1. Objetivo general	8
1.1.2. Objetivos particulares	8
1.1.3. Resultados esperados	8
1.2. Sistemas Financieros	9
1.2.1. Criptomonedas	9
1.2.2. Bitcoin	10
1.2.3. Rendimientos Logarítmicos	10
1.2.4. Series de tiempo financieras	11
1.2.5. Precios	13
1.2.6. Fluctuaciones	13
1.2.7. Activos subyacentes	14
1.2.8. Volatilidad	14
1.2.9. Curtosis	16
1.3. Modelos Matemáticos	17
1.3.1. Procesos estocásticos	17
1.3.2. Cadenas de Markov	21
1.3.3. Proceso de Wiener	21
1.3.4. Ecuación Diferencial Estocástica	22
1.3.5. Movimiento Browniano Geométrico	23
1.3.6. Ecuación Black-Scholes	25
1.3.7. Limitaciones (la sonrisa de la volatilidad)	26
1.3.8. Nuestro Problema	28

II. METODOLOGÍA	31
2.1. Transformada de Fourier	31
2.2. La distribución del movimiento browniano	33
2.2.1. Función de Bessel modificada de segundo tipo	37
2.2.2. Método de los momentos	38
2.3. Lema de Itô	40
2.4. Nuestro modelo	42
2.4.1. Primeras estimaciones	45
III. RESULTADOS	48
3.1. Estadística de rendimientos	48
3.1.1. Distribución KB (Bessel)	48
3.1.2. Distribución de rendimientos: modelo de varianza gamma	49
3.2. Estimación de parámetros	54
3.3. Ajustes con datos sintéticos	55
3.4. Ajustes con datos reales	57
3.4.1. BTC 2022	58
3.4.2. BTC 2021	60
3.4.3. BTC 2020	62
3.4.4. BTC 2019	63
3.4.5. BTC 2018	65
3.4.6. BTC 2017	67
3.4.7. BTC 2016	68
3.4.8. BTC 2015	70
3.4.9. ETH 2022	72
3.4.10. ETH 2021	73
3.4.11. ETH 2020	75
3.4.12. ETH 2019	77
3.4.13. ETH 2018	79
3.4.14. ETH 2017	80
IV. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES	85
REFERENCIAS	90

Índice de tablas

<u>3.1. Parámetros datos sintéticos.</u>	56
<u>3.2. Parámetros datos BTC 2022.</u>	58
<u>3.3. Parámetros datos BTC 2021.</u>	60
<u>3.4. Parámetros datos BTC 2020.</u>	62
<u>3.5. Parámetros datos BTC 2019.</u>	63
<u>3.6. Parámetros datos BTC 2018.</u>	65
<u>3.7. Parámetros datos BTC 2017.</u>	67
<u>3.8. Parámetros datos BTC 2016.</u>	68
<u>3.9. Parámetros datos BTC 2015.</u>	70
<u>3.10. Parámetros datos ETH 2022.</u>	72
<u>3.11. Parámetros datos ETH 2021.</u>	74
<u>3.12. Parámetros datos ETH 2020.</u>	75
<u>3.13. Parámetros datos ETH 2019.</u>	77
<u>3.14. Parámetros datos ETH 2018.</u>	79
<u>3.15. Parámetros datos ETH 2017.</u>	80

Índice de figuras

1.1. Gráfica de equivalencia entre rendimientos aritméticos y logarítmicos.	11
1.2. Ejemplo de series temporales.	12
1.3. Gráfica estocástica vs determinística.	12
1.4. Ejemplo de una distribución mesocúrtica ($k = 3$), una leptocúrtica ($k > 3$) y una platicúrtica ($k < 3$).	17
1.5. Ejemplo de procesos estocásticos.	18
1.6. Proceso de estado discreto y tiempo discreto.	19
1.7. Proceso de estado discreto y tiempo continuo.	20
1.8. Proceso de estado continuo y tiempo discreto.	20
1.9. Ejemplo una cadena de Markov de dos estados.	21
1.10. Ejemplo de la evolución del movimiento browniano geométrico.	24
2.1. Comparación rendimientos con volatilidad constante por tramos.	42
2.2. Comparación del modelo gaussiano y el modelo gamma.	43
2.3. Histograma del logaritmo del bitcon del año 2016 solo el margen.	46
2.4. Histograma del logaritmo del bitcon del año 2018.	46
3.1. Distribución KB de Bessel para diferentes valores de los parámetros.	50
3.2. Estimaciones de la volatilidad.	56
3.3. Gráfica de los estimadores sintéticos comparada con la gráfica logarítmica.	57
3.4. Gráfica de los estimadores BTC 2022.	59
3.5. Gráfica de los estimadores reales comparada con la gráfica logarítmica.	59
3.6. Gráfica de los estimadores BTC 2021.	60
3.7. Gráfica de los estimadores reales comparada con la gráfica logarítmica.	61
3.8. Gráfica de los estimadores BTC 2020.	62
3.9. Gráfica de los estimadores reales comparada con la gráfica logarítmica.	63
3.10. Gráfica de los estimadores BTC 2019.	64

3.11. Gráfica de los estimadores reales comparada con la gráfica logarítmica.	64
3.12. Gráfica de los estimadores BTC 2018.	66
3.13. Gráfica de los estimadores reales comparada con la gráfica logarítmica.	66
3.14. Gráfica de los estimadores BTC 2017.	67
3.15. Gráfica de los estimadores reales comparada con la gráfica logarítmica.	68
3.16. Gráfica de los estimadores BTC 2016.	69
3.17. Gráfica de los estimadores reales comparada con la gráfica logarítmica.	70
3.18. Gráfica de los estimadores BTC 2015.	71
3.19. Gráfica de los estimadores reales comparada con la gráfica logarítmica.	71
3.20. Gráfica de los estimadores ETH 2022.	72
3.21. Gráfica de los estimadores reales comparada con la gráfica logarítmica.	73
3.22. Gráfica de los estimadores ETH 2021.	74
3.23. Gráfica de los estimadores reales comparada con la gráfica logarítmica.	75
3.24. Gráfica de los estimadores ETH 2020.	76
3.25. Gráfica de los estimadores reales comparada con la gráfica logarítmica.	77
3.26. Gráfica de los estimadores ETH 2019.	78
3.27. Gráfica de los estimadores reales comparada con la gráfica logarítmica.	78
3.28. Gráfica de los estimadores ETH 2018.	79
3.29. Gráfica de los estimadores reales comparada con la gráfica logarítmica.	80
3.30. Gráfica de los estimadores ETH 2017.	81
3.31. Gráfica de los estimadores reales comparada con la gráfica logarítmica.	81
3.32. Comparación agudeza BTC.	83
3.33. Comparación agudeza ETH.	84

INTRODUCCIÓN

En los anales de la historia económica, encontramos curiosos relatos sobre la evolución del concepto de dinero. En épocas antiguas, los romanos, ingeniosos como siempre, empleaban conchitas de mar como medio de intercambio. En un inicio, la humanidad utilizaba objetos de valor intrínseco, como conchitas, huesos y otros enseres, como moneda de canje. Este primitivo sistema evolucionó gradualmente hacia el uso de metales preciosos, marcando así el nacimiento de las primeras monedas acuñadas.

A medida que la civilización avanzaba, el dinero se consolidaba como una herramienta esencial en las transacciones económicas. No obstante, el devenir histórico nos lleva a un capítulo más contemporáneo: la era de las criptomonedas. Los bitcoins y otras formas digitales de valor han emergido como una revolucionaria forma de activo financiero, alejándose del convencional papel de las monedas tradicionales.

No obstante, cabe destacar que estas criptomonedas, a pesar de su creciente relevancia en el ámbito financiero, no funcionan actualmente como medios de intercambio cotidianos. En su lugar, han adoptado el papel de activos financieros, actuando como vehículos de inversión o resguardo de valor. Este cambio de paradigma nos lleva a explorar un desafío fundamental en la actualidad: la volatilidad.

La volatilidad, estudiada con ahínco desde la década de 1950, revela la presencia de cambios abruptos que pueden manifestarse de maneras impredecibles. Las repercusiones de la volatilidad no solo se limitan al ámbito económico, sino que también influyen en la vida diaria de las personas y tienen un impacto macroeconómico significativo en los países. Este problema contemporáneo, de difícil abordaje y de gran interés, plantea desafíos tanto para los individuos como para los gobiernos.

En este contexto, resulta evidente que la volatilidad se ha convertido en un tema de suma importancia en la esfera económica global. La evolución del dinero desde las conchitas de

mar hasta las criptomonedas destaca la complejidad inherente a este fenómeno. Concluir que la volatilidad es un problema de suma relevancia y, al mismo tiempo, un desafío fascinante, nos invita a explorar las distintas facetas de este fenómeno que continúa marcando el curso de nuestra historia financiera y económica.

Este estudio se adentrará en la naturaleza de la volatilidad, explorando sus implicaciones en la vida diaria y macroeconómica, destacando así su complejidad y su posición como tema de interés apremiante.

Analizaremos que uno de los problemas que existen en torno al modelo de movimiento browniano geométrico para los precios es que se asume, entre otras cosas, que la volatilidad es constante. Se sabe desde hace tiempo que esta hipótesis no es de todo cierta y la evidencia sugiere que la volatilidad (que es un factor de riesgo para los participantes de algún mercado financiero) cambia constantemente debido a diversos factores. Debido a esta variabilidad temporal de la volatilidad, se ha propuesto una pléyade de modelos conocidos como modelos de volatilidad estocástica. En el presente proyecto se pretende introducir un modelo relativamente sencillo de volatilidad estocástica con el cual el problema de la estimación de parámetros sea mucho más simple. Este modelo se basa esencialmente en suponer que la volatilidad es constante durante periodos de tiempo de duración aleatoria. Esto esencialmente quiere decir que en la ecuación base del modelo

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t, \quad (0.1)$$

se asume que la volatilidad σ_t es un proceso estocástico a tiempo continuo no se rige por una ecuación diferencial estocástica, pero sí sigue siendo un proceso tipo Markoviano,

$$\{\sigma_t : t \in \mathbb{R}^+\},$$

siendo σ_t constante por tramos, donde los tiempos de permanencia (durante los cuales σ_t es constante) tienen alguna distribución estacionaria y los valores de σ_t también siguen una distribución estacionaria e independiente de la distribución de los tiempos de permanencia. El principal objetivo de este estudio es caracterizar analíticamente el proceso S_t para poder proponer estimadores de los parámetros de las distribuciones correspondientes.

Capítulo I

ANTECEDENTES

1.1. Objetivos de la investigación

1.1.1. Objetivo general

Introducir un modelo de volatilidad estocástica, combinando una ecuación diferencial estocástica y un proceso estocástico discreto para modelar la volatilidad en series de tiempo de rendimientos logarítmicos y aplicarlo al problema de estimación de parámetros.

1.1.2. Objetivos particulares

1. Estudiar un modelo de volatilidad estocástica, en donde la distribución se pueda obtener de manera analítica.
2. Aplicar una metodología para obtener estimaciones de los parámetros involucrados en el modelo.
3. Usar simulaciones numéricas para hacer pruebas de los estimadores propuestos.
4. Aplicar la metodología propuesta para analizar series de tiempo financieras reales.

1.1.3. Resultados esperados

1. Esperamos que el modelo propuesto tenga una solución analítica que se pueda escribir en términos de funciones elementales o funciones especiales.

2. Esperamos que la solución analítica para la distribución de rendimientos logarítmicos sirva para obtener expresiones para estimadores de los parámetros involucrados.
3. Esperamos que el modelo propuesto sea suficientemente preciso para describir series de tiempo financieras, específicamente, para los rendimientos logarítmicos.

1.2. Sistemas Financieros

1.2.1. Criptomonedas

Las criptomonedas suponen una alternativa de inversión que tienen como objetivo la descentralización. En ese sentido, según el Banco Central Europeo Ref. [22], las criptomonedas se definen como “una representación digital de valor, no emitida por ninguna autoridad central, institución de crédito o emisor de dinero electrónico reconocido que, en ciertas ocasiones, puede ser utilizada como medio de pago alternativo al dinero”. En su defecto, siguiendo a Ref. [50], las criptomonedas también se pueden definir como “un sistema de pago a través de Internet, basadas en un sistema *peer to peer* o red entre iguales (P2P), que contienen un elemento de seguridad basado en la criptografía y en donde el valor es transmitido electrónicamente entre las partes”. En torno al tema de la función social de las criptomonedas, existe un debate acerca del cumplimiento pleno de las características básicas del dinero, que son, de acuerdo con Ref. [50], medio de pago, unidad de cuenta y depósito de valor. Otros autores como Ref. [55] afirman que se cumplen ciertas funciones, como el medio de intercambio. En cuanto a la funcionalidad operativa de las criptomonedas, estas funcionan bajo un sistema llamado *peer to peer* (P2P), en el cual Ref. [51], se entiende como “una red informática que no tiene clientes y servidores fijos, sino una serie de nodos que se comportan a la vez como clientes y como servidores de los demás nodos de la red”. La Facultad de Ciencias Sociales y Humanidades de la Universidad Nacional de Misiones Ref. [17] define a los nodos como “una serie de bloques de información textual o multimedia que componen en sí mismos una unidad de sentido”. En otras palabras, estos nodos permiten a los usuarios ampliar la información y profundizarla a partir de diferentes enfoques. De acuerdo con Ref. [39], las principales características de las criptomonedas son la virtualidad, un sistema descentralizado, independiente y transparente, la visión integral y fácil acceso, el anonimato, la alta operatividad y los avances tecnológicos aplicados. Es importante abordar la tecnología base de las criptomonedas; esto es las cadenas de bloque o Blockchain. Por otra parte Ref. [24] expone que se puede entender como un gran libro contable en el que todos tienen libre acceso. En este caso, se trata de una tecnología para el registro y transmisión de información que funciona sin un ente central que

lo controle. Por esto, técnicamente, se puede entender como una base de datos distribuida, en la cual las informaciones enviadas por los usuarios y demás datos vinculados pasan por un proceso de verificación y, posteriormente, son agrupadas en intervalos de tiempo conocidos como “bloques”, los cuales al unirse logran formar una cadena. Ref. [56]

1.2.2. Bitcoin

El bitcoin es un tema bastante analizado en la actualidad debido a su importante crecimiento en los últimos años, y porque se trata de un sistema de dinero digital que no cuenta con políticas de estado a nivel nacional o internacional, y que tampoco los respaldan las corporaciones dedicadas a las transacciones financieras. La palabra “bitcoin” se acuñó de los términos: “bit” que expresa una unidad de información (dígito binario) en el ámbito informático y “coin” una palabra de la Inglaterra medieval que significa moneda o también acuñar. El bitcoin en palabras llanas se puede definir como la nueva moneda digital encriptada y descentralizada impulsado por sus usuarios sin una autoridad o intermediarios, que se utiliza como factor de cambio, mediante el uso de la web Ref. [33]. Por su parte, Ref. [2], define al bitcoin, al igual que Ref. [38], como una moneda virtual e intangible, que no se puede palpar, pero que en ciertas plataformas digitales sirve como medio de pago, que, si bien puede aumentar o disminuir dentro de una cuenta digital, esta no puede ser monetizada. Ref. [43]

1.2.3. Rendimientos Logarítmicos

El rendimiento aritmético que conocemos viene definido de la siguiente manera:

$$r_i = \frac{P_i}{P_j} - 1, \quad (1.1)$$

siendo $\{P_i\}$ la serie de precios, y cumpliendo que $i > j$.

Por su parte, el rendimiento logarítmico, se calcula de la siguiente forma:

$$R_i = \log \left(\frac{P_i}{P_j} \right). \quad (1.2)$$

Si asumimos que los precios se distribuyen log-normalmente, entonces $\log(1 + r_i)$ se distribuye normalmente. En la realidad veremos que nuestra gran lucha será frente a la modelización de la curtosis (la cual se definirá en la Sección 1.2.9), ya que la suposición no es del todo cierta.

En la Figura 1.1 se muestra como difieren las dos formas de cálculo y el error que podemos provocar, que es perfectamente cuantificable. Ref. [16]

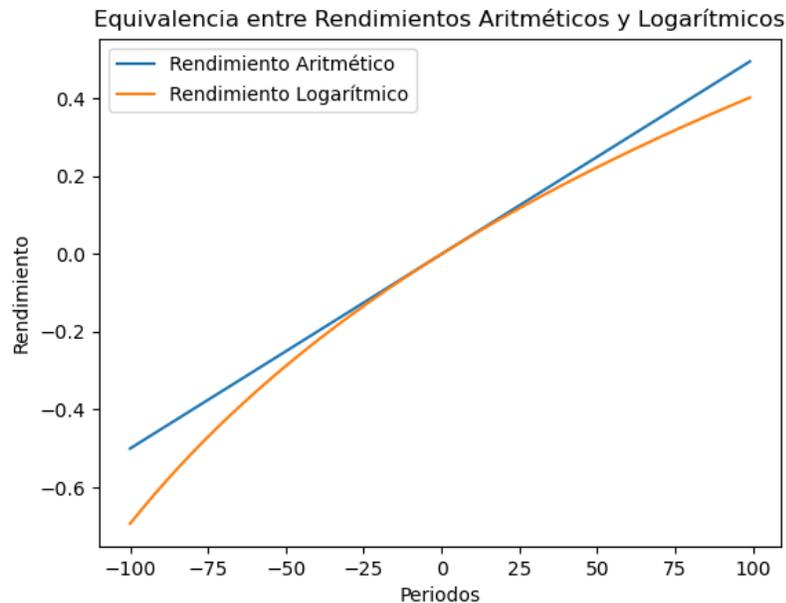


Figura 1.1: Gráfica de equivalencia entre rendimientos aritméticos y logarítmicos.

La mayoría de los estudios financieros involucran rendimientos, en lugar de precios, de activos. En la Ref. [12] da dos razones principales para utilizar las rentabilidades. En primer lugar, para los inversores promedio, el rendimiento de un activo es un resumen completo y sin escalas de la oportunidad de inversión. En segundo lugar, las series de rentabilidad son más fáciles de manejar que las series de precios porque las primeras tienen propiedades estadísticas más atractivas. Sin embargo, existen varias definiciones de rendimiento de activos.

1.2.4. Series de tiempo financieras

Definición 1 *Las series de tiempo son colecciones de observaciones sobre un determinado fenómeno efectuadas en sucesivos momentos del tiempo, usualmente equiespaciados. Corresponde a una realización de un proceso generador de datos.*

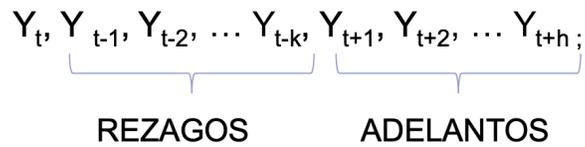


Figura 1.2: Ejemplo de series temporales.

- Serie estocástica: una parte conocida (sistemática) susceptible de predecir y de una parte totalmente desconocida (aleatoria).
- Serie determinística: el futuro se puede predecir sin error. Es una variable que está determinada o fija y que no cambia de una muestra a otra.

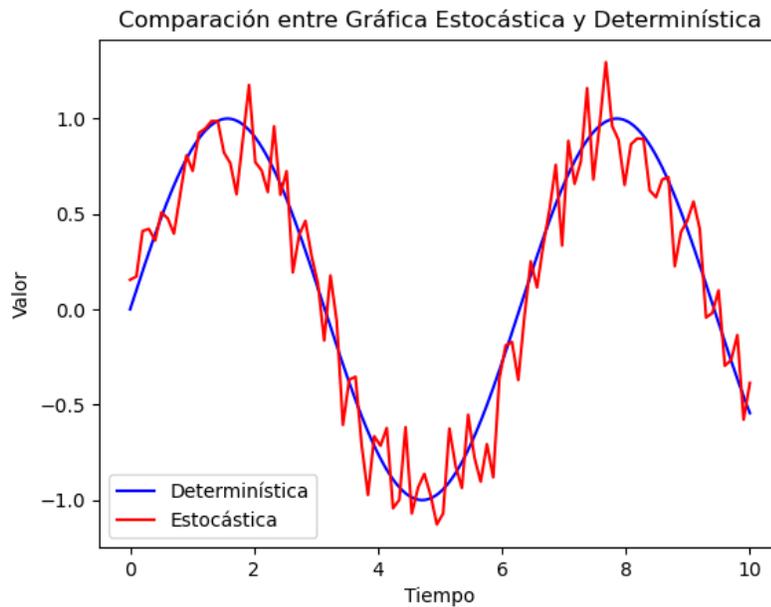


Figura 1.3: Gráfica estocástica vs determinística.

La investigación científica asume como una de sus primeras tareas, identificar las cosas (características o factores) que participan en un fenómeno. Los gráficos son la forma más efectiva de identificar efectos de eventos que inciden en los datos. De ser posible, estos eventos deben ser ajustados o incluidos en el modelo. Un gráfico permite observar: Ref. [13]

- Frecuencia de los datos.
- La tendencia.
- Los valores extremos.
- La dispersión.
- Cambios estructurales.
- Cambios de pendiente.
- La estacionalidad.

1.2.5. Precios

Definición 2 *El precio es el pago o recompensa que se asigna a la obtención de bienes o servicios o, más en general, a una mercancía cualquiera.*

A pesar de que tal pago no necesariamente se efectúa en dinero, los precios son generalmente referidos o medidos en unidades monetarias. Desde un punto de vista general, y entendiendo el dinero como una mercancía, se puede considerar que bienes y servicios son obtenidos por el trueque, que, en economías modernas, generalmente consiste en intercambio por, o mediado a través del dinero. Ref. [32]

1.2.6. Fluctuaciones

Definición 3 *Fluctuación: Del latín fluctuatio, la fluctuación es el acto y las consecuencias de fluctuar. Este verbo hace referencia a la oscilación (incrementar y reducir de manera alterna) o a vacilar. El concepto tiene distintas aplicaciones de acuerdo al contexto. Ref. [44]*

Definición 4 *Fluctuación económica: La fluctuación de la economía se refiere a los constantes cambios que esta experimenta en un determinado período con respecto al período anterior.*

La fluctuación ocurre cuando se producen altas y bajas que tienen que ver con la oferta y la demanda en los mercados, lo que demuestra una gran inestabilidad. Estos cambios pueden obedecer a causas económicas, políticas y sociales. Ref. [23]

1.2.7. Activos subyacentes

Definición 5 *Un activo subyacente es un bien: un bien material (como el oro o el trigo) o un bien financiero (como las acciones de determinada empresa o una divisa) que tiene un precio en el mercado, que depende de su cotización en ese mercado en cada momento.*

Definición 6 *Activos subyacentes financieros: En este caso el activo subyacente da lugar a una opción de compra, en determinadas condiciones fijadas de antemano, y consiste en activos financieros que se negocian y cotizan en mercados financieros. Hablamos de: Ref. [52]*

- *Activos de renta variable como las acciones (y otros títulos) de empresas que cotizan en bolsa.*
- *Activos de renta fija; normalmente de deuda pública como las letras del Tesoro.*
- *Divisas: monedas convertibles y fuertes que cotizan en los mercados internacionales.*
- *Opciones sobre futuros, aquí el activo subyacente es, a su vez, otro producto derivado.*
- *Tipos de interés o índices de referencia de tipos de interés como el euribor.*
- *Índices selectivos de los mercados como el Dow Jones, o el IBEX35.*

1.2.8. Volatilidad

En la literatura financiera, se define la volatilidad como una medida de la intensidad de los cambios aleatorios o impredecibles en la rentabilidad o en el precio futuro de un título. En la representación gráfica de una serie histórica de rendimientos, se asocia la volatilidad con la amplitud de las fluctuaciones del mismo. En general, la volatilidad se caracteriza: Ref. [34]

- *Exceso de curtosis (la cual se definirá en la Sección 1.2.9). Ref. [31] y Ref. [18].*
- *Periodos de alta y baja volatilidad, también conocidos como conglomerados de volatilidad (*volatility clusters*), es decir, si la volatilidad es baja o elevada en un periodo, tiende a seguir este comportamiento. Ref. [31] y Ref. [15].*
- *De manera ocasional, se producen valores altos de volatilidad, que se interpretan como discontinuidades de salto en los precios. Ref. [20].*
- *Periodos de alta o baja volatilidad tienden a estar precedidos de periodos en los que la volatilidad es más moderada a largo plazo. Ref. [26] y Ref. [20].*

- Comportamiento asimétrico de las series de volatilidades, según informaciones de los mercados financieros. Ref. [11].
- Movimientos conjuntos de la volatilidad, es decir, que al estudiar en diferentes mercados series distintas, pero del mismo concepto (cotizaciones, tipos de interés, entre otros), se observa que los movimientos importantes en un mercado están relacionados con movimientos importantes en otro mercado. Ref. [3].

