

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

**ANÁLISIS NO LINEAL DE SERIES DE TIEMPO E
IMÁGENES BASADO EN FASES DE FOURIER**

TESIS PROFESIONAL PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

AGUILAR HERNÁNDEZ ALBERTO ISAAC

DIRECTOR:

DR. GUSTAVO CARLOS MARTÍNEZ MEKLER

CUERNAVACA, MORELOS

MARZO, 2024



Resumen

Una forma de estudiar la naturaleza es fragmentándola en subsistemas. Posteriormente se realizan experimentos y la información obtenida se recopila en secuencias de datos llamadas series de tiempo. A partir de estas series de tiempo se busca identificar qué tipo de dinámica presenta el sistema. Entre las opciones se encuentran dinámicas deterministas o estocásticas. En caso que el sistema sea determinista entonces puede que su dinámica sea lineal, no lineal, periódica, cuasiperiódica o caótica. También existen sistemas que se encuentran en un régimen de criticalidad. Conocer en qué tipo de régimen dinámico se encuentra un sistema es fundamental para entender su funcionamiento y, cuando es posible, realizar predicciones.

El problema es que detectar signos de determinismo con un nivel de significancia bien establecido a partir de series de datos empíricos es altamente complicado. Esto dificulta poder distinguir entre comportamientos caóticos y estocásticos. De igual manera, identificar comportamientos no lineales en datos empíricos no es sencillo. Generalmente, estas dificultades se deben a que en los experimentos reales no se conocen las ecuaciones dinámicas del sistema, ni tampoco la dimensión de su espacio de estados. Existen métodos que permiten la reconstrucción del espacio de estados pero solamente son aplicables a series de tiempo que sean deterministas, estacionarias, con bajos niveles de ruido y de baja dimensión. Estas propiedades muy rara vez las cumplen los datos empíricos. Además, durante el proceso de reconstrucción del espacio de estados se requiere del ajuste artesanal de varios parámetros, lo cual puede llevar fácilmente a errores.

En esta tesis se presenta un nuevo índice estadístico J basado en las fases de Fourier que permite identificar comportamientos deterministas con un nivel de significancia bien establecido, lo cual permite establecer una definición de qué es ruido. Además, este índice J detecta las características no lineales de las series de tiempo, es resistente al ruido y proporciona una resolución de tiempo-frecuencia mediante un enfoque de doble ventana de ejecución. También es sensible al grado de irregularidad presente en la dinámica del sistema, esto implica que potencialmente podría distinguir entre dinámicas regulares y caóticas.

Para mostrar la utilidad del índice J se aplica a modelos dinámicos teóricos y a registros provenientes de sistemas reales. Como modelos teóricos se estudian los mapeos logístico y de Hénon, así como los modelos continuos de osciladores tipo Rössler, Lorenz y de van der Pol. En el caso de sistemas reales se trabaja con datos provenientes de registros intracraneales de un pacien-

te con epilepsia, registros de fluctuaciones de densidad en un paleolago ubicado en Tlaxcala, México y registros de paleoclima provenientes de Antártida y Groenlandia.

También se presenta un nuevo método basado en las fases de Fourier para detectar puntos críticos a partir de información espacial contenida en una imagen asociada a un estado dinámico. Este método se aplica en simulaciones de modelos de percolación en dos dimensiones.

Índice general

1. Introducción	3
2. Análisis no lineal de series de tiempo	7
2.1. Desarrollo histórico	7
2.2. Sistemas lineales y no lineales	9
2.3. Análisis de series de tiempo	11
2.3.1. Reconstrucción del espacio de estados	12
2.3.2. Análisis del atractor	16
2.3.3. Exponentes de Lyapunov	16
2.3.4. Datos sustitutos	17
3. Fases de Fourier	21
3.1. Transformada de Fourier	21
3.1.1. Antecedentes históricos	21
3.1.2. Formulación matemática	22
3.2. Trabajo previo sobre las fases de Fourier $\Phi(\omega)$	25
4. Índice J	31
4.1. Introducción	31
4.2. Metodología	32
4.3. Interpretación	36
4.4. Signos de determinismo	38
4.5. Aplicación univariante	41
5. Aplicaciones del índice J	43
5.1. Sistemas teóricos	43
5.1.1. Mapeo logístico	43
5.1.2. Mapeo de Hénon	47
5.1.3. Modelo de Lorenz	49
5.1.4. Modelo de Rössler	52
5.1.5. Oscilador de van der Pol	54
5.2. Influencia de ruido	56

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	1
5.3. Influencia de la distancia en la trayectoria de la caminata sobre la determinación del índice J	57
5.4. Sensibilidad a interrelaciones lineales	58
5.5. Sistemas reales	60
5.5.1. Registros de EEG	60
5.5.2. Registros de fluctuaciones de densidad en sedimentos de diatomeas	63
5.5.3. Registros de paleoclima	65
6. Identificación de puntos críticos en imágenes	69
6.1. Percolación	69
6.1.1. Simulación de un modelo de percolación	70
6.1.2. Análisis de las imágenes	73
7. Conclusiones	77
Bibliografía	81

Capítulo 1

Introducción

Actualmente existe un consenso en la comunidad científica en cuanto a que muchos de los sistemas presentes en la naturaleza y sociedad se comportan como sistemas complejos [1, 2, 3]. Algunos ejemplos de estos sistemas son: 1) Cerebro humano [1, 4, 5]: La complejidad de este órgano se puede observar en sus distintos niveles de organización que van desde la acción individual de sus 10^{11} células neuronales hasta la estructura de la red neuronal en la que se estima existen unas 10^{14} conexiones. 2) Sistema cardíaco [6, 7]: Debido a las distintas funciones cardíacas que realiza (como la señalización de ondas eléctricas, la contracción mecánica y el flujo sanguíneo) y a sus dinámicas de múltiples escalas (que van desde el comportamiento celular hasta las cámaras del corazón y el órgano completo), el sistema cardíaco requiere de un análisis desde el punto de vista de los sistemas complejos. 3) Clima global [8, 9, 10]: El clima es el promedio a largo plazo del comportamiento dinámico del sistema formado por las complejas interacciones entre océano-atmósfera-Tierra [11]. 4) Mercados financieros [12, 13, 14]: Son uno de los sistemas más complejos que existen debido a que es muy complicado estimar el número de factores que intervienen en los mercados, el impacto que tienen y la forma en que están interrelacionados.

A pesar de la gran importancia que tienen los sistemas complejos, no existe una única definición sobre qué es un sistema complejo. En la literatura se pueden encontrar diversas definiciones que son válidas dependiendo el problema que se esté estudiando [15, 16, 17, 18]. Aún así, la mayoría de definiciones concuerdan en que los sistemas complejos deben tener un conjunto de características esenciales. Por ejemplo: un gran número de unidades dinámicas que interactúan entre sí, múltiples niveles de organización, variabilidad y adaptabilidad, invarianza de escala, retroalimentación, comportamientos emergentes y la no linealidad [19].

Por sí sola, la no linealidad no es una condición necesaria ni suficiente para tener un sistema complejo. Existen sistemas complejos que son lineales [20], y también existen sistemas no lineales que no son complejos [15]. Aún así, se observa que muchos sistemas complejos poseen algún tipo de no linealidad [15]. El caos también está relacionado con la complejidad, aunque no todos los sistemas complejos son caóticos ni viceversa [22]. En la teoría clásica de los sistemas dinámicos se considera que la no linealidad es una propiedad necesaria, pero no suficiente,

para la existencia de dinámicas caóticas [3]. Otras propiedades necesarias para el caos son la dependencia a condiciones iniciales y el determinismo [21]. Entonces, para el estudio de sistemas que existen en el mundo real es sumamente importante tener la capacidad de identificar y analizar correctamente los signos de determinismo y no linealidad presentes en sus series de datos. Resolver estas cuestiones es el punto central de este trabajo.

Al trabajar con datos empíricos que provienen de sistemas reales, identificar si estos contienen algún indicador de comportamiento determinista con un nivel de significancia bien establecido es una tarea para nada sencilla [23, 24]. Y esto es un punto crucial para poder distinguir entre una dinámica caótica y una estocástica. Tampoco es fácil identificar cuáles son los componentes no lineales de la dinámica que se está analizando [29]. Estas dificultades se deben principalmente a que las características no lineales y deterministas, al igual que toda la información dinámica del sistema, se manifiestan en el espacio de estados que por lo general no es accesible de manera directa. Es más, en muchas situaciones ni siquiera es posible conocer la dimensión del espacio de estados. Una forma de resolver esta problemática es reconstruir un espacio de estados topológicamente equivalente al original mediante un procedimiento de embedding que requiere el ajuste empírico de varios parámetros [25, 27]. Además, la correcta reconstrucción del espacio de estados solamente es posible si los datos son estacionarios, tienen una alta relación de señal/ruido y se han medido en un sistema de baja dimensión [25], condiciones que raramente se cumplen en los sistemas del mundo real. Y en los casos en que si es posible la reconstrucción del espacio de estados, el análisis de la topología del atractor reconstruido necesita del ajuste nada trivial de un conjunto de varios parámetros [25, 27]. Una alternativa es utilizar medidas teóricas de la información, pero éstas también conllevan sus propias dificultades [29]. Otro problema es que al trabajar en la modalidad univariante es necesario comparar los resultados con datos sustitutos, y los datos sustitutos generados por la transformada de Fourier pueden fallar en representar adecuadamente la hipótesis nula de que el ruido comparte las mismas propiedades lineales que los datos originales [28, 29].

En este trabajo se propone un nuevo índice estadístico J basado en la información no lineal contenida en las fases de Fourier que es fácil de implementar, no involucra el ajuste de parámetros y que no está sujeto a las restricciones presentes en los métodos discutidos anteriormente. Además, este nuevo índice permite detectar signos de determinismo con un nivel de significancia bien establecido, es robusto ante ruido y puede aplicarse a sistemas de alta dimensionalidad. También es capaz de extraer características no lineales de las series de tiempo evitando de esta manera la comparación con datos sustitutos [30]. Esta nueva metodología se presenta como una alternativa para aquellas situaciones en las que no es posible o es muy laborioso realizar una reconstrucción del espacio de estados.

La criticalidad es otro concepto que está íntimamente relacionado con la complejidad y la no linealidad. Se considera que los sistemas complejos se encuentran en un punto crítico, el cual es un punto intermedio entre el orden y el desorden [22, 31]. Las características que hacen que un sistema sea complejo son las mismas que se presentan cuando un sistema se acerca al

punto crítico de una transición de fase de orden-desorden [31]. En el punto crítico todas las partes del sistema presentan un alto grado de conectividad y surgen nuevas propiedades como la universalidad, auto similitud, invarianza de escala y leyes de potencia [19, 22, 31]. Por tanto, es sumamente importante contar con la capacidad de identificar los puntos críticos. Desafortunadamente, encontrar la criticalidad en sistemas reales a partir de sus datos empíricos es muy complicado debido a que por lo general no se conocen las ecuaciones dinámicas del sistema. Además, en muchos experimentos no es posible variar el parámetro de orden del sistema.

Haciendo uso de las herramientas y conocimientos adquiridos en la elaboración del índice J , en este trabajo también se presenta una nueva metodología basada en las fases de Fourier para detectar el punto crítico en un modelo de percolación. Lo novedoso del método es que la detección del punto crítico se realiza analizando únicamente la información espacial contenida en imágenes procedentes de simulaciones del modelo de percolación. Por tanto, no es necesario conocer las ecuaciones dinámicas del sistema.

En resumen, en este trabajo se atacan las siguientes problemáticas: 1) Identificar componentes deterministas con un nivel de significancia bien establecido, 2) Proporcionar una definición de ruido, 3) Diferenciar caos de ruido y 4) Identificar cuando un sistema opera en un punto crítico a partir de imágenes.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: En el capítulo 2 se presentan los antecedentes teóricos sobre el análisis no lineal de series de tiempo. También se mencionan las principales dificultades que conlleva la aplicación de los métodos clásicos de análisis no lineal. Después, en el capítulo 3 se demuestra que la información no lineal de un sistema se encuentra en las fases de Fourier y se muestran algunos trabajos previos donde es evidente la importancia de las fases de Fourier. Posteriormente, en el capítulo 4 se presenta el índice estadístico J , se muestra a detalle la forma de calcularlo y se examinan sus características. El capítulo 5 contiene aplicaciones del índice J a modelos teóricos y datos del mundo real. En específico datos provenientes de EEG y de variaciones de densidad en un paleolago. En el capítulo 6 se presenta un método para detectar puntos críticos en imágenes que también se basa en las fases de Fourier. Por último, en el capítulo 7 se hace un resumen de los resultados presentados y se plantean posibles trabajos para el futuro.

Capítulo 2

Análisis no lineal de series de tiempo

El análisis no lineal de series de tiempo está basado en un conjunto de ideas, métodos y técnicas que se utilizan para estudiar y modelar la dinámica de series de tiempo que presentan características e interacciones no lineales entre sus componentes. Permite identificar patrones, tendencias y estructuras no lineales en los datos y puede proporcionar una comprensión más profunda de la dinámica subyacente en las series de tiempo.

Dentro de la dinámica no lineal se encuentra el estudio de los sistemas dinámicos no lineales, área que es de suma importancia para el análisis no lineal de series de tiempo. Estas teorías exploran sistemas dinámicos intrincados y cómo es que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden tener un impacto significativo en la evolución del sistema a largo plazo. En el análisis no lineal de series de tiempo se busca identificar y comprender estos comportamientos caóticos o no lineales presentes en los datos.

En este capítulo primero se presenta una breve reseña histórica sobre el desarrollo histórico del análisis no lineal. Después se realiza una discusión sobre qué es un sistema no lineal y sus características. Por último se da un repaso sobre las técnicas y procedimientos convencionales que se aplican en el análisis no lineal de series de tiempo.

2.1. Desarrollo histórico

Históricamente, el estudio de los sistemas no lineales se remonta al año 1665 con los trabajos sobre relojes de péndulo y sincronización realizados por Christiann Huygens. En una carta dirigida a su padre, Huygens relata que cuando en una viga se colocan dos relojes idénticos y se permite que sus péndulos oscilen libremente durante unos 30 minutos, se observa que estos se sincronizan con el mismo periodo y amplitud pero oscilando en direcciones opuestas [33]. Para explicar este fenómeno Huygens utilizó sofisticados argumentos geométricos que involucraban términos no lineales [34].

El siguiente gran avance en el campo fue hecho por Henri Poincaré a finales de la década de

1890 [35]. Al trabajar en el problema restringido de los tres cuerpos demostró que no es posible obtener una solución analítica al problema debido a la sensibilidad del sistema a las condiciones iniciales. También observó que esta característica provoca la imposibilidad de realizar predicciones a largo plazo sobre la dinámica del sistema, a pesar de que las ecuaciones que lo rigen son deterministas. Poco tiempo después, en 1892, Aleksandr Lyapunov propuso en su tesis doctoral un criterio de estabilidad para sistemas dinámicos [36]. Este resultado sentó las bases para el estudio de la estabilidad en sistemas no lineales. En las décadas posteriores hubo otras importantes contribuciones realizadas por científicos como Birkhoff, Kolmogorov, Balthasar, Arnold y Moser, entre otros [37].

El gran auge de la dinámica no lineal como campo de investigación surge en la segunda mitad del siglo XX, en gran parte gracias al avance en el cómputo científico. Las nuevas computadoras tenían más poder de cálculo y eran capaces de realizar integración numérica, un método fundamental para el análisis de ecuaciones no lineales. En 1960 Edward Lorenz, aprovechando estos nuevos desarrollos computacionales, publicó su trabajo sobre un modelo atmosférico con comportamiento caótico [38]. Aunque actualmente este artículo es considerado como uno de los trabajos pioneros y más relevantes dentro de la teoría de caos, en el momento de su publicación no llamó mucho la atención de los científicos probablemente por quedar oculto en una revista climatológica.

A continuación se muestra una línea de tiempo para algunos de los resultados más importantes en el desarrollo histórico del análisis no lineal:

- 1665: Christiaan Huygens reporta los primeros indicios de comportamiento no lineal en sistemas físicos al observar la sincronización de dos relojes colgados de la misma base [34].
- 1873: James Clerk Maxwell da una conferencia en Cambridge sobre determinismo en la que habla sobre la dependencia a condiciones iniciales y la capacidad de hacer predicciones [39].
- 1892: Henri Poincaré utiliza métodos geométricos para estudiar sistemas dinámicos no lineales [35].
- 1901: Ivar Bendixson publica un teorema que permite demostrar la existencia de soluciones periódicas y clasificar los tipos de comportamientos posibles para sistemas dinámicos continuos de dos dimensiones [40]. Este teorema se conoce como teorema de Poincaré-Bendixson.
- 1902: J. Willard Gibbs hace la primer referencia explícita al espacio de estados¹ como un espacio geométrico abstracto en el que se pueden estudiar las propiedades dinámicas de un sistema [41].
- 1927: George David Birkhoff desarrolla la teoría de los sistemas dinámicos dispersivos [42].

¹En la publicación original Gibbs lo llama *espacio fase*.

- 1948: Norbert Wiener introduce el concepto de ruido y estudia su influencia en los sistemas dinámicos [43].
- 1960: Edward Lorenz presenta el concepto de *caos determinista* en un modelo climatológico [38].
- 1967: Stephen Smale publica un artículo en el que presenta la herradura de Smale. Esto ayuda a comprender la relación entre la dinámica homoclínica y el caos [44].
- 1975: Benoit Mandelbrot introduce el término *fractal* y desarrolla la geometría fractal que sirve para describir objetos y fenómenos naturales con estructuras no lineales [45].
- 1975: Mitchell Feigenbaum descubre la universalidad en las bifurcaciones de periodos en los sistemas dinámicos caóticos [46].
- 1980: Joseph Auslander y James A. Yorke presentan el concepto de caos topológico y muestran que cualquier mapeo con periodo tres debe tener subconjuntos caóticos [50].
- 1980: Packard, Crutchfield y Farmer proponen una técnica para reconstruir el espacio de un sistema dinámico [49].
- 1981: Floris Takens formaliza la teoría para la reconstrucción del espacio fase en sistemas dinámicos [47].
- 2004: Kantz y Schreiber publican su libro titulado “Nonlinear Time Series Analysis” junto con la paquetería de código abierto TISEAN [25].

2.2. Sistemas lineales y no lineales

Entender las propiedades y características dinámicas de los sistemas es importante porque, de acuerdo con la corriente filosófica del sistemismo, todo lo que existe es un sistema o forma parte de un sistema. Los sistemas se pueden catalogar en lineales y no lineales, así como en deterministas y estocásticos. Antes de comenzar con la dicotomía entre los sistemas lineales y no lineales es conveniente definir qué es un sistema.

Desde el punto de vista etimológico, la palabra sistema proviene de la raíz griega *συστημα* (*sýstema*), la cual está formada por el prefijo *syn* (reunir o juntar) y el término *histanai* (permanecer). Entonces un sistema se refiere a una “colección de objetos que conforman una unidad, permanecen juntos e interactúan entre sí de manera directa o indirecta”.

Un sistema puede pensarse como un objeto que a partir de cierta entrada genera una salida. Si llamamos S al sistema, x a la entrada y y a su salida podemos representar al sistema como la función:

$$y = S(x). \quad (2.1)$$

La principal característica de un sistema lineal es que su salida es proporcional y puede ser determinada directamente a partir de la entrada. Por ejemplo, sabemos que la elasticidad de

un resorte antes de llegar al límite elástico está determinada por ley de Hooke $F = kx$ para $x \ll 1$. Esta ley dice que al aplicar una fuerza F al resorte este se elongará una distancia x , y cuando se aplique una fuerza $2F$ entonces la distancia será $2x$. Aquí podemos observar que la entrada F del sistema es directamente proporcional a la salida x por un factor k que representa la constante elástica del resorte. Al graficar x vs F se obtiene una línea recta como se muestra en la figura 2.1 dentro de la región elástica. Esta gráfica, que se representa mediante una ecuación lineal de la forma $y = mx + b$, es una de las razones por la que se les llama sistemas lineales. Entonces, los sistemas lineales al igual que cualquier operador lineal cumplen con la propiedad de distribución sobre la suma y sacar escalares:

$$S(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha S(x_1) + \beta S(x_2). \quad (2.2)$$

De la ecuación 2.2 se deduce que los sistemas lineales cumplen con el principio de superposición, es decir, son aditivos e invariantes de escala.

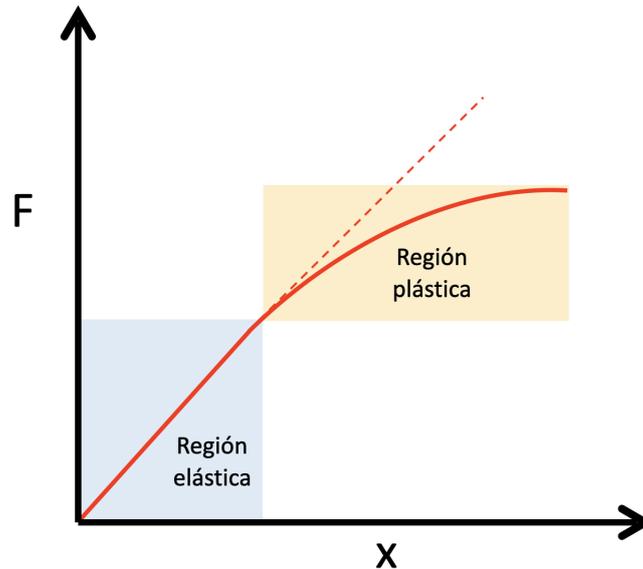


Figura 2.1: Gráfica que muestra como cambia la elongación de un resorte con respecto a la fuerza aplicada. Dentro de la región elástica (rectángulo azul) el comportamiento es lineal y deja de serlo cuando entra a la región de plasticidad (rectángulo naranja).

Una consecuencia relevante de que un sistema lineal cumpla con el principio de superposición es que puede descomponerse en partes más simples. Esto significa que cada parte del sistema puede estudiarse por separado y la suma de estos resultados será equivalente a estudiar el sistema completo.

El problema con los sistemas lineales radica en que no son capaces de representar íntegramente a la naturaleza. La mayoría de los modelos lineales que existen surgen al hacer idealizaciones y simplificaciones de la naturaleza, por lo que solamente funcionan de manera local o aproximada con respecto a la magnitud del fenómeno que estudian. Es decir, los modelos lineales

únicamente son aproximaciones a la naturaleza. Por ejemplo, la ley de Hooke solamente es válida para algunos metales y rangos de esfuerzos, pues cuando se llega a la región plástica el comportamiento deja de ser lineal (figura 2.1). De igual manera, cuando el resorte se estira el comportamiento pasa a ser modelado por la ecuación $F = k_1x + k_2x^3 + \dots$ que ya no es lineal pues la variable x aparece con potencias distintas a 1.

Un sistema no lineal es aquel que no cumple con el principio de superposición y por tanto la salida y del sistema no es proporcional a la entrada x , entonces una pequeña causa (entrada) puede tener grandes efectos (salida). Otra característica es que la suma de dos soluciones del sistema no es una solución, por lo que no se puede obtener una idea del comportamiento de todo el sistema estudiándolo por partes. Es decir, el todo es distinto a la suma de sus partes. Estas diferencias entre un sistema lineal y uno no lineal hacen que el estudio, y las herramientas que se usan, sean distintas para cada tipo de sistema.