A partir de un análisis de la serie temporal de varianza realizada utilizando datos recientes de alta frecuencia, en la Ref. [4] demostraron que el logaritmo de la varianza realizada se comporta esencialmente como un movimiento browniano fraccionario con exponente de Hurst H de orden 0.1, en cualquier escala de tiempo razonable. Por otro lado, desde la perspectiva de la fijación de precios de opciones, es bien sabido que los modelos estocásticos de volatilidad markovianos convencionales de baja dimensión, como los modelos Hull y White Ref. [28], Heston Ref. [49] y Sabr Ref. [29], generan superficies de volatilidad implícita cuyas formas difieren sustancialmente de las de la superficie de volatilidad observada empíricamente. Es un hecho estilizado que, al menos en los mercados de valores, aunque el nivel y la orientación de la superficie de volatilidad cambian con el tiempo, la forma general de la superficie de volatilidad no cambia, al menos en una primera aproximación. Esto sugiere que es deseable modelar la volatilidad como un proceso homogéneo en el tiempo, es decir, un proceso cuyos parámetros son independientes del precio y del tiempo.

La volatilidad se refiere a la magnitud de las fluctuaciones en el valor de un activo en un período de tiempo específico. Una alta volatilidad indica que los precios pueden experimentar cambios significativos en un corto período, mientras que una baja volatilidad sugiere movimientos más estables y predecibles.

- **Medición de volatilidad:** En finanzas, la volatilidad se mide comúnmente utilizando la desviación estándar de los rendimientos de un activo en un intervalo de tiempo específico. La volatilidad histórica se calcula retroactivamente a partir de los datos de precios pasados, mientras que la volatilidad implícita se deriva de las opciones del mercado.
- **Importancia en procesos estocásticos:**
 1. **Modelación de precios de activos financieros:** Los procesos estocásticos, como los movimientos brownianos y sus extensiones, son fundamentales para modelar la evolución de los precios de activos financieros. La volatilidad se incorpora a menudo en estos modelos para capturar la variabilidad de los precios y reflejar mejor la realidad del mercado.

2. Valoración de opciones: En la teoría de opciones, la volatilidad es un componente esencial. La fórmula de Black-Scholes, utilizada para valorar opciones financieras europeas, incluye la volatilidad como uno de sus parámetros clave. Una volatilidad más alta implica opciones más caras debido a la posibilidad de movimientos de precios más grandes.
3. Gestión de riesgos: La volatilidad es crucial para la gestión de riesgos financieros. Permite a los inversores y gestores de carteras evaluar la probabilidad de pérdidas significativas y ajustar sus estrategias de inversión en consecuencia.
4. Predicción de mercados: La volatilidad histórica se utiliza para proyectar la volatilidad futura, lo que es esencial para la predicción de precios y la toma de decisiones en los mercados financieros.

1.2.9. Curtosis

El concepto de curtosis forma parte de la literatura desde hace más de cien años, cuando Pearson Ref. [40] introdujo el concepto en 1905, por lo tanto, no se trata de un tema nuevo y a simple vista tampoco complejo; sin embargo, Finucan Ref. [21] advirtió sobre el peligro de la simplificación hecha en algunos libros que reducían la curtosis a algo simplemente relacionado al pico de la distribución. Greene Ref. [53] define la curtosis como “una medida del grosor de las colas de la distribución”.

La curtosis mide el grado en que una distribución se aleja de la distribución normal, respecto al nivel de achatamiento o apuntamiento de su curva, estudiando la concentración de valores en la zona de la media, cuanto mayor sea la concentración en esta zona, mayor será su apuntamiento, por el contrario, si la concentración en la zona central es baja se dirá que la curva achatada Ref. [19].

La distribución normal tiene una curtosis igual a tres, cuando esto sucede se dice que la distribución es mesocúrtica, puede ser que la distribución sea más achatada, esta se conoce como platicúrtica, y la curtosis toma valores menores a tres. El caso contrario se presenta cuando los datos están muy concentrados alrededor de la media, lo que genera una forma de la distribución más empinada, en este caso se trata de una distribución leptocúrtica y la curtosis toma valores mayores a tres. La curtosis se denota con la letra k . Lo dicho anteriormente se muestra en la Figura 1.4.

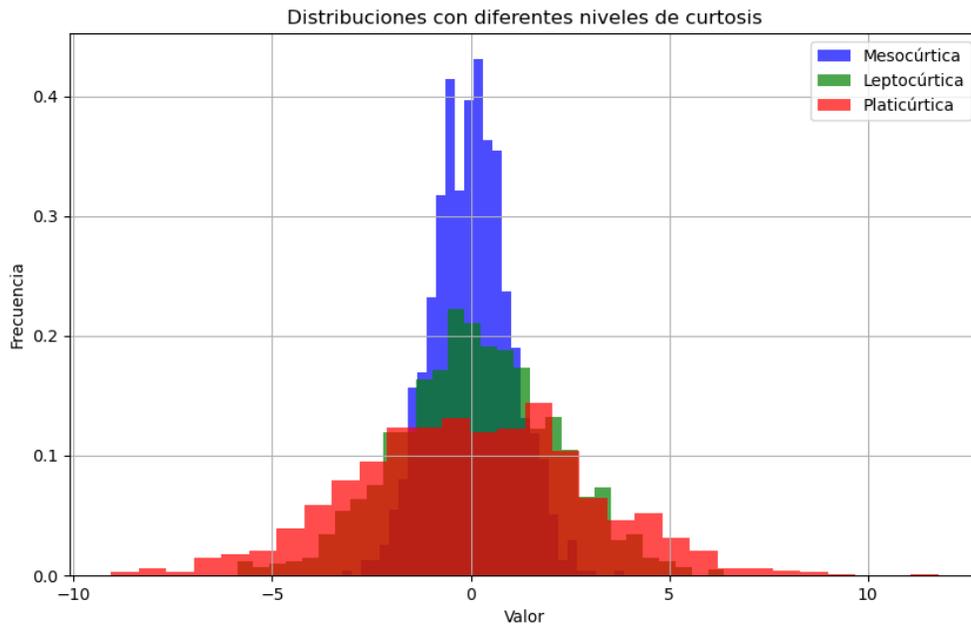


Figura 1.4: Ejemplo de una distribución mesocúrtica ($k = 3$), una leptocúrtica ($k > 3$) y una platicúrtica ($k < 3$).

Definición 7 El concepto de curtosis fue introducido en el contexto estadístico por Pearson (1905) basado en el griego *kurtos* (curvado o arqueado), y la define como: Ref. [17]

$$k := \frac{E(x - \mu)^4}{\text{Var}(x)^2}. \quad (1.3)$$

1.3. Modelos Matemáticos

1.3.1. Procesos estocásticos

Definición 8 Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias

$$(X_t)_{t \in T}, \quad (1.4)$$

indexadas por un conjunto T y definidas en algún espacio de probabilidad (Ω, F, \mathbb{P}) . Interpretamos al conjunto de índices T como un parámetro temporal; para nosotros T será $\{0, \dots, n\}$, \mathbb{N} , algún intervalo $[0, t]$ o $[0, \infty)$.

A continuación se ofrecen ejemplos variados de fenómenos que se pueden modelar con procesos estocásticos.

- Electrocardiograma.
- Terremotos.
- El clima.
- El segundo concreto de un partido en el que un jugador anota un gol.
- Número de personas que dicen una palabra concreta alrededor del mundo.

Por tanto, para cada instante t tendremos una variable aleatoria distinta representada por X_t , con lo que un proceso estocástico puede interpretarse como una sucesión de variables aleatorias cuyas características pueden variar a lo largo del tiempo. Por ejemplo, si observamos sólo unos pocos valores de t , tendríamos una imagen similar a la de la figura siguiente:

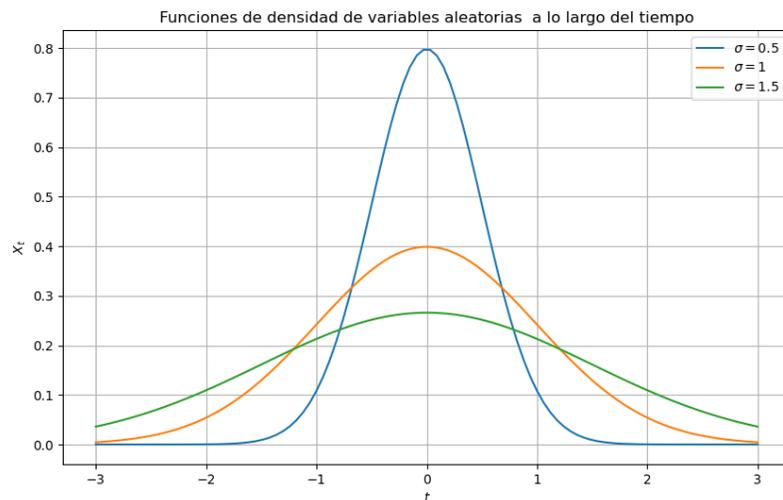


Figura 1.5: Ejemplo de procesos estocásticos.

Dependiendo de cómo sea el conjunto de subíndices T y el tipo de variable aleatoria dado por X_t se puede establecer la siguiente clasificación de los procesos estocásticos:

1. Si el conjunto T es continuo, por ejemplo \mathbb{R}^+ , diremos que X_t es un proceso estocástico de tiempo continuo.
2. Si por el contrario T es discreto, por ejemplo \mathbb{N} , diremos que nos encontramos frente a un proceso estocástico de tiempo discreto.
3. Si para cada instante t la variable aleatoria X_t es de tipo continuo, diremos que el proceso estocástico es de estado continuo.
4. Si para cada instante t la variable aleatoria X_t es de tipo discreto, diremos que el proceso estocástico es de estado discreto. Ref. [9]

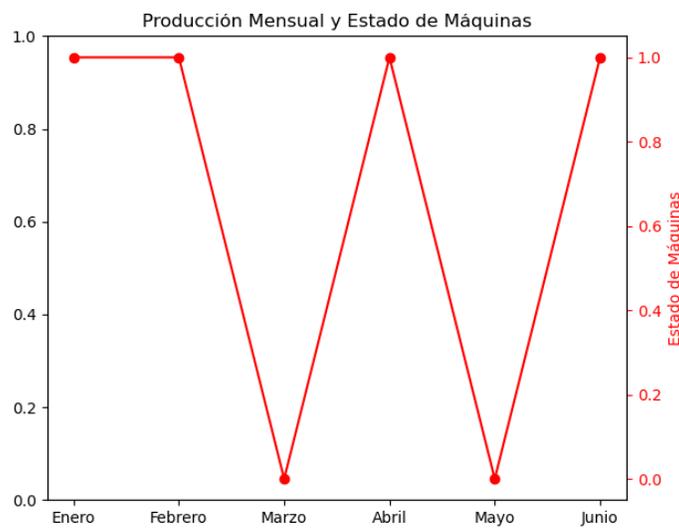


Figura 1.6: Proceso de estado discreto y tiempo discreto.
(a) Unidades producidas mensualmente de un producto.

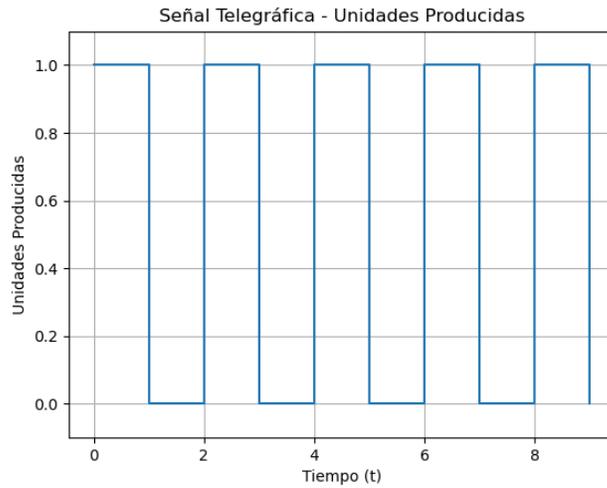


Figura 1.7: Proceso de estado discreto y tiempo continuo.
(b) Unidades producidas hasta el instante t .

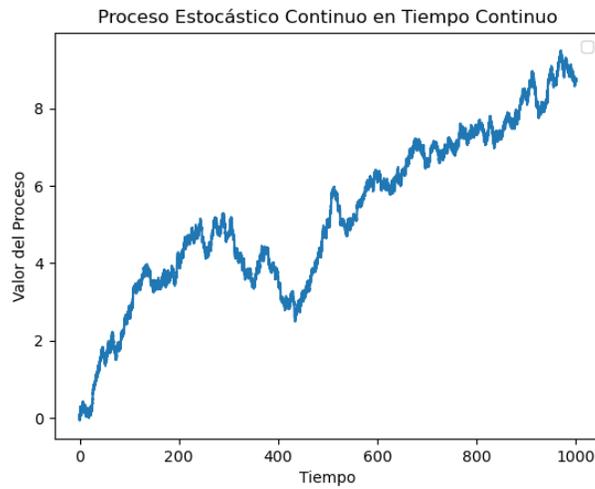


Figura 1.8: Proceso de estado continuo y tiempo discreto.
(c) Velocidad de un vehículo en el instante t .

1.3.2. Cadenas de Markov

Las cadenas de Markov son un tipo de proceso estocástico. Fueron teorizadas por el matemático ruso Andrey Markov alrededor de 1905 con la finalidad original de crear un modelo probabilístico para inferir la frecuencia de vocales en poemas y textos, es decir, con la finalidad de estudiar el lenguaje. Son una herramienta matemática relativamente sencilla de ejemplificar en diagramas por medio de círculos y flechas, siendo los círculos los estados y las flechas las formas de pasar de un estado a otro, las cuales suelen tener un peso probabilístico, es decir, en el diagrama el peso de las flechas que salen de un estado a otro debe tener suma igual a uno como en el ejemplo de la Figura 1.9. Ref. [48].

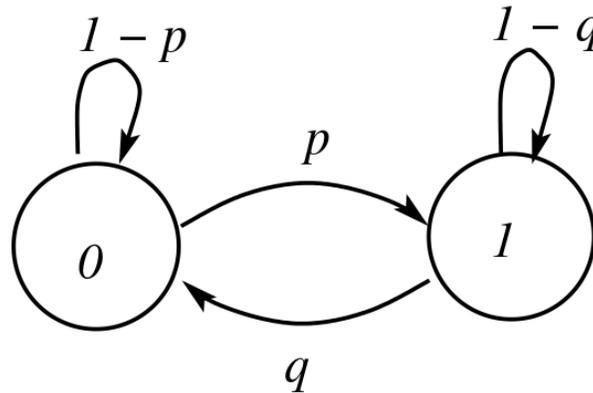


Figura 1.9: Ejemplo una cadena de Markov de dos estados.

1.3.3. Proceso de Wiener

Definición 9 Según Finnegam Ref. [36], el proceso de Wiener, es un proceso estocástico de tiempo continuo que se caracteriza por tener tres propiedades importantes:

1. $W_0 = 0$ (proceso de Wiener en el $t = 0$).
2. Tiene incrementos independientes. Lo que significa que la distribución de probabilidad de los cambios en el proceso en cualquier intervalo temporal es independiente de la de cualquier otro intervalo. Así pues, si la variable aleatoria, W_t , sigue un proceso de Wiener sus variaciones (ΔW_t) para cualesquiera dos pequeños intervalos de tiempo (Δt) son independientes siendo su parámetro de correlación igual a cero.

3. Las variaciones en el proceso son producidas en un intervalo finito de tiempo y se distribuyen normalmente, con una varianza que aumenta linealmente con el intervalo temporal; $W_s - W_t = dW \sqrt{t - s} \sim N(0; \sqrt{t - s}, \forall s < t)$ (donde dW es una variable aleatoria de tipo $N(0, 1)$).
4. El proceso de Wiener es casi-seguramente continuo.

El proceso de Markov implica que sólo la información actual es importante a la hora de establecer los valores futuros esperados del proceso. Ref. [14].

1.3.4. Ecuación Diferencial Estocástica

Definición 10 Decimos que un proceso estocástico a tiempo continuo $X_t : t \geq 0$ es de tipo difusivo si cumple con la ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = f(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t,$$

donde W_t es el proceso de Wiener y f y σ son dos funciones dadas.

Las ecuaciones diferenciales estocásticas generalmente se resuelven de manera numérica y muy pocas veces se pueden resolver de manera exacta. Una descripción estándar de las soluciones es a través de su distribución, la cual se puede obtener resolviendo lo que se conoce como la ecuación de Fokker-Plack.

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial X} \left(f(t, x)P - \frac{1}{2}\sigma(t, x)\frac{\partial P}{\partial X} \right).$$

Esta metodología se ilustrará más adelante con los casos del movimiento browniano y brevemente el movimiento browniano geométrico. Antes de proceder con dichos ejemplos conviene introducir una herramienta que es muy útil en este caso: La función característica de una variable aleatoria X .

Definición 11 (Función característica). La función característica de la variable aleatoria X es la función

$$\phi(t) := E [e^{itX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)dx.$$

definida para cualquier número real t . El número i es la unidad de los números imaginarios. Ref. [45].

La función característica es de utilidad ya que tiene algunas propiedades que nos ayudan a resolver varios problemas. Particularmente es importante la propiedad de la función característica de la convolución de dos distribuciones que se asocia con la suma de variables aleatorias.

Teorema 1 *Teorema de la convolución: Sea X una variable aleatoria con función de densidad $f_X(x)$, y Y una variable aleatoria con función de densidad $f_Y(y)$. Entonces la variable aleatoria $Z := X + Y$ tiene como distribución la convolución de las distribuciones f_X y f_Y , es decir:*

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)f_Y(z - u)du,$$

(se asume que X y Y son independientes).

Teorema 2 *Si X y Y son dos variables aleatorias independientes con densidades f_X y f_Y , respectivamente, entonces la función característica de la suma $Z := X + Y$ es el producto de las funciones características:*

$$\phi_Z(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t).$$

1.3.5. Movimiento Browniano Geométrico

El movimiento browniano geométrico es una extensión del concepto de movimiento browniano, que describe el comportamiento estocástico de partículas en suspensión en un fluido. A diferencia del movimiento browniano tradicional, que modela el cambio en la posición de una partícula en función del tiempo de manera lineal, el movimiento browniano geométrico introduce un componente multiplicativo en la dinámica, lo que lo hace especialmente interesante y relevante en diversas aplicaciones.

En 1827, el botánico Robert Brown (1773-1858) Ref. [54] descubrió, a través del microscopio que, pequeñísimas partículas, originadas a partir de granos de polen en suspensión en el agua, realizaban un movimiento riguroso, irregular e incesante, como si fueran pequeños seres vivientes. Él observó que partículas muy finas de varios minerales, seguían el mismo movimiento.

El movimiento browniano geométrico es un proceso estocástico en tiempo continuo que resulta de una transformación de un proceso de Wiener. Tiene como particularidad el no permitir que los precios de los activos tomen valores negativos. Ref. [37]. (Un ejemplo de este movimiento browniano geométrico en el pasó del tiempo está dado por la Figura [1.10]).

Definición 12 La ecuación diferencial estocástica que obedece este proceso se puede escribir como sigue:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (1.5)$$

donde $\{W_t : t \in \mathbb{R}^+\}$ es el proceso de Wiener. Las constantes μ y σ son llamadas dentro del contexto de las matemáticas financieras tasa libre de riesgo y volatilidad, respectivamente y $\{S_t\}_{t \geq 0}$ el precio de un activo financiero en tiempo t .

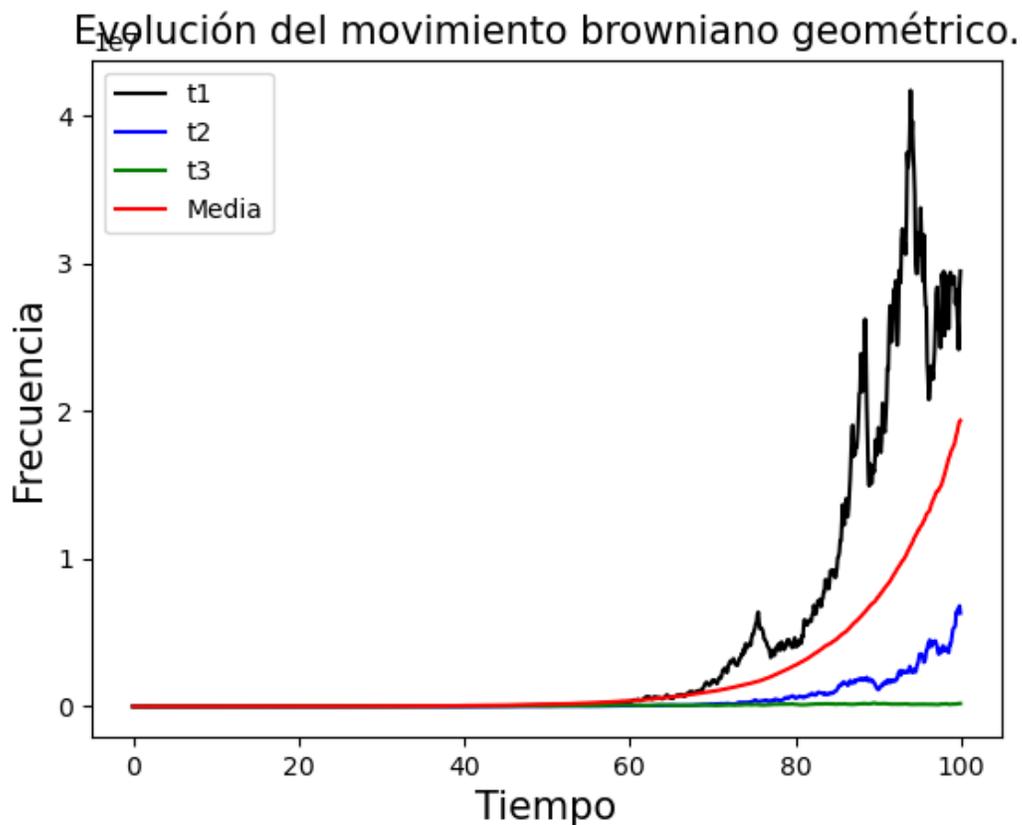


Figura 1.10: Ejemplo de la evolución del movimiento browniano geométrico.

1.3.6. Ecuación Black-Scholes

En la vida real la cotización de los precios de activos es realizada en intervalos de tiempo discretos. Si se utilizara dt como intervalo de tiempo en la práctica para valorar opciones se tendría que hacer frente a un inimaginable número de datos, pero en los modelos matemáticos en tiempo continuo presentados se utiliza $dt \rightarrow 0$, ya que es mucho más eficiente resolver la diferencial resultante de lo que sería resolver el problema de valorar opciones por una simulación directa en tiempo real.

El lema de Itô es el resultado más relacionado con procesos de tipo difusivo; este relaciona el pequeño cambio en una función de las variables del proceso y del tiempo, con el pequeño cambio en la misma variable aleatoria. La ecuación del lema de Itô es la siguiente: Ref. [46]

$$df = \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dW + \left(\mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt. \quad (1.6)$$

El lema de Itô nos permite entre otras cosas llegar a la ecuación de Black-Scholes la cual se presenta a continuación de esta sección el cual se platicará de manera breve.

Esta ecuación es muy popular y representa la base para valorar muchos y muy diversos productos derivados, ya que para diferentes condiciones de frontera sus soluciones representan los precios de los distintos derivados financieros que se encuentran disponibles en el mercado. Los supuestos básicos del modelo de Black-Scholes son:

- El activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato.
- El precio del activo subyacente es guiado por un movimiento browniano geométrico; es decir, el precio es log-normal y los rendimientos son normales.
- La volatilidad del precio del activo subyacente se mantiene constante a través del tiempo.
- Las ventas en corto plazo del subyacente en cuestión son permitidas; podemos vender el activo subyacente aunque aún no lo tengamos.
- El mercado del subyacente es líquido y divisible; es decir, podemos vender o comprar el subyacente en cualquier fracción de unidad.
- No hay costos de transacción, esto es, que no existen comisiones e impuestos.
- El mercado opera en forma continua (no hay fines de semana, ni días festivos).