Hasta este punto parece que es fácil diferenciar entre un comportamiento lineal y uno que no lo es. Pero al estudiar datos provenientes del mundo real no es tan simple, pues un mismo fenómeno puede tener características de ambos. Además, los comportamientos irregulares no se pueden atribuir de manera directa a una naturaleza no lineal, ya que también pueden deberse a procesos aleatorios [26]. En la siguiente sección se discute con mayor profundidad el análisis de las series de tiempo.

2.3. Análisis de series de tiempo

Una serie de tiempo es una secuencia de observaciones (datos) ordenadas en el tiempo realizadas sobre un sistema. El tiempo al que se registran las observaciones es discreto y puede ser regular o irregularmente espaciado. Analizar series de tiempo consiste, básicamente, en calcular unos cuantos parámetros que permitan extraer información sobre las características de los datos y del sistema que los generó [27]. En esta sección se describe la forma clásica de realizar el análisis para series de tiempo no lineales.

Un sistema dinámico es un modelo con una regla (ecuaciones) de evolución en algún espacio de estados² que determina de manera unívoca todos sus estados dinámicos futuros a partir de ciertas condiciones iniciales. El espacio de estados, con dimensión igual al número de grados de libertad del sistema, es un espacio abstracto donde se encuentran todos los posibles estados dinámicos del sistema de manera que cualquier punto del espacio fase representa un estado dinámico del sistema. Es decir, el espacio de estados contiene la mínima información necesaria para caracterizar completamente la dinámica de un sistema. Además, cualquier punto del espacio fase puede servir como condición inicial del sistema. La línea que conecta estados

²Por *espacio de estados* nos referimos al conjunto de todos los posibles estados dinámicos que puede tener un sistema. En otras áreas de la física este espacio se conoce como *espacio fase*, pero en este trabajo no usamos esa nomenclatura para evitar confusiones con el *espacio de fases de Fourier* que se introducirá más adelante.

consecutivos a partir de una condición inicial se llama trayectoria y tiene estrecha relación con la evolución temporal del sistema. Esto significa que al estudiar las trayectorias en el espacio de estados somos capaces de extraer información sobre el comportamiento real del sistema. Para un sistema dinámico que sea disipativo todas las trayectorias convergen a un subespacio llamado atractor. La estructura del atractor proporciona información sobre la dinámica del sistema: entre más *complicada* sea la estructura del atractor más *complicada* será la dinámica del sistema. Algunos de los métodos más usados para caracterizar al atractor son: sección de Poincaré, mapas de recurrencia, dimensión del atractor, dimensión de correlación, entropía de Shannon y exponentes de Lyapunov.

2.3.1. Reconstrucción del espacio de estados

Dada la cantidad de información que se puede extraer a partir del espacio de estados es evidente la importancia de obtenerlo. El problema al trabajar con series de tiempo del mundo real es que muy rara vez se tiene acceso directo al espacio de estados completo debido a que las mediciones obtenidas solamente son una proyección del espacio de estados y no se conocen las ecuaciones que gobiernan el sistema. Por ejemplo, puede ser que el espacio de estados de un sistema esté formado por 100 variables pero las mediciones solamente nos permiten el acceso a una sola serie de tiempo. Es decir, cada secuencia de mediciones que se realiza es un subconjunto unidimensional del espacio de estados. Para resolver esta problemática es necesario realizar una reconstrucción del espacio de estados.

La reconstrucción del espacio de estados se lleva a cabo bajo los supuestos de que el sistema que se está estudiando es determinista, tiene bajos niveles de ruido y es disipativo por lo que posee un atractor inmerso en su espacio fase original de dimensión d . El método estándar para realizar la reconstrucción del espacio fase se basa en realizar un *embedding*³ sobre la serie o conjunto de series de tiempo que se tienen disponibles. El embedding consiste en construir una secuencia de vectores con dimensión m mediante un retraso temporal τ a partir de la serie de tiempo original, donde m es la dimensión del espacio fase reconstruido y τ es la separación temporal entre las componentes de los vectores.

La eficacia del embedding se sustenta en los teoremas de Whitney y Takens. El teorema de Whitney [74] asegura que toda variedad diferenciable d -dimensional puede ser embebida (incrustada) en un espacio euclidiano con dimensión $2d + 1$ ⁴. Esto nos asegura que si $m \geq 2d + 1$ entonces el atractor en el espacio fase reconstruido será equivalente al atractor original. El teorema de Takens [47] afirma que el atractor reconstruido es topológicamente equivalente al atractor original, por lo que posee las mismas propiedades dinámicas como la dimensión topológica, el espectro de Lyapunov y la entropía. Posteriormente Sauer *et al.* [48] mostraron que

³La traducción al español es *embebido*. Sin embargo, en el área es común el uso de la palabra en inglés.

⁴La dimensión de embedding $2d + 1$ es la óptima para el caso general. Pero existen situaciones en que la dimensión de embedding adecuada es menor a $2d + 1$. Por ejemplo, un sistema tipo Rössler.

para un fractal A con dimensión D_A , un mapeo diferenciable de clase C^1 de A sobre un espacio \mathcal{R}^m es un buen embedding para A siendo $m > 2D_A$.

El éxito en la reconstrucción del espacio fase depende directamente de encontrar los valores óptimos para los parámetros τ y m . Cuando se elige un valor de τ menor al óptimo el atractor reconstruido no se despliega adecuadamente debido a que los m vectores están fuertemente correlacionados o enredados. Si τ es muy pequeño el atractor reconstruido resulta en una recta pues las coordenadas de los m vectores son prácticamente las mismas. En cambio, cuando los valores de τ son mayores al valor óptimo los m vectores son casi independientes y provocan que el atractor reconstruido resulte en una nube de puntos decorrelacionados linealmente y sin demasiada estructura. En ambos casos, τ menor o mayor al valor óptimo, el atractor reconstruido deja de ser adecuado para un análisis posterior. En la figura 2.2 se muestra el efecto del valor de τ en la reconstrucción de un atractor a partir de la variable x de un oscilador tipo Rössler en régimen caótico. Se puede observar que para $\tau = 1$ el atractor reconstruido es una recta, mientras que para $\tau = 100$ el atractor reconstruido presenta “pliegues” que no posee el atractor original.

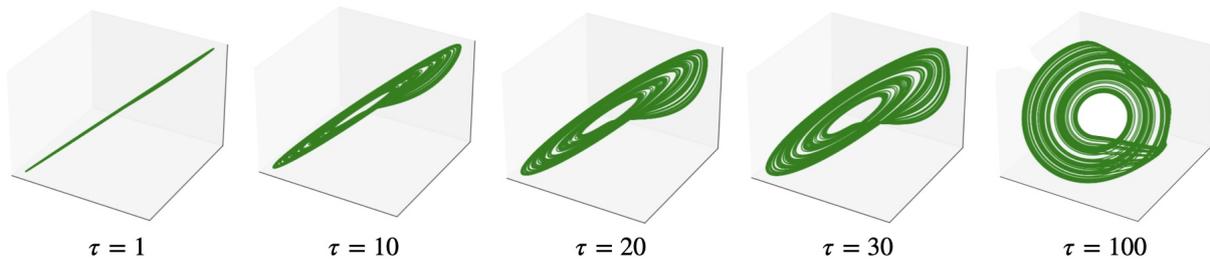


Figura 2.2: Efecto del valor de τ en la reconstrucción de un atractor mediante la técnica de embedding. El embedding se realizó sobre una serie de datos provenientes de la variable x de un oscilador tipo Rössler en estado caótico ($a, b = 0.2, c = 18$) con $m = 3$ y $\tau = 1, 10, 20, 30, 100$.

Para encontrar el valor óptimo de τ se han propuesto varios métodos. Una opción es elegir τ igual al valor de retraso temporal en el que por primera vez la función de autocorrelación cruza por cero. El problema con este método es que la función de autocorrelación solamente es sensible a interrelaciones lineales. Otra opción más conveniente es elegir τ como el valor en el que la función de información mutua tiene su primer mínimo. En este caso el τ adecuado es aproximadamente un cuarto del periodo dominante, valor que coincide con el mínimo de la información mutua y con el primer cero de la función de autocorrelación. El problema con el criterio de la información mutua es que funciona bien para embedding en 2 dimensiones, pero no necesariamente funciona en dimensiones más altas [52]. Un problema adicional en la elección de τ es que todos los métodos antes mencionados suponen que los datos de la serie de tiempo se registraron de forma equiespaciada, lo cual no siempre ocurre.

Elegir la dimensión mínima m del embedding para series de tiempo provenientes del mundo real es una tarea complicada debido a que casi nunca se conoce la dimensión d del espacio de

estados original. Cuando se elige una dimensión de embedding más pequeña que la adecuada las trayectorias del atractor reconstruido no se despliegan adecuadamente. Y cuando la dimensión de embedding es mayor a la ideal puede aparecer un sobre ajuste en las trayectorias del atractor reconstruido, además de un costo computacional adicional al requerir más datos. En cualquier caso el atractor reconstruido no reflejará las propiedades dinámicas del sistema original.

Kennel et al. [75] propusieron el método de falsos vecinos cercanos (FNN) que sirve, en principio, para determinar la mínima dimensión de embedding m necesaria para desdoblarse de forma correcta el atractor reconstruido. La metodología de FNN se basa en la suposición de que cuando dos puntos, pertenecientes al atractor de dimensión m , se encuentran *cerca* uno del otro también permanecerán *cercanos* en atractores con dimensiones mayores a m . En cambio, cuando se elige una dimensión de embedding menor a m puede suceder que algunos puntos que en realidad están *separados* en el atractor original parezcan estar *cercanos* en el atractor reconstruido como consecuencia de proyectar el atractor original en un espacio de dimensión menor. Estos puntos se denominan falsos vecinos cercanos.

Para datos sin ruido y que provienen de un sistema determinista se espera que el porcentaje de falsos vecinos cercanos se aproxime a cero a medida que se alcance el valor de m . Esto indica que el atractor reconstruido se ha desdoblado correctamente.

A continuación se detalla el procedimiento para calcular FNN que aparece en el artículo original [75]. A partir de una serie de tiempo $x(n) = (t_0 + n\delta t)$ se crean vectores utilizando una dimensión de embedding con valor m y un retraso temporal τ que se elige como el valor en el que aparece el primer mínimo en la función de información mutua para $x(n)$:

$$y(n) = (x(n), x(n + \tau), \dots, x(n + (m - 1)\tau)). \quad (2.3)$$

Posteriormente se toma cada $y(n)$ del espacio m y se calcula su distancia euclidiana $R(m)$ con sus vecinos más cercanos. Después se calcula la distancia $R(m + 1)$ para los mismos puntos pero ahora en una dimensión $m + 1$. Para determinar los falsos vecinos se establece el siguiente criterio [75]:

$$\sqrt{\frac{R^2(m + 1) - R^2(m)}{R^2(m)}} > R_{tol}, \quad (2.4)$$

donde R_{tol} es un valor límite que se escoge heurísticamente. Todo el proceso anterior se repite aumentando el valor de m hasta que la proporción de falsos vecinos cercanos se aproxime a cero y se mantenga estable.

Los autores señalan que el método de FNN falla cuando los datos contienen alguna cantidad de ruido. Por ejemplo, cuando se busca el valor mínimo de m para series de ruido blanco los criterios del método concluyen que el sistema puede ser embebido en un espacio de dimensión finita y pequeña. Esto es un error porque se conoce que el ruido tiene asociados atractores de

dimensión infinita. Este problema se debe a que en el ruido dos puntos que son vecinos no necesariamente son cercanos entre sí, por lo que siempre se encontrara un porcentaje de falsos vecinos. Para solventar este problema se proporciona un segundo criterio [75]:

$$\frac{R(m+1)}{R_A} > R_{tol}, \quad (2.5)$$

donde R_A es un estimado del tamaño del atractor cuyo valor no se conoce y por tanto también se elige de forma heurística. El problema con esta metodología es que los criterios de *cerca* y *separados* se definen de manera artesanal, lo cual puede dar lugar a errores en la reconstrucción del espacio de estados.

Algunos autores sugieren que para realizar un buen embedding es mejor tomar el producto $\tau(m-1)$ en lugar de τ y m de manera separada [51].

Otro aspecto importante para la reconstrucción del espacio fase, que frecuentemente se pasa por alto, es que las distintas variables o mediciones de un mismo sistema no siempre son igual de útiles para extraer información sobre la dinámica subyacente. Este hecho repercute directamente en los métodos que se usan para determinar τ y m de manera óptima pues significa que no todas las mediciones de un sistema son igual de útiles para la reconstrucción del espacio fase. Por ejemplo, se ha demostrado [53] que cada variable perteneciente a un oscilador tipo Rössler contiene niveles distintos de información dinámica sobre el sistema, resultando más fácil reconstruir el atractor a partir de las variables x y y que usando la variable z .

La cantidad de ruido contenida en las series de tiempo también es un factor relevante para la reconstrucción del espacio de estados. En la figura 2.3 se muestran los resultados al realizar una reconstrucción del espacio fase a partir de series de tiempo contaminadas con ruido. En este ejemplo el embedding se realizó sobre la variable x de un oscilador tipo Rössler en régimen caótico contaminada con una pequeña cantidad de ruido (Signal Noise Ratio $SNR = \sigma_{senal}/\sigma_{ruido} = 7.94$). En la reconstrucción se usó como dimensión de embedding $m = 3$. Se puede observar que aunque m sea el valor óptimo no se logra obtener una buena reconstrucción del atractor sin importar el valor de τ .

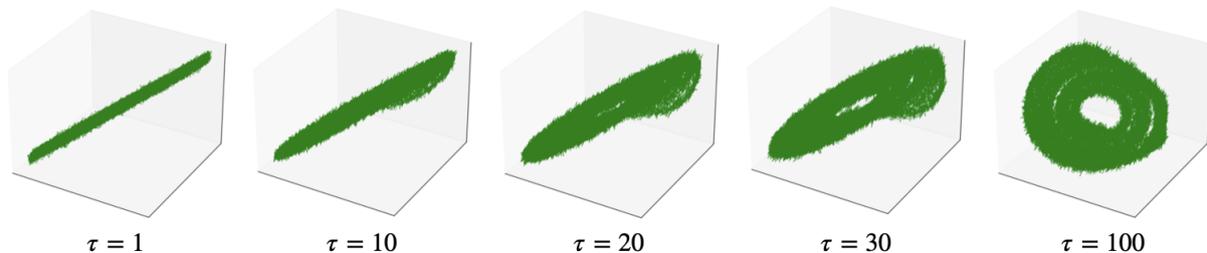


Figura 2.3: Reconstrucción del espacio fase a partir de una señal con ruido utilizando distintos valores de τ . La reconstrucción se realizó sobre una serie de tiempo proveniente de la variable x de un oscilador tipo Rössler en régimen caótico con $a, b = 0.2$ y $c = 18$. La señal tiene un Signal Noise Ratio $SNR = \sigma_{senal}/\sigma_{ruido} = 7.94$.

La conclusión de esta sección es que la reconstrucción del espacio de estados para datos reales no es una tarea sencilla debido a las carencias de los métodos empleados y a las propiedades que deben satisfacer los datos. Para realizar una correcta reconstrucción del espacio de estados es necesario tener una cantidad suficiente de datos y que sean estacionarios, de baja dimensión y con bajos niveles de ruido. Aún así, en el supuesto de que se llegasen a cumplir los requisitos anteriores, existen varios pasos cruciales en la metodología que no están bien establecidos y que deben realizarse de manera artesanal dando lugar a errores y malas interpretaciones de los resultados.

2.3.2. Análisis del atractor

Una vez que se logra la reconstrucción del espacio fase, cuando es posible, el siguiente paso es estudiar las propiedades del atractor para obtener conclusiones sobre la dinámica del sistema. Esto se realiza mediante el estudio de alguna medida invariante que permita caracterizar al sistema dinámico. Por ejemplo, los exponentes de Lyapunov (LE) λ_i y la entropía de Kolmogorov-Sinai (KS) h_{KS} generalmente son suficientes para caracterizar los principales aspectos concernientes a la predictibilidad de un sistema. Esto es debido a que son cantidades matemáticas bien definidas relacionadas con propiedades intrínsecas de un sistema dinámico, son invariantes ante cambios de variables e independientes de la norma que se esté utilizando. Debido a la relevancia de los exponentes de Lyapunov en este trabajo es que a continuación se describen sus principales ventajas y desventajas.

2.3.3. Exponentes de Lyapunov

Los exponentes de Lyapunov λ son una medida muy utilizada en el análisis de sistemas no lineales debido a que son capaces de distinguir entre dinámicas regulares y caóticas⁵. Estos exponentes cuantifican la tasa de convergencia, o divergencia, entre órbitas cercanas en el atractor conforme el sistema evoluciona en el tiempo. Exponentes positivos indican una divergencia exponencial entre trayectorias cercanas, siendo esto un indicativo de dinámicas caóticas. El número de exponentes λ_i es igual a la dimensión del espacio fase del sistema.

Obtener los exponentes de Lyapunov para sistemas dinámicos cuyas ecuaciones dinámicas son conocidas es algo relativamente directo. Pero calcularlos a partir de series de tiempo provenientes de un sistema cuyas ecuaciones no conocemos ni tampoco la dimensión del espacio de estados, suponiendo que es determinista, es una tarea bastante delicada. Esto se debe a que una serie de tiempo posee información limitada acerca de cuáles son las direcciones de contracción o divergencia en el espacio fase.

Generalmente, los métodos para calcular los exponentes de Lyapunov a partir de un serie de tiempo (univariante) se basan en la reconstrucción del espacio fase [54]. El problema surge en

⁵Para caos tomaremos la siguiente definición: “Comportamiento aperiódico a largo plazo en un sistema determinista que exhibe una dependencia sensible de las condiciones iniciales” [3].

que usualmente la dimensión de embedding m es mayor que la dimensión d del espacio fase original. Esto provoca que se tengan $m - D$ exponentes de Lyapunov que no están relacionados con la dinámica del sistema. Estos exponentes extra se conocen como exponentes parásitos o espurios. A pesar de que se han propuesto diversos métodos para diferenciar los exponentes verdaderos de los espurios [55] en la práctica muchas veces es casi imposible lograrlo [56].

Otro problema es que todos los métodos que se utilizan para obtener tanto el máximo exponente de Lyapunov como todo el espectro de exponentes requieren fijar un conjunto de parámetros con reglas un tanto heurísticas que dependen de la habilidad y experiencia del investigador. Además, los resultados obtenidos son fuertemente dependientes de la elección de los parámetros, la longitud de la serie de tiempo, su grado de estacionalidad y la cantidad de ruido que pueda tener. También deben tomarse en cuenta las imprecisiones numéricas de los equipos que se usan para realizar los cálculos, pues estas se van acumulando en cada integración del método. Esto puede provocar que el método arroje un exponente positivo incluso para sistemas que originalmente no presentan comportamiento caótico [57].

El ruido presente en las series de tiempo también afecta el cálculo de los exponentes de Lyapunov. Se han publicado varios ejemplos donde se muestra que la estimación de los exponentes de Lyapunov falla en distinguir caos de ruido en una serie de datos, provocando conclusiones erróneas acerca de una dinámica caótica aún cuando se tiene una dinámica periódica o completamente aleatoria [23, 58, 59]. Esto significa que encontrar exponentes positivos de Lyapunov en una serie de datos no es una prueba definitiva de la existencia de caos.

Entonces, al obtener un exponente de Lyapunov positivo el asunto primordial debería ser determinar si el origen de esta dinámica es determinista o no. Si se puede confirmar con total seguridad que el origen es determinista entonces se concluye que la señal es realmente caótica. Una forma de buscar determinismo es probando si las propiedades estadísticas obtenidas de la señal original como por ejemplo λ , se pueden obtener a partir de una señal con origen estocástico que comparta las mismas propiedades estadísticas lineales como la distribución de amplitudes y espectro de potencia con la señal original. Este procedimiento es un tipo de generación de datos sustitutos.

2.3.4. Datos sustitutos

El método de datos sustitutos fue presentado originalmente como una prueba de no linealidad en el trabajo de Theiler *et al.* [58]. La idea básica es que a partir de una serie original de datos se crea un ensamble de datos, llamadas datos sustitutos, que comparten las mismas propiedades estadísticas lineales que la original pero que pueden ser descritas completamente mediante un modelo estocástico lineal. Para esto todas las no linealidades presentes en los datos sustitutos son removidas. Posteriormente se aplica alguna medida no lineal tanto a la serie original como a las series sustitutas. Si se observa que los resultados de la serie original se desvían significativamente de la distribución de resultados de las series sustitutas, entonces se puede concluir

que es poco probable que la serie original tenga un origen estocástico.

Cuando se quiere verificar la existencia de alguna estructura temporal en las series de tiempo se pueden emplear datos sustitutos generados mediante una permutación aleatoria. Estos datos sustitutos conservan la misma media, varianza y distribución que los datos de originales. Pero al venir de una permutación han perdido cualquier estructura temporal que pudieran tener los datos originales. En este caso la hipótesis nula es que los datos originales son completamente descritos por variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (ruido blanco). Para datos que claramente muestran alguna correlación temporal es más apropiado emplear la hipótesis nula de que los datos pueden ser modelados mediante un proceso Gaussiano linealmente autocorrelacionado. Theiler *et al.* [58] mostraron mediante el cálculo de la dimensión de correlación que este tipo de datos sustitutos no son adecuados para una prueba de no linealidad.

Los datos sustitutos se pueden emplear para determinar si la dinámica de un sistema exhibe alguna característica de determinismo o si es el resultado de un proceso puramente ruidoso. Esta es una pregunta nada trivial, especialmente en los sistemas reales que regularmente tienen una baja tasa de señal/ruido. En estos casos es muy importante elegir la hipótesis nula adecuada así como la forma de generar los datos sustitutos, pues de estas elecciones van a depender los resultados de la prueba. Existen distintos métodos dependiendo si la hipótesis nula es que la señal proviene de ruido blanco (descorrelacionado) o de ruido coloreado (correlacionado).

Cuando se quieren estudiar sistemas con variables correlacionadas los datos sustitutos generados por ruido blanco y permutación aleatoria no son el método adecuado. Se requieren datos sustitutos que mantengan las mismas correlaciones que los datos originales. Esto significa que los datos sustitutos deben tener la misma función de autocorrelación que los datos originales pero con todas las componentes deterministas removidas. La hipótesis nula es que los datos son generados por un proceso lineal aleatorio y que pueden ser completamente descritos por características lineales como la media, desviación estándar y la función de autocorrelación. El teorema de Wiener-Khinchin [61] demuestra que la función de correlación se conserva si se preserva el espectro de potencia. Entonces, preservar el espectro de potencia mientras se aleatorizan las fases de Fourier de los datos originales proporciona datos sustitutos en los que cualquier estructura no lineal se ha destruido.

Existen varios tipos de datos sustitutos para probar la no linealidad en datos. Entre los más populares se encuentran los generados por Transformada de Fourier (FT) [58], Transformada de Fourier con Amplitud Ajustada (AAFT) [62] y Transformada de Fourier Iterativa con Amplitud Ajustada (IAAFT) [63].