- Los mercados están en equilibrio; es decir, no existen oportunidades de arbitraje. En otras palabras, todos los portafolios construidos libres de riesgo nos deben dar el mismo rendimiento.
- Existe un mercado de crédito, un sistema bancario en el que los agentes podemos prestar o pedir prestado a una tasa de interés constante a todos los plazos y libre de riesgo de incumplimiento.

La ecuación Black-Scholes es:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + S_t r \frac{\partial c}{\partial S_t} - rc = 0. \quad (1.7)$$

donde el cambio en el precio del activo subyacente S_t al tiempo t es determinado por el movimiento Browniano, $\sigma > 0$ es la volatilidad subyacente. La tasa de interés libre de riesgo está denotada por r , se escribe el valor de una opción como $c(S, t)$. Ref. [25].

1.3.7. Limitaciones (la sonrisa de la volatilidad)

La fórmula de valuación de opciones de Black-Scholes ha sido y es una de las más ampliamente utilizadas en la práctica en el campo de la Economía Financiera. La fórmula original planteada por Black y Scholes en 1973 Ref. [5] permite obtener un precio teórico para una opción sobre acciones que no pagan dividendos en función del valor actual del activo subyacente, el precio del ejercicio, el tiempo que falta para el vencimiento, el tipo de interés libre de riesgo y la volatilidad del activo subyacente. Con posterioridad se ha perfeccionado el modelo permitiendo, por ejemplo, que el subyacente pague dividendos conocidos previamente, lo que permite extender la fórmula para valorar opciones sobre índices bursátiles y divisas. Asimismo, han aparecido fórmulas para valorar otro tipo de opciones más complejas, como pueden ser opciones americanas o exóticas.

De las variables mencionadas anteriormente, la única que es desconocida a la hora de valorar una opción es la volatilidad del subyacente. Por tanto, obtener una buena estimación de la volatilidad es crucial para valorar una opción. Como es sabido, la volatilidad es una medida de la incertidumbre sobre el comportamiento futuro de un activo, que se mide habitualmente como la desviación típica de la rentabilidad de dicho activo.

Una posibilidad para estimar la volatilidad es acudir a una serie histórica de precios del activo subyacente. La desviación típica de las rentabilidades del subyacente calculada a partir de la serie histórica puede ser empleada como una estimación de la volatilidad de dicho activo. Otra posibilidad ampliamente difundida para estimar la volatilidad es acudir a lo que se ha

dado en llamar volatilidades implícitas. La volatilidad implícita en el precio de mercado de una opción es el valor de la volatilidad que, introducido en la fórmula de Black-Scholes, proporciona un valor teórico igual al valor de mercado de la misma.

El principal problema que presenta el cálculo de la volatilidad implícita en el precio de mercado de una opción es que no es posible invertir la fórmula de Black-Scholes para despejar la volatilidad en función del precio de la opción y del resto de variables. Una vez obtenida la volatilidad implícita en el precio de mercado de una opción, puede emplearse para valorar otras opciones negociadas posteriormente.

A pesar de la gran popularidad de la fórmula de Black-Scholes, en los últimos años han aparecido multitud de estudios poniendo de manifiesto importantes sesgos en el comportamiento empírico de dicha fórmula, sobre todo después del “crash” de 1987. Por ejemplo, Rubinstein (1994) Ref. [47] encuentra que, para opciones sobre el índice *S&P* 500, el modelo de Black-Scholes funcionó relativamente bien hasta 1986. Sin embargo, a partir de 1987 la situación comenzó a deteriorarse, obteniéndose errores de valoración que aproximadamente doblaban los del año anterior. Desde 1987 los errores han sido cada vez mayores. Estos resultados han sido confirmados por trabajos posteriores no sólo en el mercado americano, sino también en otros mercados. Además de esa creciente divergencia entre los precios de mercado y los obtenidos mediante la fórmula de Black-Scholes, cuando se invierte dicha fórmula para obtener la volatilidad implícita en el precio de mercado de las opciones, se encuentra sistemáticamente que las volatilidades implícitas tienden a estar relacionadas con el precio de ejercicio. Esta característica empírica contradice la fórmula de Black-Scholes, ya que dado que la volatilidad es una característica del activo subyacente, todas las opciones sobre el mismo activo deberían tener la misma volatilidad implícita.

La relación empírica que se observa entre la volatilidad implícita y el precio de ejercicio se ha dado en llamar sonrisa de volatilidad (*volatility smile* en la literatura anglosajona). Se ha encontrado una relación positiva entre las volatilidades implícitas y el plazo de expiración de las opciones (efecto estructura temporal de la volatilidad), si bien la magnitud de este efecto plazo para el vencimiento es considerablemente menor que la del efecto precio de ejercicio. Estos resultados han sido confirmados por otros estudios similares (Ref. [42] Ref. [41]), en el mercado español. Así, aunque la forma exacta y la magnitud de estos efectos varía de día en día, las asimetrías persisten y contradicen el modelo de Black-Scholes, que asume una volatilidad constante.

Para tratar de comprender el efecto sonrisa de volatilidad, Hull (2002) Ref. [27] analiza la relación existente entre la forma de la sonrisa de volatilidad y la distribución que se asume para el valor del activo subyacente en el momento del vencimiento. El modelo de Black-Scholes asume que la distribución de la rentabilidad del activo subyacente durante el tiempo que falta

para el vencimiento de la opción es normal. Los citados efectos de volatilidad no constante estarían sugiriendo que los participantes del mercado están atribuyendo implícitamente una distribución distinta de la asumida por Black-Scholes.

Es frecuente observar que la volatilidad del precio de las acciones tiende a aumentar cuando los precios disminuyen, engrosando “la cola” izquierda de la distribución, posiblemente como consecuencia del mayor riesgo percibido por los inversores para las acciones de la empresa en cuestión. Análogamente, la volatilidad del precio de las acciones tiende a disminuir cuando los precios suben, “aligerando” la cola derecha de la distribución, como consecuencia del menor riesgo percibido. Según Rubinstein (1994) Ref. [47], el “crash” de octubre de 1987 cambió el punto de vista de los participantes del mercado sobre las opciones, asignando mayores probabilidades a grandes caídas que a grandes subidas en el precio del subyacente. Dada la contundente evidencia empírica existente en contra de los supuestos de la fórmula de Black-Scholes, los investigadores han tratado de proponer modelos alternativos que traten de incorporar el efecto *volatility smile*.

Existen modelos que permiten que la volatilidad no sea constante como en el modelo de Black-Scholes, sino variable, ya sea permitiendo que la volatilidad sea aleatoria o una función del precio de ejercicio, en ambos casos a costa lógicamente de introducir una mayor complejidad matemática. Ref. [46].

1.3.8. Nuestro Problema

Primera hipótesis: La muestra es normal pero viene segmentada en bloques donde varía únicamente el tamaño de la desviación estándar.

$$N_1 = n_1, N_2 = n_1 + n_2, N_3 = n_1 + n_2 + n_3,$$

$$N = \sum_{i=1}^m n_i,$$

con m igual al número de bloques en la muestra. Cada bloque se supone que contiene n_k muestras de una distribución normal: $N(0, \sigma_k)$. Dónde σ_k es la desviación estándar del k -ésimo bloque y n_k es el tamaño de muestra del k -ésimo bloque.

La distribución será entonces de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 P_k &= \frac{n_k}{N} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, m\}, \\
 f(x) &= \sum_{k=1}^m p_k \cdot f_k(x), \\
 f_k(x) &= \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma_k^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}}.
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Si f es la distribución de la muestra total entonces:

$$\begin{aligned}
 \mu &= E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^m p_k f_k(x) dx \\
 &= \sum_{k=1}^m p_k \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = 0.
 \end{aligned}$$

Esto ocurre porque $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = E[X_k] = 0$. Hay otro problema: los σ_k son por hipótesis también variables aleatorias. Necesitamos un modelo razonable y/o apropiado para σ_k .

Segunda hipótesis: Suponemos ahora que $\{\sigma_k\}_{k=1}^n$ son realizaciones de alguna variable aleatoria Σ y además dichas realizaciones son independientes.

La función de distribución de la muestra total se escribe como sigue:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \sum_{k=1}^m p_k \cdot F_k(x), \\
 F(x) &:= P(X \leq x), \\
 F_k(x) &:= P(X_k \leq x) = \int_{-\infty}^x f_k(y) dy,
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

donde $f(x) = F'(x)$, X es la variable aleatoria de la muestra total $\{x_1^1, x_2^2, \dots, x_{n_1}^1, x_{n_2}^2, \dots\}$, X_k es la variable aleatoria que representa a la muestra del k -ésimo bloque $\{x_1^k, x_2^k, \dots, x_{n_k}^k\}$. $X_k \sim N(0, \sigma_k)$ y $\{X_t\}$ son independientes. Si $\{Z_k\}_{k=1}^n$ es una colección de variables aleatorias i.i.d. (independientes e idénticamente distribuidas) con distribución normal estándar, $N(0, 1)$ entonces X_k se pueden escribir en términos de Z_k , es decir: $X_k = \sigma_k Z_k$ estamos

suponiendo que cada bloque se genera a partir de una variable aleatoria que es el producto de dos variables aleatorias independientes.

Capítulo II

METODOLOGÍA

2.1. Transformada de Fourier

En esta sección vamos a presentar una serie de conceptos que nos ayudaran a resolver el problema planteado. Primero vamos a presentar el concepto de la transformada de Fourier, que es una transformación de funciones que nos permite resolver la ecuación de difusión como se verá más adelante. Esta ecuación, como mencionamos anteriormente es la que nos proporciona la evolución de la distribución del movimiento browniano.

Sea $\varphi(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real que pertenece a la familia de las funciones cuadrado integrable, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx < \infty. \quad (2.1)$$

Entonces, la transformada de Fourier de $\varphi(x)$ se define como:

$$F[\varphi](k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-ikx} dx, \quad (2.2)$$

donde F es función, φ el argumento y k la variable de la "nueva función".

Un ejemplo del cálculo de la transformada de Fourier de una función se presenta a continuación. Tomemos la función $\varphi(x) = e^{-x^2}$, entonces calculando la integral anterior obtenemos lo siguiente:

$$\tilde{\varphi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+ikx} dx. \quad (2.3)$$

Para resolver esta integral hay que tomar en cuenta que ésta tiene la forma de la familia de Gauss. Las integrales de Gauss se pueden evaluar exactamente y de manera particular. Sabemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (2.4)$$

Entonces, para evaluar la transformada de Fourier de la función $\varphi(x) = e^{-x^2}$, tenemos que escribir el integrando de la [2.3](#) como la exponencial de un cuadrado perfecto:

$$x^2 + ikx = x^2 + 2\left(\frac{ik}{2}\right)x + \left(\frac{ik}{2}\right)^2 - \left(\frac{ik}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{ik}{2}\right)^2 + \frac{k^2}{2}.$$

Con este resultado podemos ver que la integral que necesitamos evaluar queda como:

$$\tilde{\varphi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(x + \frac{ik}{2})^2 + \frac{k^2}{2}} dx. \quad (2.5)$$

Haciendo cambio de variable con $u = x + \frac{ik}{2}$, tenemos que:

$$\tilde{\varphi}(k) = \frac{e^{\frac{k^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}. \quad (2.6)$$

La cual $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du$ es la integral de Gauss.

$$\tilde{\varphi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{k^2}{2}}. \quad (2.7)$$

Nota: para obtener la transformada inversa, es decir recuperar $\varphi(x)$ a partir de $\tilde{\varphi}(k)$ hay que resolver la integral:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(k) e^{ikx} dk. \quad (2.8)$$

Observación 1 La transformada de Fourier esencialmente es una especie de función que nos cambia una función por otra y son objetos que se le llaman funcionales y esta transformación esta dada por la ecuación, es decir, [2.8](#) y esta transformación de la función φ a la función $\tilde{\varphi}(k)$ tiene varias propiedades. Una de ellas es la ecuación [2.9](#) que nos transforma las derivadas y las convierte en una multiplicación por la variable k la variable independiente de la transformada y de hecho es una propiedad que se puede iterar, por ejemplo tenemos la fórmula para la segunda derivada que en este caso esta transformación nos deja una

multiplicación dos veces el mismo factor ik de manera que la transformada de la segunda derivada termina siendo la ecuación [2.10](#)

$$F_x \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] (k) = ik \cdot \tilde{\varphi}(k, t), \quad (2.9)$$

$$F_x \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right] (k) = (ik)^2 \cdot \tilde{\varphi}(k, t), \quad (2.10)$$

$$F_x \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] (k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t} e^{-ikx} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t) e^{-ikx} dx = \frac{\partial \tilde{\varphi}(k, t)}{\partial t}. \quad (2.11)$$

2.2. La distribución del movimiento browniano

La ecuación de difusión y su relación con el movimiento browniano

La ecuación diferencial estocástica (EDS) más general es:

$$dX_t = f(t, X_t)dt + \sigma(x, X_t)dW_t, \quad (2.12)$$

pero tomando los valores $f = 0$ y $\sigma = 1$ tenemos que la ecuación se reduce a la siguiente:

$$dX_t = dW_t \implies X_t = W_t. \quad (2.13)$$

Si $\varphi(x, t)$ es la densidad de X_t entonces obedece la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (2.14)$$

con la condición inicial $\varphi(x, t = 0) = \varphi_0(x) = \delta(x)$.

Un caso un poco más general que éste, corresponde al caso en que la función $f(t, x)$ es constante así como $\sigma(t, x)$. Cuando remplazamos por μ y σ dichas funciones, entonces obtenemos la ecuación diferencial parcial siguiente:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (2.15)$$

Por comodidad vamos a denotar por $D = \frac{\sigma^2}{2}$.

Resolvemos $\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} = D(ik)^2 \tilde{\varphi}(k, t) = -Dk^2 \tilde{\varphi}(k, t)$ usando la técnica de la transformada de

Fourier:

$$\tilde{\varphi}(k, t) := F_x[\varphi(x, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t) e^{-ikx} dx. \quad (2.16)$$

La ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} = -Dk^2 \tilde{\varphi}(k, t). \quad (2.17)$$

Resolviendo $\varphi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} c_0(k) e^{-Dk^2 t} e^{ikx} dk$:

$$\tilde{\varphi}(k, t) = c(t) e^{-Dk^2 t}. \quad (2.18)$$

Regresamos la función al espacio real:

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(k, t) e^{-ikx} dk. \quad (2.19)$$

Pero antes de regresar al espacio real hay que determinar la constante $c(k)$; se usa la condición inicial:

$$\tilde{\varphi}(k, t = 0) = c(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x) e^{-ikx} dx, \quad (2.20)$$

$c(k)$ es la “condición inicial” en el espacio de Fourier.

Hay una técnica por lo cual nosotros podemos obtener la densidad de probabilidad del proceso de Wiener y se hace mediante la ecuación que en física se conoce como la ecuación de difusión.

Y ahora vamos a ver como se resuelve la ecuación de difusión mediante la transformada de Fourier.

La ecuación de difusión está dada como:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (2.21)$$

donde $C = cte$.

Buscamos una función que satisfaga las siguientes condiciones:

$$\varphi(x, t = 0) = \varphi_0(x), \quad (2.22)$$

$\varphi_0(x)$ es una función dada y se le llama condición inicial.

Condición de frontera: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\varphi(x, t)) = 0$.

Técnica de solución: La transformada de Fourier:

La ecuación 2.9 es crucial para resolver el problema porque se trata de una propiedad de la transformada de Fourier esto porque la transformada de Fourier provoca que las derivadas en el espacio de Fourier cambien simplemente por una multiplicación por la variable correspondiente (la variable del espacio de Fourier).

Se transforma la ecuación de difusión:

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} = D(ik)^2 \tilde{\varphi}(k, t) = -Dk^2 \tilde{\varphi}(k, t). \quad (2.23)$$

Entonces:

$$\tilde{\varphi}(k, t) = c_0 e^{-Dk^2 t}, \quad (2.24)$$

con $c_0 = cte$ de integración y la cual posiblemente es función de k .

Tenemos que la transformada de Fourier de la solución es:

$$\tilde{\varphi}(k, t) = c_0(k) e^{-Dk^2 t}. \quad (2.25)$$

La transformada inversa nos da la solución que buscamos:

$$\varphi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} c_0(k) e^{-Dk^2 t} e^{ikx} dk, \quad (2.26)$$

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (2.27)$$

$$f(t, S_t) = \mu S_t, \sigma(t, S_t) = \sigma S_t, \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [\mu x \varphi(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma x \varphi(x, t)]. \quad (2.29)$$

Ecuación del movimiento browniano geométrico

Transformación de la ecuación para el movimiento browniano geométrico.

$$[\Delta S_t = \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \Delta W_t] \frac{1}{S_t}, \quad (2.30)$$

$$\implies \frac{\Delta S_t}{S_t} = \mu \Delta t + \sigma \Delta W_t, \quad (2.31)$$

$$\implies \frac{\Delta S_t}{S_t} = \Delta(\log(S_t)). \quad (2.32)$$

Donde $\frac{\Delta S_t}{S_t}$ es el “rendimiento logarítmico”.

Ahora vamos a adentrarnos en el estudio de la obtención de la densidad de probabilidad de los precios S_t . Como se mencionó al inicio de este trabajo, el proceso S_t está regido por la ecuación 2.27, una ecuación diferencial estocástica. Al asociar esta ecuación con una ecuación diferencial parcial, obtenemos la correspondiente distribución, representada por la ecuación 2.29. Es importante señalar que resolver la ecuación 2.29 no es tan directo como resolver la ecuación de difusión utilizando la transformada de Fourier. Por lo tanto, en lugar de abordar directamente la ecuación 2.29, optaremos por una transformación de las variables de precios a rendimientos, lo cual simplificará la resolución. Para esto, primero definimos los incrementos en los precios. Observamos que, según la ecuación 2.27, estos incrementos están dados por la ecuación 2.30, de la cual, al dividir entre S_t , obtenemos la igualdad de la ecuación 2.31. Aquí, $\frac{\Delta S_t}{S_t}$ representa el rendimiento logarítmico cuando el incremento de t tiende a cero. Tomando el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$, definimos $R_t := \log(S_t)$, entonces:

$$d(\log(S_t)) = dR_t = \mu dt + \sigma dW_t. \quad (2.33)$$

Para la distribución de R_t , resolveremos la EDP:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (2.34)$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial estocástica para los rendimientos logarítmicos, es decir, R_t , está representada por la ecuación 2.33. En realidad, esto implica que debemos resolver la ecuación de difusión. A partir de este punto, aplicaremos la técnica previamente desarrollada para resolver la ecuación 2.34.

Definición 13 Decimos que un proceso estocástico tiene (existe) un $k > 0$ tal que para todo $t > k$, $F_t(x) = F_k(x)$ se tiene que su distribución a cada tiempo es la misma. $X_t : t \in T$

Entonces si $F_t(x)$ es la función de distribución de X_t entonces $F_t(x) = F_t(x) \forall t, t \in T$ Ahora veamos:

$$\Delta P_t = P_t - P_{t-1} = \mu P_{t-1} + \sigma P_{t-1} \Delta W_t, \quad (2.35)$$

$$\frac{\Delta P_t}{P_{t-1}} = \mu + \sigma P_{t-1} \Delta W_t = \frac{d}{dt} \log(P_t), \quad (2.36)$$

$$\log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \simeq \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}} = \mu + \sigma P_{t-1} \Delta W_t = r_t, \quad (2.37)$$

ΔW_t son i.i.d. (independientes e idénticamente distribuidas) con distribución normal, media cero y varianza 1.

2.2.1. Función de Bessel modificada de segundo tipo

La introducción de modelos de probabilidad cada vez más complicados en diferentes campos de aplicación genera demandas cada vez mayores de herramientas matemáticas necesarias. Una característica de esta tendencia general consiste en la necesidad de incluir algunas funciones trascendentales superiores en los aparatos analíticos utilizados actualmente. En la teoría de la probabilidad, la integral de error es de importancia básica y también se utiliza a menudo la función gamma incompleta. Se pueden encontrar considerables posibilidades de aplicación para la función de Bessel modificada del segundo tipo (o función de Hankel modificada), que también se denomina función de MacDonald.

Es bien sabido que la ecuación diferencial generadora de funciones de Bessel tiene la forma:

$$u'' + \left(\frac{1}{z}\right)u' + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right)u = 0, \quad (2.38)$$

cuya solución particular es la función de Bessel de primer tipo de orden n

$$J_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n} [\Gamma(m+1)\Gamma(m+n+1)]^{-1}. \quad (2.39)$$

Sustituyendo z en [2.38](#) obtenemos la ecuación de Bessel modificada

$$u'' + \left(\frac{1}{z}\right)u' + \left(1 + \frac{n^2}{z^2}\right)u = 0, \quad (2.40)$$

cuya solución general puede escribirse en la forma:

$$u = C_1 I_n(z) + C_2 K_n(z), \quad (2.41)$$

donde

$$I_n(z) = \exp(-n\pi i/2) J_n[z \cdot \exp(\pi i/2)], \quad (2.42)$$

es la función de Bessel modificada de primer tipo y

$$K_n(z) = \pi(2 \sin(n\pi))^{-1} [I_{-n}(z) - I_n(z)], \quad (2.43)$$

es la función de Bessel modificada de segundo tipo o la función de MacDonal. Otra forma de escribir función de Bessel modificada de segundo tipo es: Ref. [30]

$$K_v(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-(x/2)(s+\frac{1}{s})} s^{v-1} ds. \quad (2.44)$$

2.2.2. Método de los momentos

En estadística, el método de momentos es un método de estimación de los parámetros poblacionales.

Se empieza derivando ecuaciones que relacionan los momentos poblacionales (p.e., los valores esperados de potencias de la variable aleatoria que estamos considerando) a los parámetros de interés. Por lo tanto, la muestra está definida y los momentos de población están estimados de la muestra. Las ecuaciones son entonces solucionadas para los parámetros de interés, utilizando los momentos de muestra en lugar de los (desconocidos) momentos poblacionales. Esto resulta en estimaciones de aquellos parámetros.

El método de momentos fue introducido por Pafnuti Chebyshov en 1887 Ref. [10] en la demostración del teorema del límite central.

Método

Suponga que el problema es estimar los k parámetros desconocidos $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_t$ que caracterizan la distribución $f_W(w; \theta)$ de la variable aleatoria W . Ref. [6]. Supóngase también que los primeros t momentos de la verdadera distribución (los "momentos poblacionales") pueden ser expresados como funciones de los θ 's:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= E[W] = g_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_t) \\ \mu_2 &= E[W^2] = g_2(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_t) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \mu_t &= E[W^t] = g_t(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_t). \end{aligned}$$

Supóngase que extraemos una muestra de tamaño n , obteniendo los valores w_1, \dots, w_n . Para $j = 1, \dots, k$, sea

$$\hat{u}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i^j,$$

el j -ésimo momento muestral, una estimación de u_j . El estimador del método de los momentos para $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_t$ denotados por $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_t$ está definido como la solución (en caso de que exista) de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_1 &= E[W] = g_1(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_t) \\ \hat{\mu}_2 &= E[W^2] = g_2(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_t) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \hat{\mu}_t &= E[W^t] = g_t(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_t). \end{aligned}$$

Ventajas y desventajas del método de los momentos

El método de los momentos es bastante sencillo y brinda estimadores consistentes (bajo suposiciones muy débiles), aunque estos estimadores son a menudo sesgados.

En algunos casos, cuándo estimamos parámetros de una familia conocida de distribuciones de probabilidad, este método es sustituido por el método de máxima verosimilitud de Fisher Ref. [8], porque con máxima verosimilitud los estimadores tienen probabilidad más alta de ser cercanos a las cantidades que estimamos y son menos sesgadas.

Aun así, en algunos casos las ecuaciones del método de máxima verosimilitud pueden ser intratables sin ayuda de ordenadores, mientras que el método de estimadores de los momentos pueden ser más accesible y fácilmente calculado a mano.

Las estimaciones por el método de los momentos pueden ser utilizadas como la primera aproximación a las soluciones de las ecuaciones de verosimilitud, y podemos encontrar sucesivas mejoras en las aproximaciones por el método de Newton-Raphson. De este modo el método de momentos puede ayudar a encontrar estimaciones del método de máxima verosimilitud.