Los datos sustitutos generados mediante la transformada de Fourier no son adecuados cuando los datos originales no tienen distribución normal. La efectividad del método AAFT depende de que la distribución de los datos originales sea continua para que exista una transformación de la distribución original a una distribución normal. El método de IAAFT produce ensambles

de datos sustitutos que, por construcción, tienen exactamente el mismo espectro de potencia y distribución en el tiempo. Este conjunto de sustitutos no es consistente con la hipótesis nula de que los datos originales son realizaciones estadísticamente independientes de una transformación no lineal de un proceso estocástico lineal. Este efecto fue demostrado en el artículo de Kugiumtzis [64], donde muestra que una varianza muy pequeña en el espectro de potencia en los datos sustitutos generados mediante AAFT y IAAFT provoca falsos rechazos de la hipótesis nula al usar predictores estadísticos no lineales. Además, en los trabajos de Rührt *et al.* [28] y Martínez *et al.* [29] se ha mostrado que los métodos de AAFT e IAAFT generan conjuntos de datos sustitutos con correlaciones en las fases de Fourier provocando que estas series tengan algunos componentes no lineales. Entonces, al usar sustitutos que poseen características no lineales puede ocurrir que no se detecten ciertas características no lineales presentes en las series de datos estudiadas. Estas fallas en la generación de datos sustitutos provocan que las medidas para detectar determinismo y no linealidad que se aplican de forma univariante, y que por tanto necesitan una comparación con datos sustitutos, no funcionen.

Capítulo 3

Fases de Fourier

3.1. Transformada de Fourier

3.1.1. Antecedentes históricos

La transformada de Fourier es un operador lineal que permite establecer una relación biyectiva entre una señal en el dominio del tiempo y una señal en el dominio de frecuencias. Algunas de sus aplicaciones se pueden observar en el procesamiento de imágenes, audio y vídeo, cristalografía, espectroscopia, diseño de lentes, criptología, diseño y análisis de circuitos, mecánica y computación cuántica, solución de ecuaciones matemáticas y análisis de señales de tiempo. Debido a su amplia gama de usos, tanto en ciencia básica como aplicada, es que se considera como una de las herramientas matemáticas más importantes.

El análisis de Fourier o análisis armónico es la rama de las matemáticas que se encarga de estudiar la transformada de Fourier. Sin embargo, la historia de los orígenes y fundamentos del análisis de Fourier se remonta varios años antes a los trabajos realizados por Joseph Fourier en 1822. En 1750 Leonard Euler [66] publicó un trabajo en el que describe la propagación del sonido en un medio elástico utilizando series trigonométricas. Posteriormente en 1753 Euler [67] presentó las fórmulas para obtener lo que más tarde se llegaría a conocer como coeficientes de Fourier, los cuales sirven para representar una función periódica de variable real en series. Otros contemporáneos de Euler también se interesaron en el tema e hicieron avances. Por ejemplo, en 1753 Daniel Bernoulli [68] describió la forma de una cuerda vibrante mediante series de senos y cosenos. Por esta misma época Louis Lagrange estaba interesado en el problema de cómo obtener información de una órbita a partir de un conjunto finito de observaciones. En 1759 publicó su solución al problema utilizando interpolaciones trigonométricas para aproximar las órbitas [69]. Este método es una extensión de los trabajos de Euler y resulta ser similar a los que se usan actualmente para obtener la transformada de Fourier discreta, con la limitante que el método de Lagrange solamente es válido para funciones pares.

El siguiente gran avance en el desarrollo de la transformada de Fourier fue realizado por el matemático Carl Friedrich Gauss. En su artículo de 1805 “*Theoria interpolationis method nova*

tractata” [70] generalizó los trabajos de interpolación trigonométrica a cualquier tipo de función periódica, tanto par como impar. En este trabajo Gauss proporciona un conjunto de ecuaciones que permiten encontrar los coeficientes necesarios para expresar una función periódica como la suma de series formadas por senos y cosenos. Este es el primer algoritmo conocido para calcular la transformada rápida de Fourier. Aún así es una de las contribuciones menos conocidas de Gauss. Algunas razones por las que se perdió este trabajo son que Gauss dedujo su método utilizando funciones trigonométricas reales haciendo difícil su asociación con las funciones exponenciales complejas utilizadas en los métodos modernos. También está el hecho de que Gauss utilizó una notación poco convencional para el lector moderno. Por ejemplo, utilizaba el símbolo π para expresar la longitud de una serie. Otra causa que el trabajo se publicó de forma póstuma en un compendio de varios volúmenes escritos en latín [71].

El desarrollo moderno del análisis de Fourier comienza con publicación del artículo “*Théorie analytique de la chaleur*” [72] escrito en 1822 por el Barón Jean-Baptiste Joseph Fourier. En este trabajo Fourier expresa que cualquier función arbitraria puede ser expandida en una combinación de series trigonométricas. Este resultado no fue bien recibido por la Academia Francesa de Ciencias, incluso Lagrange se puso de pie al escucharlo y sostuvo que era imposible. La principal objeción era que una función discontinua no puede ser descrita como la combinación de funciones continuas.

A pesar de las objeciones, la Academia no podía ignorar los resultados de Fourier pues estos coincidían con los experimentos realizados. Bajo estas circunstancias es que el trabajo de Fourier ganó un premio otorgado por la misma academia actuando como jueces Laplace, Lagrange y Legendre. Al momento de anunciar el premio los jueces dieron la siguiente advertencia: “*Lo novedoso del tema, junto con su importancia, nos ha decidido a otorgar el premio, aunque observamos que la forma en que el autor llega a sus ecuaciones no está exenta de dificultades y que su análisis para integrarlas todavía deja algo que desear tanto en generalidad como rigor*” [73]. Posteriormente, científicos como Dirichlet y Lebesgue dieron mayor formalismo matemático a los resultados de Fourier encontrando las condiciones bajo las cuáles son válidos. En el artículo de Bracewell [73] se encuentra una descripción más detallada sobre la vida de Fourier.

3.1.2. Formulación matemática

La transformada de Fourier pertenece a la familia de transformadas integrales. Una transformada integral expresa una relación entre dos funciones f y g . Matemáticamente se expresa según la ecuación 3.1 donde a , b y $K(x, t)$ (conocido como kernel) deben ser los mismos para todo el conjunto de pares de funciones $f(t)$ y $g(x)$.

$$g(x) = \int_a^b f(t)K(x, t)dt. \quad (3.1)$$

Para enfatizar que la ecuación 3.1 actúa como un operador entre las funciones $f(t)$ y $g(x)$ suele

expresarse como:

$$g(x) = \mathcal{L}f(t). \quad (3.2)$$

Dado que el operador \mathcal{L} debe ser lineal entonces la ecuación 3.1 satisface las condiciones:

$$\int_a^b [f_1(t) + f_2(t)]K(x, t)dt = \int_a^b f_1(t)K(x, t)dt + \int_a^b f_2(t)K(x, t)dt, \quad (3.3)$$

$$\int_a^b cf(t)K(\alpha, t)dt = c \int_a^b f(t)K(\alpha, t)dt. \quad (3.4)$$

La definición de la transformada de Fourier depende del área en la que se proponga. Sin embargo, todas las definiciones comparten una forma en común y pueden entenderse como una especie de mapeo entre una función $f(t)$ que depende del parámetro t y otra función $g(\omega)$ que depende de ω . En este trabajo utilizamos la definición 3.1.

Definición 3.1. Dada una función $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$, integrable en sentido de Lebesgue, definida de \mathbb{R} a \mathbb{C} . Se define la transformada de Fourier de $f(t)$ como la función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt. \quad (3.5)$$

En la definición 3.1 $f(t)$ es una función en el dominio del tiempo y $g(\omega)$ una función en el dominio de las frecuencias. Algunos autores agregan el factor $1/\sqrt{2\pi}$ al inicio de la integral para guardar la simetría entre la transformada de Fourier y su transformada inversa. La transformada inversa de Fourier se define como:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega t}d\omega. \quad (3.6)$$

También existen las versiones discretas para la transformada de Fourier:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i\omega n k}, \quad (3.7)$$

y para la transformada inversa:

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i\omega n k}. \quad (3.8)$$

Otra forma común de expresar la transformada de Fourier es como una función compleja de la forma:

$$\mathcal{F}\{S(t)\} = a(\omega) + ib(\omega), \quad (3.9)$$

donde $S(t)$ es una señal en el dominio del tiempo, $a(f)$ es la parte real de la transformada y $b(f)$ la parte imaginaria. Utilizando la identidad de Euler la ec. 3.9 se puede reescribir como:

$$\mathcal{F}\{S(t)\} = A(\omega)e^{i\Phi(\omega)}, \quad (3.10)$$

siendo $A(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}$ la amplitud de Fourier y $\Phi(\omega) = \arctan(b(\omega)/a(\omega))$ el ángulo de fase.

En el área del procesamiento de señales se define la energía de una señal $S(t)$ como:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2 dt. \quad (3.11)$$

Usando la relación del teorema de Parseval se llega a que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(S(t))|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.12)$$

La relación 3.12 permite evaluar la energía de una señal $S(t)$ al integrar el cuadrado de las amplitudes de su transformada de Fourier. En otras palabras: La energía de una señal en el dominio del tiempo es igual a la energía de su transformada de Fourier en el dominio de frecuencia ¹. Para describir cómo se distribuye la energía asociada a la señal sobre las frecuencias se define la densidad espectral de energía como:

$$P(\omega) = |\mathcal{F}(S(t))|^2 = |A(\omega)|^2. \quad (3.13)$$

También es posible establecer una relación entre la densidad de energía espectral $P(\omega)$ y la función de autocorrelación $C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)S(t+\tau)dt$. Comenzamos aplicando la transformada de Fourier a la función de autocorrelación:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(C(\tau)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} S(t)S(t+\tau)dt \right] e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} S(t+\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \right] dt \end{aligned}$$

Ahora hacemos el cambio de variable $\sigma = t + \tau$, por tanto $\tau = \sigma - t$ y $d\tau = d\sigma$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(C(\tau)) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} S(\sigma)e^{-i\omega(\sigma-t)} d\sigma \right] dt \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{i\omega t} dt \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} S(\sigma)e^{-i\omega\sigma} d\sigma \right] \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-i\omega t} dt \right]^* \left[\int_{-\infty}^{\infty} S(\sigma)e^{-i\omega\sigma} d\sigma \right] \\ &= |A(\omega)|^2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

La relación 3.14 se conoce como el teorema de Wiener-Khinchin y establece que la transformada de Fourier de la función de autocorrelación es igual a la densidad del espectro de potencia de la señal. Dado que la función de autocorrelación $C(\tau)$ solamente cuantifica el grado de correlación o dependencia lineal de una señal consigo misma a un tiempo τ , entonces se concluye que la serie de amplitudes de la transformada de Fourier únicamente contienen la información

¹Por un factor de $1/2\pi$.

univariante lineal de la señal. El hecho de que la transformada de Fourier sea biyectiva implica que toda la información de la señal en el dominio del tiempo también debe estar presente en el dominio de las frecuencias. Por lo tanto, el resto de la información como las características de determinismo y de no linealidad debe estar codificada en las fases de Fourier $\Phi(\omega)$ o en una posible correlación entre $\Phi(\omega)$ y $A(\omega)$ [29]. En muchas circunstancias esta información es la más relevante para caracterizar la dinámica de un sistema. En la siguiente sección se muestran ejemplos ilustrativos sobre la importancia de las fases de Fourier.

3.2. Trabajo previo sobre las fases de Fourier $\Phi(\omega)$

En 1961 Srinivasan publicó un artículo titulado “*The significance of the phase synthesis*” [76] en el que se pone de manifiesto la importancia que tienen las fases de Fourier al trabajar en el análisis de estructuras cristalinas utilizando técnicas de cristalografía.

La cristalografía por rayos X se utiliza para determinar la estructura tridimensional de los átomos que se encuentran dentro de un cristal a partir de la función de distribución electrónica $\rho(x, y, z) = \frac{1}{V} \sum_h \sum_k \sum_l |F_{hkl}| e^{-2\pi i(xh+yk+zl)}$, donde h , k y l son los índices de Miller. Este procedimiento se conoce como “síntesis de Fourier”. La amplitud de $\rho(x, y, z)$ se obtiene a partir de la intensidad de los puntos del patrón de difracción. En cambio, la fase de $\rho(x, y, z)$ no se puede obtener usando los datos experimentales de forma directa. Esto se conoce como el problema de las fases en cristalografía.

Teniendo en mente los trabajos publicados previamente junto con Ramachandran y su laboratorio, Srinivasan realizó varios experimentos en los que obtuvo la síntesis de Fourier a partir de las fases originales y variaciones de la amplitud. En el primer experimento obtuvo la síntesis usando las fases y amplitudes originales, lo cual proporciona la estructura real del cristal. Un segundo experimento fue normalizar todas las amplitudes conservando las fases originales. En la tercer síntesis se realizó una permutación aleatoria sobre el conjunto de las amplitudes conservando nuevamente las fases originales. Y por último, obtuvo la síntesis a partir de un nuevo conjunto de amplitudes totalmente descorrelacionado con el conjunto de amplitudes originales y manteniendo las fases originales. En todos los experimentos anteriores se observó que la estructura real del cristal se logra recuperar bastante bien siempre y cuando no se alteren las fases originales, mientras que las amplitudes pueden ser modificadas. La conclusión fue que en la síntesis de Fourier las fases contienen la mayor cantidad de la información necesaria para conocer la verdadera estructura de un cristal. Ese mismo año también publicaron estos resultados en la revista *Nature* [77].

En el año de 1975 Huang *et al.* [78] mostró que las fases de Fourier son extremadamente importantes en el desarrollo de filtros para imágenes digitales. Para probar su punto realizó dos reconstrucciones de una imagen. La primer reconstrucción se obtuvo a partir de las amplitudes de la transformada de Fourier de la imagen original, mientras que para la segunda reconstruc-

ción se usaron las fases de Fourier originales. Al comparar las imágenes reconstruidas con la imagen original observaron que la imagen reconstruida usando las fases era más cercana a la original que aquella reconstruida a partir de las amplitudes.

Posteriormente, en 1979 Oppenheim *et al.* [79] reportaron los resultados de su investigación sobre imágenes digitales y fases de Fourier. En su trabajo aplicaban la transformada de Fourier 2D a una imagen digital, posteriormente modificaban las amplitudes y/o fases para después aplicar la transformada inversa de Fourier 2D y finalmente obtener una nueva imagen digital. En estos experimentos observaron que aquellas imágenes recuperadas en las que se mantuvieron las fases de Fourier originales tenían características muy similares a las de la imagen original. Mientras que en las imágenes en las que solamente se mantenían las amplitudes originales no se podía identificar las características de la imagen original. La conclusión del trabajo es que las fases de Fourier contienen la mayor cantidad de información sobre las propiedades de una imagen. Oppenheim también realizó experimentos similares pero con señales de audio y su conclusión fue la misma. A continuación se discuten ejemplos similares a los realizados por Oppenheim.

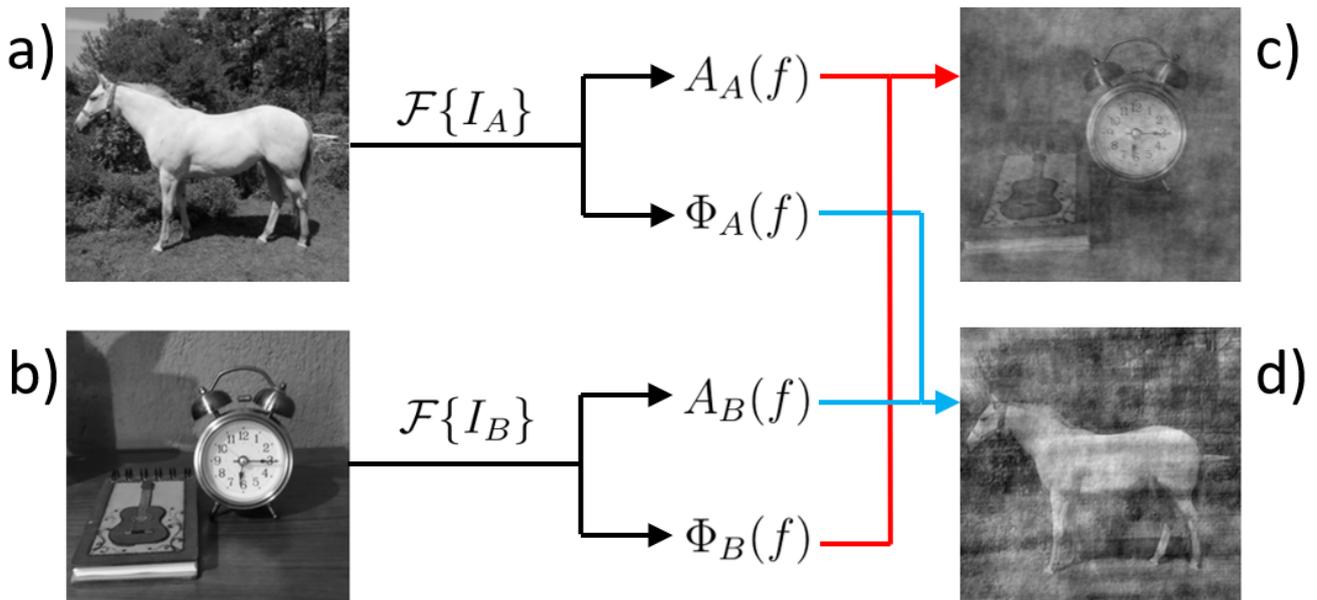


Figura 3.1: Esquema del experimento con imágenes para ilustrar la importancia de las fases de Fourier. Las figuras a) y b) muestran las imágenes originales a las que se les aplicó la transformada de Fourier bidimensional. Posteriormente se intercambiaron las fases y amplitudes de Fourier y finalmente se recobro una nueva imagen aplicando la transformada inversa de Fourier bidimensional. La figura c) muestra el resultado de combinar las amplitudes de a) con las fases de b). La figura d) muestra el caso contrario.

En la figura 3.1 se muestran los resultados obtenidos en una variante del experimento realizado por Oppenheim. Iniciamos con dos imágenes I_A e I_B , cada una en escala de grises y con un tamaño de $(2^{10}, 2^{10})$ píxeles. Posteriormente se aplica la transformada de Fourier 2D a cada imagen para separar sus $A(\omega)$ de las fases $\Phi(\omega)$. El último paso es aplicar la transformada inversa de Fourier para recuperar una imagen a partir de la combinación de las fases y ampli-

tudes. La flecha en color rojo señala la imagen que se obtiene al combinar las amplitudes de I_A ($A_A(\omega)$) con las fases de I_B ($\Phi(\omega)$). La flecha azul señala el resultado de combinar $A_B(\omega)$ con $\Phi_A(\omega)$. En ambos casos se observa que la imagen final exhibe principalmente la información proveniente de la imagen que aporta las fases $\Phi(\omega)$, mostrando que las fases contienen mayor cantidad de información que las amplitudes. Esto no significa que las amplitudes de Fourier sean irrelevantes, pues se puede observar que sin las amplitudes correctas la imagen recobrada tiene poca definición en los bordes de las figuras. En general, las amplitudes de Fourier son relevantes en el caso en que la autocorrelación lineal sea importante.

Para el ejemplo con señales de audio se tomó la grabación de un hombre diciendo la frase “*Oh yeah, everything is fine*”. La figura 3.2.a muestra la intensidad de esta señal a lo largo del tiempo. Después se calcula a transformada de Fourier a la señal de audio y se realizan los siguientes experimentos en el espacio de frecuencias: 1) Todas las amplitudes de Fourier son normalizadas haciéndolas igual a 1 y las fases se conservan en su forma y orden original, 2) las fases de Fourier se normalizan haciéndolas igual a 1 y las amplitudes se conservan en su forma y orden original. Finalmente se aplica la transformada inversa de Fourier a las señales de cada experimento para recobrar una señal en el dominio del tiempo. En la figura 3.2.b se muestra la intensidad correspondiente a la señal del experimento 1 y en la figura 3.2.c la intensidad de la señal del experimento 2. Por simple inspección visual se puede notar que la señal del experimento 1 (fases originales) tiene mucho mayor similitud con la señal original que la señal del experimento 2 (amplitudes originales). En el trabajo de Martínez *et al.* [29] se puede encontrar un ejemplo similar e ilustrativo con señales de audio, además de un extenso e interesante análisis sobre la relevancia de las fases de Fourier en el análisis de señales de tiempo.

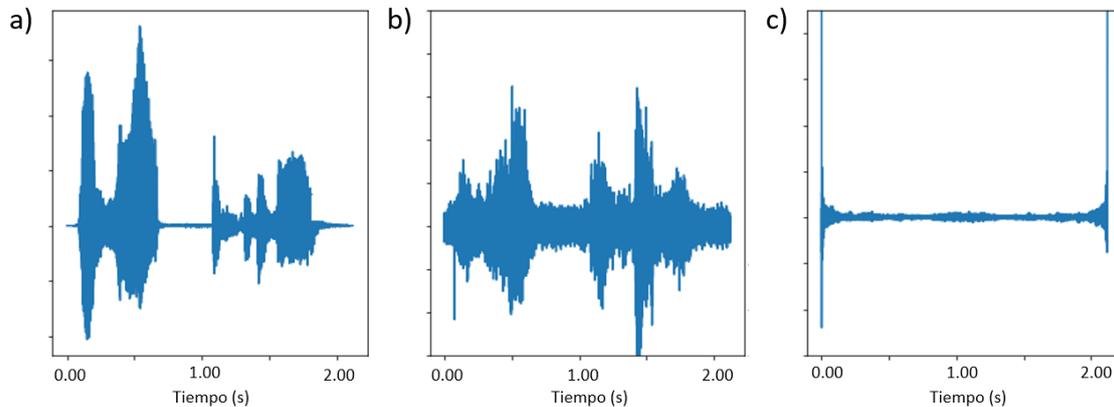


Figura 3.2: a) Espectro de la intensidad de la señal de audio correspondiente a la frase: “*Oh yeah, everything is fine*”, b) Espectro de la intensidad de la señal de audio obtenido al normalizar a 1 las amplitudes de Fourier de la señal a), c) Espectro de intensidad de la señal de audio obtenido al normalizar a 1 las fases de Fourier de la señal a).

Los trabajos mencionados en esta sección fueron pioneros en llamar la atención hacia las fases de Fourier y mostrar su importancia. También abrieron una nueva área en el análisis y procesamiento de imágenes y señales de audio. Sin embargo, en estos trabajos así como en

los subsecuentes no se discute ningún método capaz de extraer y aprovechar la información contenida en las fases de Fourier.

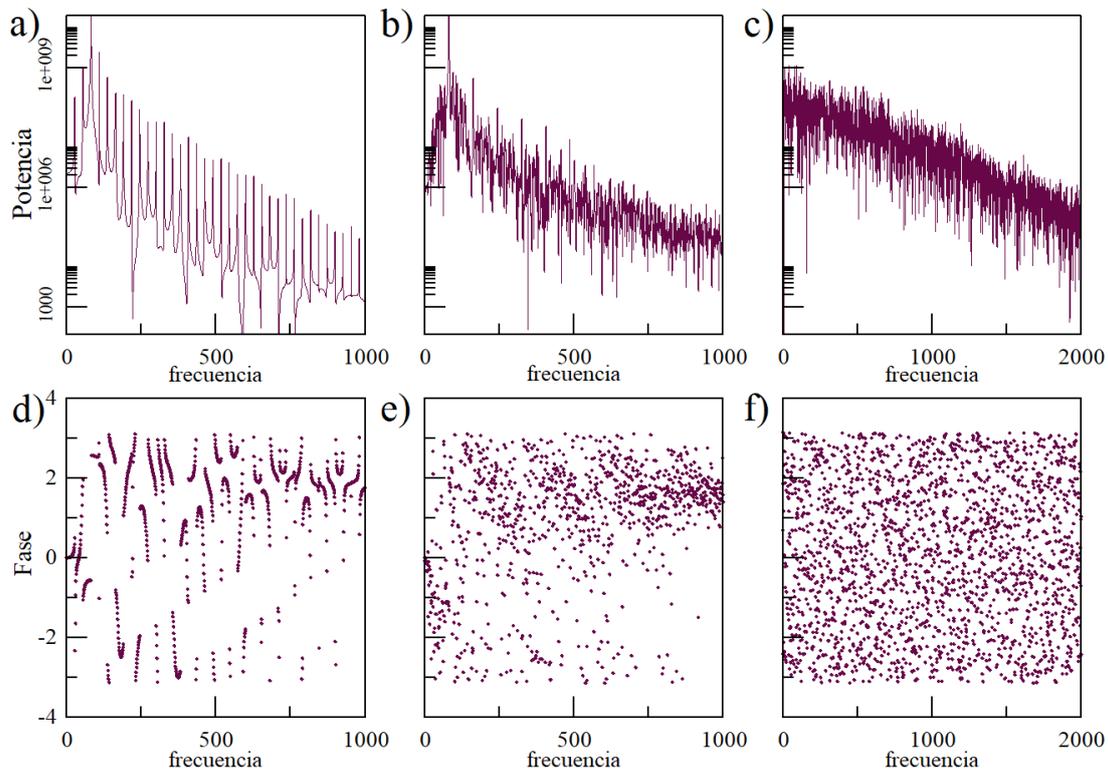


Figura 3.3: Espectro de potencia para un oscilador tipo Rössler en régimen a) periódico, b) caótico y c) oscilador tipo Lorenz en régimen caótico. Espectro de fases para un oscilador tipo Rössler en régimen d) periódico, e) caótico y f) oscilador tipo Lorenz en régimen caótico.

Probablemente, una de las causas por las que se prefiere trabajar con las amplitudes de Fourier sea que acceder a la información encriptada en las fases no es algo directo. Por ejemplo, la figura 3.3 muestra el espectro de potencia (amplitudes de Fourier al cuadrado) y el espectro de fases de Fourier para un oscilador tipo Rössler y otro oscilador tipo Lorenz, ambos en régimen caótico. Las gráficas correspondientes al espectro de potencia exhiben una estructura clara que es fácil de interpretar, pues cada pico representa la intensidad con que aparece cierta frecuencia en la señal. Por ejemplo, cuando el espectro de potencia exhibe una densa cantidad de picos es probable que la señal corresponda a un sistema caótico o ruidoso. En cambio, interpretar el espectro de las fases de Fourier no es tan simple. Se puede observar que este espectro no presenta una estructura evidente que permita sacar conclusiones directas sobre la dinámica de la señal a la que pertenece, más bien la distribución de las fases parece ser aleatoria. Incluso

en el caso de sistemas periódicos el espectro de fases no presenta una estructura característica que sea un indicativo directo del grado de periodicidad en la señal (figura 3.3.d).

En la siguiente sección se propone un nuevo índice estadístico que permite aprovechar la información contenida en las fases de Fourier para analizar series de tiempo.

Capítulo 4

Índice J

4.1. Introducción

En la sección sobre las técnicas empleadas para el análisis no lineal de señales se mostró la importancia de tener acceso al espacio de estados de un sistema, pues a partir de él se pueden conocer todos los aspectos relevantes para caracterizar la dinámica del sistema. Lamentablemente, cuando se trabaja con señales reales es extremadamente raro conocer por completo el espacio de estados del sistema. En muchas ocasiones ni siquiera se sabe la dimensión correcta que debe tener este espacio. Para resolver estos problemas se han creado métodos, bien fundamentados matemáticamente, que permiten realizar la reconstrucción de un espacio fase topológicamente equivalente al espacio fase original. El problema con estos métodos es que únicamente son válidos para datos estacionarios, con poca cantidad de ruido, de baja dimensión y deterministas, características que típicamente no poseen los datos de experimentos reales. En la sección dedicada a las fases de Fourier se mostró que toda la información no lineal de un sistema, y por lo tanto los signos de determinismo, se encuentra codificada en la secuencia de las fases de Fourier o en posibles correlaciones entre las fases y amplitudes de Fourier. También se discutió que acceder a esta información no es una tarea trivial.

En esta sección se presenta un nuevo índice estadístico que permite aprovechar la información contenida en las fases de Fourier para sacar conclusiones sobre la dinámica de los datos. Este índice puede ser aplicado de manera directa a todo tipo de datos estacionarios. Es decir, no es necesario aplicar un pre-procesamiento a los datos, lo cual implica pérdida de información, ni se tienen las restricciones necesarias para la correcta reconstrucción del espacio de estados. Además, no se requiere hacer comparaciones con datos sustitutos, método que no funciona correctamente para el caso univariante. [28, 29] A esta nueva medida le llamamos índice J .

La hipótesis en la que se sustenta el índice J es que las características sobre la dinámica de un sistema deberían reflejarse en la secuencia de las fases de Fourier. Por tanto, este índice busca identificar y cuantificar correlaciones en la secuencia del espectro de las fases de Fourier. Con este propósito se crea una secuencia de pasos (caminata) sobre la superficie de un toroide de

dimensión 3 embebido en el espacio de las fases de Fourier. Evaluando los cambios de dirección a lo largo de la caminata es que el índice J proporciona información sobre la dinámica del sistema. En la siguiente sección se describe a detalle este proceso y también se discute su interpretación dinámica.

4.2. Metodología

El índice J puede aplicarse tanto a datos univariantes como bivariantes, pero por simplicidad comenzaremos explicando el método para el caso bivalente. Sean $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ y $\vec{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$ dos registros simultáneos del mismo sistema cada uno con N elementos. El primer paso es obtener la Transformada de Fourier Discreta (DFT) para cada registro usando la fórmula 4.1:

$$X(f_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi kn/N} \quad (4.1)$$

donde N es el número de datos en el registro, n es el dato que se está transformando, f_k con $k \in [0, N - 1]$ es la frecuencia de Fourier, x_n es el valor del registro para el dato n y $X(f_k)$ es el valor de DFT para la frecuencia f_k . Para hacer más eficiente el calculo computacional se emplea el método *Fast Fourier Transform* (FFT) que reduce el tiempo de calculo al realizar $n \log(n)$ operaciones en lugar de n^2 , pero que solamente es aplicable a datos con longitud 2^n .

La información sobre la amplitud $A(f_k)$ y la fase $\Phi(f_k)$ correspondientes a la parte sinusoidal $e^{-i2\pi kn/N}$ que está asociada a x_n se encuentra contenida en el valor complejo $X(f_k)$. Para separar la amplitud de la fase usamos las fórmulas 4.2:

$$\begin{aligned} A(X(f_k)) &= \frac{|X(f_k)|}{N} = \frac{\sqrt{\text{Re}(X(f_k))^2 + \text{Im}(X(f_k))^2}}{N}, \\ \Phi(X(f_k)) &= \arctan\left(\frac{\text{Im}(X(f_k))}{\text{Re}(X(f_k))}\right), \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde $\text{Im}(X(f_k))$ es la parte imaginaria y $\text{Re}(X(f_k))$ la parte real de $X(f_k)$.

En nuestro análisis estamos interesados en trabajar con las fases, por lo que desechamos las amplitudes y nos quedamos únicamente con las fases correspondientes a los registros originales ordenadas a partir de la frecuencia más baja hasta la frecuencia de Nyquist:

$$\vec{\Phi}_x = \{\Phi_x(f_1), \Phi_x(f_2), \Phi_x(f_3), \dots, \Phi_x(f_{N_x})\}, \quad (4.3)$$

$$\vec{\Phi}_y = \{\Phi_y(f_1), \Phi_y(f_2), \Phi_y(f_3), \dots, \Phi_y(f_{N_y})\}. \quad (4.4)$$

Como las fases $\Phi(f_k)$ son ángulos entonces sus valores están restringidos al intervalo $[0, 2\pi]$ y por tanto su espacio de estados se puede representar en un círculo. Esto significa que el espacio de estados conjunto para las series $\vec{\Phi}_x$ y $\vec{\Phi}_y$ es el producto cruz de dos círculos que, topológicamente hablando, genera un toro tridimensional (figura 4.1). En consecuencia un punto

$P_k = (\Phi_x(f_k), \Phi_y(f_k))$ se localiza sobre la superficie bidimensional de un toroide tridimensional.

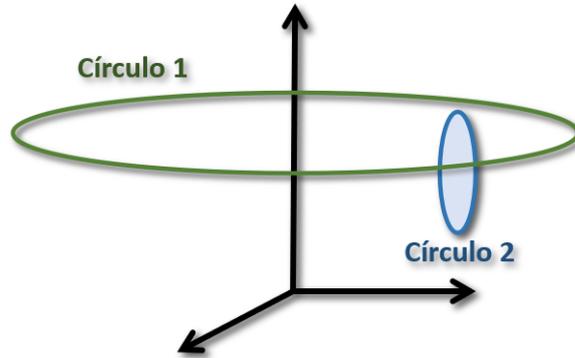


Figura 4.1: Cuando el círculo 2 se mueve a lo largo de la circunferencia del círculo 1 se genera la superficie de un toroide tridimensional que contiene todos los pares ordenados resultantes de $(S^1) \times (S^2)$ que es el producto cruz del círculo 1 con el círculo 2.

Estamos interesados en cuantificar los cambios de dirección que ocurren a lo largo de la trayectoria formada por la secuencia de los puntos P_k . Para esto es necesario definir un único vector de trayectoria que vaya del punto P_{k-1} al punto P_k . En principio, para cualquier espacio topológico de dimensión dos o mayor existe un número infinito de trayectorias que unen a dos puntos. En el espacio del toro también debe considerarse que, debido a su naturaleza cíclica, para llegar de un punto en su superficie a otro punto se pueden trazar caminos que cruzan hacia atrás o hacia adelante en las direcciones toroidal y poloidal. Para reducir el número de trayectorias posibles solamente consideraremos aquellas que sean geodésicas y que no impliquen una rotación mayor a 2π ya sea en la dirección toroidal y/o poloidal. Con estas restricciones el número de posibles trayectorias se reduce a 9 candidatos.

En la figura 4.2.a se ilustran 2 de las 9 posibles trayectorias geodésicas que unen a los puntos P_1 (amarillo) y P_2 (verde) mediante geodésicas. Si $P_1 = (\Phi_x(f_1), \Phi_y(f_1))$ y $P_2 = (\Phi_x(f_2), \Phi_y(f_2))$, entonces las 9 trayectorias se obtienen al *clonar* el punto P_2 en las posiciones: $(\Phi_x(f_2), \Phi_y(f_2) + 2\pi)$, $(\Phi_x(f_2), \Phi_y(f_2) - 2\pi)$, $(\Phi_x(f_2) + 2\pi, \Phi_y(f_2))$, $(\Phi_x(f_2) + 2\pi, \Phi_y(f_2) + 2\pi)$, $(\Phi_x(f_2) + 2\pi, \Phi_y(f_2) - 2\pi)$, $(\Phi_x(f_2) - 2\pi, \Phi_y(f_2))$, $(\Phi_x(f_2) - 2\pi, \Phi_y(f_2) + 2\pi)$ y $(\Phi_x(f_2) - 2\pi, \Phi_y(f_2) - 2\pi)$. La figura 4.2.b ilustra los *clones* del punto P_2 y también 3 de las 9 posibles trayectorias para ir de P_1 a P_2 . La distancia más corta se ilustra con la flecha en color rojo. Para definir la caminata sobre la superficie del toro se elige aquella trayectoria que presenta la conexión con la distancia euclidiana más corta.

Entonces, los vectores de trayectoria V_l con $l = 1, \dots, N - 1$ representan la geodésica entre dos puntos con la norma euclidiana más pequeña. En la figura 4.2.c se ilustran dos vectores (flechas rojas) de posición entre tres puntos consecutivos de la caminata sobre la superficie del toroide. El siguiente paso es cuantificar el ángulo de desviación α (fig. 4.2.c) entre cada par de vectores V_l y V_{l+1} .

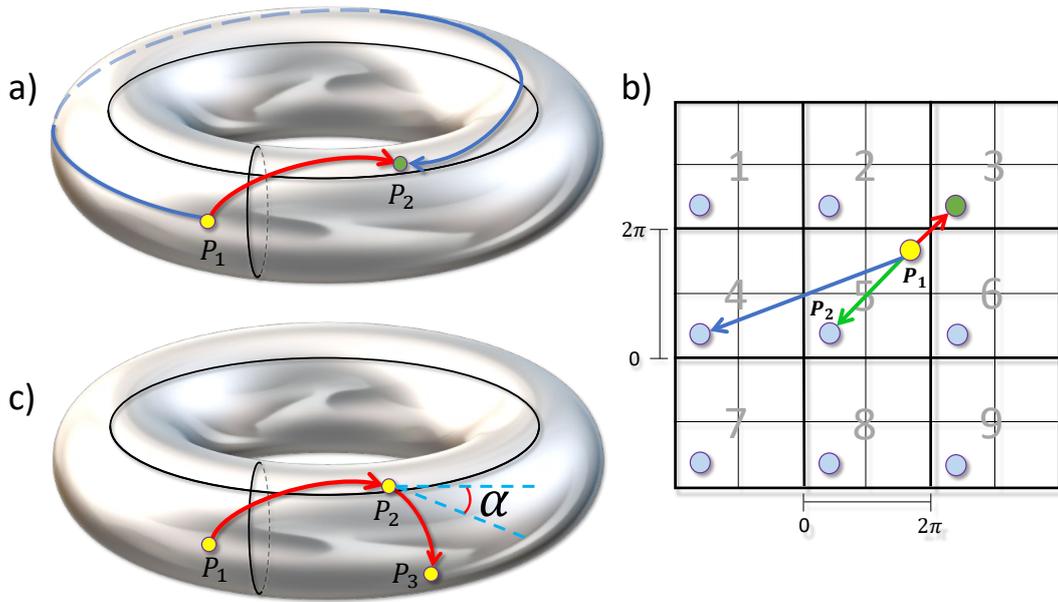


Figura 4.2: Ilustración de cómo se define la trayectoria de la caminata sobre el toro. La figura a) muestra dos caminos distintos sobre la superficie del toro tridimensional para avanzar de P_1 a P_2 . En la figura b) se ilustran 3 de las 9 posibles trayectorias para avanzar de P_1 a P_2 . La flecha en color rojo indica la trayectoria con la menor distancia euclidiana, esta es la que se elige para trazar la caminata. La figura c) ilustra dos pasos subsiguientes de la caminata sobre el toro y el ángulo de desviación α .

Para determinar el ángulo α no basta solamente con medir el ángulo más pequeño entre dos vectores, pues esta información no es suficiente para determinar en qué sentido está girando V_{i+1} con respecto a V_i . En la figura 4.3 se ilustra el caso en que los vectores V_2 y V'_2 comparten el mismo ángulo de giro θ con respecto a V_1 aún cuando uno está girando en el sentido de las manecillas del reloj y el otro vector en sentido contrario. Para resolver esta posible ambigüedad es necesario combinar el producto punto y el producto cruz.

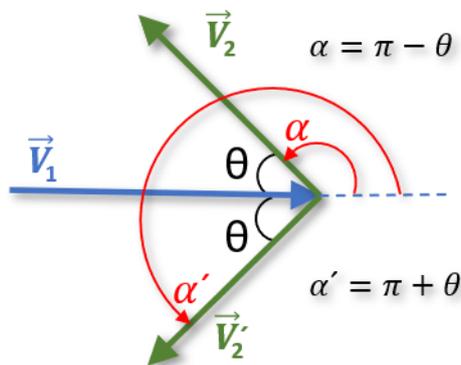


Figura 4.3: El valor de θ puede ser igual para dos vectores que están girando en dirección contraria. Al conocer el signo del producto cruz podemos distinguir la dirección de giro y determinar α de manera unívoca.

El ángulo θ más pequeño entre los dos vectores se obtiene a partir de la ec. 4.5.

$$\theta = \arccos \left(\frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{\|\vec{V}_1\| \|\vec{V}_2\|} \right). \quad (4.5)$$

Para identificar el sentido del cambio de dirección se calcula el producto cruz entre los dos vectores como se muestra en la ecuación 4.6.

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \Phi_x(f_1) & \Phi_y(f_1) & 0 \\ \Phi_x(f_2) & \Phi_y(f_2) & 0 \end{vmatrix} = [\Phi_x(f_1)\Phi_y(f_2) - \Phi_x(f_2)\Phi_y(f_1)]\hat{z}. \quad (4.6)$$

Si \vec{V}_2 gira en sentido de las manecillas del reloj entonces el término $\Phi_x(f_1)\Phi_y(f_2) - \Phi_x(f_2)\Phi_y(f_1)$ tiene un valor positivo, y será negativo cuando el vector gire en sentido contrario. Para aprovechar esta información definimos la función *signo* (ec. 4.7) cuya salida solamente es un signo positivo o negativo:

$$\text{signo} = \text{sgn}(\Phi_x(f_1)\Phi_y(f_2) - \Phi_x(f_2)\Phi_y(f_1)). \quad (4.7)$$

Con la información de las ec. 4.5 y 4.7 establecemos los siguientes criterios para evaluar α :

- Si $\text{signo} > 0$:
 $\alpha = \pi - \theta$
- Si $\text{signo} = 0$ y $\theta = 0$:
 $\alpha = \theta$
- Si $\text{signo} = 0$ y $\theta < 0$:
 $\alpha = \pi$
- Si $\text{signo} < 0$:
 $\alpha = \pi + \theta$

En la figura 4.3 se muestra que con los criterios antes descritos el ángulo α es distinto para \vec{V}_2 y \vec{V}'_2 aunque θ sea igual.

Para cuantificar las correlaciones en la secuencia de los ángulos α se propone un nuevo índice estadístico que llamamos J y está determinado por la ec. 4.8. Por su definición, este índice solo puede tomar valores entre 0 y 1. El valor 0 se obtiene cuando α es constante y el valor de 1 se alcanza cuando Θ tiene una distribución uniforme y la cantidad de datos tiende a infinito.

$$J = 1 - \left| \frac{1}{N-1} \sum_{l=1}^{N-1} e^{i\alpha(f_l)} \right|. \quad (4.8)$$

En la figura 4.4 se muestra un pseudocódigo que resume la metodología empleada para el cálculo del índice J . En la siguiente sección se estudio el comportamiento y características de J .

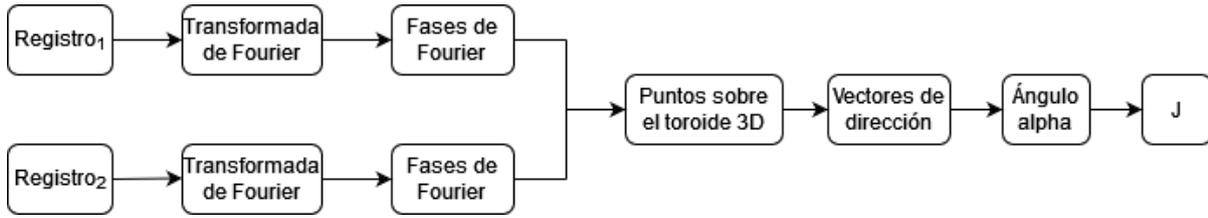


Figura 4.4: Diagrama de los pasos necesarios para el cálculo del índice J .

4.3. Interpretación

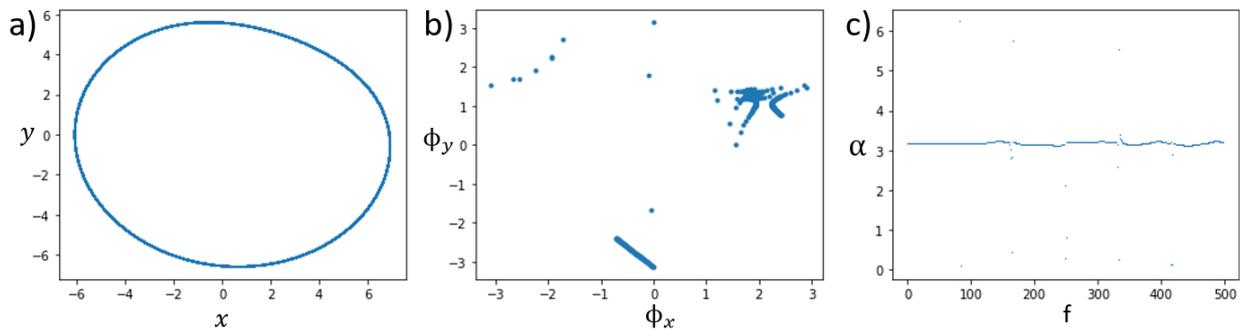


Figura 4.5: a) Proyección en el plano $x - y$ de un oscilador tipo Rössler con una dinámica de periodo 1 ($a = b = 0.2, c = 4$), b) Espectro de las fases de Fourier $\Phi(f_k)$ para las componentes $x - y$, c) Secuencia de los ángulos α_l .

Con el fin de tener una interpretación acerca de los valores del índice J y su relación con el comportamiento dinámico de un sistema se analizan dos casos límites: un sistema con baja periodicidad (periodo 1) y otro sistema formado por ruido blanco (alto grado de irregularidad). Para el caso periódico se eligió un sistema tipo Rössler con periodo 1 ($a = b = 0.2, c = 4$). En la figura 4.5.a se muestra una proyección del atractor en el plano $x - y$. La figura 4.5.b muestra la distribución de las fases de Fourier (espectro de fases) para las señales $x - y$. Se puede observar que las fases no están homogéneamente distribuidas sino que muestran cierta estructura de agrupamiento. Al aplicar el procedimiento descrito en la sección anterior y utilizando las componentes x y y del sistema Rössler, se obtiene la secuencia de ángulos α que aparece en la figura 4.5.c. Es evidente que en promedio los ángulos $\alpha \approx \pi$, lo cual indica que la caminata sobre el toro sigue una trayectoria más o menos regular en la que los pasos son hacia adelante y hacia atrás. Al calcular el valor del índice J para este caso se tiene:

$$J = 1 - \left| \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N e^{i\alpha(f_l)} \right| \approx 1 - \left| \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N e^{i\pi} \right| \approx 1 - \left| \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N 1 \right| = 1 - \left| \frac{1}{N} N \right| \approx 1 - 1 \approx 0.$$

Para el segundo caso de estudio se analiza un sistema formado por dos señales distintas de ruido blanco que, basándose en las ideas de los datos sustitutos, representan la máxima cantidad de *desorden* posible pues sus valores no guardan ninguna correlación estadística entre sí.

Para simular las señales se crearon series de 100,000 datos cada una con números aleatorios uniformemente distribuidos entre 0 y 1. En la figura 4.6.a se muestra una parte de la señal de ruido blanco utilizada. Las fases de Fourier correspondientes a las señales de ruido no muestran ningún tipo de estructura (figura 4.6.b), más bien presentan una distribución uniforme. En este caso los ángulos α tampoco parecen presentar algún tipo de estructura (figura 4.6.c). Sin embargo, al graficar el histograma de los ángulos α (figura 4.7) se observa que la distribución presenta cuatro máximos en los valores $\alpha = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ y 2π (recordar que $\alpha_l = 0 = 2\pi$). Estos máximos coinciden con los cruces entre los dos lazos que generan el toro sobre el que se realiza la caminata (líneas negras en la figura 4.2).