En algunos casos, infrecuentes con muestras grandes pero no tan infrecuentes con muestras pequeñas, las estimaciones dadas por el método de momentos están por fuera del espacio paramétrico, por lo que no tiene sentido confiar en ellos. Este problema nunca surge en el método de máxima verosimilitud. También, estimaciones del método de los momentos no son necesariamente estadísticos suficientes, p.e., a veces fallan en tener en cuenta toda infor-

mación pertinente en la muestra.

Cuándo estimamos otros parámetros estructurales (p. ej., parámetros de una función de utilidad, en vez de parámetros de una distribución de probabilidad conocida), las distribuciones de probabilidad apropiadas pueden ser desconocidas, por lo que en tal caso es preferible el método de los momentos al de máxima verosimilitud. Ref. [7].

2.3. Lema de Îto

Para poder analizar el lema de Îto es necesario el siguiente resultado, el cual tiene probabilidad uno:

$$dW^2 \rightarrow dt, \quad \text{cuando } dt \rightarrow 0. \quad (2.45)$$

Entonces, entre más pequeño se vuelve dt , más cerca se encuentra dW^2 de ser igual a dt .

Supóngase que $f(S)$ es una función lisa, continua, derivable dos veces y que depende de S y olvídense por un momento que S es una variable estocástica. Si se varía S en una pequeña porción dS entonces claramente f también varía en una pequeña cantidad. De las series de Taylor es posible escribir

$$df = \frac{df}{dS}dS + \frac{1}{2} \frac{d^2f}{dS^2} + \dots, \quad (2.46)$$

donde los puntos suspensivos denotan al resto de los términos que son más pequeños que los que hemos escrito. Ahora recuérdese que dS está dado por

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW. \quad (2.47)$$

Aquí dS es un simple número, aunque aleatorio, y entonces elevándolo al cuadrado encontramos:

$$dS^2 = (\mu S dt + \sigma S dW)^2 = \sigma^2 S^2 dW^2 + 2\sigma\mu S^2 dt dW + \mu^2 S^2 dt^2. \quad (2.48)$$

Aplicando las reglas del cálculo estocástico se sigue que

$$dS^2 = \sigma^2 S^2 dW^2.$$

Dado que $dW^2 \rightarrow dt$

$$dS^2 \rightarrow \sigma^2 S^2 dt.$$

Resultado en [2.46](#), conservando los términos a primer orden de dt y usando la definición dS de [2.47](#), se encuentra que

$$\begin{aligned} df &= \frac{df}{dS} (\mu S dt + \sigma S dW) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2} dt \\ &= \sigma S \frac{df}{dS} dW + \left(\mu S \frac{df}{dS} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2} dt \right). \end{aligned} \quad (2.49)$$

El lema de Itô relaciona un pequeño cambio en una función de una variable aleatoria al pequeño cambio en la variable misma.

Obsérvese que [2.49](#) está formada por un componente aleatorio proporcional a dW y un componente determinístico proporcional a dt . Al respecto, esto soporta una semejanza con la ecuación [2.46](#). La ecuación [2.49](#) es también una receta, ahora para determinar el comportamiento de f , y f por sí misma sigue un comportamiento aleatorio.

Como un ejemplo simple, considérese la función $f(S) = \log S$. Diferenciando esta ecuación tenemos

$$\frac{df}{dS} = \frac{1}{S}, \quad y \quad \frac{d^2}{dS^2} = -\frac{1}{S^2}.$$

Usando [2.49](#),

$$df = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW.$$

La cual es una ecuación diferencial estocástica de coeficiente constante. El salto df esta normalmente distribuido y esto explica por qué la ecuación [2.47](#) es una caminata aleatoria log-normal. El resultado de [2.49](#) puede ser generalizado considerando una función dependiente de una variable aleatoria S y del tiempo, $f(S, t)$. Se puede expandir $f(S + dS, dt)$ en una serie de Taylor de (S, t) para tener,

$$df = \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} dS^2 + \dots + .$$

Usando la expresión [2.47](#) para dS y [2.45](#) para dW^2 se encuentra que la nueva expresión para df es:

$$df = \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dW + \left(\mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt. \quad (2.50)$$

2.4. Nuestro modelo

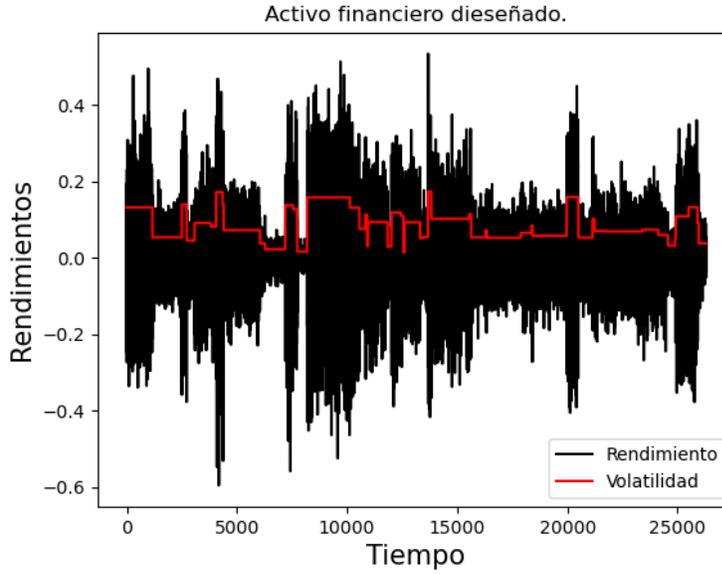


Figura 2.1: Comparación rendimientos con volatilidad constante por tramos.

Nuestro modelo:

$$dP_t = \mu P_t dt + \sigma_t P_t dW_t, \quad (2.51)$$

donde $\sigma_t = \Sigma_n$ para $t \in [T_n, T_{n+1})$ y

$$T_n = \sum_{k=0}^n \tau_j, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2.52)$$

$$\Sigma_n^2 \sim \text{Gamma}(k, \lambda), \quad (2.53)$$

donde $\tau_0 := 0$ y $\{\tau_j : k \in \mathbb{N}\}$ es una colección de variables aleatorias i.i.d. (independientes e idénticamente distribuidas) con distribución exponencial con parámetro τ ,

$$f_\tau(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}.$$

En este caso hay que hacer notar que el parámetro τ se puede interpretar como la duración promedio de los bloques de varianza constante, en otras palabras, la varianza del proceso

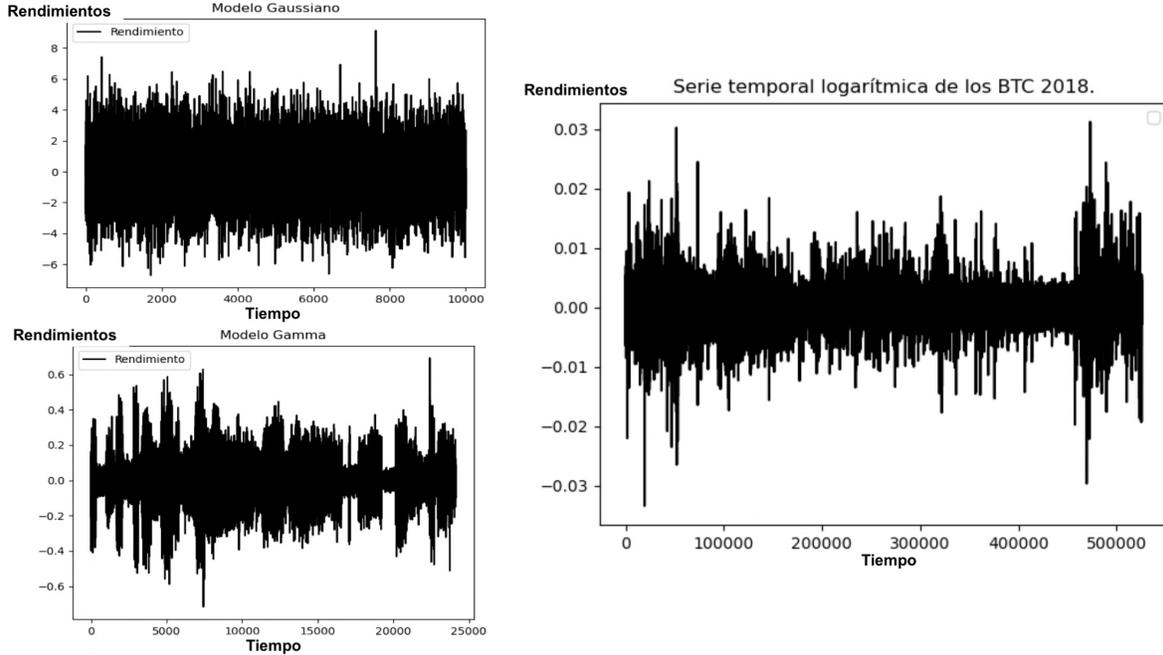


Figura 2.2: Comparación del modelo gaussiano y el modelo gamma.

cambiará cada τ unidades de tiempo. También es necesario mencionar que los parámetros k y λ controlan las propiedades estadísticas de la magnitud de la varianza así como de su variabilidad. De hecho el tamaño de la varianza promedio está dado por el promedio de dicha distribución (es decir, por la esperanza de Σ^2), mientras que la variabilidad de la volatilidad está dada por la varianza. Sabemos que estas cantidades se pueden escribir explícitamente en términos de los parámetros k y λ como sigue:

$$\mathbb{E}[\Sigma^2] = k\lambda, \quad \text{Var}(\Sigma^2) = k\lambda^2.$$

Una vez que se tienen definidas estas distribuciones, estamos en disposición de calcular los rendimientos (así como los precios) siguiendo las ecuaciones en diferencias finitas:

$$\begin{aligned} \Delta P_t &= \mu P_t \Delta t + \sigma_t P_t \Delta W_t, \\ R_t &= \frac{\Delta P_t}{P_t} = \mu \Delta t + \sigma_t \Delta W_t. \end{aligned}$$

Cuando σ_t permanece constante R_t sigue un movimiento browniano.

Si $\mu = 0$ entonces $R_t = \sigma_t \Delta W_t$ con $W_t \sim N(0, \Delta t)$, durante los intervalos de tiempo donde σ_t es constante.

En la Figura 2.1 podemos apreciar una realización de los rendimientos con volatilidad variable de acuerdo al modelo que proponemos. En este caso se simuló una serie de tiempo con duración de $t = 263$ unidades de tiempo. El tiempo de muestreo se tomó como $\delta t = 0.01$, y se utilizaron los parámetros $\tau = 5$, $\lambda = 1$ y $k = 1$.

En la Figura 2.2 mostramos la representación del modelo gaussiano (varianza constante) y el modelo gamma, comparados con datos reales del BTC del 2018 que a simple vista se parece más al modelo gamma que al modelo gaussiano.

Una de las hipótesis básicas que se utiliza en matemáticas financieras es que los precios de cualquier activo subyacente (por ejemplo, los precios de acciones de una compañía que cotiza en la bolsa, o el precio de materia prima como el petróleo) se pueden modelar a partir de un movimiento browniano geométrico. La ecuación diferencial estocástica que obedece este proceso se puede escribir como sigue

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (2.54)$$

donde $W_t : t \in \mathbb{R}^+$ es el proceso de Wiener. Las constantes μ y σ son llamadas dentro del contexto de las matemáticas financieras tasa libre de riesgo y volatilidad, respectivamente. La forma de modelar la evolución de los precios de activos subyacentes mediante un proceso browniano geométrico es la base de teoría de Black-Scholes que resuelve el problema de obtener el costo de diversos derivados financieros como las opciones (europeas o americanas) o instrumentos financieros que pagan dividendos.

Uno de los problemas que existen en torno al modelo de movimiento browniano geométrico para los precios es que se asume, entre otras cosas, que la volatilidad es constante. Se sabe desde hace tiempo que esta hipótesis no es de todo cierta y la evidencia sugiere que la volatilidad (que es un factor de riesgo para los participantes de algún mercado financiero) cambia constantemente debido a diversos factores, entre los que se puede mencionar, por ejemplo, la inestabilidad política o social (como el caso de una pandemia o de una guerra). Debido a esta variabilidad temporal de la volatilidad, se ha propuesto una pléyade de modelos conocidos como modelos de volatilidad estocástica, los cuales se basan principalmente en ecuaciones diferenciales estocásticas acopladas. Gran parte de la dificultad con estos modelos es que la estimación de los parámetros es sumamente complicada, debido a que no se cuenta muchas veces con soluciones analíticas de las ecuaciones del modelo en cuestión. En el presente proyecto se pretende introducir un modelo relativamente sencillo de volatilidad estocástica con el cual el problema de la estimación de parámetros sea mucho más simple. Este modelo se

basa esencialmente en suponer que la volatilidad es constante durante periodos de tiempo de duración aleatoria. Esto esencialmente quiere decir que en la ecuación base del modelo

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (2.55)$$

se asume que la volatilidad σ_t es un proceso estocástico a tiempo continuo y que no se rige por una ecuación diferencial estocástica, pero si sigue siendo un proceso tipo markoviano (el cual se puede describir mediante una ecuación maestra),

$$\sigma_t : t \in \mathbb{R}_+, \quad (2.56)$$

siendo σ_t constante por tramos, donde los tiempos de permanencia (durante los cuales σ_t es constante) tienen alguna distribución estacionaria y los valores de σ_t también siguen una distribución estacionaria e independiente de la distribución de los tiempos de permanencia. El principal objetivo de este estudio es caracterizar analíticamente el proceso S_t para poder proponer estimadores de los parámetros de las distribuciones correspondientes.

2.4.1. Primeras estimaciones

Vamos a ver mis análisis respecto a los bitcoins con la información obtenida en internet. Estos son las gráficas de los bitcoins del 2016 y 2018.

Las siguientes gráficas muestran claramente que R_t no normales, es decir que los rendimientos no son normales en la vida real.

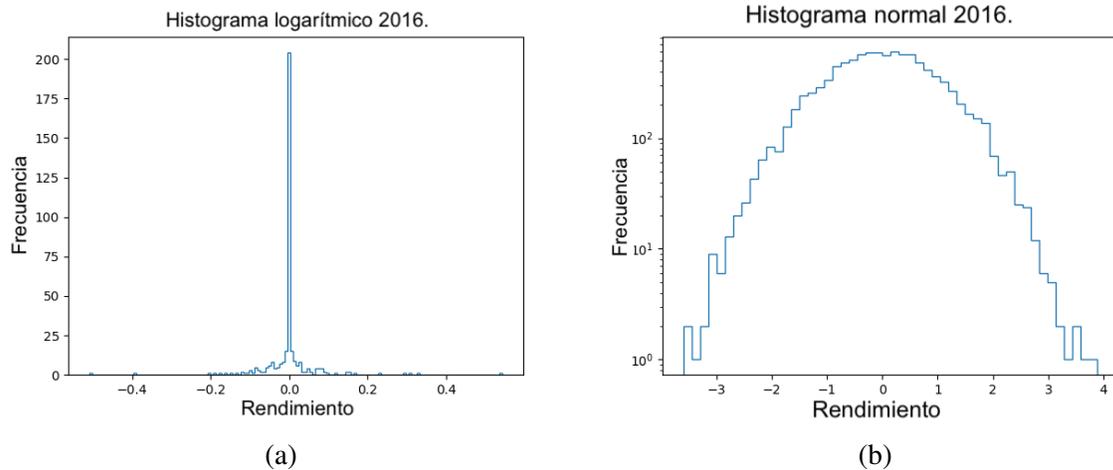


Figura 2.3: Histograma del logaritmo del bitcon del año 2016 solo el margen.

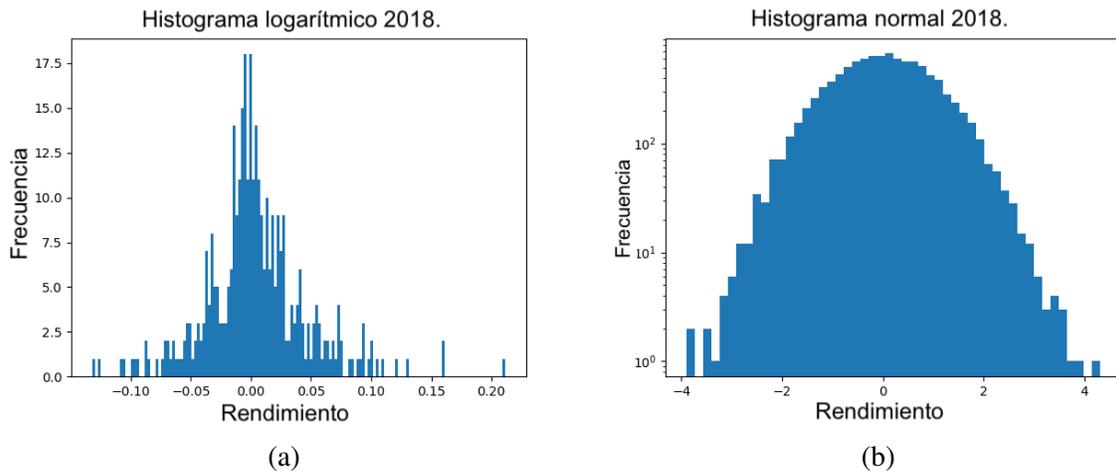


Figura 2.4: Histograma del logaritmo del bitcon del año 2018.

Se puede notar que la determinación de si los rendimientos son normales o no está relacionada con la forma de la curva, donde la normalidad se caracteriza por una curva de tipo parabólico invertido. Sin embargo, en la realidad, los rendimientos no siguen esta distribución normal. Este hecho se puede apreciar en la Figura 2.4 (b), donde se ha eliminado el relleno del histograma para una mejor visualización, como se muestra en la Figura 2.3 (b). Esta observa-

ción confirma que, en nuestro caso, la distribución no sigue una forma de parábola invertida, como se destaca en la Figura 2.4 (b) y Figura 2.3 (b).

Capítulo III

RESULTADOS

3.1. Estadística de rendimientos

En la presente sección, abordaremos la resolución analítica del modelo propuesto a través de la aplicación de la Distribución KB de Bessel. Esta estrategia se ha empleado con el objetivo de alcanzar una comprensión detallada y matemáticamente sólida de las relaciones subyacentes dentro del marco teórico propuesto. A través de la consideración cuidadosa de los parámetros y condiciones del modelo, hemos identificado una distribución que permite abordar analíticamente las incógnitas planteadas. Este enfoque no solo brinda una solución precisa, sino que también proporciona valiosas perspectivas sobre la naturaleza intrínseca del fenómeno estudiado. En las secciones siguientes, se presentará de manera detallada el desarrollo analítico, seguido de un análisis exhaustivo de las implicaciones derivadas de la solución obtenida. Este ejercicio de resolución analítica constituye un componente fundamental para fortalecer la fundamentación teórica de nuestro modelo y contribuye significativamente a la comprensión profunda de los fenómenos en consideración.

3.1.1. Distribución KB (Bessel)

Esta distribución fue estudiada por Oldřich Kropáč Ref. [30] en donde ofrece un compendio de las propiedades principales de algunas distribuciones definidas por medio de funciones trascendentales y que se originan en diversas aplicaciones de la teoría de probabilidad. Particularmente en dicho trabajo se presentan las principales propiedades de la distribución que hemos llamado KB de Bessel. Vale la pena mencionar brevemente algunas propiedades que serán de utilidad más adelante. En relación a los parámetros de la distribución podemos decir

que controlan hasta cierto punto características cualitativas que son de interés en el estudio de la volatilidad.

El parámetro α es una cantidad que controla la *agudeza* de la distribución, esto es, controla que tan “fina” o “puntiaguda” es la moda de la distribución. Cuando el parámetro α es un valor grande, la moda de la distribución toma una forma “achatada” muy similar a cómo luce una distribución normal. Sin embargo, cuando dicho parámetro se acerca a cero, la moda se hace más aguda como la punta de una lanza. Este comportamiento se muestra cualitativamente en la Figura 3.1 a).

Por otro lado, el parámetro b controla el ancho de la distribución, lo que lo convierte en el equivalente del parámetro σ (la desviación estándar) de la distribución normal. Sin embargo, en este caso, el parámetro b no es directamente la desviación estándar, como se verá más adelante. Cuando b se hace grande, el ancho de la distribución crece, mientras que si b se hace pequeño, entonces la distribución se hace angosta, tal como se puede apreciar en la Figura 3.1 b).

La distribución *KB* de Bessel se define como:

$$X \sim KB(\alpha, b), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}2^{\alpha-\frac{1}{2}}} \frac{1}{b\Gamma(k)} \left(\frac{|x|}{b}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} K_{\alpha-\frac{1}{2}}\left(\frac{|x|}{b}\right). \quad (3.1)$$

En el marco de nuestro planteamiento teórico, la expresión que describe la variable b se establece como $b = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ y $\alpha = k$. Noten que existen dos propiedades fundamentales en esta distribución la agudeza que esta dada por α y el ancho de la distribución que esta dado por b .

3.1.2. Distribución de rendimientos: modelo de varianza gamma

En esta sección vamos a obtener la distribución de los rendimientos partiendo de la hipótesis de que la varianza cambia a lo largo del tiempo siguiendo el modelo gamma.

Como punto de partida supone que los datos de rendimientos vienen segmentados por bloques de varianza fija. La varianza de cada uno de estos bloques sigue una distribución de tipo gamma con parámetros λ y k :

$$f_{\Sigma^2}(s) = \frac{(\lambda s)^{k-1}}{\Gamma(k)} \lambda e^{-\lambda s}.$$

Ahora si denotamos por $X_{j,k}$ la muestra aleatoria segmentada por bloques de varianza fija, tenemos entonces que el índice j varía de 0 a n_k , siendo n_k el número de muestras del bloque k , mientras que el índice k varía de 0 a m , siendo m el número de bloques. El número total de

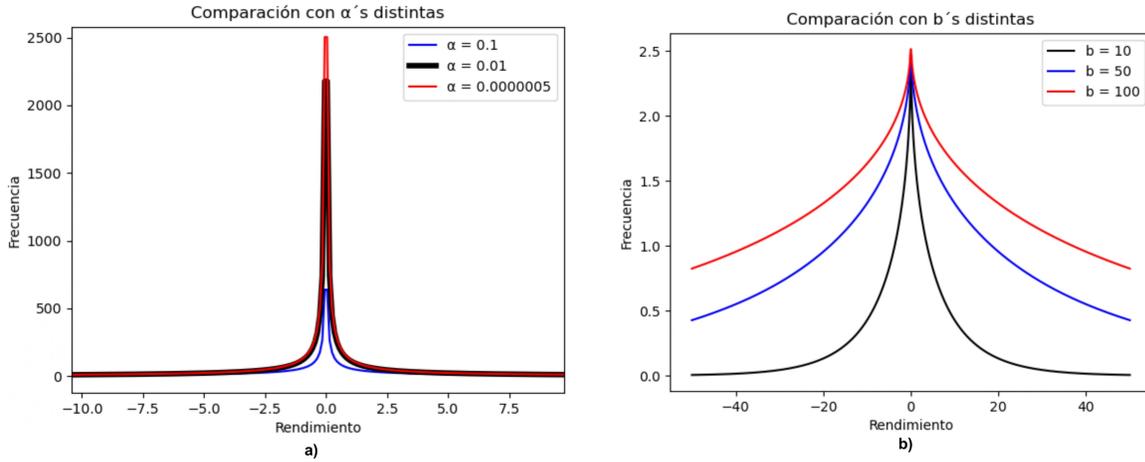


Figura 3.1: Distribución KB de Bessel para diferentes valores de los parámetros.

En el panel a) se muestra cómo cambia la distribución variando el parámetro α . Obsérvese cómo la agudeza de la distribución se hace más pronunciada conforme α tiende a cero. En

el panel b) se muestra la distribución KB para diferentes valores del parámetro b . En este caso, conforme b se hace grande, la anchura de la distribución también lo hace.

muestras es entonces $N = n_1 + n_2 + \dots + n_m$. Denotaremos por σ_k^2 , la varianza del k -ésimo bloque. Alternativamente podemos representar las variables aleatorias $X_{j,k}$ como:

$$X_{j,k} = \Sigma_k Z_j, \quad (3.2)$$

siendo Σ_k la variable aleatoria que representa la desviación estándar fija σ_k del k -ésimo bloque. Es claro que la distribución de Σ_k se puede obtener a partir de la distribución de Σ_k^2 , es decir, a partir de $f_{\Sigma^2}(s)$:

$$f_{\Sigma}(\sigma) = 2\sigma \frac{(\lambda\sigma^2)^{k-1}}{\Gamma(k)} \lambda e^{-\lambda\sigma^2}, \quad \sigma > 0.$$

Hay que hacer notar también que las variables aleatorias Z_j se suponen independientes e idénticamente distribuidas con distribución normal estándar, es decir, que las variables Z_j tienen función densidad:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

Como hemos supuesto que las variables aleatorias que representan la muestra de rendimientos logarítmicos, $X_{j,k}$, son independientes, entonces la distribución colectiva de toda la muestra se puede obtener como la distribución del producto de variables Σ_k y Z_j . Es decir, si la variable aleatoria X representa la distribución colectiva de la muestra $X_{j,k}$, entonces la distribución X está dada por:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\Sigma} \left(\frac{x}{y} \right) f_Z(y) |y|^{-1} dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\Sigma}(y) f_Z \left(\frac{x}{y} \right) |y|^{-1} dy.$$

la cual es simplemente la fórmula para la densidad del producto de dos variables aleatorias Ref. [45]. Este hecho se puede justificar alternativamente si pensamos en la distribución de X como la probabilidad de obtener una muestra seleccionada aleatoriamente del conjunto $X_{j,k}$. Esto es, si buscamos la probabilidad de que X sea menor que un valor determinado x , podemos escribir:

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= \sum_{k=1}^m p_k P(X_k \leq x) = \sum_{k=1}^m p_k P(\sigma_k Z_k \leq x) \\ &= \sum_{k=1}^m p_k P(\Sigma Z \leq x) = P(\Sigma Z \leq x) \sum_{k=1}^m p_k, \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde $p_k = n_k/N$ se puede interpretar como la probabilidad de seleccionar la variable aleatoria (o la muestra) X_k del conjunto de variables $X_{j,k}$. Nótese también que hemos omitido los subíndices de las variables Σ_k y Z_j debido a que son variables independientes con idéntica distribución. Entonces podemos notar que, las sumas de las p_k , en la ecuación anterior, es igual a uno:

$$\sum_{k=1}^m p_k = \sum_{k=1}^m \frac{n_k}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^m n_k = 1.$$

Entonces, de forma resumida podemos escribir que:

$$P(X \leq x) = P(\Sigma Z \leq x),$$

de donde se sigue que la distribución de X es la distribución del producto ΣZ :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\Sigma, Z} \left(\frac{x}{y}, y \right) \frac{1}{|y|} dy.$$

Sin embargo, si las densidades de Σ y Z son independientes, entonces la densidad conjunta del producto de ambas se expresa como el producto de las densidades individuales. Esto significa que si $f_Z(z)$ representa la densidad de Z y $f_{\Sigma}(\sigma)$ representa la densidad de Σ , bajo la asunción de independencia, la densidad conjunta se calcula como:

$$\begin{aligned} f_{\Sigma, Z}(\sigma, z) &= f_{\Sigma}(\sigma) f_Z(z), \\ f_Z(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \\ f_{\Sigma}(\sigma) &= \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma^2}{2}} & \text{si } \sigma > 0 \\ 0 & \text{si } \sigma \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Como en nuestro modelo tenemos que $Z \sim N(0, 1)$ y $\Sigma^2 \sim \text{gamma}(k, \lambda)$ tenemos que las funciones de densidad están dadas por:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \\ f_{\Sigma}(\sigma) &= 2\sigma \frac{(\lambda\sigma^2)^{k-1}}{\Gamma(k)} \lambda e^{-\lambda\sigma^2}, \end{aligned}$$

para $z \in \mathbb{R}$ y $s \leq 0$. En consecuencia, tenemos que la densidad de X se puede calcular como sigue:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^{\infty} 2y \frac{(\lambda y^2)^{k-1}}{\Gamma(k)} \lambda e^{-\lambda y^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2y^2}} 2dy \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(k)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (\lambda y^2)^{k-1} e^{-(\lambda y^2 + x^2/2y^2)} 2dy, \end{aligned} \quad (3.4)$$

usando el cambio de variable tomando a $u = \frac{\sqrt{2\lambda}y^2}{|x|}$, $du = \frac{\sqrt{2\lambda}}{|x|}2ydy$, con $u \in [0, \infty)$, $\frac{u}{|x|} = \sqrt{2\lambda} \left(\frac{y^2}{x^2}\right) \implies \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{\sqrt{2\lambda}}{2} \frac{|x|}{u}$, $y^2 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} |x|u$ y $|y| = \frac{|x|^{1/2}}{(2\lambda)^{1/4}} u^{1/4}$ entonces:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{x^{k-1}\lambda}{\sqrt{2\pi}\Gamma(k)} \int_0^\infty e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \frac{|x|}{u}} \left(\frac{|x|}{\sqrt{2\lambda}}u\right)^{k-1} \frac{(|x|^{-1/2})(2\lambda)^{-1/4}^{-1/2}}{u} \frac{|x|}{\sqrt{2\lambda}} e^{-\lambda \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} |x|u} du \\ &= \frac{\lambda^k (2\lambda)^{1/4}}{\sqrt{2\pi}\Gamma(k)} \left(\frac{|x|}{\sqrt{2\lambda}}\right)^{k-1} \frac{|x|^{1/2}}{\sqrt{2\lambda}} \int_0^\infty e^{-|x|\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(u+\frac{1}{u})} u^{k-\frac{1}{2}-1} du, \end{aligned} \quad (3.5)$$

Con todo esto tenemos finalmente que la densidad de X se puede escribir como:

$$f_X(x) = C_{k,\lambda} |x|^{k-1/2} K_{k-1/2} \left(2\sqrt{\frac{\lambda}{2}} |x| \right). \quad (3.6)$$

la cual como puede verse corresponde a una distribución KB de Bessel.

Teorema 3 Si $X \geq 0$ es una variable aleatoria con densidad $f_X(x)$, buscamos la densidad de $Y = \sqrt{X}$, i.e, $f_Y(y)$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\sqrt{X} \leq y) = P(X \leq y^2) = F_X(y^2).$$

Para obtener las densidades derivadas respecto a y :

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(y^2) = f_X(y^2) 2y,$$

$$f_\Sigma(\sigma) = 2\sigma \frac{(\lambda\sigma^2)^{k-1}}{\Gamma(k)} \lambda e^{-\lambda\sigma^2}, \quad \sigma > 0.$$

Con la ecuación 3.6 podemos notar que $\alpha = k - \frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} = (2\lambda)^{-\frac{1}{2}}$. Sustituyendo los valores obtenemos que:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^{k-\frac{1}{2}}} \frac{1}{b\Gamma(k)} \left(\frac{|x|}{b}\right)^{k-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^{k-\frac{1}{2}}} \frac{1}{\Gamma(k)} |x|^{k-\frac{1}{2}} b^{-k-\frac{1}{2}} K_{k-\frac{1}{2}} \left(\frac{|x|}{b}\right),$$

lo que se sigue del hecho de que:

$$\frac{b^{-k-\frac{1}{2}}}{2^{k-\frac{1}{2}}} = \frac{\left((2\lambda)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-k-\frac{1}{2}}}{2^{k-\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{1}{2}(k+\frac{1}{2})} \cdot \lambda^{\frac{1}{2}(k+\frac{1}{2})}}{2^{k-\frac{1}{2}}} = 2 \cdot \frac{\lambda^{\frac{1}{2}(k+\frac{1}{2})}}{2^{\frac{1}{2}(k+\frac{1}{2})}}. \quad (3.7)$$

3.2. Estimación de parámetros

En esta sección vamos a presentar una breve reseña de los cálculos relacionados con la estimación de los parámetros de la distribución KB de Bessel que encontramos en la sección anterior para la descripción de los rendimientos logarítmicos.

Comencemos observando que la distribución KB de Bessel está definida por medio de una densidad de probabilidad que es par, es decir, que satisface la propiedad: $f(x) = f(-x)$. Esto quiere decir que el producto $x^{2n+1}f(x)$ es en consecuencia una función impar, para todo $n \in \mathbb{N}$. Así:

$$\begin{aligned} E[X^{2n+1}] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1} f(x) dx = 0, \\ m_1 &= E[X] = 0, \\ m_3 &= E[X^3] = 0. \end{aligned}$$

Para los momentos pares de la distribución KB de Bessel se conoce una fórmula exacta que se puede encontrar en el artículo de Oldřich Kropáč. Ref. [30]:

$$m_{2l}(n) = \pi^{-\frac{1}{2}} (2b)^{2l} \Gamma\left(l + n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(l + \frac{1}{2}\right) \left[\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]^{-1}.$$

Para aplicar el método de los momentos, se requiere determinar al menos dos momentos. Por consiguiente, a continuación, procederemos a calcular los dos primeros momentos pares.

$$\begin{aligned} m_2 &= E[X^2] = \pi^{-\frac{1}{2}} (2b)^2 \Gamma(1 + \alpha) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) (\Gamma(\alpha))^{-1} \\ &= 2\pi^{-\frac{1}{2}} b^2 \alpha \sqrt{\pi} = 2\alpha b^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Nótese que $\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$, $\therefore \text{Var}(X) = 2\alpha b$ y $\text{std}(X) = \sqrt{2\alpha b}$.

$$\begin{aligned} m_4 &= E[X^4] = \pi^{-\frac{1}{2}} (2b)^4 \Gamma(2 + \alpha) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \\ &= 12b^4 \alpha (1 + \alpha) = 12\alpha (1 + \alpha) b^4. \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

$$m_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^4.$$

Así obtendremos nuestros parámetros:

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{\hat{m}_4}{3s^4} - 1 \right), \quad (3.10)$$

$$\hat{b}^2 = \frac{s^2}{2\hat{\alpha}} = \frac{1}{2} s^2 \left(\frac{\hat{m}_4}{3s^4} - 1 \right). \quad (3.11)$$

3.3. Ajustes con datos sintéticos

Para probar la efectividad de los estimadores obtenidos por el método de los momentos, vamos a realizar un experimento numérico con datos obtenidos de manera artificial.

Para este propósito primero elaboramos un código en Python para generar datos con el modelo de varianza gamma que fue descrito en la Sección [2.4](#).

Los resultados revelaron que el modelo propuesto exhibe un ajuste notablemente bueno con los datos sintéticos utilizados en el estudio. La consistencia entre las predicciones del modelo y los datos generados artificialmente sugiere que el enfoque adoptado es robusto y capaz de generalizar efectivamente a situaciones del mundo real.

A continuación, se presentan los resultados derivados mediante el uso del lenguaje de programación Python para un conjunto de datos sintéticos mostrados en la Tabla [3.1](#), las cuales fueron representadas gráficamente, exhibiendo los correspondientes gráficos que ilustran dichas representaciones.

Además de la estimación de los parámetros de la distribución KB, se realizó también la estimación de la volatilidad en función del tiempo empleando la técnica de deslizamiento de ventana. Esta técnica consiste en estimar la volatilidad mediante el cálculo de la desviación

Parámetro	Valor
\hat{m}_4	19140.497
m	-0.018
s^2	34.052
α	0.222
\hat{b}^2	76.657
λ	0.007
\hat{b}	8.755

Tabla 3.1: Parámetros datos sintéticos.

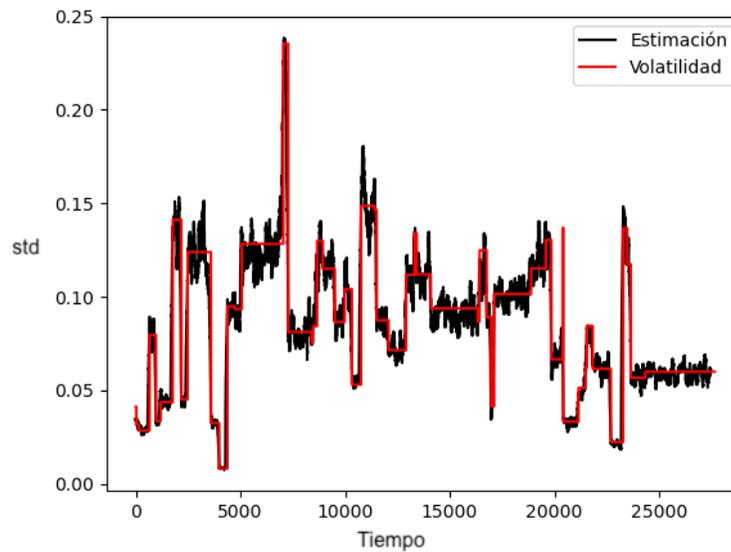


Figura 3.2: Estimaciones de la volatilidad.

estándar en una ventana de determinado tamaño, el cual denotamos por w (específicamente, w es un número entero indicando el número de datos en dicha ventana de tiempo). Esta ventana de datos se desliza a lo largo de la serie de tiempo y en cada deslizamiento hecho, se realiza la estimación de la desviación estándar. Este procedimiento resulta en una curva que muestra la evolución de la volatilidad a lo largo del tiempo con una precisión que depende del tamaño de la ventana w y con una continuidad controlada por el tamaño del deslizamiento s .

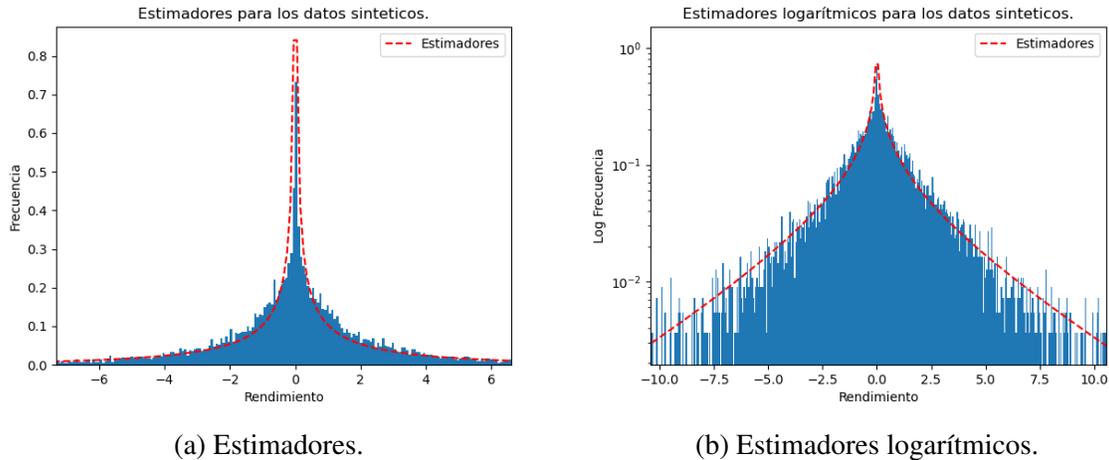


Figura 3.3: Gráfica de los estimadores sintéticos comparada con la gráfica logarítmica.

En la Figura [3.2](#) se puede apreciar el resultado de este proceso de estimación de la volatilidad, usando los datos sintéticos mencionados anteriormente. Para este caso se usó un tamaño de ventana $w = 100$ y un deslizamiento de $s = 0.01$. Nótese como la estimación de la volatilidad (línea negra) con este método se alcanza a reproducir de manera adecuada, lo que se puede apreciar de la comparación entre esta estimación y la volatilidad real (línea roja) en el experimento numérico controlado. También hay que hacer notar que las estimaciones de los parámetros de la distribución KB alcanzan a reproducir de manera adecuada el histograma de frecuencias mostrado en la Figura [3.3](#).

3.4. Ajustes con datos reales

A continuación vamos a presentar los resultados de las estimaciones de parámetros de la distribución KB de Bessel empleando datos reales de series de tiempo financieras. Los datos utilizados corresponden al bitcoin entre los años 2015 y 2022 y al ethereum entre los años 2017-2022. Esta base de datos fue obtenida de la Ref. [\[35\]](#), en donde J. Morales Herrera realizó la limpieza y el pre-procesamiento de los datos. La frecuencia del registro de los precios tanto del bitcoin como del ethereum es de un minuto, y se hizo el proceso de estimación de parámetros utilizando los datos de cada año natural, esto con el fin de observar la evolución en el tiempo de la distribución de rendimientos así como de la volatilidad misma. A continuación iremos mostrando las estimaciones correspondientes para cada criptomoneda por cada

año natural.

3.4.1. BTC 2022

Parámetro	Valor
\hat{m}_4	5.574×10^{-11}
m	-2.144×10^{-06}
s^2	8.754×10^{-07}
α	0.043
\hat{b}^2	1.017×10^{-05}
λ	49141.087
\hat{b}	0.003

Tabla 3.2: Parámetros datos BTC 2022.

Los resultados de la Tabla 3.2 fueron representadas gráficamente, exhibiendo los correspondientes gráficos que ilustran dichas representaciones.

En esta representación la Figura 3.4, se expone la relación entre la volatilidad y el tiempo durante el año 2022. Observamos que los datos reales no respaldan completamente nuestra hipótesis de que la volatilidad es constante por segmentos, ya que la gráfica no refleja de manera suficientemente marcada este comportamiento.

En la Figura 3.5 observamos la distribución empírica de BTC en 2022. El histograma azul representa la distribución empírica, mientras que la línea roja punteada representa la densidad de probabilidad del modelo que hemos aplicado, ajustándolo mejor a los datos presentes en el histograma. En la representación a la derecha, se utiliza una escala semi-logarítmica, donde el eje y muestra el logaritmo de la frecuencia de ocurrencia frente al rendimiento. Se nota que el ajuste no es óptimo, lo cual se atribuye a la razón mencionada anteriormente. Inicialmente, nuestra hipótesis planteaba una volatilidad constante por tramos, pero esta estimación revela que la hipótesis original no se cumple completamente.

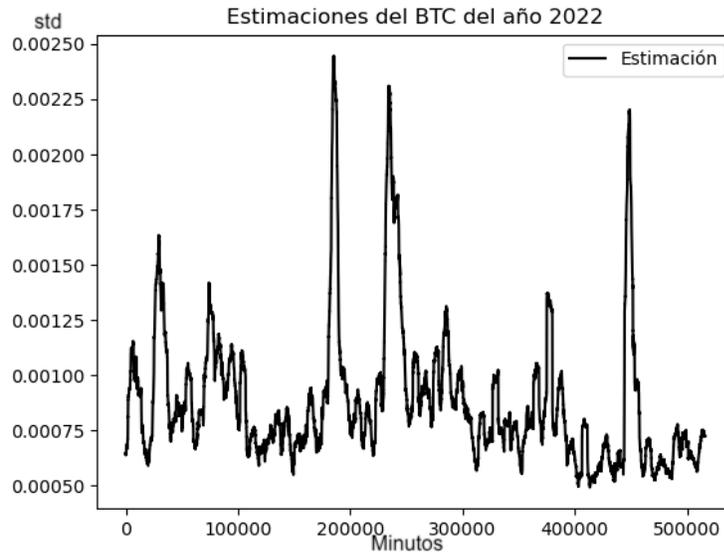
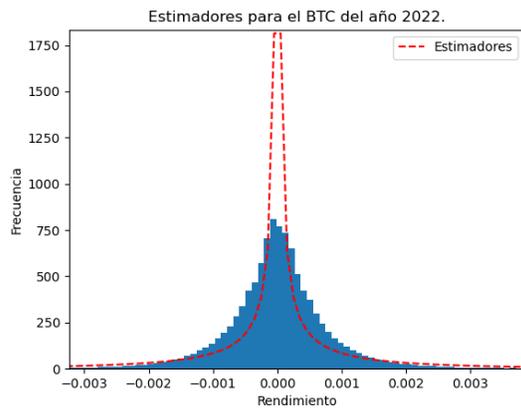
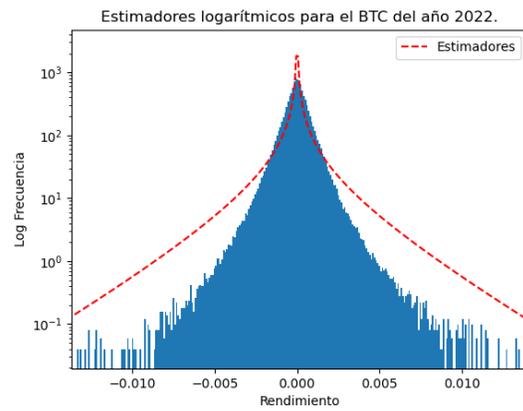


Figura 3.4: Gráfica de los estimadores BTC 2022.



(a) Estimadores.



(b) Estimadores logarítmicos.

Figura 3.5: Gráfica de los estimadores reales comparada con la gráfica logarítmica.

3.4.2. BTC 2021

Parámetro	Valor
\hat{m}_4	1.914×10^{-10}
m	8.076×10^{-07}
s^2	1.679×10^{-07}
α	0.046
\hat{b}^2	1.816×10^{-05}
λ	0.046
\hat{b}	1.816×10^{-05}

Tabla 3.3: Parámetros datos BTC 2021.

Los resultados de la Tabla 3.3 fueron representadas gráficamente, exhibiendo los correspondientes gráficos que ilustran dichas representaciones.

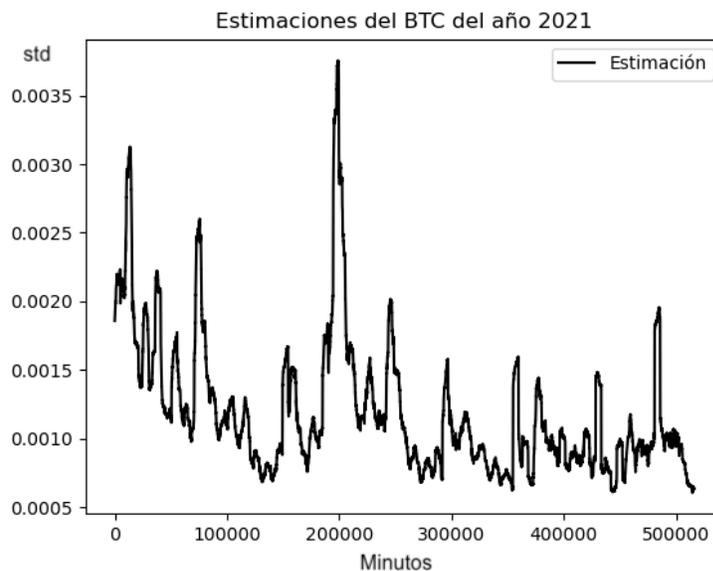


Figura 3.6: Gráfica de los estimadores BTC 2021.

Realizamos el mismo análisis con los datos correspondientes a BTC en 2021 (Figura 3.6).

Al retroceder en el tiempo, observamos en la gráfica que existen regiones donde la hipótesis se cumple; en estos segmentos, la volatilidad parece mantenerse constante durante periodos relativamente cortos. Sin embargo, en la mayor parte de la gráfica, la hipótesis no se verifica completamente.

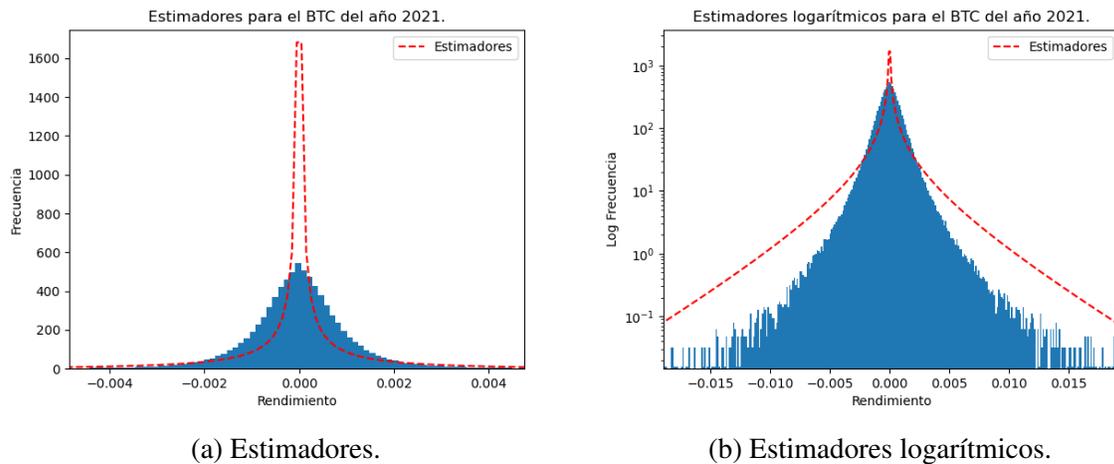


Figura 3.7: Gráfica de los estimadores reales comparada con la gráfica logarítmica.