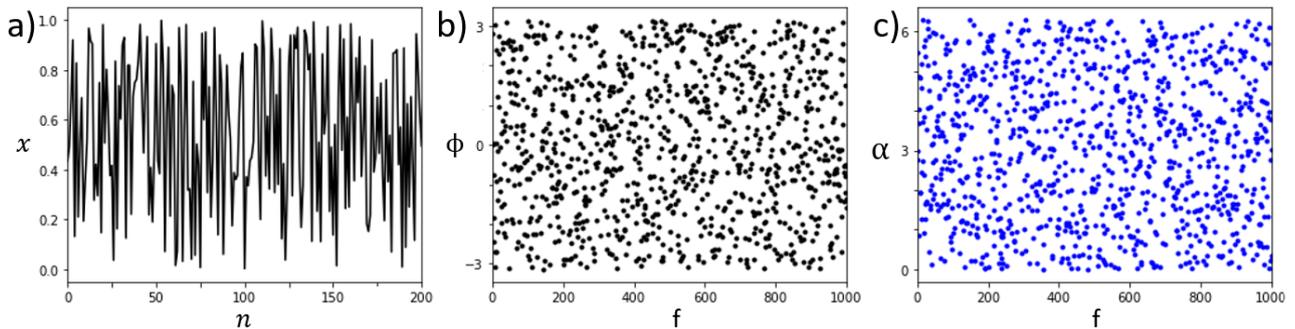


Figura 4.6: a) Sección de una señal de ruido blanco donde n es el número de datos y $x \in [0, 1]$. b) Espectro de las fases de Fourier $\Theta(f_k)$ para una señal de ruido blanco. c) Secuencia de los ángulos α_l para una señal de ruido blanco. Se puede observar que no existe ningún tipo de estructura en esta secuencia.

Debido a la distribución de los ángulos α se tiene que $\sum_{l=1}^N e^{i\alpha(f_l)} \approx 0$, así que:

$$J = 1 - \left| \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N e^{i\alpha(f_l)} \right| \approx 1 - \left| \frac{1}{N}(0) \right| \approx 1 - 0 \approx 1.$$

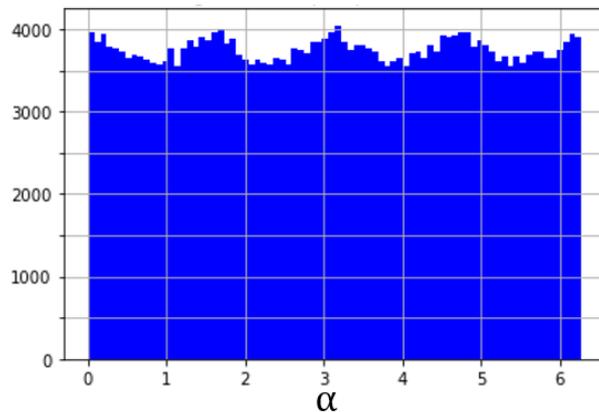


Figura 4.7: Histograma de los ángulos α_l para el sistema formado por dos señales de ruido blanco. La distribución presenta cuatro máximos en los valores de $\alpha = \pi/2, \pi, 3\pi/2$ y 2π .

Del estudio de los dos casos anteriores podemos concluir que valores de J cercanos a 0 están asociados con dinámicas simples y periódicas, mientras que valores cercanos a 1 (donde 1 es un valor asintótico que solamente se alcanza en el límite de infinitos datos) se presentan para sistemas con comportamientos completamente irregulares y aleatorios. Esta característica motiva a utilizar el índice J como una herramienta para detectar signos de determinismo en las señales.

4.4. Signos de determinismo

Un problema de suma importancia dentro del análisis de señales es determinar si las irregularidades que presenta una serie de tiempo son producto de un proceso estocástico o poseen una dinámica caótica y por tanto no lineal y determinista. Conocer si una serie de tiempo tiene o no un componente determinista es crucial porque indica cuál es el enfoque adecuado para su estudio.

Se han propuesto varios métodos para detectar determinismo [80, 81, 82, 83, 84, 85]. La gran mayoría se basa en el supuesto de que en una dinámica determinista suave las trayectorias que son cercanas en el espacio de estados en cierto momento, continuaran siendo cercanas un tiempo después. En otras palabras, estados instantáneos del sistema que son similares continuarán siendo similares en un futuro inmediato. Por lo tanto, estos métodos necesitan forzosamente realizar una reconstrucción del espacio de estados. También es necesario contar con gran cantidad de datos para poder comparar el comportamiento de las trayectorias en tiempos futuros. De lo contrario, podría asignarse un comportamiento aleatorio a un sistema que es determinista debido a la falta de conocimiento (datos) de su dinámica. Además, los métodos descritos anteriormente están asociando predictibilidad con determinismo. Esto es un problema debido a que existen sistemas estocásticos con memoria y por tanto también tienen un horizonte de predictibilidad [86].

En la sección anterior se mostró que para una señal de ruido blanco el valor de J se acerca asintóticamente a 1 conforme el número de datos N tiende a infinito. En la práctica ningún experimento proporciona un número infinito de datos, así que es necesario establecer un criterio estadístico que permita determinar con un nivel de significancia bien establecido si una señal con N puntos es ruido o si posee alguna característica de determinismo.

En este trabajo definimos el ruido como cualquier tipo de señal que no tenga ningún tipo de estructura en el espacio de estados ni tampoco en el espacio de las fases de Fourier $\Phi(f)$ (ver figura 4.6). Es decir, para una señal de ruido las fases $\Phi(f)$ tienen una distribución uniforme debido al teorema de Wiener-Khinchin (ver ec. 3.14). En la figura 4.8 se muestran tres tipos de señales de *ruido de color*, donde el *color* se asigna de acuerdo al valor de la pendiente β que tenga el espectro de potencias en escala logarítmica ($P \sim f^{-\beta}$). Se puede observar que aún cuando el espectro de potencia tiene diferente estructura para cada caso, la distribución uniforme de las fases $\Phi(f)$ se mantiene igual para los distintos tipos de ruido en el sentido de

que no presenta ningún tipo de estructura. Esto implica que se pueden generar señales de ruido con cualquier tipo de estructura deseada en el espectro de potencia (o autocorrelaciones), pues los signos de determinismo se encuentran en las fases $\Phi(f)$ y no en las amplitudes $A(f)$.

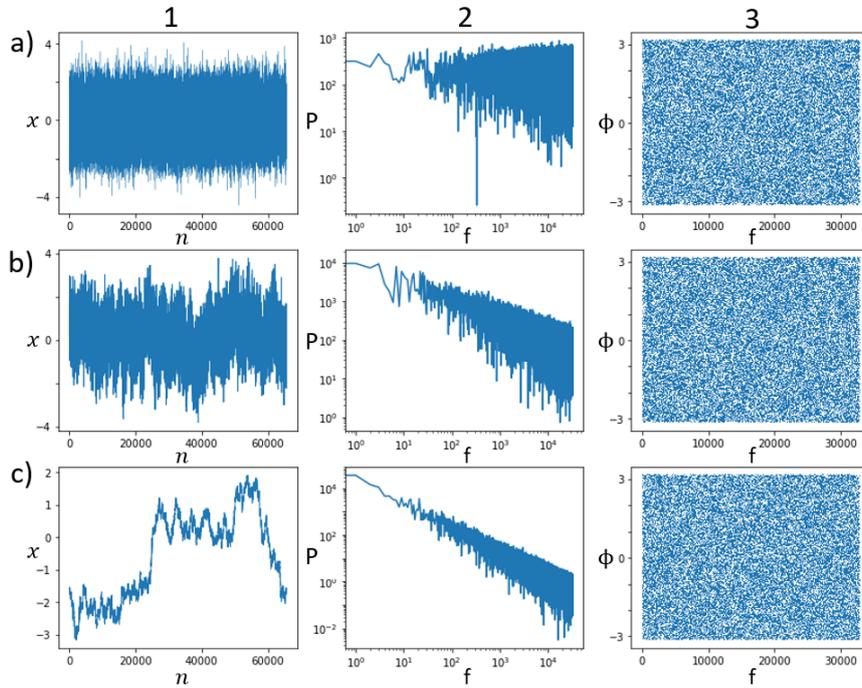


Figura 4.8: Se muestra: serie de tiempo (columna 1), espectro de potencia $P(f)$ en escala logarítmica (columna 2) y distribución de fases de Fourier $\Phi(\omega)$ para: a) ruido blanco ($\beta = 0$), b) ruido rosa ($\beta = 1$), y c) ruido café o browniano ($\beta = 2$). El exponente β indica la relación entre el espectro de potencia y la frecuencia ($P \sim f^{-\beta}$).

Para identificar indicios de determinismo en una señal con un número finito de observaciones N mediante el uso del índice J , es necesario disponer de dos señales que representen adecuadamente la hipótesis nula de la ausencia total de cualquier característica determinista. Como se discutió anteriormente, esto significa que las señales no deben tener ningún tipo de estructura en el espacio de las fases de Fourier $\Phi_i(f)$. Para este propósito se generan dos series de ángulos $\xi_1(f)$ y $\xi_2(f)$ ambas con N valores, donde $\xi_i(f)$ son números aleatorios independientes uniformemente distribuidos entre 0 y 2π que simulan las fases de Fourier sin estructura que posee cualquier ruido con el mismo N . Para garantizar que entre las dos señales que representan la hipótesis nula no existe ningún tipo de interrelación lineal, se crean dos nuevas series de números aleatorios con la condición de que las diferencias de fase originales se mantengan. Es decir: $\Phi_1(f) - \Phi_2(f) = \xi_1(f) - \xi_2(f)$, de esta forma se rompen las posibles interrelaciones lineales pero se conservan las posibles correlaciones cruzadas lineales que potencialmente pueden existir. Estas nuevas series representan un tipo de ruido determinista arbitrario con correlaciones lineales.

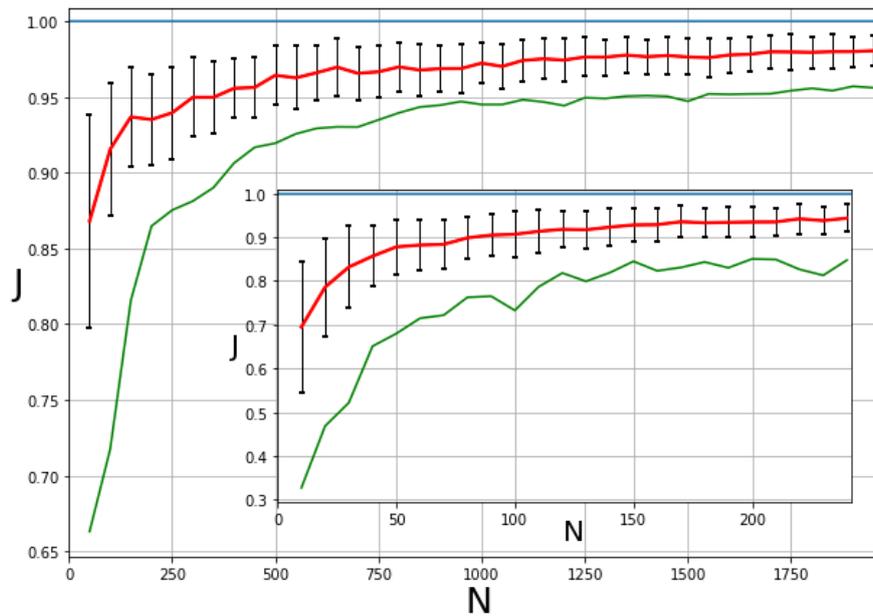


Figura 4.9: Gráfica de la estimación del índice J para caminatas sobre el toro en función de la longitud N de la trayectoria. La curva en rojo muestra la media de J para un ensamble de $M = 100$ repeticiones para cada longitud N , las barras en color negro indican la desviación estándar. La curva en verde indica el valor mínimo de J para el mismo ensamble de $M = 100$. La recta en color azul es el valor límite que alcanza J para N infinito. El recuadro muestra una ampliación de la gráfica para segmentos con longitud N más pequeña.

Entonces, para detectar signos de determinismo en una señal empírica con N datos basta con obtener el valor de su índice J y compararlo con el valor de J_{min} , donde J_{min} es el promedio de los valores mínimos de J obtenidos en un ensamble de M señales con N datos que representan correctamente la hipótesis nula. De esta forma el resultado será significativo con un p del orden $1/M$. Si el resultado de la señal empírica está por debajo de J_{min} , entonces la señal tiene alguna propiedad determinista. En caso contrario, no es posible diferenciar la señal de un ruido no determinista. Repitiendo este procedimiento es posible construir una curva universal que muestre el valor de J promedio y de J_{min} para un ensamble de M señales con $p = 1/M$ como una función del número de datos N de las señales.

En la figura 4.9 se muestran los resultados de la curva obtenida a partir de un ensamble con $M = 100$ repeticiones para cada valor de N . Se observa que el tamaño N de la señal afecta la sensibilidad con la que se pueden detectar estructuras en las caminatas aleatorias sobre el toroide tridimensional. Aún así, conforme se incrementa N los valores de la curva se acercan bastante rápido a 1, que es el valor asintótico para cuando N tiende a infinito. Esta curva tiene un carácter universal porque es válida para cualquier señal con cualquier tipo de autocorrelación lineal sin importar el tipo de sistema desde el cual se midieron los datos empíricos. Esto significa que ya no es necesario realizar ninguna comparación con datos sustitutos lo cual reduce enormemente el esfuerzo computacional en el análisis.

En conclusión, se presente un nuevo método para detectar signos de determinismo que no requiere del uso de datos sustitutos para determinar el nivel de significancia, se puede aplicar de forma directa sin tener que procesar los datos, no requiere del ajuste de parámetros y es aplicable a cualquier tipo de señal que satisfaga el teorema de Nyquist. Además, al no ser necesaria la comparación con datos sustitutos, el procedimiento es numéricamente simple, eficiente y barato.

4.5. Aplicación univariante

En las secciones anteriores se ha discutido el cálculo del índice J de forma bivalente, pues para crear la caminata sobre el toroide es necesario tener dos señales distintas X y Y , con igual cantidad de mediciones N , que provengan del mismo sistema. Sin embargo, en muchas situaciones prácticas solamente se tiene acceso a una única medición del sistema. En estos casos es necesario aplicar el índice J en su modalidad univariante.

Cuando únicamente se tiene una señal X con N número de datos, entonces se procede a crear una copia de X desfasada en un tiempo τ , esta nueva señal será Y . De esta manera se obtienen las nuevas señales $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{N-\tau}\}$ y $Y = \{x_\tau, x_{\tau-1}, \dots, x_N\}$. En la sección de resultados se muestra que la elección del valor de τ no influye cualitativamente en los resultados del índice J . Por lo tanto no es un parámetro relevante en el procedimiento.

Capítulo 5

Aplicaciones del índice J

En este capítulo se muestran los resultados de aplicar el índice J a sistemas con diversos orígenes y distintos tipos de dinámicas. Se investigan las aplicaciones del índice J en las modalidades bivariante y univariante, así como a sistemas contaminados con ruido. El análisis comienza utilizando sistemas clásicos que han sido ampliamente estudiados en la literatura. Esto se hace con el objetivo de verificar la confiabilidad del índice J , y también para asociar los nuevos resultados con aquellos que ya están reportados. Posteriormente se abordan casos de señales obtenidas a partir de sistemas reales.

La primer sección de este capítulo está dedicada al análisis de sistemas dinámicos teóricos tanto discretos como continuos. Para el caso discreto se eligieron los mapeos logístico y de Hénon. Como modelos continuos se seleccionaron los osciladores tipo Lorenz, Rössler y de van der Pol. Los sistemas antes mencionados son interesantes por su capacidad de exhibir una rica variedad de estados dinámicos periódicos, cuasiperiódicos y caóticos. En la segunda sección se muestran los resultados de aplicar el índice J a señales del mundo real. En específico señales provenientes de un electroencefalograma intracraneal y de las fluctuaciones de densidad en los sedimentos de un paleolago.

Todos los cálculos que se muestran en este capítulo fueron programados en Python 3.12.0 y procesados en una máquina de 64 bits con procesador x64. Para las simulaciones de sistemas dinámicos se utilizó el método Runge-Kutta de cuarto orden para aproximar las soluciones de las ecuaciones diferenciales.

5.1. Sistemas teóricos

5.1.1. Mapeo logístico

En 1976, 13 años después de los trabajos pioneros de Lorenz sobre caos, Robert McCredie May propuso un modelo demográfico [88] para explicar la dinámica del crecimiento de poblaciones tomando en cuenta que la población debería tener un valor máximo para evitar crecimiento exponencial, que hay recursos ilimitados y que no existe competencia con otras especies. Des-

pués de hacer algunas simplificaciones a la ecuación de Verhulst [89], May logró expresar su modelo en una simple ecuación en diferencias de primer orden que aparece en la ec.5.1:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad (5.1)$$

donde x_n representa la población en la generación n , x_{n+1} la población en la siguiente generación y r es un parámetro positivo que se relaciona con la tasa de crecimiento poblacional. La variable x solamente puede tomar valores entre 0 y 1, pues si $x > 1$ entonces el modelo diverge hacia $-\infty$ indicando la extinción de la especie. Valores de $x < 0$ no tienen sentido físico en el modelo. Los valores del parámetro r se eligen dentro del intervalo $[0, 4]$ para asegurar que los valores de x_n se sigan manteniendo en el intervalo $[0, 1]$.

El comportamiento dinámico del mapeo está determinado por el valor de r . Para $0 < r < 1$ los valores de x_n se aproximan a 0 conforme $n \rightarrow \infty$. Cuando $1 \leq r < 3$ el mapeo exhibe una dinámica de periodo 1. A medida que se incrementa r el mapeo experimenta una progresiva duplicación de periodo hasta llegar a una dinámica con periodo infinito, comportamiento caótico, en r_∞ .

Parámetro r	Periodicidad
$r_1 = 3.000\dots$	2
$r_2 = 3.449\dots$	4
$r_3 = 3.544\dots$	8
$r_4 = 3.564\dots$	16
$r_5 = 3.568\dots$	32
.	.
.	.
.	.
$r_\infty = 3.569$	∞

Cuadro 5.1: Duplicación de periodo en el mapeo logístico y su respectivo valor de r en el que ocurren.

En la figura 5.1 se muestran los valores de r en los que ocurren las duplicaciones de periodo hasta llegar a una dinámica caótica. Se puede observar que conforme se incrementa la periodicidad, los valores de r_n son cada vez más próximos entre sí. De hecho, la distancia entre los valores de r_n converge geoméricamente según la ecuación 5.2.

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4.669\dots \quad (5.2)$$

El valor δ se conoce como la primer constante de Feigenbaum, pues fue él quién la detectó y publicó en 1978 [87]. La segunda constante de Feigenbaum se obtiene calculando el límite del cociente entre la anchura de dos ramas de bifurcación consecutivas según la ecuación 5.3.

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_n + 1} = 2.502\dots \quad (5.3)$$

Ambas constantes de Feigenbaum se consideran universales debido a que son independientes de la forma de la función que se está analizando siempre y cuando la función sea tres veces derivable y no tenga máximos relativos. Se ha mostrado que estas constantes también aparecen en sistemas reales que presentan duplicación de periodo. En el libro de Steven Strogatz [3] se presentan varios ejemplos de experimentos en hidrodinámica y electrónica.

En la figura 5.1 se muestra el diagrama de bifurcación para el mapeo logístico. Cada rama que aparece en el diagrama indica un periodo distinto. Por ejemplo, en las regiones donde se ven cuatro ramas significa que el sistema tiene un periodo 4 ($r = 3.564\dots$). Las regiones caóticas se identifican por ser zonas densas en ramas debido a que tienen un periodo infinito. Se observa que para $r > r_\infty = 3.569$ el sistema experimenta una alternancia de estados periódicos y caóticos.

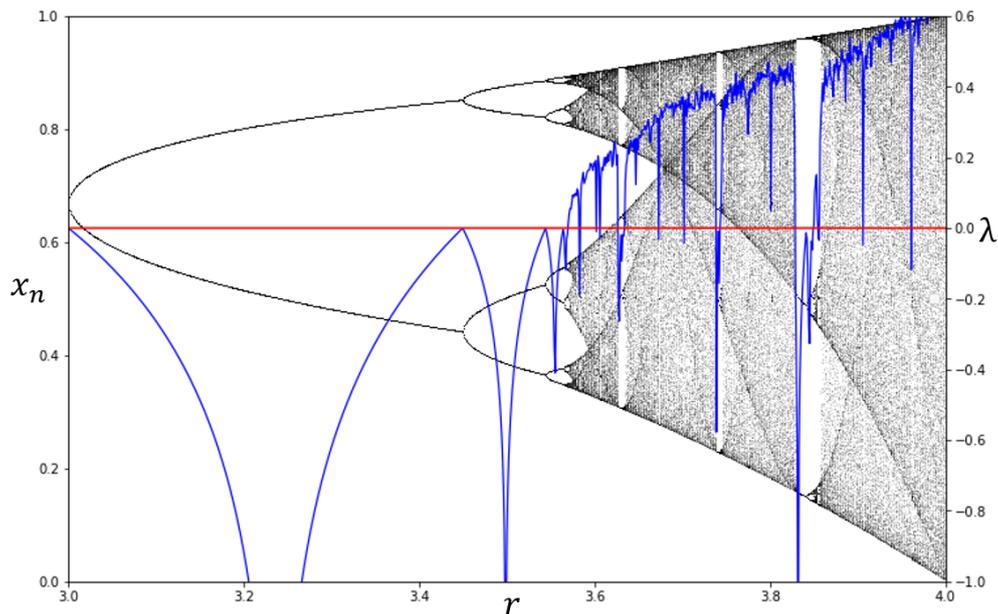


Figura 5.1: Diagrama de bifurcación (negro) y exponente de Lyapunov λ (azul) para el modelo logístico (ec. 5.1). La recta en rojo indica el valor $\lambda = 0$.

A pesar de toda la información que proporciona el diagrama de bifurcación, en algunas circunstancias resulta muy complicado poder diferenciar entre una dinámica con periodo muy alto y una dinámica caótica observando solamente el diagrama de bifurcación. Usando esta herramienta tampoco es posible diferenciar dinámicas caóticas de ruido. Otro método tradicional para diferenciar periodicidad de caos consiste en calcular el exponente de Lyapunov λ . Obtener λ para el mapeo logístico resulta extremadamente rápido y sencillo porque basta con calcular la derivada de la ec. 5.1. En la figura 5.1 se muestra λ como función de r . Como es de esperar, cuando la dinámica es periódica se tiene $\lambda < 0$ y para comportamientos caóticos $\lambda > 0$. También se observa que cada vez que ocurre una duplicación de periodo $\lambda = 0$.

Ahora se procede al análisis de la dinámica mediante el índice J . Para esto se calcula el índice J utilizando la modalidad univariante con $\tau = 1$ (recordar que el valor de τ no es relevante). En la figura 5.2 se muestran los resultados numéricos del índice J (curva en rojo) y λ (curva en negro), ambos como función del parámetro de bifurcación r . Es evidente la gran similitud entre la curva de J y λ . Para los comportamientos periódicos ($\lambda < 0$) J tiene valores cercanos a 0 y para los comportamientos caóticos ($\lambda > 0$) se observa $J < 1$. Aunque en el régimen caótico J toma valores altos, estos siguen siendo estadísticamente significativos. Esto indica que la dinámica del sistema tiene un comportamiento determinista, como es de esperarse.

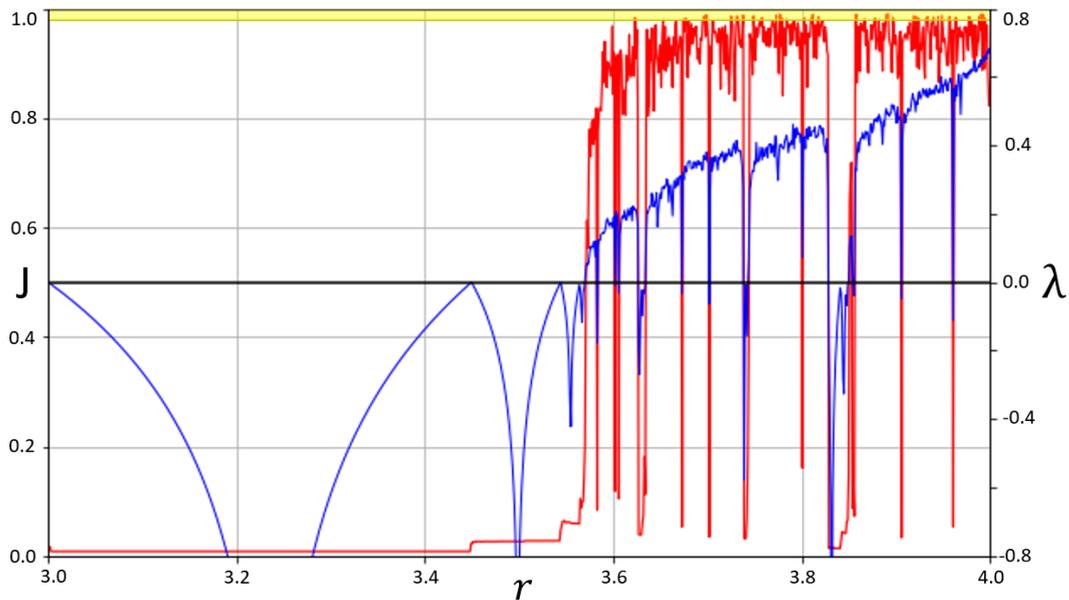


Figura 5.2: Resultados numéricos del índice J (rojo) y λ (azul) para el mapeo logístico (ec. 5.1) para $r \in [3.0, 4.0]$ como parámetro de bifurcación. La línea horizontal en negro indica el valor $\lambda = 0$. La franja superior en amarillo indica la zona de resultados estadísticamente no significativos. Todos los valores por debajo de la franja amarilla tienen significancia con $p < 1\%$.

En la figura 5.3 se muestra un acercamiento a la gráfica 5.2 para mostrar que justo cuando ocurre una duplicación de periodo en la dinámica del sistema, los valores del índice J muestran un incremento. Estas duplicaciones de periodo también se pueden identificar mediante el exponente de Lyapunov cuando $\lambda = 0$ viniendo de valores negativos y posteriormente regresa a valores negativos, pero el índice J proporciona información que no se encuentra en λ . Entre mayor sea el grado de la duplicación más grande es el valor de J , mientras que λ exhibe el mismo comportamiento para cualquier grado de duplicación. Esto significa que el índice J es sensible al grado de irregularidad de la dinámica en el sentido que una dinámica con periodo 1 es más simple, en cierto sentido, que una con periodo 2.

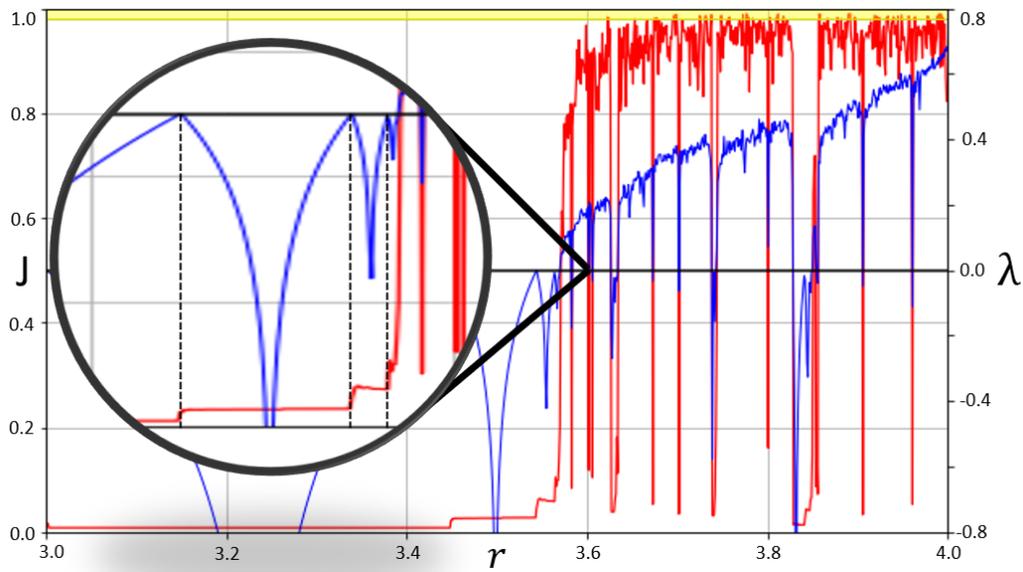


Figura 5.3: Acercamiento a la gráfica 5.2. Las líneas verticales punteadas en negro indican una duplicación de periodo. Se observa que justo en estos puntos $\lambda = 0$, mientras que los valores de J muestran un incremento.

La sensibilidad del índice J a la duplicación de periodo también se observa en otros tipos de mapeos unidimensionales. En la figura 5.4 se muestran los resultados de estudiar el mapeo cuadrático $x_{n+1} = a - x_n^2$ y el mapeo $x_{n+1} = a \sin(\pi x_n)$. En ambos casos se observan incrementos en el valor de J cada vez que ocurre una duplicación de periodo.

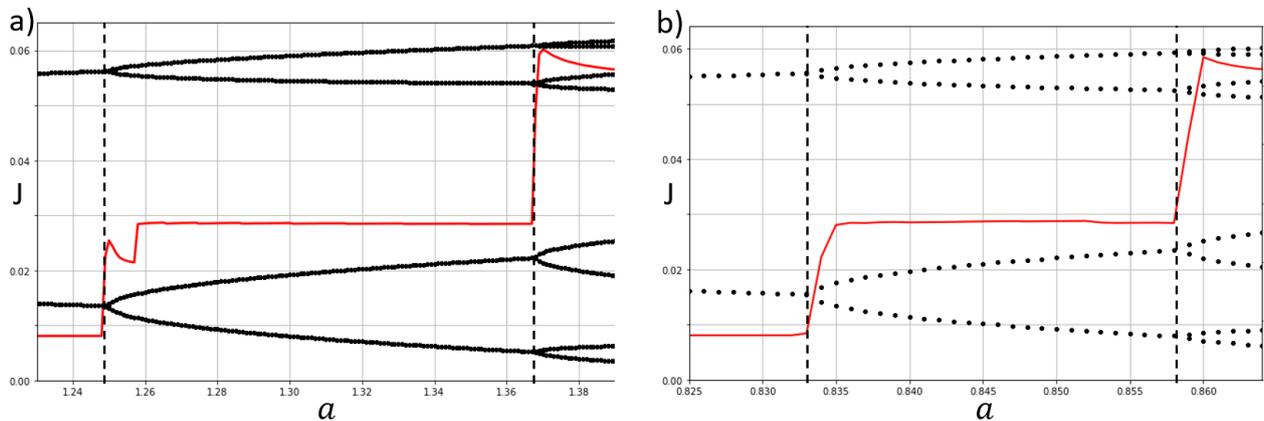


Figura 5.4: Diagrama de bifurcación (negro) y valores numéricos del índice J para los mapeos: a) $x_{n+1} = a - x_n^2$, b) $x_{n+1} = a \sin(\pi x_n)$. Se observa que cada vez que ocurre una duplicación de periodo (líneas verticales punteadas) el valor de J sufre un incremento.

5.1.2. Mapeo de Hénon

El mapeo de Hénon es un modelo matemático minimalista que permite estudiar la dinámica de estiramiento y plegado que conduce al caos determinista, por lo que es uno de los más

estudiados y trabajados. También sirve para modelar flujos cerca de una bifurcación silla-nodo.

En 1969 Michel Hénon publicó un artículo donde demostró, utilizando la conservación de la medida, que las propiedades esenciales de un sistema dinámico definido por ecuaciones diferenciales pueden conservarse utilizando mapeos que preserven el área [90]. Inspirado por estos resultados Hénon propuso en 1976 un modelo bidimensional simplificado de la sección de Poincaré del modelo de Lorenz que posteriormente se conocería como mapeo de Hénon [91]. El mapeo de Hénon es un sistema dinámico bidimensional y discreto en el tiempo que está determinado por el conjunto de ecuaciones acopladas 5.4:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + by_n, \\y_{n+1} &= x_n.\end{aligned}\tag{5.4}$$

donde x, y son las variables dinámicas y a, b son parámetros cuyos valores determinan si el mapeo converge a una órbita periódica o tiene comportamiento caótico. El mapeo también se puede escribir como una iteración de dos pasos:

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + bx_{n-1}.\tag{5.5}$$

En la figura 5.5 se muestran el diagrama de bifurcación y λ_{max} en función del parámetro a para el mapeo de Hénon. Los valores de a están dentro del intervalo $[1, 1.4]$ y se fija $b = 0.3$. Se puede observar que existen regiones en las que el mapeo tiene una dinámica periódica ($\lambda_{max} < 0$) y otras en las que el comportamiento es caótico ($\lambda_{max} > 0$). También existe una zona en las que se presenta duplicación de periodo del tipo 2^m .

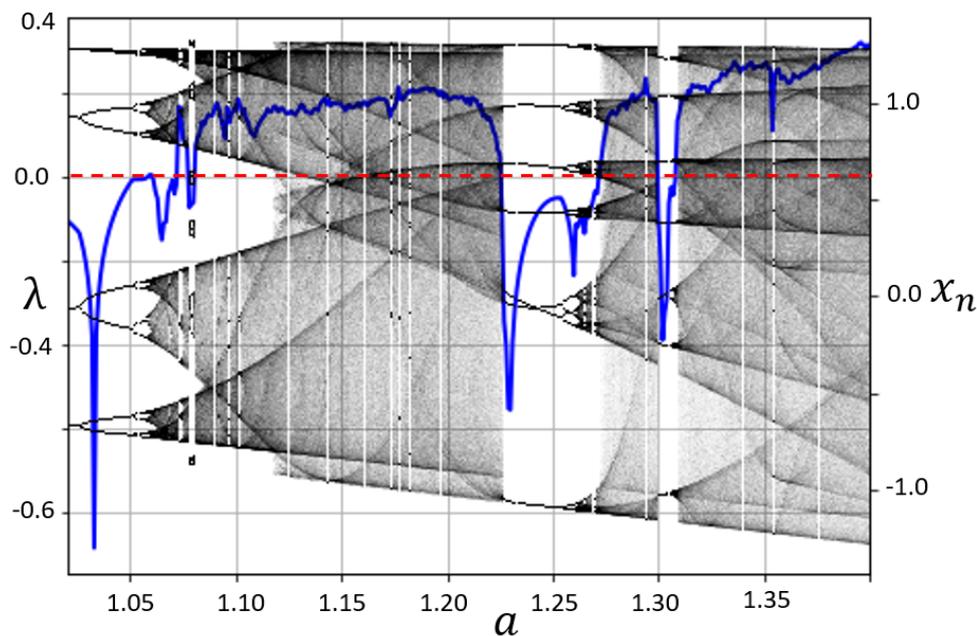


Figura 5.5: Diagrama de bifurcación (negro) y λ_{max} (azul) para el mapeo de Hénon (ecuaciones 5.4 con $a \in [1, 1.4]$ como parámetro de bifurcación y $b = 0.3$). La línea punteada en rojo indica $\lambda_{max} = 0$.

En la figura 5.6.a) se muestran las gráficas correspondientes al índice J y λ_{max} . El índice J se calculó de forma bivalente utilizando las series de x y y provenientes del mapeo. Se observa que el índice J tiene un alto grado de sensibilidad a la par de λ_{max} para detectar los cambios en la dinámica. Cuando hay dinámicas regulares J es cercano a 0 y para los comportamientos caóticos J tiene valores cercanos a 1. En la figura 5.6.b) se muestra como el valor de J presenta incrementos cada vez que ocurre una duplicación de periodo. Aunque este comportamiento es similar al observado en los mapeos unidimensionales, el valor de los incrementos de J no coincide en ambos casos.

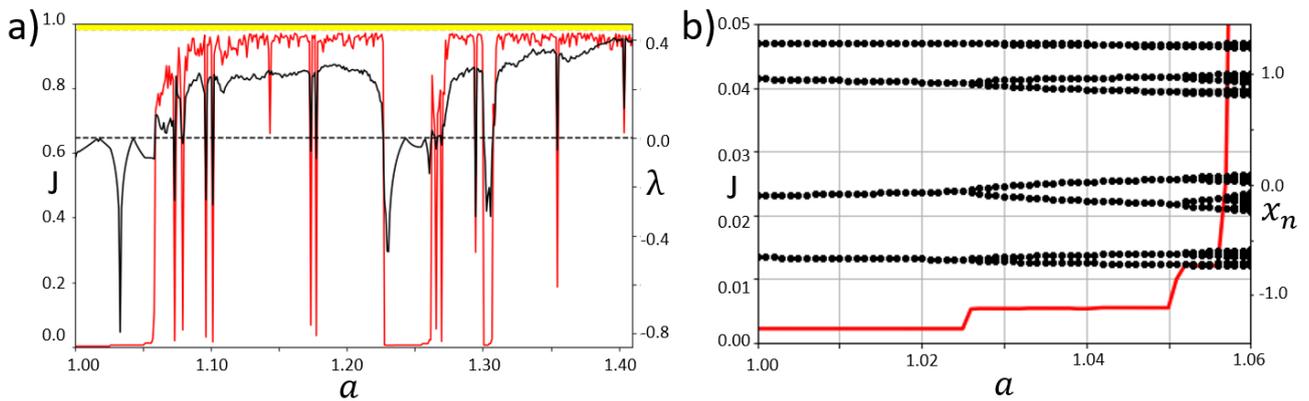


Figura 5.6: a) Índice J (rojo) λ_{max} (negro) para el mapeo de Hénon (ecuaciones 5.4 con $a \in [1, 1.4]$ como parámetro de bifurcación y $b = 0.3$). La franja superior en amarillo indica la zona de resultados estadísticamente no significativos. Todos los valores por debajo de la franja tienen significancia con $p < 1\%$. b) Acercamiento al diagrama de bifurcación 5.5 donde se observa que el índice J (rojo) incrementa su valor cada vez que ocurre una duplicación de periodo (negro).

5.1.3. Modelo de Lorenz

El modelo de Lorenz es un sistema dinámico no lineal formado por un conjunto de tres ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas que sirve para modelar la convección de fluidos en la atmósfera. Este trabajo fue pionero en mostrar que un sistema determinista es capaz de exhibir comportamientos caóticos [38].

Edward Norton Lorenz fue un matemático y meteorólogo estadounidense que trabaja para el MIT. Él estaba interesado en conocer cuáles son las leyes físicas necesarias para lograr un buen pronóstico del clima. En 1960 publicó un trabajo en el que aplicando series dobles de Fourier y haciendo simplificaciones en las escalas de movimiento logró reducir la ecuación de vorticidad barotrópica a un sistema de tres ecuaciones diferenciales no lineales ordinarias cuyas soluciones analíticas son funciones elípticas en el tiempo [93]. Continuó trabajando con este tipo de modelos pero ahora con 12 dimensiones y en 1962, con la ayuda de Margaret Hamilton, integra las soluciones utilizando un ordenador Royal-McBee LGP-30¹ y se da cuenta

¹Según Lorenz esta máquina solamente era capaz de realizar los cálculos unas 1000 veces más rápido que un humano.

que estas soluciones tienen una fuerte dependencia a las condiciones iniciales pero que aún así parecen acumularse dentro de un conjunto compacto e invariable que no depende de las condiciones iniciales [94]. Finalmente, en 1963 Lorenz conjunta todos sus descubrimientos e ideas propuestas por Saltzman [95] en un modelo tridimensional determinista y minimalista que sirve para estudiar los rollos de convección que se producen en la atmósfera [38]. Este modelo está descrito por las ec. 5.6 y es interesante, entre otras cosas, por su capacidad de producir dinámicas complicadas debido a su no linealidad.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} &= -xz + \rho x - y, \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}\tag{5.6}$$

En las ec. 5.6 la variable x representa la intensidad de la convección, y la diferencia de temperatura entre las corrientes ascendente y descendente y z es proporcional al cambio en el perfil de temperatura vertical. La constante σ es el número de Prandtl, ρ es el número de Rayleigh y b se relaciona con alguna proporción física de la región que se está estudiando.

En la figura 5.7 se muestran proyecciones en el plano $x - y$ de atractores del sistema correspondientes a los parámetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$ y $\rho = 350, 100.5, 160, 99.65, 28$. Los primeros cuatro valores de ρ corresponden a dinámicas periódicas ($\lambda_{max} < 0$) y el último valor de $\rho = 28$ produce un comportamiento caótico ($\lambda_{max} > 0$). Las simulaciones se realizaron usando un paso de integración de 0.01.

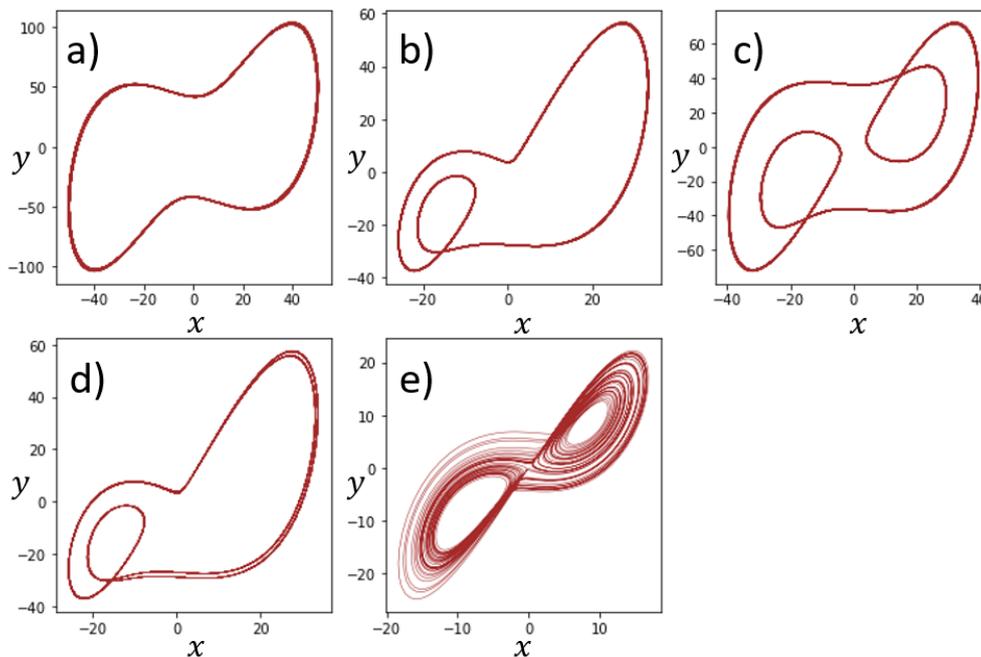


Figura 5.7: Proyecciones en el plano $x - y$ de osciladores tipo Lorenz para los parámetros $\sigma = 10$, $b = -8/3$ y a) $\rho = 350$, b) $\rho = 100.5$, c) $\rho = 160$, d) $\rho = 99.65$, e) $\rho = 28$.

En la figura 5.8 se muestra λ_{max} para los distintos estados del sistema, este exponente se calculó a partir del atractor real del sistema. Nótese que los estados del sistema están ordenados de acuerdo a la irregularidad de su dinámica y no por los valores de ρ .

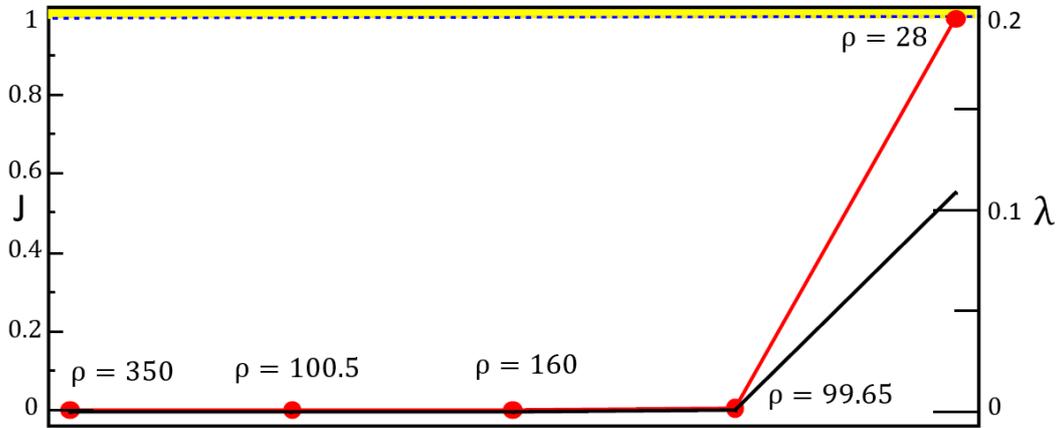


Figura 5.8: Resultados numéricos de J (rojo) y λ_{max} (negro) para $\sigma = 10, b = 8/3$ y $r = 350, 100.5, 160, 99.65, 28$. La escala de la izquierda corresponde a J y la de la derecha a λ_{max} . La franja superior en amarillo indica la zona de resultados estadísticamente no significativos. Todos los valores por debajo de la franja tienen significancia con $p < 1\%$.

En el análisis de la dinámica mediante el índice J se utiliza la modalidad bivalente. Debido a que para este sistema se tienen disponibles tres series de tiempo distintas, se calculó el índice J usando las combinaciones: (x, y) , (x, z) y (y, z) . En los tres casos se obtuvieron resultados cualitativamente similares, por lo que solamente se presentan los correspondientes a las series (x, y) . En la figura 5.8 se muestra el valor del índice J para las distintas dinámicas antes mencionadas. Se puede observar que J y λ_{max} exhiben un comportamiento cualitativamente similar. Los cuatro primeros puntos de la gráfica corresponden a dinámicas periódicas, en estos casos se tiene J con valores cercanos a cero y $\lambda_{max} < 0$. El último punto de la gráfica pertenece a una dinámica caótica y J tiene un valor cercano a 1 mientras $\lambda_{max} > 0$.