Ahora presentamos nuevamente el histograma de frecuencias frente al rendimiento (Figura 3.7), tanto para los datos obtenidos de manera empírica como para la densidad de probabilidad del modelo KB del año 2021. Como se puede apreciar, debido a que la hipótesis de una volatilidad constante por tramos no se cumple completamente, el ajuste no es completamente satisfactorio. Sin embargo, es importante destacar que a diferencia del modelo gaussiano, logramos al menos replicar con el modelo KB la agudeza de la distribución, aunque el pico no sea precisamente exacto.

3.4.3. BTC 2020

Parámetro	Valor
\hat{m}_4	2.198×10^{-10}
m	2.281×10^{-06}
s^2	1.28×10^{-06}
α	0.022
\hat{b}^2	2.799×10^{-05}
λ	17863.106
\hat{b}	0.005

Tabla 3.4: Parámetros datos BTC 2020.

Los resultados de la Tabla 3.4 fueron representadas gráficamente, exhibiendo los correspondientes gráficos que ilustran dichas representaciones.

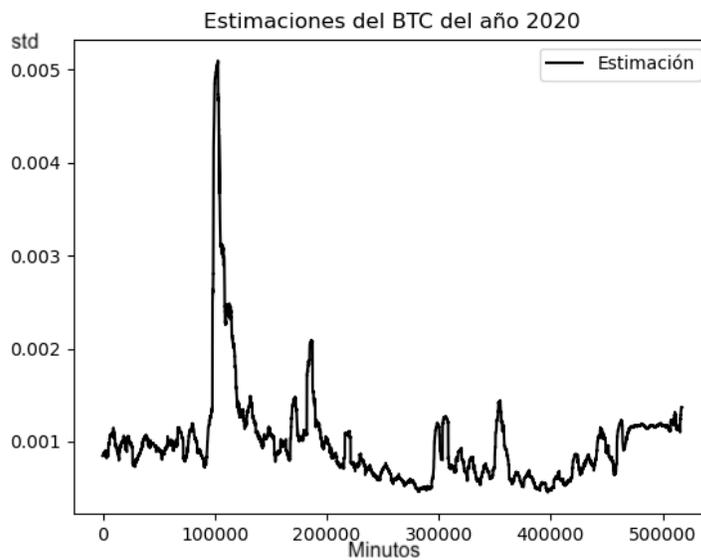


Figura 3.8: Gráfica de los estimadores BTC 2020.

En este punto la Figura 3.8 se evidencia la existencia de intervalos donde la volatilidad parece mantenerse constante.

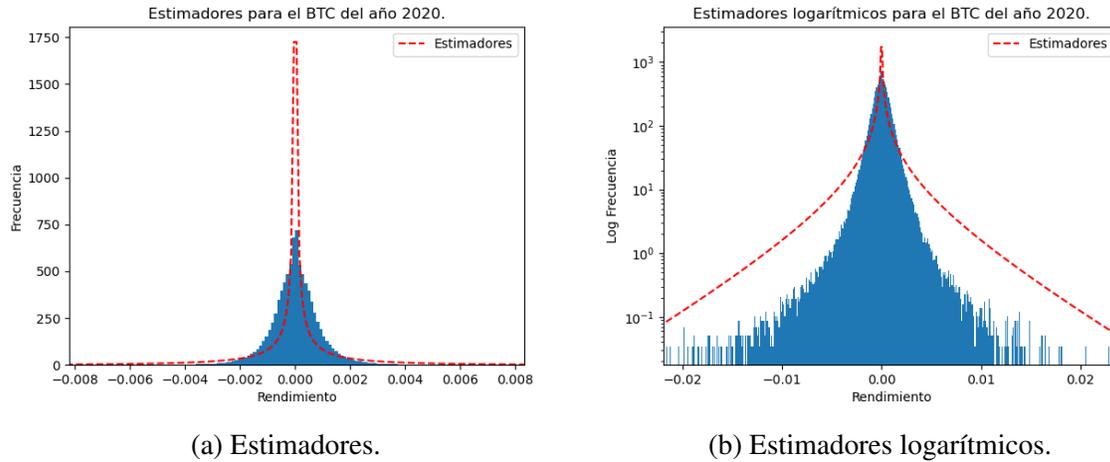


Figura 3.9: Gráfica de los estimadores reales comparada con la gráfica logarítmica.

Observen que en la Figura 3.9, gracias a estas particularidades, en este contexto el ajuste ha mejorado, ya que en cierto sentido, la hipótesis de la volatilidad constante por tramos parece haberse cumplido ahora para una gran cantidad de los datos presentados.

3.4.4. BTC 2019

Parámetro	Valor
\hat{m}_4	2.496×10^{-10}
m	5.575×10^{-07}
s^2	1.211×10^{-06}
α	0.018
\hat{b}^2	3.377×10^{-05}
λ	14808.029
\hat{b}	0.006

Tabla 3.5: Parámetros datos BTC 2019.

Los resultados de la Tabla 3.5 fueron representadas gráficamente, exhibiendo los correspondientes gráficos que ilustran dichas representaciones.

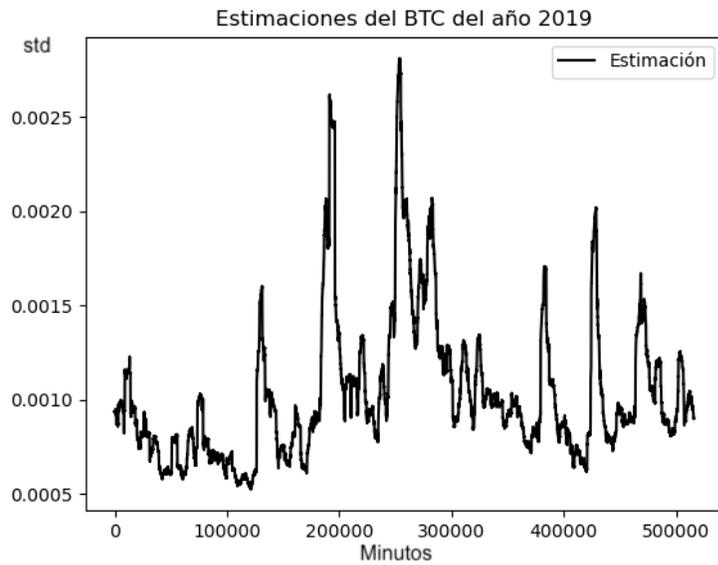
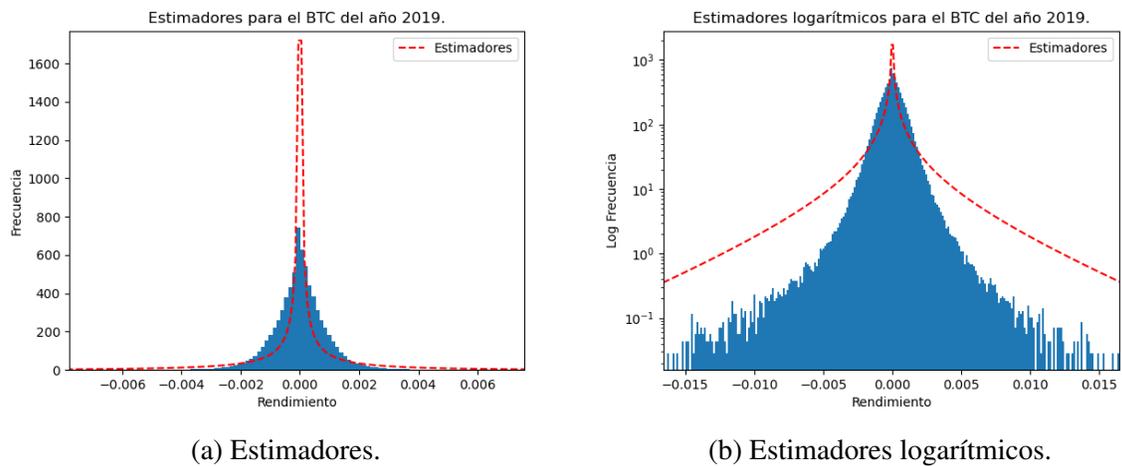


Figura 3.10: Gráfica de los estimadores BTC 2019.

En esta representación de la Figura 3.10, se observan datos más consistentes aunque de magnitud reducida; sin embargo, aún no logramos satisfacer completamente el requisito.



(a) Estimadores.

(b) Estimadores logarítmicos.

Figura 3.11: Gráfica de los estimadores reales comparada con la gráfica logarítmica.

Observamos que el ajuste de la Figura 3.11 continúa siendo adecuado para reproducir las características fundamentales de la distribución empírica mediante la aplicación de la línea punteada roja.

3.4.5. BTC 2018

Parámetro	Valor
\hat{m}_4	7.519×10^{-11}
m	-1.823×10^{-06}
s^2	1.979×10^{-06}
α	0.185
\hat{b}^2	5.344×10^{-06}
λ	93571.183
\hat{b}	0.002

Tabla 3.6: Parámetros datos BTC 2018.

Los resultados de la Tabla 3.6 fueron representadas gráficamente, exhibiendo los correspondientes gráficos que ilustran dichas representaciones.

En esta instancia la Figura 3.12, la hipótesis parece verificar su validez en un período de tiempo más extenso, donde se muestra aparentemente más significativa. Al examinar el histograma, esta tendencia se hace evidente. Indudablemente en la Figura 3.13, la adaptación es considerablemente más eficaz que en los años precedentes.

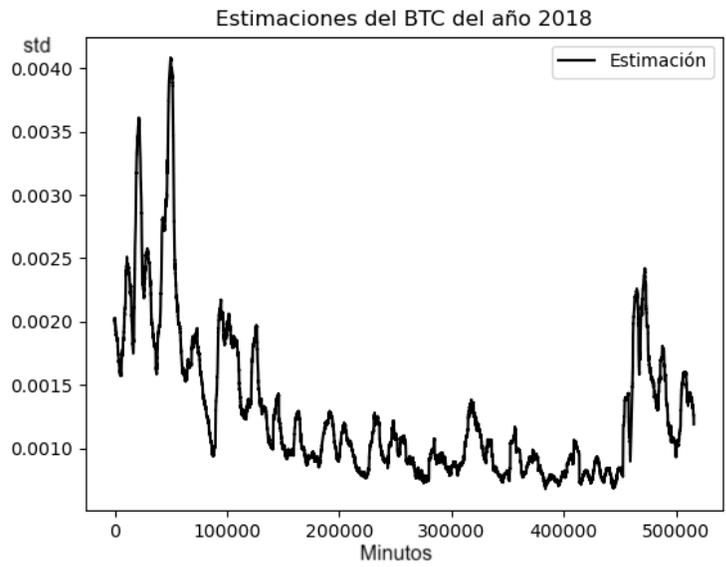
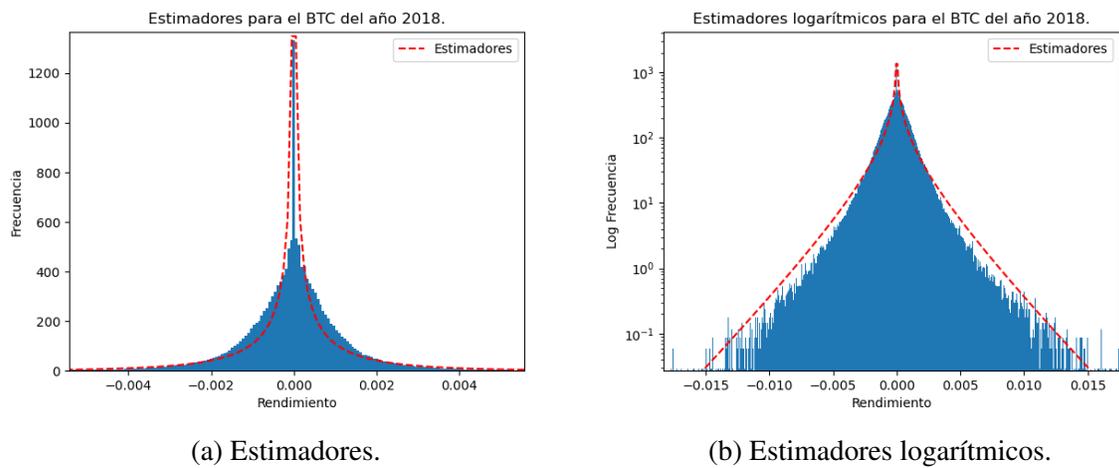


Figura 3.12: Gráfica de los estimadores BTC 2018.



(a) Estimadores.

(b) Estimadores logarítmicos.

Figura 3.13: Gráfica de los estimadores reales comparada con la gráfica logarítmica.

3.4.6. BTC 2017

Parámetro	Valor
\hat{m}_4	4.721×10^{-10}
m	4.697×10^{-06}
s^2	3.124×10^{-06}
α	0.066
\hat{b}^2	2.362×10^{-05}
λ	21166.945
\hat{b}	0.005

Tabla 3.7: Parámetros datos BTC 2017.

Los resultados de la Tabla 3.7 fueron representadas gráficamente, exhibiendo los correspondientes gráficos que ilustran dichas representaciones.

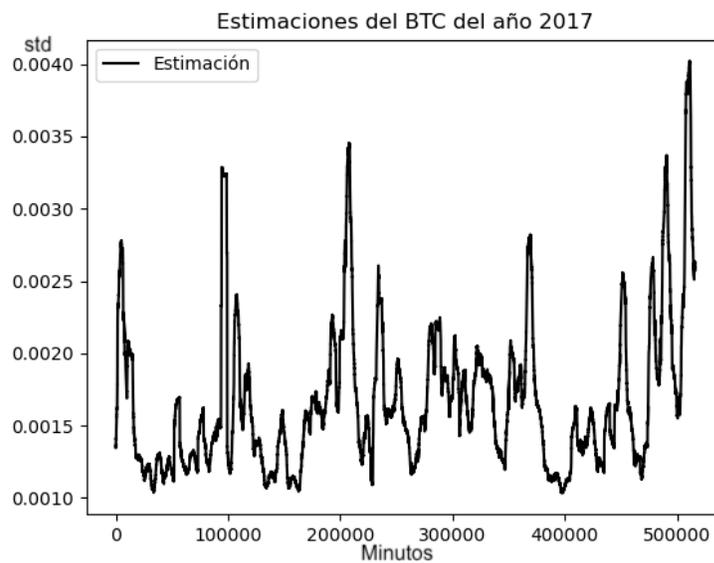


Figura 3.14: Gráfica de los estimadores BTC 2017.

Aquí nuevamente la Figura 3.14 se evidencia que la condición se satisface en algunos segmentos, mientras que en otros no.

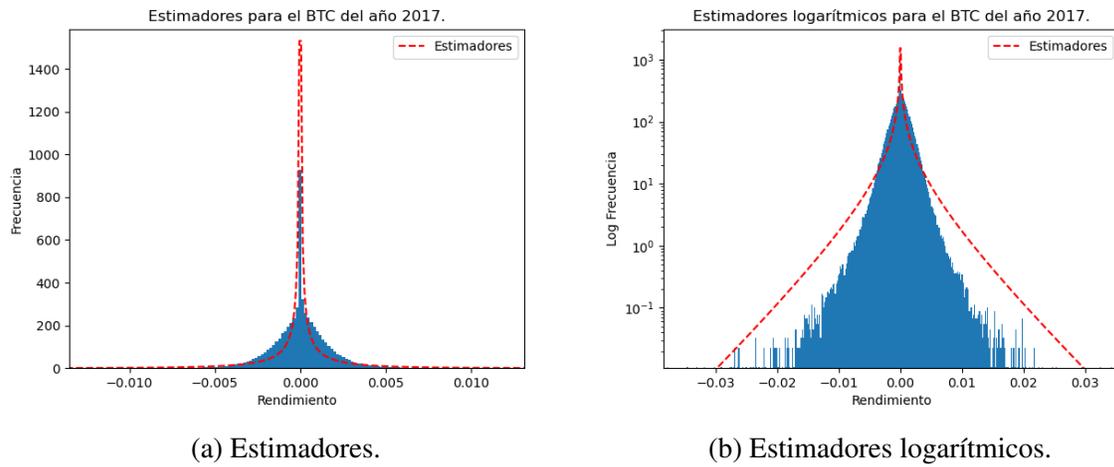


Figura 3.15: Gráfica de los estimadores reales comparada con la gráfica logarítmica.

La adaptación mejora ligeramente en comparación con el periodo de 2019-2022, ya que la Figura 3.15 roja se alinea de manera más cercana con el histograma.

3.4.7. BTC 2016

Parámetro	Valor
\hat{m}_4	6.656×10^{-11}
m	1.312×10^{-06}
s^2	1.714×10^{-06}
α	0.153
\hat{b}^2	5.615×10^{-06}
λ	89047.16
\hat{b}	0.002

Tabla 3.8: Parámetros datos BTC 2016.

Los resultados de la Tabla 3.8 fueron representadas gráficamente, exhibiendo los correspondientes gráficos que ilustran dichas representaciones.

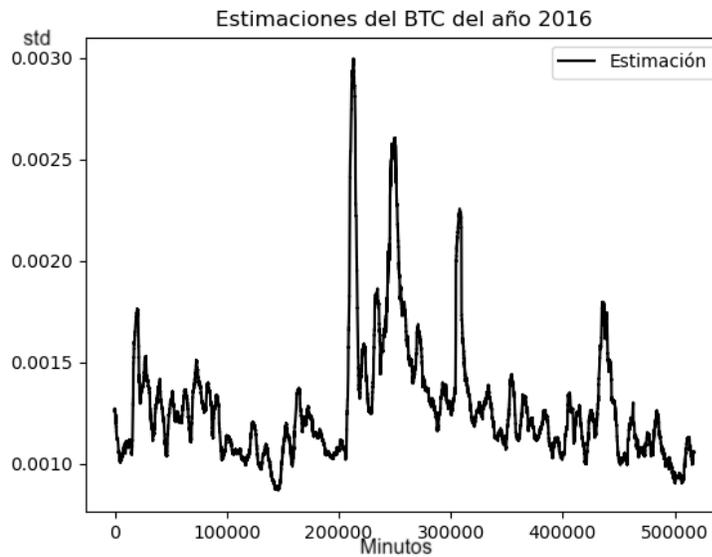


Figura 3.16: Gráfica de los estimadores BTC 2016.

Se nota claramente que la hipótesis vuelve a incumplirse en esta instancia la Figura 3.16. El ajuste, que previamente mostraba cierta eficacia en los años 2018 y 2017, ha perdido su calidad (Figura 3.17). En este contexto, la distribución de los rendimientos se amplía y los intentos de ajuste no resultan satisfactorios.

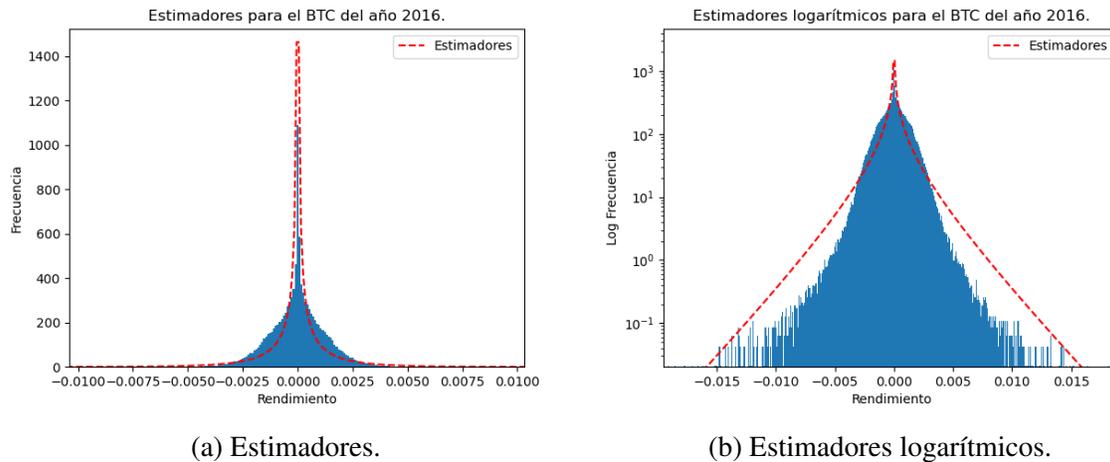


Figura 3.17: Gráfica de los estimadores reales comparada con la gráfica logarítmica.

3.4.8. BTC 2015

Parámetro	Valor
\hat{m}_4	1.066×10^{-09}
m	2.738×10^{-06}
s^2	2.665×10^{-06}
α	0.02
\hat{b}^2	6.556×10^{-05}
λ	7626.179
\hat{b}	0.008

Tabla 3.9: Parámetros datos BTC 2015.

Los resultados de la Tabla 3.9 fueron representadas gráficamente, exhibiendo los correspondientes gráficos que ilustran dichas representaciones.

Aquí se evidencia que durante ciertos lapsos temporales, nuestra suposición se verifica (Figura 3.18).

La adecuación mejora ligeramente en comparación con el año 2016 (Figura 3.19).

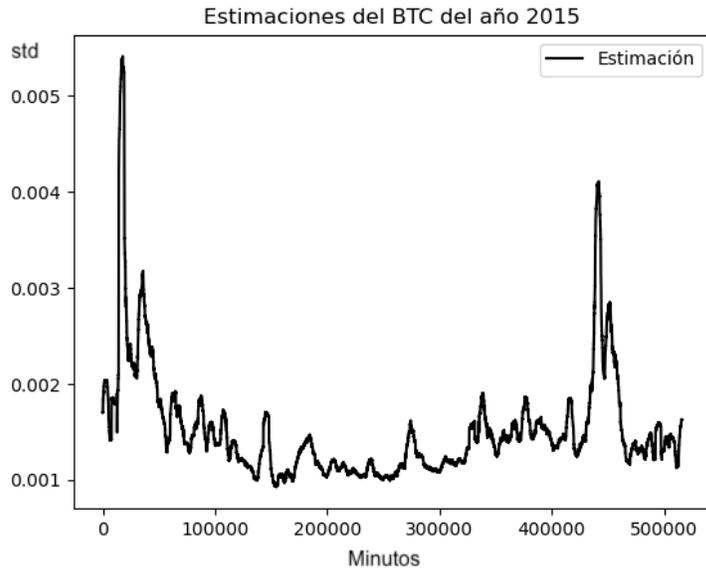
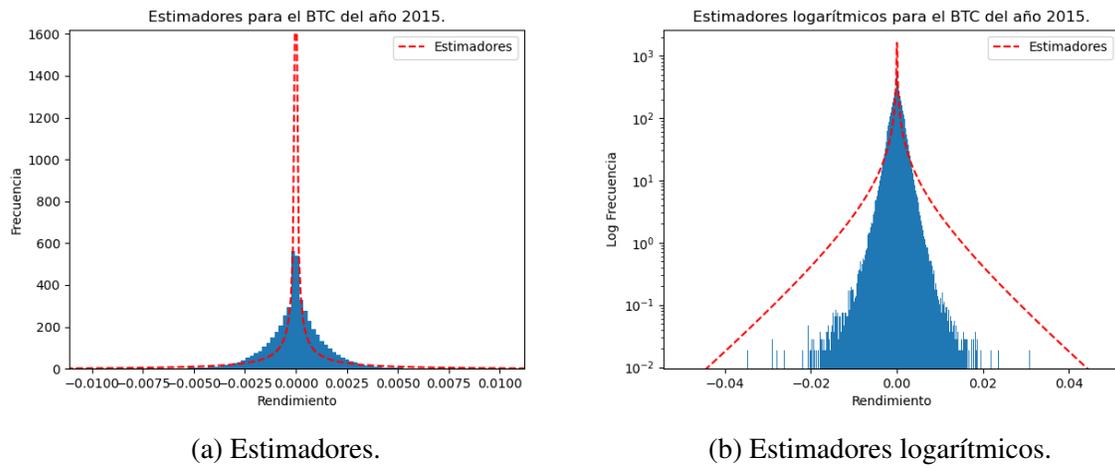


Figura 3.18: Gráfica de los estimadores BTC 2015.



(a) Estimadores.

(b) Estimadores logarítmicos.

Figura 3.19: Gráfica de los estimadores reales comparada con la gráfica logarítmica.