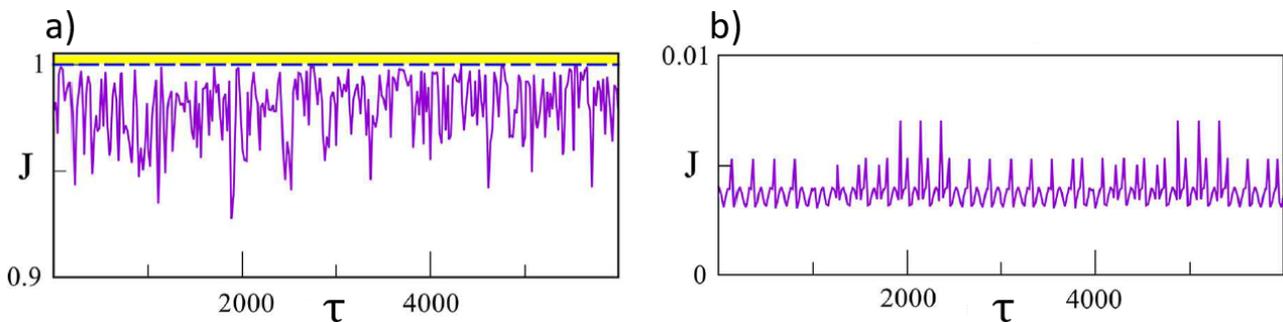


Figura 5.9: Aplicación univariante de J sobre la componente x de un oscilador tipo Lorenz en régimen a) caótico ($\rho = 28$) y b) periódico ($\rho = 100.5$). El cálculo también se realizó sobre la componente y del oscilador con resultados cualitativamente similares, éstos no se muestran en la figura. La franja superior en amarillo en la gráfica a) indica la zona de resultados estadísticamente no significativos. Todos los valores por debajo de la franja tienen significancia con $p < 1\%$.

En este modelo también se trabajó con la aplicación univariante del índice J para explorar la influencia del retraso τ en los resultados. Con este propósito se toma la serie de tiempo x y se le aplica un corrimiento temporal τ . Se analizó un estado caótico ($\rho = 28$) y uno periódico ($\rho = 100.5$). Para ambos casos se aplicaron retrasos hasta de $\tau = 10,000$ puntos, que equivale al 20% del tamaño total de la serie. En la figura 5.9 se muestran los resultados y se observa que sin importar la magnitud de τ , el índice J sigue siendo capaz de identificar si la dinámica del sistema es periódica o caótica. De lo anterior se concluye que el parámetro τ no influye cualitativamente en los resultados. Esto es debido a que el índice J no es muy sensible a las interrelaciones, este tema se aborda más adelante.

5.1.4. Modelo de Rössler

En 1976, el bioquímico alemán Otto Rössler publicó un artículo en el que propuso un sistema capaz de presentar comportamientos caóticos pero con una estructura algebraica más simple que el modelo de Lorenz [96]. Una de las razones por la que este modelo es importante es que contiene los requisitos mínimos para la existencia de caos: un espacio de estados de dimensión tres y solamente un término no lineal.

El modelo de Rössler fue motivado por la geometría que presentan los fluidos en tres dimensiones debida al principio de reinyección y, al parecer, por el procedimiento artesanal empleado para la fabricación de dulces. También empleo algunas ideas de mapeos como el del panadero para inventar varios modelos de los cuales el más famoso está determinado por las ec. 5.7.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - c).\end{aligned}\tag{5.7}$$

En la ec. 5.7 x , y y z son variables continuas que evolucionan en el tiempo y a , b , c son parámetros positivos. Las dos primeras ecuaciones generan oscilaciones que pueden amplificarse para $a > 0$ hasta producir espirales en x y y . La tercer ecuación posee el componente no lineal, acopla las variables x y z e induce la reinyección regresando el flujo al inicio del movimiento en espiral.

En la figura 5.10 se muestran proyecciones del espacio de estados en el plano $x - y$ de los atractores correspondientes a las dinámicas del modelo de Rössler para $a = b = 0.1$ y $c = 4, 6, 12, 8.5, 12.6, 8.7, 13, 9, 18$ con un paso de integración de 0.01. Los valores de c se ordenaron de acuerdo al tipo de dinámica que generan: de la más simple a la más irregular. Las seis primeras dinámicas están en régimen periódico ($\lambda_{max} < 0$) y las últimas tres en caótico ($\lambda_{max} > 0$). La gráfica para (λ_{max}) se encuentra en la figura 5.11.

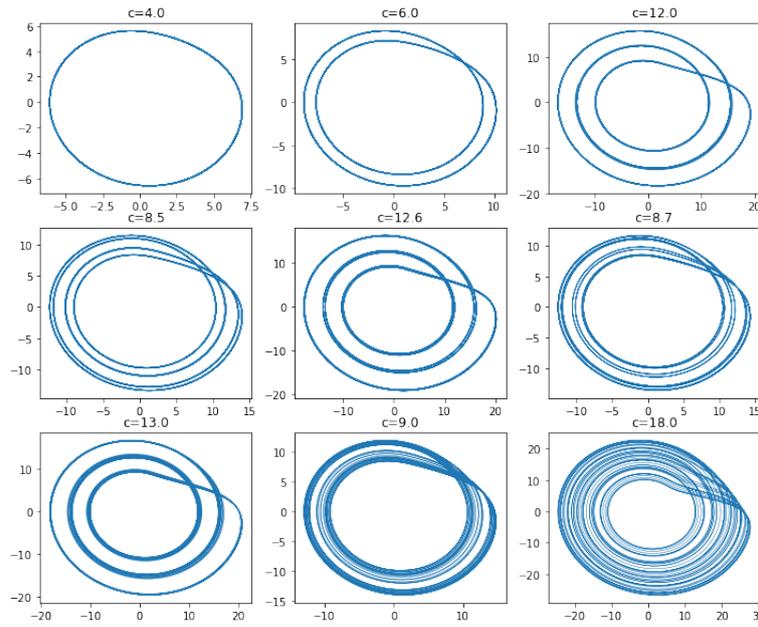


Figura 5.10: Estados dinámicos del sistema de Rössler para $a = b = 0.1$ y distintos valores de c .

El índice J se determina a partir de su modalidad bivariante para los estados mencionados anteriormente. En la figura 5.11 se muestran las gráficas del índice J y de λ_{max} . Se observa que J tiene valores cercanos a 1 para las dinámicas caóticas ($\lambda_{max} > 0$) y cercanos a 0 para las periódicas ($\lambda_{max} < 0$). También se aprecia que J es sensible al aumento de periodo pues su valor se incrementa conforme lo hace la periodicidad, a diferencia de λ_{max} que se mantiene prácticamente con el mismo valor para todas las dinámicas periódicas.

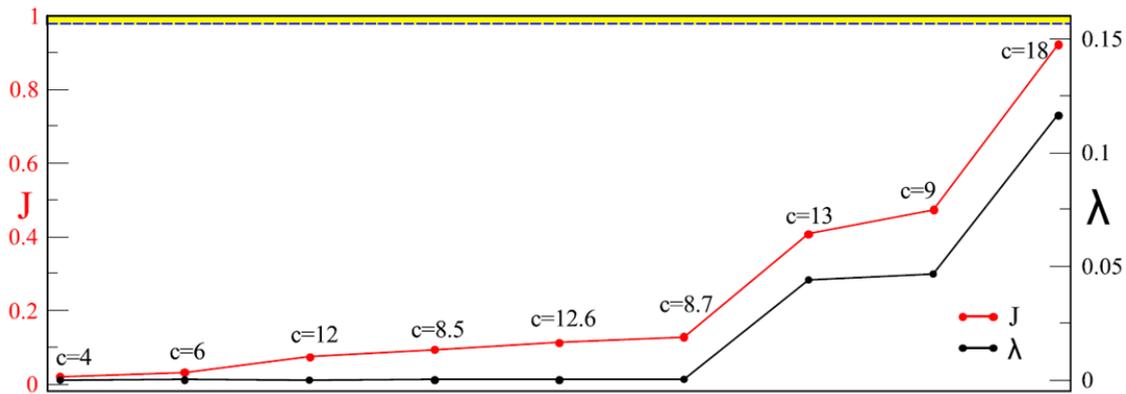


Figura 5.11: Resultados numéricos del índice J (rojo) y λ_{max} (negro) para un oscilador tipo Rössler con distintos tipos de dinámicas. Para $c = \{4, 6, 12, 8.5, 12.6, 8.7\}$ el sistema está en régimen regular con periodicidad de $\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ respectivamente. Para $c = \{13, 9, 18\}$ el sistema está en régimen caótico. La franja superior en amarillo indica la zona de resultados estadísticamente no significativos. Todos los valores por debajo de la franja tienen significancia con $p < 1\%$.

Al calcular J en la modalidad univariante se obtienen resultados similares al caso bivariante: valores pequeños para el régimen periódico y valores altos pero significantes para el caso caótico. En la figura 5.12 se muestra la gráfica de J para distintos niveles de retraso en las variables x (curva verde) y z (curva azul). La gráfica 5.12.a corresponde a un sistema Rössler en régimen caótico ($c = 18$) y 5.12.b a uno periódico ($c = 6$). En ambos casos J_x presenta oscilaciones más pronunciadas que J_z , esto puede explicarse por la naturaleza de las variables y porque el índice J no es una medida asintótica como los exponentes de Lyapunov.

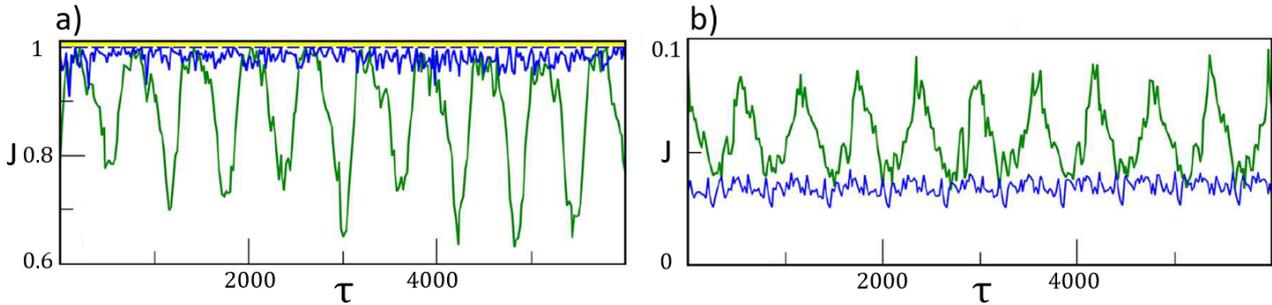


Figura 5.12: Resultados numéricos para el índice J en la modalidad univariante para la componente x de un oscilador tipo Rössler en régimen a) caótico ($c = 18$) y b) periódico ($c = 6$). La franja superior en amarillo de la gráfica a) indica la zona de resultados estadísticamente no significativos. Todos los valores por debajo de la franja tienen significancia del 1%.

5.1.5. Oscilador de van der Pol

En 1927 Balthazar van der Pol, mientras trabajaba para la empresa Philips, introdujo un modelo matemático para circuitos eléctricos con resistencia no lineal que describe las oscilaciones de un triodo². La importancia de su trabajo radica en que fue pionero en mostrar comportamientos caóticos de manera experimental. Además, sirve como base para explicar otros fenómenos más complicados como los potenciales de acción en neuronas. Este modelo fue publicado en la revista *Nature* [97] y está determinado por la ec. 5.8.

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = b \cos(\omega t), \quad (5.8)$$

donde μ y b son constantes positivas. Para $b = 0$ se obtiene una ecuación autónoma y si al mismo tiempo se hace $\mu = 0$ entonces la ecuación se reduce a la del oscilador armónico. Otra manera de representar este modelo se muestra en la ec. 5.9.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= 0.3(1 - x^2)y - x. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Para conseguir dinámicas que se encuentren en un régimen cuasiperiódico se acoplan dos osciladores de van der Pol en la variable y mediante un acoplamiento difusivo bidireccional como

²Un triodo es un tubo de vacío con tres electrodos que sirve como válvula electrónica de amplificación. Posteriormente fue reemplazado por el transistor.

se muestra en las ec. 5.10:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{y}_1 &= 0.3(1 - x_1^2)y_1 - x_1 + \gamma(y_2 - y_1), \\ \dot{x}_2 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= 0.3(1 - x_2^2)y_2 - x_2 + \gamma(y_1 - y_2), \end{aligned} \quad (5.10)$$

donde las variables (x_1, y_1) pertenecen al primer oscilador, (x_2, y_2) al segundo y $\gamma = 0.5$ es el parámetro de acoplamiento. En la figura 5.13 se muestran los atractores de cada oscilador y en la figura 5.14 las series de tiempo correspondientes a la variable x_i de cada oscilador. Las simulaciones se realizaron usando un paso de integración de 0.01.

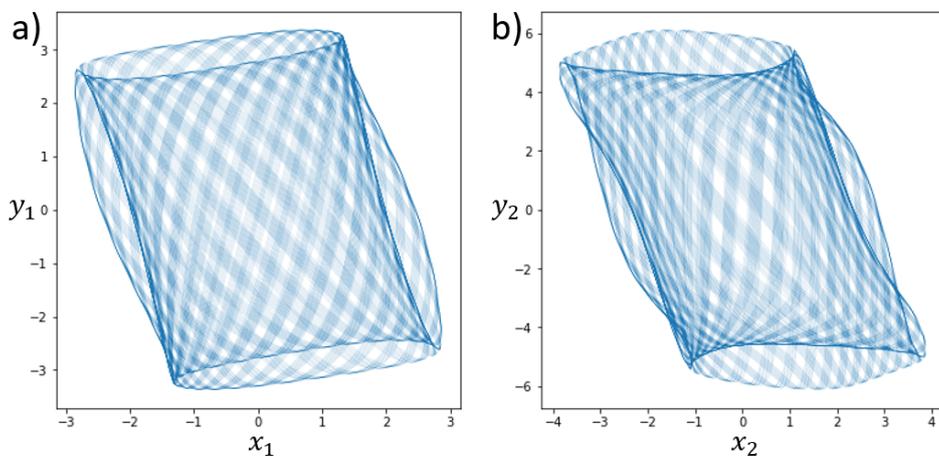


Figura 5.13: Proyecciones en el plano $x - y$ del atractor correspondiente al a) oscilador 1 y b) oscilador 2 acoplados mediante el modelo que aparece en las ecuaciones 5.10.

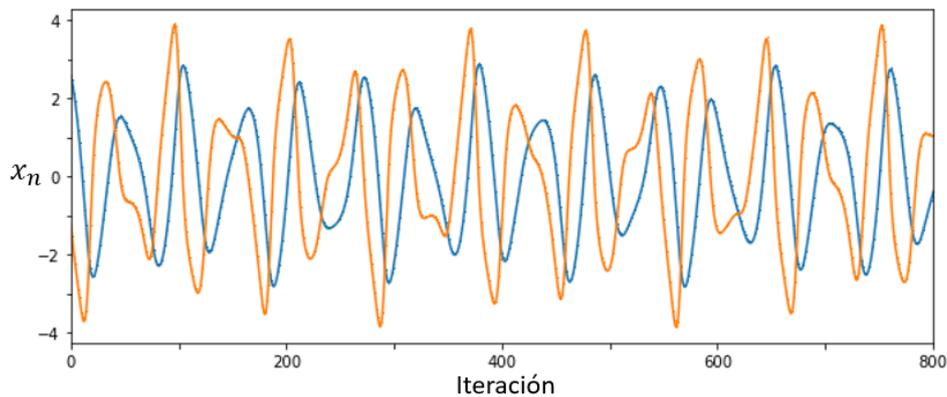


Figura 5.14: Series de tiempo correspondientes a la componente $x_{1,2}$ de los osciladores de van der Pol acoplados según las ecuaciones 5.9.

Al calcular el índice J para el sistema acoplado se obtiene $J = 0.04$, valor que claramente es distinto a los obtenidos para las dinámicas caóticas. Esto sugiere que el índice J es capaz de distinguir entre una dinámica cuasiperiódica y una caótica.

5.2. Influencia de ruido

La gran mayoría de las series de tiempo que se obtienen a partir de mediciones realizadas sobre sistemas reales contienen cierta cantidad de ruido. El ruido puede deberse a la naturaleza intrínseca del sistema, los instrumentos de medición o alguna otra causa. Entonces, para poder aplicar el índice J a datos reales primero debe verificarse que los resultados sean robustos ante la influencia de ruido.

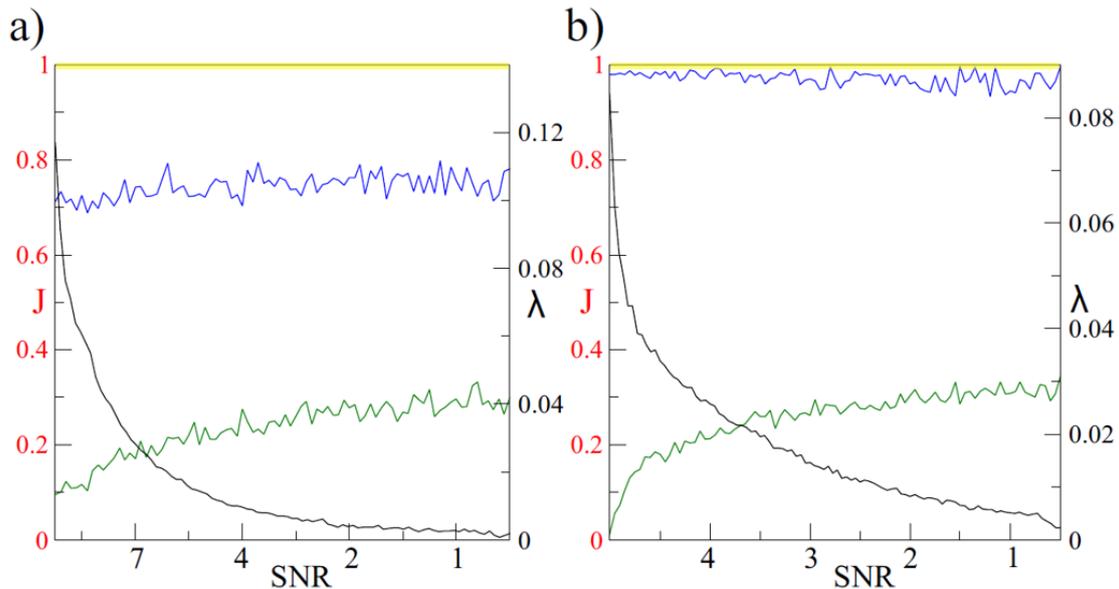


Figura 5.15: Resultados numéricos del índice J como función del cociente $SNR = \sigma_{senal}/\sigma_{ruido}$ para sistemas tipo: a) Rössler periódico ($c = 12$) y caótico ($c = 18$), b) Lorenz periódico ($\rho = 100.5$) y periódico ($\rho = 28$). En color verde se muestra el valor de J para los sistemas periódicos y en azul para los caóticos. En color negro se muestra λ_{max} para los sistemas en régimen caótico. La franja superior en amarillo indica la zona de resultados estadísticamente no significativos. Todos los valores por debajo de la franja tienen significancia con $p < 1\%$.

Para estudiar los efectos del ruido en la determinación de J se tomaron dos osciladores tipo Rössler, uno en régimen periódico ($c = 12$) y el otro en caótico ($c = 18$). A la variable x de cada oscilador se le agregó ruido blanco con desviación estándar σ_{ruido} . Para cuantificar la cantidad de ruido en la serie se define el cociente $SNR = \sigma_{senal}/\sigma_{ruido}$, el cual tiende a cero a medida que aumenta la cantidad de ruido. Para cada oscilador se calculó el índice J de forma bivalente utilizando las variables x y y . En la figura 5.15.a se muestran los resultados de J para el oscilador periódico (verde) y caótico (azul). Para el sistema caótico también se muestra λ_{max} (negro). Se puede observar que J mantiene valores bajos para el oscilador periódico y que conserva valores altos para el oscilador caótico incluso cuando las señales tienen altas cantidades de ruido. También se puede ver que conforme aumenta la cantidad de ruido λ_{max} tiende a cero y ya no es capaz de detectar que la señal proviene de un sistema caótico. Este experimento se repitió para un oscilador tipo Lorenz con dinámica periódica ($\rho = 100.5$) y otro con dinámica caótica ($\rho = 28$). Cualitativamente se observan los mismos resultados que en el caso de los

osciladores tipo Rössler. La conclusión es que el ruido ejerce poca influencia sobre la estimación del índice J .

5.3. Influencia de la distancia en la trayectoria de la caminata sobre la determinación del índice J .

En la sección de la metodología se explicó que para calcular el índice J se utilizan las fases de Fourier para crear una caminata sobre la superficie de un toro de dimensión 3. Y que para determinar el siguiente paso en la caminata se elige la trayectoria con la longitud euclidiana más corta entre dos puntos subsecuentes para cumplir con los requisitos de una métrica y evitar ambigüedades en el procedimiento. En esta sección se discuten los efectos sobre la estimación del índice J al elegir trayectorias con distintas longitudes.

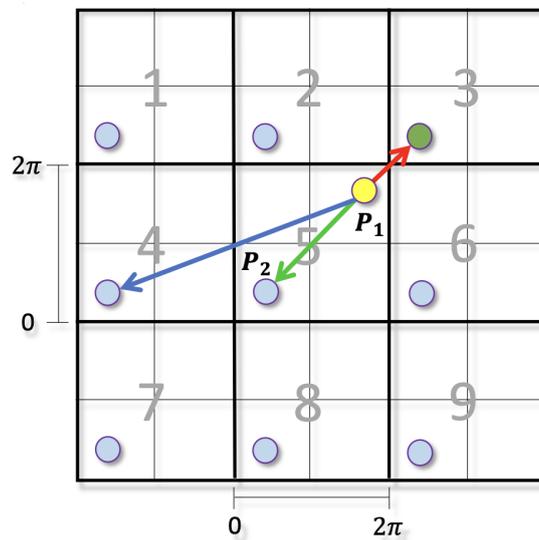


Figura 5.16: Los círculos ilustran las nueve posibles opciones que no presentan rotaciones completas para avanzar del punto P_1 (amarillo) al punto P_2 . La flecha en rojo ilustra la trayectoria con la distancia euclidiana más corta, la flecha azul ilustra una trayectoria con distancia euclidiana mayor y la flecha en verde ilustra una trayectoria que se mantiene en el cuadrante central.

En la figura 5.16 se ilustran las nueve posibles opciones que no implican rotaciones completas, ya sea en la dirección toroidal o poloidal, que permiten avanzar del punto P_1 al punto P_2 . Las flechas ilustran tres posibles trayectorias: 1) Trayectoria con la distancia euclidiana más corta (flecha roja), 2) Trayectoria con una distancia euclidiana mayor al caso anterior (flecha azul) y 3) Trayectoria que se mantiene en el cuadrante central, es decir, no presenta cruces en la dirección toroidal ni poloidal (flecha verde). Utilizando cada una de estas tres posibles trayectorias se calcula el índice J para los osciladores tipo Rössler descritos en la sección 5.1.4.

La figura 5.17 muestra los resultados numéricos del índice J al utilizar las tres trayectorias ilustradas en la figura 5.16. La curva en color rojo corresponde al caso 1), la color azul al caso

2) y la color verde al caso 3). La curva en color negro indica λ_{max} y la franja en color amarillo indica la región de resultados no significativos con una significancia del 1%. Se puede observar que, mientras se respete la topología del toro, elegir otros tipos de distancias producen resultados cualitativamente similares entre si y con λ_{max} . En cambio, si no se toma en cuenta la topología del toro y las distancias solamente se eligen dentro del cuadrante central, los resultados dejan de ser cualitativamente equivalentes a λ_{max} . Por ejemplo, al aumentar la caoticidad del sistema estudiado la curva verde presenta una disminución en sus valores en lugar de un incremento como λ_{max} .