3.4.9. ETH 2022

Parámetro	Valor
\hat{m}_4	1.422×10^{-10}
m	-3.014×10^{-06}
s^2	1.858×10^{-06}
α	0.079
\hat{b}^2	1.183×10^{-05}
λ	42259.638
\hat{b}	0.003

Tabla 3.10: Parámetros datos ETH 2022.

Los resultados de la Tabla 3.10 fueron representadas gráficamente, exhibiendo los correspondientes gráficos que ilustran dichas representaciones.

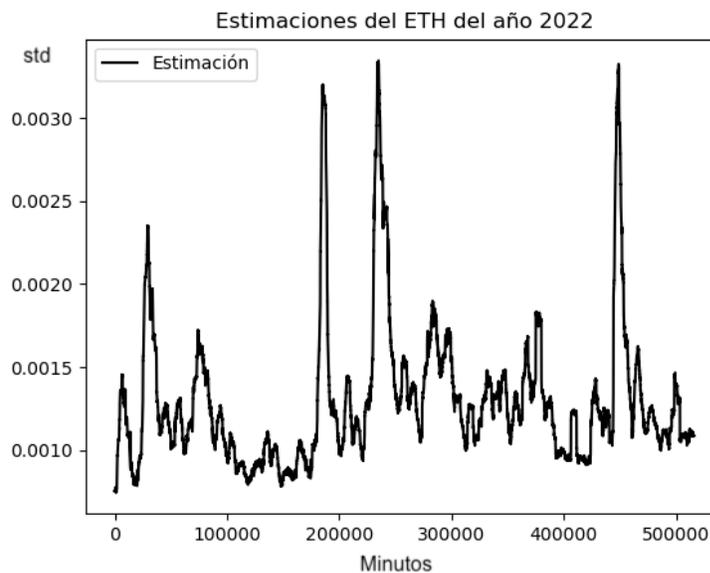


Figura 3.20: Gráfica de los estimadores ETH 2022.

En la representación gráfica correspondiente al año 2022 del ETH (Figura 3.20), se presenta

la relación temporal de la volatilidad. Observamos que la hipótesis que postula la constancia por tramos de la volatilidad no parece ser completamente respaldada por los datos empíricos. Esta conclusión se deriva de la visualización gráfica, donde no se evidencia de manera suficientemente clara el comportamiento distintivo asociado con la constancia por tramos de la volatilidad, contrariamente a lo postulado en nuestra hipótesis.

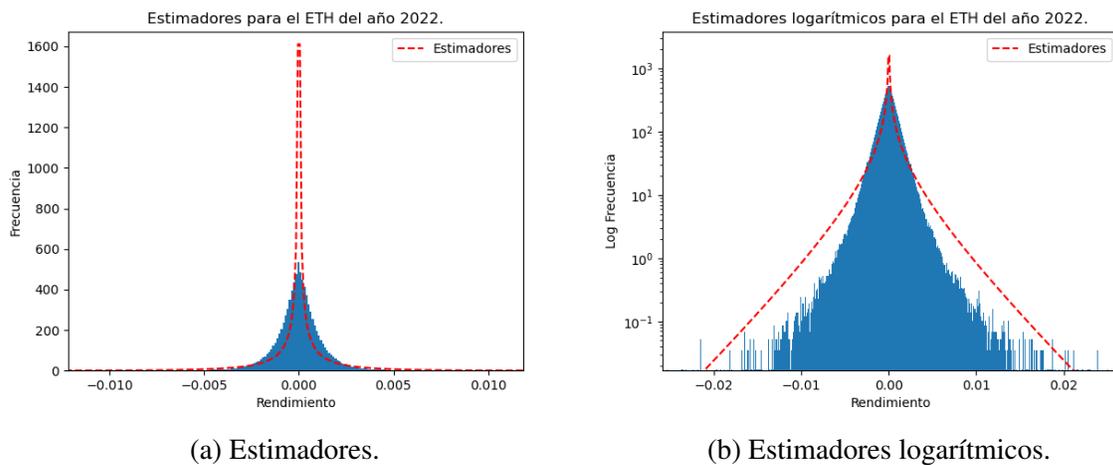


Figura 3.21: Gráfica de los estimadores reales comparada con la gráfica logarítmica.

En esta representación, se exhibe la distribución empírica del ethereum (ETH) correspondiente al año 2022 (Figura 3.21). El histograma en tono azul refleja la representación gráfica de la distribución empírica, mientras que la línea roja punteada representa la densidad de probabilidad del modelo adoptado, el cual se ajusta de manera óptima a los datos presentados en el histograma.

En la representación semilogarítmica a la derecha, se observa una proyección similar, donde el eje y refleja el logaritmo de la frecuencia de ocurrencia frente a los rendimientos. Se destaca que el ajuste no exhibe una precisión satisfactoria, en consonancia con la hipótesis inicial que postulaba una volatilidad constante por tramos. Este desajuste en la estimación evidencia que la hipótesis original no se cumple completamente, lo cual puede atribuirse a la variabilidad intrínseca en la volatilidad a lo largo del tiempo.

3.4.10. ETH 2021

Los resultados de la Tabla 3.11 fueron representadas gráficamente, exhibiendo los correspondientes gráficos que ilustran dichas representaciones.

Parámetro	Valor
\hat{m}_4	1.74×10^{-09}
m	3.447×10^{-06}
s^2	3.092×10^{-06}
α	0.017
\hat{b}^2	9.225×10^{-05}
λ	5419.769
\hat{b}	0.009

Tabla 3.11: Parámetros datos ETH 2021.

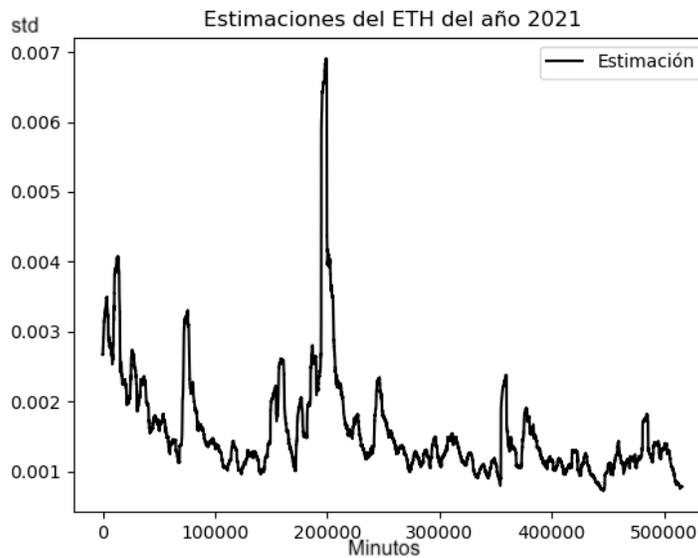


Figura 3.22: Gráfica de los estimadores ETH 2021.

Realizamos análogamente el procedimiento con los datos correspondientes a ethereum del año 2021 (Figura 3.22). Al retroceder en la serie temporal, se observa que en determinadas regiones de la gráfica se verifica la hipótesis, dado que la volatilidad parece mantenerse constante durante períodos de tiempo relativamente cortos. No obstante, para la mayor parte de la gráfica, dicha hipótesis no se cumple.

Ahora procedemos a exhibir nuevamente el histograma de frecuencias comparando los ren-

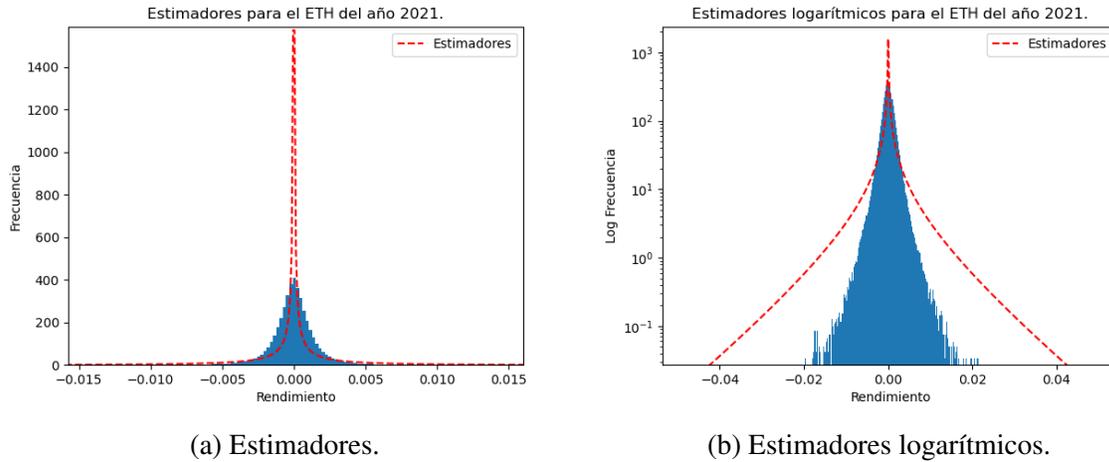


Figura 3.23: Gráfica de los estimadores reales comparada con la gráfica logarítmica.

dimientos obtenidos empíricamente con la densidad de probabilidad del modelo KB correspondiente al año 2021 (Figura 3.23). Se observa que, debido a la no completa satisfacción de la hipótesis de volatilidad constante por tramos, el ajuste obtenido no es completamente satisfactorio. Es importante destacar que, a diferencia del modelo gaussiano, el modelo KB logra reproducir la agudeza en la distribución, aunque el pico no se ajusta de manera precisa.

3.4.11. ETH 2020

Parámetro	Valor
\hat{m}_4	1.649×10^{-09}
m	5.413×10^{-06}
s^2	3.257×10^{-06}
α	0.019
\hat{b}^2	8.277×10^{-05}
λ	6040.833
\hat{b}	0.009

Tabla 3.12: Parámetros datos ETH 2020.

Los resultados de la Tabla 3.12 fueron representadas gráficamente, exhibiendo los correspondientes gráficos que ilustran dichas representaciones.

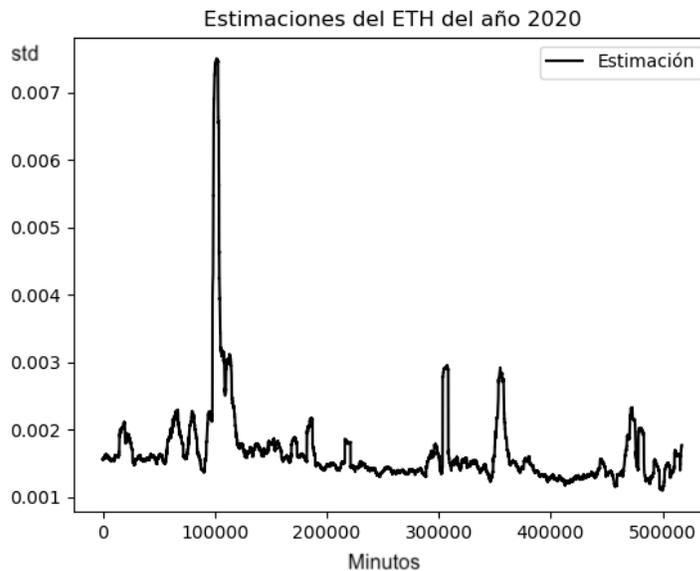


Figura 3.24: Gráfica de los estimadores ETH 2020.

En este contexto, se observa la presencia de segmentos en los cuales la variabilidad parece mantenerse constante (Figura 3.24).

Observamos que, en virtud de dichas propiedades, en esta instancia, la calidad del ajuste ha mejorado significativamente, ya que la hipótesis de la volatilidad constante por segmentos parece haber sido corroborada de manera más efectiva para una extensa cantidad de datos que hemos presentado (Figura 3.25).

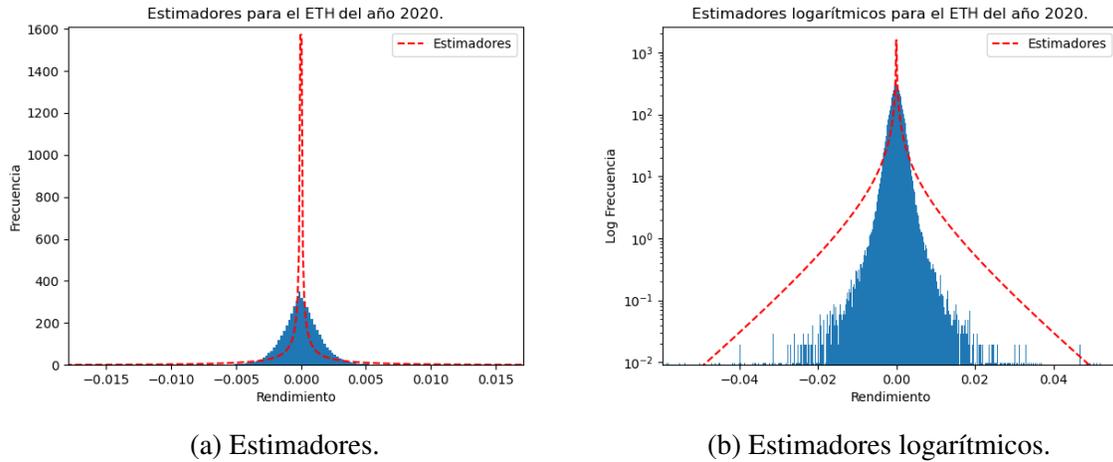


Figura 3.25: Gráfica de los estimadores reales comparada con la gráfica logarítmica.

3.4.12. ETH 2019

Parámetro	Valor
\hat{m}_4	1.894×10^{-10}
m	2.735×10^{-06}
s^2	2.76×10^{-06}
α	0.137
\hat{b}^2	1.001×10^{-05}
λ	49746.439
\hat{b}	0.003

Tabla 3.13: Parámetros datos ETH 2019.

Los resultados de la Tabla 3.13 fueron representadas gráficamente, exhibiendo los correspondientes gráficos que ilustran dichas representaciones. La representación gráfica exhibe datos relativamente estables (Figura 3.26), aunque de magnitud reducida; sin embargo, aún no se satisface completamente el requisito establecido. Se puede observar que la idoneidad persiste de manera relativamente eficaz para emular las propiedades fundamentales de la distribución empírica mediante la aplicación del ajuste representado por la línea punteada de color rojo Figura 3.27.

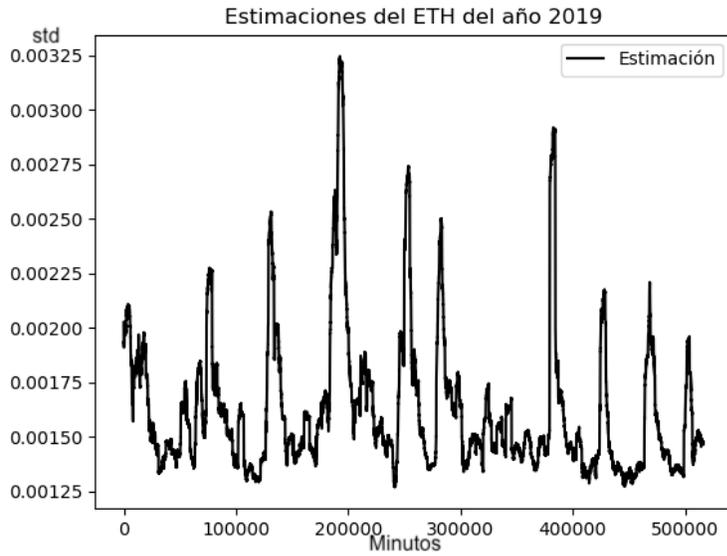
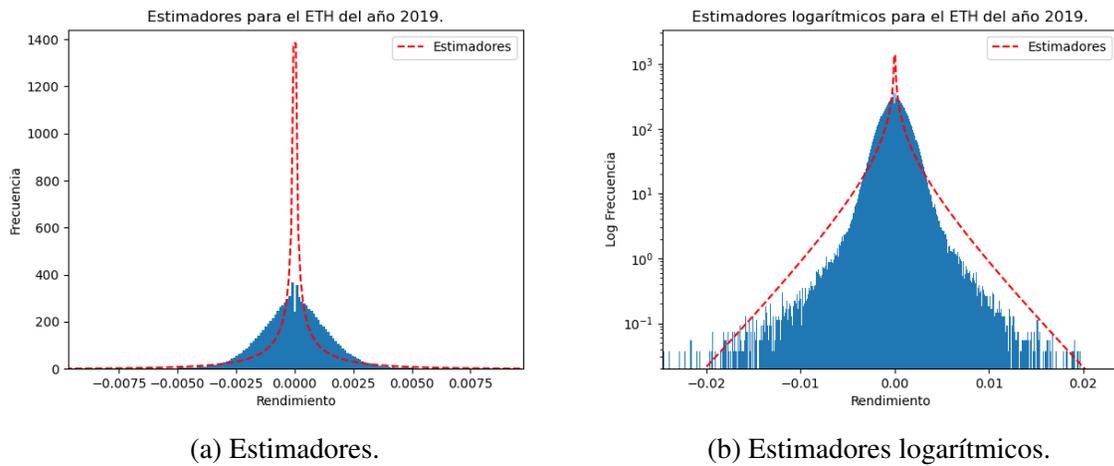


Figura 3.26: Gráfica de los estimadores ETH 2019.



(a) Estimadores.

(b) Estimadores logarítmicos.

Figura 3.27: Gráfica de los estimadores reales comparada con la gráfica logarítmica.

3.4.13. ETH 2018

Parámetro	Valor
\hat{m}_4	2.501×10^{-09}
m	-2.507×10^{-07}
s^2	4.321×10^{-07}
α	0.023
\hat{b}^2	9.431×10^{-05}
λ	5301.762
\hat{b}	0.009

Tabla 3.14: Parámetros datos ETH 2018.

Los resultados de la Tabla 3.14 fueron representadas gráficamente, exhibiendo los correspondientes gráficos que ilustran dichas representaciones.

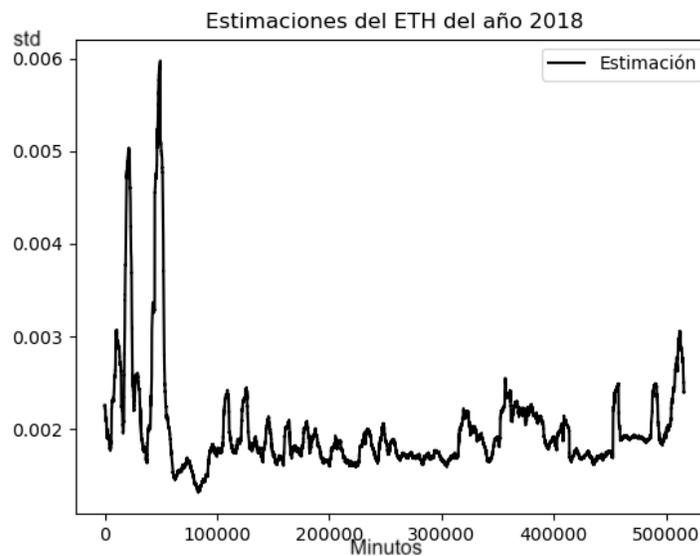


Figura 3.28: Gráfica de los estimadores ETH 2018.

En este contexto, la hipótesis parece corroborarse en un período temporal extendido (Figura 3.28), evidenciando una magnitud aparentemente superior al examinar el histograma

correspondiente.

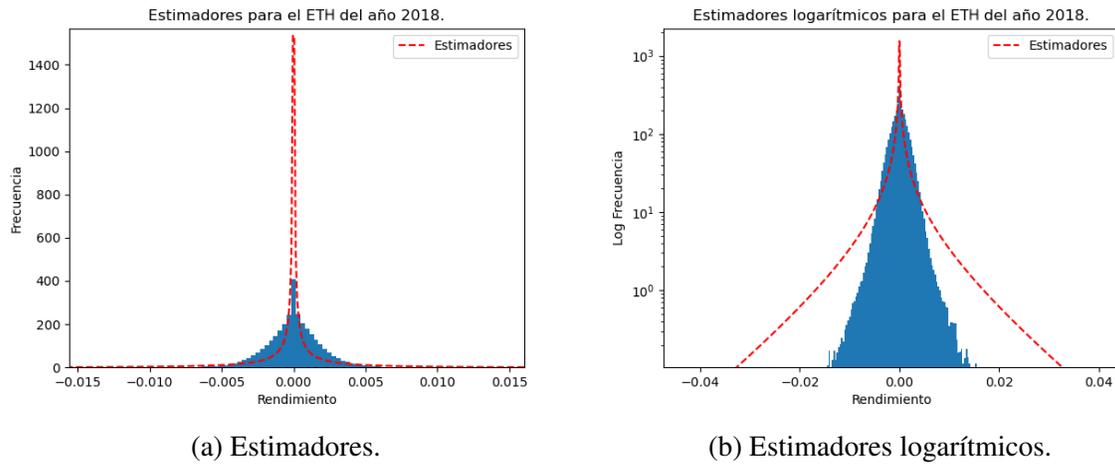


Figura 3.29: Gráfica de los estimadores reales comparada con la gráfica logarítmica.

La calibración exhibe notable mejora con respecto a los períodos previos (Figura 3.29).

3.4.14. ETH 2017

Parámetro	Valor
\hat{m}_4	1.534×10^{-08}
m	1.398×10^{-05}
s^2	1.006×10^{-05}
α	0.0201
\hat{b}^2	0.0002
λ	2007.204
\hat{b}	0.016

Tabla 3.15: Parámetros datos ETH 2017.

Los resultados de la Tabla 3.15 fueron representadas gráficamente, exhibiendo los correspondientes gráficos que ilustran dichas representaciones.

En esta instancia, podemos observar una vez más que la condición se satisface en segmentos

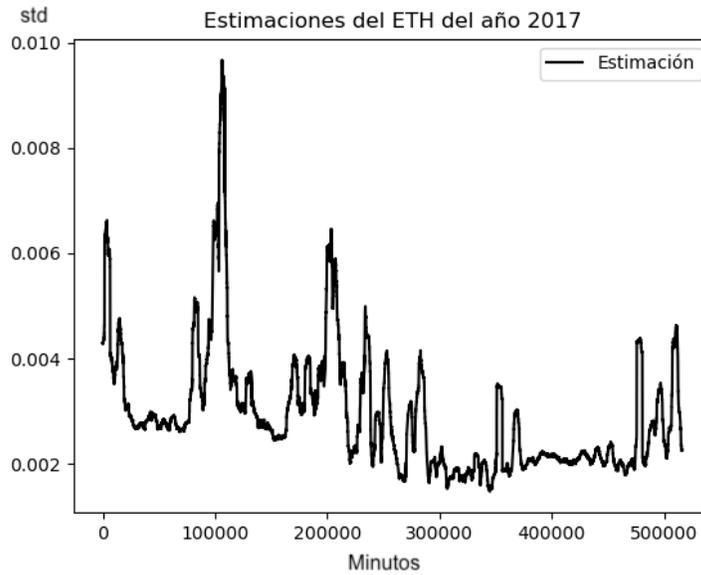
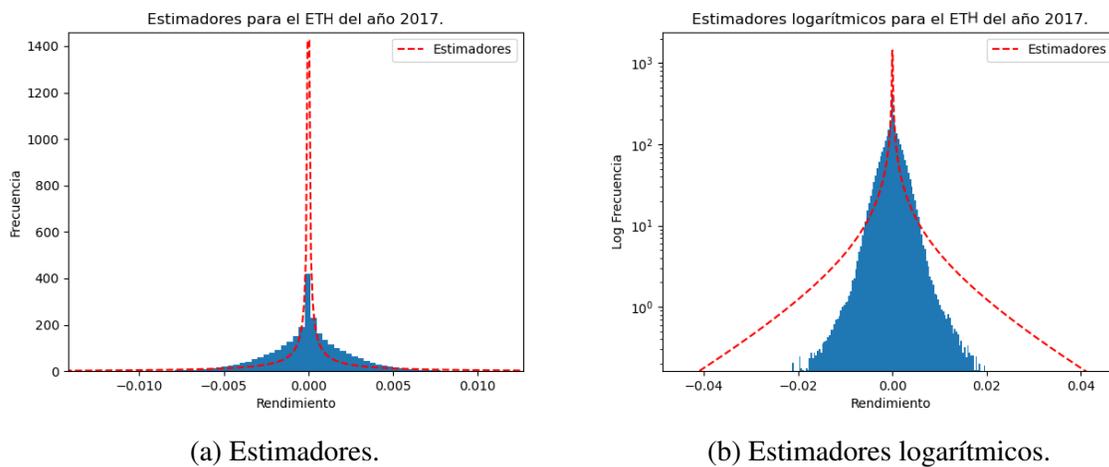


Figura 3.30: Gráfica de los estimadores ETH 2017.

específicos, aunque en otros no se verifica (Figura 3.30).



(a) Estimadores.

(b) Estimadores logarítmicos.

Figura 3.31: Gráfica de los estimadores reales comparada con la gráfica logarítmica.

La calibración exhibe una mejora marginal en comparación con el periodo comprendido entre los años 2019 y 2022, dado que la concordancia entre la representación gráfica en color rojo y el histograma es más pronunciada (Figura 3.31).

Este hallazgo proporciona una base sólida para futuras investigaciones y aplicaciones prácticas del modelo en situaciones del mundo real. La capacidad del modelo para ajustarse de manera efectiva a datos sintéticos establece un precedente alentador para su posible implementación en contextos más complejos y variados.

En el presente análisis, procederemos a realizar una comparación integral de las estimaciones, examinando las dinámicas observadas en los inicios de la existencia de bitcoin (BTC) y durante el período de la pandemia. Nuestro objetivo es determinar la presencia de características relevantes y evaluar la capacidad de nuestra técnica para distinguir entre estos años significativos. Se destaca que en el año 2015, se observa una agudeza en la distribución de rendimientos que se asemeja a una forma de V invertida. Esta configuración puede atribuirse al surgimiento inicial de bitcoins en el panorama financiero mundial. En contraste, en el año 2018, la V invertida muestra un pliegue hacia afuera, reflejando un evento de colapso en dicho año, donde los BTC experimentaron una notable caída. El año 2020, marcado por el inicio de la pandemia, se caracterizó por una alta volatilidad en los BTC. Finalmente, en el año 2021, se observa una estabilización en las dinámicas de los BTC. Este análisis persigue identificar patrones y comportamientos distintivos en la evolución temporal de bitcoin, contribuyendo así a la comprensión de sus variaciones a lo largo de eventos significativos (Figura 3.32).

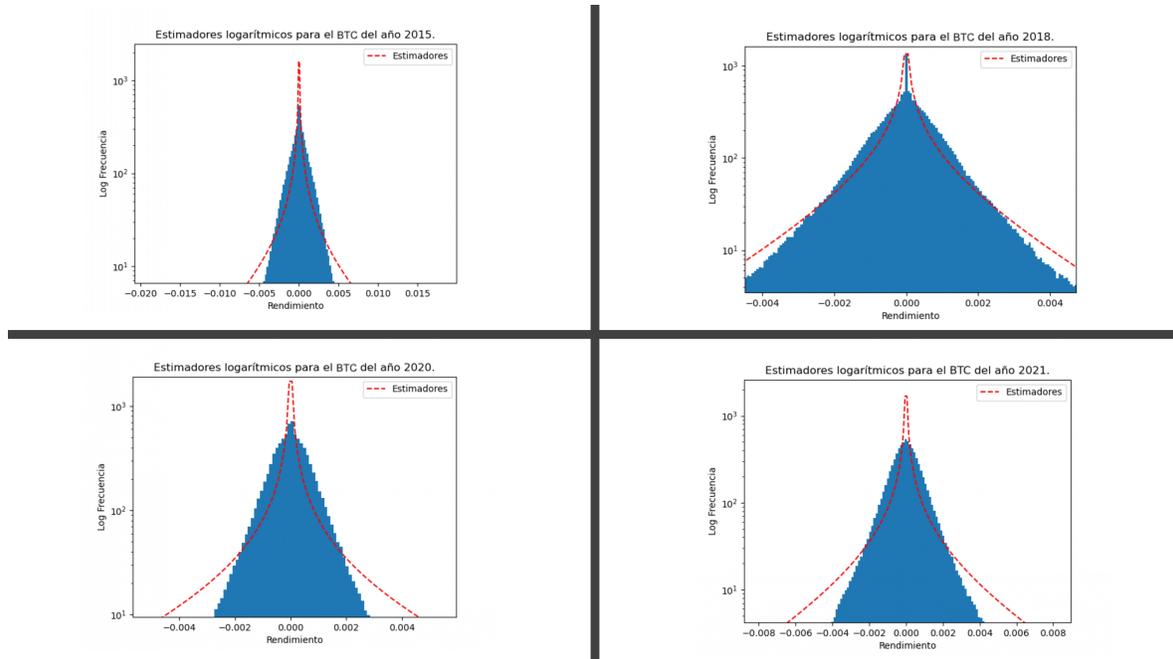


Figura 3.32: Comparación agudeza BTC.

En el presente análisis, procederemos a realizar una comparación integrada de las estimaciones correspondientes, con el objetivo de examinar las dinámicas ocurridas durante el surgimiento inicial de ethereum (ETH) y durante el periodo de la pandemia. Buscaremos identificar posibles características relevantes y determinar la capacidad de nuestra metodología para distinguir entre estos años significativos. Observamos que en el año 2017, la distribución de rendimientos exhibe una agudeza similar a una función en forma de V invertida, lo cual puede ser atribuido al proceso de introducción de ethereum en ese período. En el año 2019, esta configuración en forma de V invertida presenta una inclinación hacia afuera, indicando una disminución del 4% en los ETH durante ese año. En el año 2020, se observa una nueva caída en el valor de ETH en marzo y abril, atribuida a los efectos de la pandemia. Por último, en el año 2021, se percibe una estabilización en el mercado de ETH. Este análisis nos permitirá evaluar si nuestra técnica puede discernir y caracterizar de manera efectiva los eventos clave en estos periodos temporales (Figura [3.33](#)).

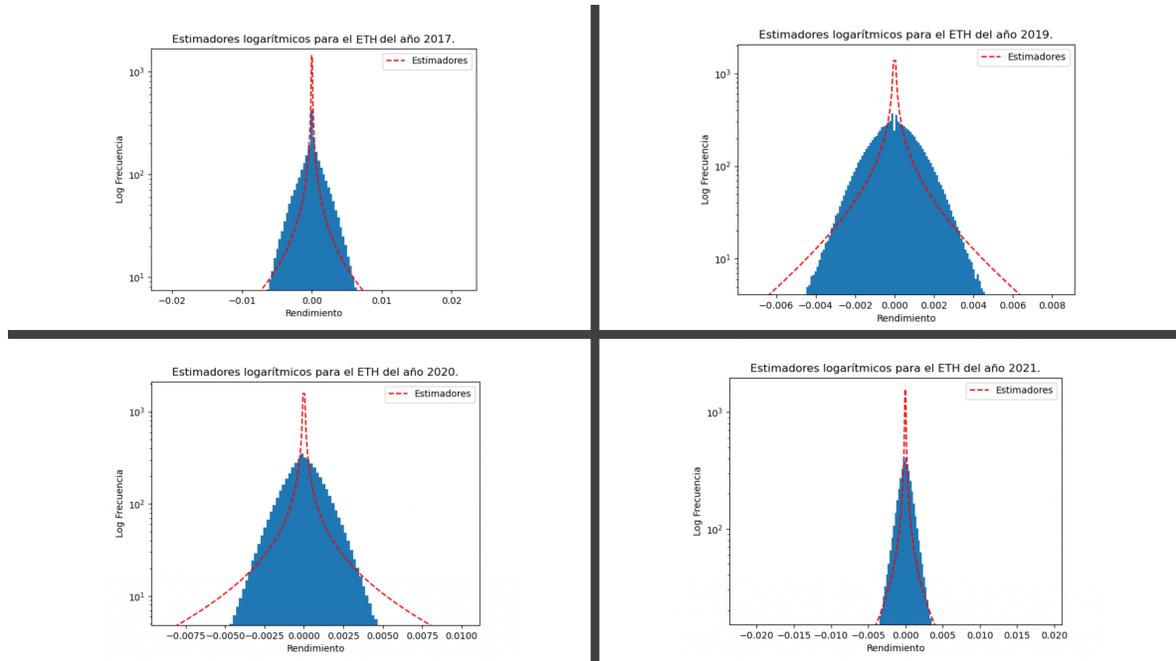


Figura 3.33: Comparación agudeza ETH.

Observaciones finales:

- Aunque no se logra un ajuste óptimo en términos de precisión, el modelo exhibe atributos que caracterizan al modelo base (MBG) determinado por la distribución normal de rendimientos logarítmicos.
- Con el empleo de este modelo, es posible caracterizar una propiedad distintiva, específicamente la “agudeza” presente en la distribución, la cual no se manifiesta en una distribución normal, mediante la utilización de distribuciones normales.

Capítulo IV

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En conclusión, este trabajo presenta un modelo de volatilidad variable que sugiere que los rendimientos logarítmicos sigan siendo normales, pero con una desviación estándar constante por intervalos de tiempo aleatorio. A través de este modelo, se logra obtener una distribución expresada en términos de la distribución $KB(\alpha, b)$ de Bessel, cuyos parámetros dependen del modelo propuesto k y λ . Además, se derivan fórmulas para la estimación de los parámetros de la distribución de Bessel, mostrando consistencia con estimaciones realizadas en datos sintéticos.

La aplicación del modelo en el análisis de datos reales de bitcoin y ethereum revela que los rendimientos logarítmicos del modelo son cualitativamente similares a los obtenidos con datos reales, y en algunos casos, se observa un comportamiento consistente con la hipótesis de varianza constante por tramos. Asimismo, el modelo proporciona una explicación de la “agudeza” en las distribuciones de rendimientos reales como resultado de la variación en la desviación estándar de los rendimientos, modelada con la distribución gamma, una característica que no exhibe el modelo normal con desviación estándar constante.

Es importante señalar que, aunque el ajuste de los parámetros del modelo no reproduce con precisión todas las características cualitativas de las distribuciones empíricas, logra capturar algunas propiedades genéricas destacadas. En resumen, este enfoque ofrece una herramienta valiosa para entender la volatilidad en los rendimientos financieros y puede ser útil en la modelación de fenómenos relacionados con la variabilidad en diferentes contextos.

REFERENCIAS

- [1] L. E. B. Aguilar. Diferencias en la estimación del coeficiente de curtosis en diferentes softwares estadísticos. *e-Agronegocios*, 5(2), 2019.
- [2] V. Armijos. Las monedas virtuales en las transacciones comerciales. un análisis sobre el uso de nuevos sistemas de pagos. *Research Gate*, 2015.
- [3] A. B. Aydemir et al. Forecast performance of threshold autoregressive models-a monte carlo study. Technical report, University of Western Ontario, Department of Economics, 1999.
- [4] C. Bayer, P. Friz, and J. Gatheral. Pricing under rough volatility. *Quantitative Finance*, 16(6):887–904, 2016.
- [5] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3):637–654, 1973.
- [6] K. O. Bowman and L. R. Shenton. Estimator: Method of moments. In *Encyclopedia of Statistical Sciences*, pages 2092–2098. Wiley, 1998.
- [7] K. O. Bowman and L. R. Shenton. Estimator: Method of moments. In *Encyclopedia of Statistical Sciences*, pages 2092–2098. Wiley, 1998.
- [8] J. F. Box. *Ronald Fisher: The Life of a Scientist*. Wiley, New York, 1978.
- [9] G. U. Bravo. Procesos estocásticos i. *Investigación Científica*). *Universidad Nacional Autónoma de México*. México, 2013.
- [10] V. Busev and A. Karp. Pafnuty chebyshev and the mathematics education of his time. In *Advances In The History Of Mathematics Education*, pages 1–23. Springer, 2022.

- [11] J. Y. Campbell and L. Hentschel. No news is good news: An asymmetric model of changing volatility in stock returns. *Journal of financial Economics*, 31(3):281–318, 1992.
- [12] J. Y. Campbell, A. W. Lo, A. C. MacKinlay, and R. F. Whitelaw. The econometrics of financial markets. *Macroeconomic Dynamics*, 2(4):559–562, 1998.
- [13] C. A. S. Campos, V. R. Rodríguez, C. R. Guerrero, et al. Series de tiempo financieras. un enfoque alternativo. *Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, 7(14):14–17, 2020.
- [14] U. Cárcamo. Procesos de Wiener. *Revista Universidad EAFIT*, 34(110):40–51, 1998.
- [15] R. F. Engle. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the econometric society*, pages 987–1007, 1982.
- [16] E. A. M. Factory. ¿por qué usar rendimientos logarítmicos?, 31/03/2014.
- [17] Facultad de Ciencias Sociales y Humanidades de la Universidad Nacional de Misiones. Nodos y enlaces. manual de estilo web. <https://www.fhycs.unam.edu.ar/manual/nodos-y-enlaces/>, 2016.
- [18] E. F. Fama. The behavior of stock-market prices. *The journal of Business*, 38(1):34–105, 1965.
- [19] S. F. Fernández, J. M. C. Sánchez, A. Córdoba, and A. C. Largo. *Estadística descriptiva*. Esic Editorial, 2002.
- [20] S. Figlewski. Forecasting volatility. *Financial markets, institutions & instruments*, 6(1):1–88, 1997.
- [21] H. Finucan. A note on kurtosis. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 26(1):111–112, 1964.
- [22] J. M. González-Páramo. La gestión del banco central europeo ante la crisis. *Revista de economía mundial*, (30):83–102, 2012.
- [23] G. Guerrero. Fluctuaciones: [concepto, implicaciones, características, tipos e importancia], 4 mayo, 2021.

- [24] S. A. Harrast, D. McGilsky, and Y. T. Sun. Determining the inherent risks of cryptocurrency: A survey analysis. *Current Issues in Auditing*, 16(2):A10–A17, 2022.
- [25] J. C. Hernández Pastrana et al. Ecuación diferencial del tipo black-scholes con derivada fraccionaria. Master's thesis, Universidad Autónoma de Guerrero (México), 2016.
- [26] D. A. Hsieh. Nonlinear dynamics in financial markets: evidence and implications. *Financial Analysts Journal*, 51(4):55–62, 1995.
- [27] J. Hull. Introducción a los mercados de futuros y opciones. *Sexta Edición*, 1996.
- [28] J. Hull. Options, futures and other derivatives 6th edition new jersey: Pearson prentice hall. 2006.
- [29] G. S. Juárez. El modelo sabr y su relación con la geometría diferencial: Valuación de opciones de compra de dólares del banco de México. *Revista Mexicana de Economía y Finanzas Nueva Época REMEF*, 7(2), 2012.
- [30] O. Kropáč. Some properties and applications of probability distributions based on macdonald function. *Aplikace matematiky*, 27(4):285–302, 1982.
- [31] B. B. Mandelbrot and B. B. Mandelbrot. *The variation of certain speculative prices*. Springer, 1997.
- [32] A. Marshall. *Principles of economics: unabridged eighth edition*. Cosimo, Inc., 2009.
- [33] M. A. C. Medina, C. V. Zarate, and L. M. López. La necesidad de la regulación contable, legal y fiscal del bitcoin en México, un tema de actualidad. *Horizontes de la Contaduría en las Ciencias Sociales*, (13), 2020.
- [34] R. T. Medina and H. Y. R. Pinzón. Una revisión de los modelos de volatilidad estocástica. *Comunicaciones en Estadística*, 3(1):79–98, 2010.
- [35] J. Morales Herrera. *Análisis de irreversibilidad en sistemas financieros*. PhD thesis, Universidad Autónoma del Estado de México (UAEM), 2024.
- [36] L. V. Morris, S.-S. Wu, and C. L. Finnegan. Predicting retention in online general education courses. *The American Journal of Distance Education*, 19(1):23–36, 2005.
- [37] A. Mosiño, L. A. Salomón-Núñez, and A. T. Moreno-Okuno. Estudio empírico sobre el tipo de cambio mxn/usd: movimiento browniano geométrico versus proceso varianza-gamma. *EconoQuantum*, 16(1):33–56, 2019.

- [38] S. G. Ordóñez Sánchez. Educación financiera basada en el bitcoin y la inclusión en planes de estudio. *RIDE. Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, 11(22), 2021.
- [39] L. Padró Martín et al. Criptomonedas y tecnología blockchain. la iniciativa “valladolid blockchain”. 2019.
- [40] K. Pearson. “das fehlergesetz und seine verallgemeinerungen durch fechner und pearson.” a rejoinder. *Biometrika*, 4(1-2):169–212, 1905.
- [41] I. Pena, G. Rubio, and G. Serna. Why do we smile? on the determinants of the implied volatility function. *Journal of Banking & Finance*, 23(8):1151–1179, 1999.
- [42] I. Peña, G. Rubio, and G. Serna. Smiles, bid-ask spreads and option pricing. *European Financial Management*, 7(3):351–374, 2001.
- [43] A. R. Portillo, S. A. N. Gill, et al. El bitcoin: una revisión de las ventajas y desventajas de las transacciones comerciales con dinero virtual. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, 5(6):13040–13059, 2021.
- [44] J. P. Porto and M. Merino. Fluctuación - qué es, definición, tipos y en la física, 2022. Actualizado el 12 de enero de 2022.
- [45] L. Rincón. *Curso intermedio de probabilidad*. UNAM, Facultad de Ciencias, 2007.
- [46] G. Rodríguez Espinoza. *El modelo de Hull y White para opciones de volatilidad estocástica: valuación de opciones sobre futuros del índice de precios y cotizaciones de la bolsa mexicana de valores (2004-2010)*. PhD thesis.
- [47] M. Rubinstein. Implied binomial trees. *The journal of finance*, 49(3):771–818, 1994.
- [48] R. Salgado-García. Open markov chains: cumulant dynamics, fluctuations and correlations. *Entropy*, 23(2):256, 2021.
- [49] C. Sánchez González et al. Introducción a la volatilidad estocástica: El modelo de heston. 2023.
- [50] J. Sánchez Roa. Criptomonedas. *Poder Judicial, Paraguay*. <https://www.pj.gov.py/ebook/monografias/extranjero/civil/Julia-Sanchez-Criptomonedas.pdf>, 2017.

- [51] A. Santín. Peer 2 peer. sistemas operativos distribuidos. <http://www.dit.upm.es/~joaquin/so/p2p/p2p.pdf>, s.f.
- [52] TeamSystem. Activo subyacente, 2024.
- [53] J. S. Tukhtabaev, O. V. Bondarskaya, A. A. Goziyeva, A. K. Sharipov, K. Pulatov, M. Ermatova, and Z. K. Saydalimova. Econometric analysis of evaluation of investment projects implemented in the northern regions of uzbekistan. In *Proceedings of the 6th International Conference on Future Networks & Distributed Systems*, pages 717–722, 2022.
- [54] F. Venegas-Martínez. *Riesgos financieros y económicos, productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*, volume 1. Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional, 2008.
- [55] G. Vora et al. Cryptocurrencies: Are disruptive financial innovations here? *Modern Economy*, 6(07):816, 2015.
- [56] C. O. D. Zaldaña, R. M. M. Peraza, A. J. A. Ayala, and R. J. S. Hernández. La importancia de las criptomonedas y su impacto en los mercados financieros internacionales a partir de la evolución del bitcoin. *Realidad Empresarial*, (14):10–25, 2022.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS



INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS
CONTROL ESCOLAR DE LICENCIATURA



VOTOS DE APROBATORIOS

**SECRETARIA EJECUTIVA
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS**

P R E S E N T E

Por medio del presente le informamos que después de revisar la versión escrita de la tesis que realizó la **C. ALBARRAN CORIA LUCIA FERNANDA** con número de matrícula **10032253** cuyo título es:

Un modelo de volatilidad estocástica para precios de activos subyacentes

Consideramos que **SI** reúne los méritos que son necesarios para continuar los trámites para obtener el título de **LICENCIADO EN CIENCIAS ÁREA TERMINAL EN MATEMATICAS**

Cuernavaca, Mor a 15 de abril de 2024

Atentamente
Por una humanidad culta

Se adiciona página con la e-firma UAEM de los siguientes:

DR. ANTONIO DANIEL RIVERA LÓPEZ
DRA. RUTH ESTEPHANIA GONZÁLEZ NARVÁEZ
DR. RAÚL SALGADO GARCÍA
DRA. BRENDA IVETTE GARCÍA MAYA
DR. ORLANDO DÍAZ HERNÁNDEZ

(PRESIDENTE).
(SECRETARIO).
(VOCAL).
(SUPLENTE).
(SUPLENTE) No participa

MIE/VRRC/eae



Av. Universidad 1001 Col. Chamilpa, Cuernavaca Morelos, México, 62209.
Tel. (777) 329 70 00, Ext. 3270 / correo certificados.titulacionesiicba@uaem.edu.mx

UAEM
RECTORÍA
2023-2029



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

Sello electrónico

RUTH ESTEPHANIA GONZALEZ NARVAEZ | Fecha:2024-04-15 17:42:44 | Firmante

tKZul7HGULAKfeme56dt4p9LhnYix7L+NyWz187aBTT1tiiG+ax/B5K+CwJUvLtO4C3Gu0CuneFh+G27rKXsoj7IplYovlZia4ZUJIWQnKplGrCZ1a79NoSZ+Bg49Cyqtsrpy2FEAJLrq
xgJMzFDiDyxpe55cYWDxtw9PjwMRCmlOZXYL0J79uPpxblBHaLDD+PyCNOldQivRrW7NjyXijXBtriuFdBcFha3bouRbLpvUtiNXrBs2/EVklTe9tXumcG1wjttTP5yjkYDg3fXCg4y
fgtT38gKenlxtWzlcIKh+kXmVowNGowiFR6o8lam5y5SGuWYias8t5ABnYzSw==

BRENDA IVETTE GARCÍA MAYA | Fecha:2024-04-16 10:49:24 | Firmante

sDrAYQCZz2q3w5EGD1nQaDmxkIlgAECLt5E4dmbP0cVpgO+xUT3RdkR0maxOap1+ldp8oG+FzI8NNet/Rm5JsOtLWZMSw/aR62RVqnWaf91WHJ1H4OoNBCm8ZyYnrZBzwS
eHjHeNDUdx7d9EgJXY+uYA3hxi39HbU0srzYE5Skmw00AyGiJlbpkFJcn7W2TyZb1c5go7ZqvadhMxzOwX7Sc5ioUwXuc1mFmKgpvNXlnd7KAX5D8/yMutg9W7RfaSQemxnh
yS9sJmlmLA63V73amZZKRg0i5IHwYcCntSojrZu3isEv3ZpHP6gu83nsLLKXRvS5zp8i4BQnycv9I6Q==

RAUL SALGADO GARCIA | Fecha:2024-04-16 19:41:20 | FIRMANTE

UGHxuY2mbW6nzm07ilbSN/uhZ5qJ6jX/GeBNrzn96DfivRaTB1AGCHrRcLv9SS6THz2cuBn677tA9177MNLrHPcP6o3Q+8/K4o8T4FxbNf4NjROYIR7LhhC5mJG48Yd71Ba1R
mz4xRHsAYFGuRFXL0xQ6itRWoT4rmsv4oNyeBpJKgoDsrbcuPumeQP9orGdy+HGxSDnS2Po+GP7sxbxeDJMVQpZU/JBqOjDFX3gTUtBi9yKtVIRpMwWaltkRvCARxMI9/qAXdP5
bu7iLSAgxwzuv8KOZqyBQq/+be6abP1FwjLvCnSzF74cZa722johuebMggLP2TcoF+A5Gvhw==

ANTONIO DANIEL RIVERA LOPEZ | Fecha:2024-04-24 14:04:52 | FIRMANTE

ayZ7Xtm3EewEDI8AsFr5toLkGJBjy0J/uWmliiWVv1cYLW1aPeWHPd7aithmwqmKwu6al74HNRG8kKRb/DQVUNc4TKMIulleZRcf70ei0iW1xd2snr77p2VuRMj2yKIU7CubbYVS
OBP5tdj/7Ez3vxBSZdXejk9zMfxZ+LVFJBtXfcUB9uGR5fBCKX/38yvAN3rton6YC/ZAZcnrHyzpqiGJrm8mdr4gztqsDkSrsZplqjZxCaYdBkFpKLBcZcPcXgPW5eXMEJ5xdP7qtclb
HjG/HDg3nOm7S0rOgH9fXIJ5HFwYHUodM6ogEc/sftmgZdBufQ4XBT7h+0TDu6oLQ==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o
escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



1b4neasvP

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/z4VNUJNwQPZU4dzap3ja6FD1m8bYnt4r>



UAEM
RECTORÍA
2023-2029