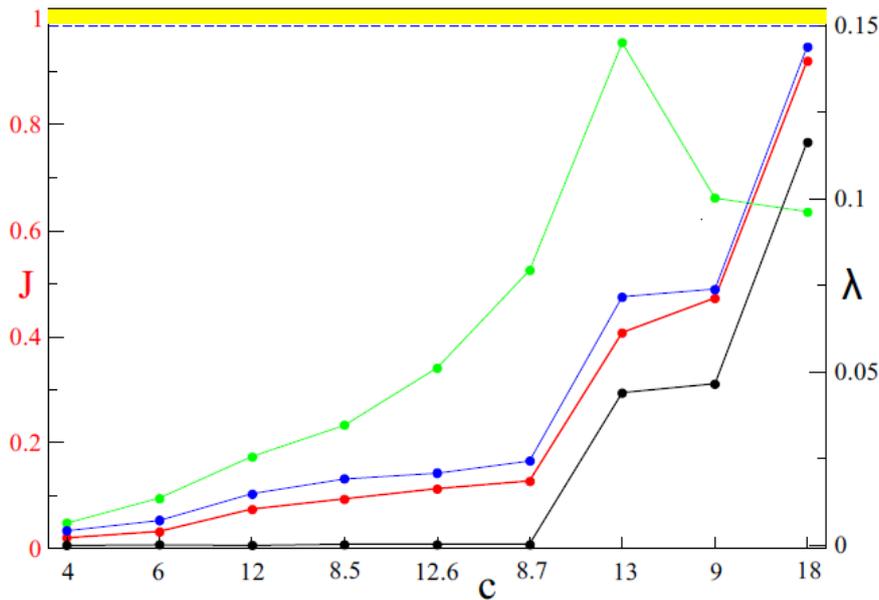


Figura 5.17: Resultados numéricos del índice J calculado a los sistemas tipo Rössler descritos en la sección 5.1.4 al utilizar las de distancias ilustradas en la figura 5.16 para elaborar la caminata sobre la superficie del toro tridimensional. La curva en azul corresponde al caso 1), la curva en rojo al caso 2) y la curva en verde al caso 3). La curva en negro indica los valores de λ_{max} . La franja superior en amarillo indica la zona de resultados estadísticamente no significativos. Todos los valores por debajo de la franja tienen significancia con $p < 1\%$.

5.4. Sensibilidad a interrelaciones lineales

El índice J no es sensible a las posibles interrelaciones lineales que pudiesen existir entre dos series de tiempo. Esto se debe a que el índice J se obtiene únicamente a partir de la información no lineal contenida en las fases de Fourier. Para mostrar esta característica se estudia el modelo formado por el conjunto de ecuaciones 5.11:

$$\begin{aligned} S_1 &= (1 - \rho)x_1 + \rho x_3, \\ S_2 &= (1 - \rho)x_2 + \rho x_3, \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde x_1, x_2, x_3 son diferentes señales de ruido blanco y $\rho \in [0, 1]$ es el parámetro de acoplamiento lineal entre las señales S_1 y S_2 . Cuando $\rho = 0$ las señales S_1, S_2 son completamente independientes y por tanto su correlación lineal es igual a 0. Para $\rho = 1$ las señales S_1, S_2 son idénticas y entonces su correlación lineal es igual a 1.

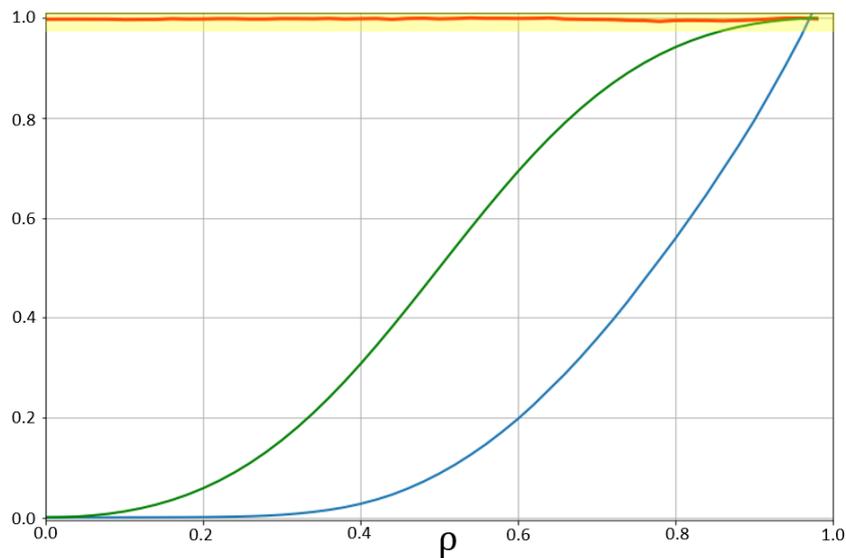


Figura 5.18: Resultados numéricos para el cálculo del índice J (rojo), información mutua (verde) y coeficiente de correlación de Pearson (azul) para el modelo definido por las ecuaciones 5.11. La franja superior en amarillo indica la zona de resultados estadísticamente no significativos. Todos los valores por debajo de la franja tienen significancia con $p < 1\%$.

En la figura 5.18 se muestran los resultados de la correlación de Pearson (verde), la información mutua I (azul) e índice J (rojo) para el modelo 5.11. Se puede observar que a medida que se incrementa el acoplamiento lineal ρ , la correlación e información mutua incrementan sus valores monótonamente hasta llegar al valor de 1 indicando que existe un fuerte acoplamiento lineal entre las series S_1 y S_2 . En cambio, el índice J siempre mantiene valores cercanos a 1 sin importar el grado de acoplamiento ρ lineal entre las series. Es decir, el índice J es capaz de identificar la naturaleza estocástica de las series aún cuando están sujetas a fuertes interrelaciones lineales. Esta propiedad del índice J explica por qué en la aplicación univariante el valor del parámetro τ no es relevante en la determinación numérica de J .

El hecho de que del índice J no sea sensible a las interrelaciones lineales puede presentar una ventaja sobre otros métodos de análisis dependiendo del tipo de estudio que se quiera realizar. Por ejemplo, los trabajos de Michael Rosenblum [98] y Thomas Kreuz [99] sobre sincronización de osciladores caóticos acoplados linealmente han mostrado que los exponentes de Lyapunov son sensibles al acoplamiento ρ .

5.5. Sistemas reales

Con el propósito de comenzar a explorar y mostrar la utilidad del índice J en datos provenientes de experimentos reales elegimos como prueba de concepto 1) datos provenientes de EEG, 2) registros de fluctuaciones de densidad en los sedimentos de un paleolago y 3) registros de variaciones de temperatura en el paleoclima de Antártida y Groenlandia.

5.5.1. Registros de EEG

Se analizaron datos de un registro electroencefalográfico (EEG) intracraneal proveniente de dos electrodos implantados en la zona del inicio de las crisis de un paciente con epilepsia del lóbulo temporal (Convulsión 1 descrita en [29]). Con la finalidad de obtener una gráfica con resolución en el dominio de tiempo y frecuencia, se calculó el índice J para cada segmento de tiempo con una duración de 30 segundos sobre una ventana de frecuencia compuesta por 32 bins de frecuencia. Dado que la frecuencia de registro es de 250 Hz, entonces cada ventana de frecuencia corresponde a 1 Hz y se desplaza en pasos de 1 Hz sobre todo el espectro de fases, obtenido por esas 25 ventanas de frecuencia. Para cada una de estas ventanas de tiempo se calculó el índice J en su modalidad bivariada y univariada y los resultados se compararon con los obtenidos por caminatas aleatorias sobre el toroide usando la metodología explicada anteriormente. En el caso bivariado también se utilizaron números aleatorios pero se conservaron las posibles diferencias en las fases de Fourier entre los dos espectros para mantener las correlaciones cruzadas lineales³ [100]. Estos resultados también se compararon con los obtenidos para 25×99 espectros de fases aleatorias, el factor 25 aparece debido a la corrección de Bonferroni utilizada para pruebas múltiples. Para que los resultados tengan un nivel de significancia del 1%, solamente se aceptan los valores de J que están por debajo de los estimados para las caminatas aleatorias y en caso contrario se fijan como $J = 1$ que es el valor de ruido. Estos resultados se muestran en la figura 5.19.

En la figura 5.19 se observa que para el período previo a la convulsión existen varios eventos significativos entre los segundos 500 y 550 para todo el rango de frecuencia considerado, especialmente para el electrodo 1 en el caso univariante. Según el neurofisiólogo José Fernando Zapata Berruecos (JFZ-B), estos eventos coinciden con alguna actividad similar a la ictal de corta duración. También después del inicio de las convulsiones se puede observar un ligero aumento de signos de determinismo. Posteriormente al término de la convulsión se observa evidencia sólida de una dinámica determinista, al principio en toda la región de frecuencia mostrada en la figura y después principalmente para componentes lentos por debajo de 20 Hz, donde los valores J toman valores menores a 0.2. También se analizó la crisis 2 del mismo sujeto descrita en [29], obteniendo resultados cualitativamente similares.

³En realidad este paso no es necesario para el análisis como se mostró en la sección 5.4

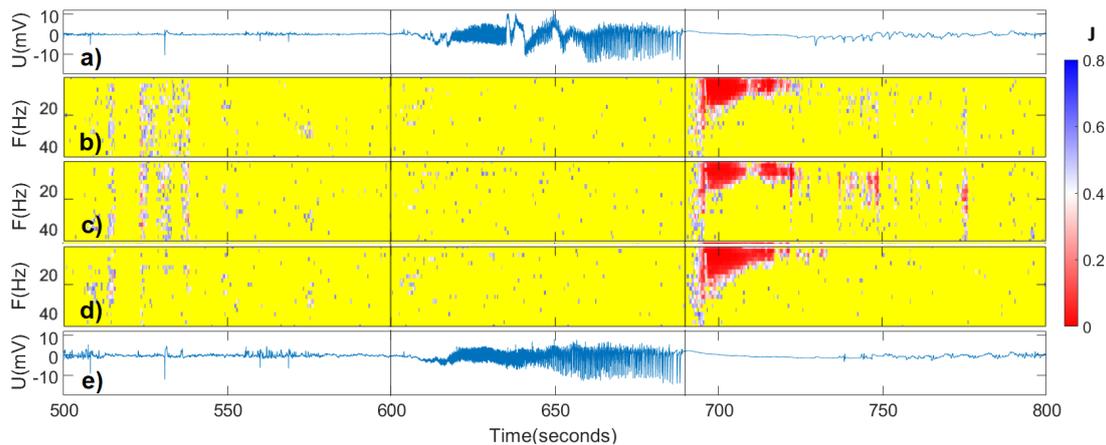


Figura 5.19: Registro de los electrodos 1 (panel a) y 2 (panel e) ubicados dentro de la zona de inicio de las convulsiones. El panel b) muestra los resultados del índice J en la aplicación bivariada. Los paneles c) y d) muestran los resultados de J en aplicación univariante para los electrodos 1 y 2 respectivamente. Todos los resultados mostrados están corregidos de forma sustituta en un nivel de significancia del 1% con corrección de Bonferroni. Los resultados significativos para J se muestran en rojo, blanco y azul. Los resultados que no se distinguen de ruido aparecen en amarillo. El inicio y final de la convulsión están indicados con las líneas verticales negras.

En principio, lo que se espera es que la medida J detecte la actividad convulsiva como un evento determinista intermitente. Esto no sólo se debe a las pronunciadas oscilaciones de baja frecuencia y gran amplitud, especialmente durante la parte final de la convulsión, sino también a que se espera un aumento pronunciado de la sincronización de enormes poblaciones neuronales extendidas espacialmente durante este período [101]. Uno podría interpretar intuitivamente ambas características como producto de una dinámica determinista. Por lo tanto, es sorprendente, a primera vista, que las estimaciones de J sean consistentemente no significantes durante la convulsión, pero altamente significantes después. Sin embargo, el hecho de que una señal contenga oscilaciones de alta amplitud y baja frecuencia no implica que esto se deba a una dinámica determinista, o que la estructura determinista detrás de esta actividad sea lo suficientemente pronunciada como para que pueda ser detectada por la medida J . Recordemos que, debido al teorema de Wiener-Khinchin, la secuencia de amplitudes de Fourier refleja propiedades exclusivamente lineales, que no tienen nada que ver con el determinismo. Cualquier cambio en el espectro de potencia no es relevante para J . En otras palabras, para cada serie de tiempo que surge de un sistema dinámico existe una serie de tiempo de ruido que comparte las mismas propiedades lineales, a saber, espectros de potencia y distribución de amplitud. Además, una sincronía pronunciada no es un indicador de determinismo, dado que la actividad estocástica pura también puede estar altamente sincronizada.

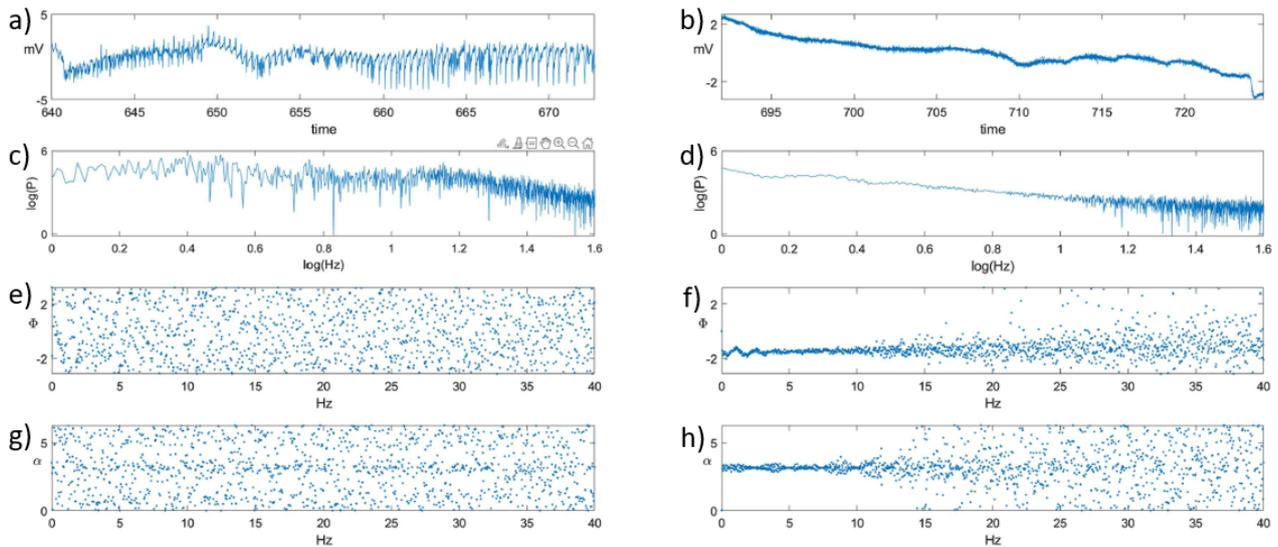


Figura 5.20: Ampliación de aproximadamente 30 s para: a) parte final de la convulsión y b) el período inmediatamente posterior a la convulsión donde el índice J muestra resultados significativos (zonas en rojo en los paneles a, b y d en la figura 5.19). Los paneles c) y d) muestran los espectros de potencia en escala logarítmica correspondientes a los registros a) y b) respectivamente. Paneles e) y f) muestran el espectro de las fases de Fourier $\Phi(f)$, mientras que los paneles g) y h) muestran la distribución de los ángulos $\alpha(f)$ para los registros mostrados en a) y b) respectivamente.

La Figura 5.20 ilustra con más detalle el resultado aparentemente sorprendente del análisis de las incautaciones. En los paneles a) y b) se muestra una ampliación de los registros EEG durante la parte final de la convulsión y el período inmediatamente posterior a la convulsión, mientras que los paneles c) y d) muestran los espectros de potencia correspondientes en escala logarítmica hasta 40 Hz. Es evidente el aumento considerable de la potencia de la señal dentro de las bandas δ , 0.5-3.5 Hz, y Θ , 3.7-7.5 Hz, durante la parte final de la convulsión. Los paneles e) y f) muestran los espectros de fase correspondientes de ambos segmentos de datos. Si bien las fases de Fourier durante el período de la convulsión parecen comportarse de manera aleatoria, la distribución de $\Phi(f)$ durante la post-convulsión es unimodal centrada ligeramente por encima de -2 y se hace más amplia con frecuencias crecientes. Este comportamiento también se traduce en los ángulos de desviación $\alpha(f)$. Durante el período posterior a la convulsión se nota una clara preferencia por ángulos cercanos a $\alpha = \pi$, en particular por frecuencias bajas que producen fuertes correlaciones en la fase de caminata, que se detecta fácilmente con la medida J . En contraste con esto, durante la convulsión la distribución de los ángulos α es casi uniforme y muestra sólo una ligera preferencia por $\alpha = \pi$ y $\alpha = 0, 2\pi$. Teniendo en cuenta que la topología del toro también provoca correlaciones en la distribución de los ángulos de desviación (lo cual es diferente al movimiento libre en un espacio tridimensional), este comportamiento es estadísticamente difícil de distinguir de una caminata aleatoria no correlacionada sobre el toro. En consecuencia, las estimaciones α siguen sin ser no significantes.

Es importante enfatizar que en este trabajo no sacamos ninguna conclusión sobre la epilepsia. Únicamente tomamos este ejemplo para ilustrar la utilidad del índice J en su aplicación con resolución en los dominios de tiempo y frecuencia a datos del mundo real que surgen de un sistema complejo de muy alta dimensión como el cerebro humano.

5.5.2. Registros de fluctuaciones de densidad en sedimentos de diatomeas

Se analizaron datos provenientes de una secuencia con los valores de atenuación de rayos X, obtenidos mediante tomografía computarizada, proporcionales a las fluctuaciones de densidad en los sedimentos de una mina de diatomeas ubicada en el lecho de un paleolago en Tlaxcala, México. Estos datos se muestran en la curva negra sólida de la figura 5.21.

Las laminaciones alternadas de ceniza volcánica oscura y restos blanquecinos de diatomeas que se encuentran en la mina indican periodos de perturbaciones volcánicas fuertes y débiles seguidas de la deposición de diatomeas. Esta mina se ha señalado como una fuente impresionante para el estudio de perturbaciones de frecuencia-intensidad en la naturaleza [102]. Una descripción detallada de los datos se puede encontrar en [103, 104]. La secuencia de sedimentos abarca un período de varios miles de años, por debajo del límite Plioceno-Pleistoceno, hace más de 2.6 millones de años. La actividad volcánica intensa podría, por un lado, detener la deposición de diatomeas y, por otro, aumentar el crecimiento de diatomeas mediante aportes de nutrientes. Simultáneamente, los cambios tectónicos-geomorfológicos profundizaron progresivamente la cuenca lacustre, a lo que las diatomeas respondieron desplazando su riqueza de especies y el número de células.

Estudios anteriores [104, 105] han mostrado que los conjuntos de datos analizados se dividen en una región más antigua de actividad volcánica fuerte y frecuente, que comprende los primeros 4010 puntos de datos (región I figura 5.21), y una región más joven de eventos volcánicos menos frecuentes, con una longitud de 5475 registros (región II figura 5.21). Las regiones muestran un comportamiento de escala diferente [104] y diferentes autocorrelaciones [105]. Para la región II, un análisis de fluctuación revela un comportamiento autosimilar, que se relacionó con un tipo de respuesta a eventos raros ante las intensas erupciones volcánicas, después de las cuales el lago entra en un proceso de relajación que tiende a un estado estacionario que podría asociarse a la reanudación de las condiciones de crecimiento de las diatomeas.

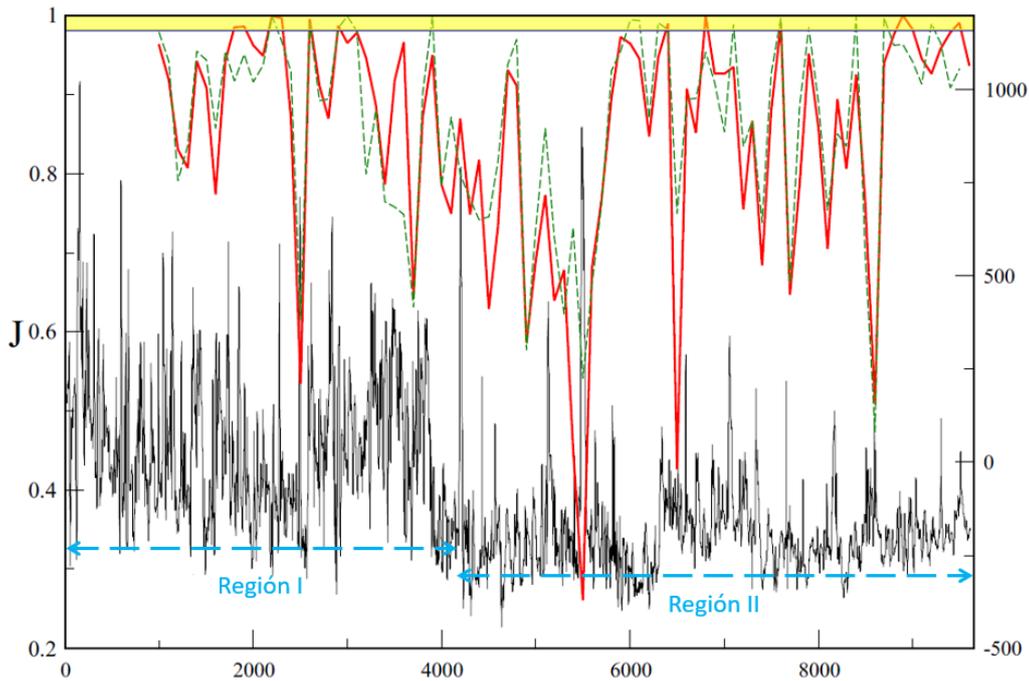


Figura 5.21: Fluctuaciones de densidad en sedimentos (curva negra) provenientes de la mina Santa Bárbara que está dentro del lecho de un paleólogo ubicado en Tlaxcala, México. Las variaciones en la densidad de la capa de sedimento se miden cada 0.25 mm mediante valores de atenuación de tomografía computarizada de rayos X proporcionales en unidades Hounsfield (escala de la derecha). Las flechas punteadas en color azul indican las regiones de eventos volcánicos fuertes y frecuentes (Región I) y de eventos volcánicos menos frecuentes (Región II). También se muestran los resultados numéricos del índice J para el registro de las fluctuaciones de densidad utilizando $\tau = 1$ (curva en rojo) y $\tau = 150$ (curva punteada en verde). La franja superior en amarillo indica la zona de resultados estadísticamente no significantes. Los valores por debajo de la franja son significantes con una significancia $p < 1\%$.

Para el conjunto de mediciones mostrado en la figura 5.21, se calculó el índice J en la modalidad univariada utilizando segmentos de 1000 registros con diferentes retardos temporales ($\tau = 1$ en rojo y $\tau = 150$ en verde), con ventanas superpuestas cada 100 puntos de datos a lo largo de toda la secuencia. Se observa que ambas curvas, a pesar de tener distinto valor de τ , muestran un alto grado de similitud entre sí teniendo un coeficiente de correlación de Pearson igual a 0.799. Esto indica que los resultados de J son independientes del valor de τ como ya se mostró en la sección 5.4. Posteriormente se hicieron pruebas adicionales utilizando otros valores distintos de τ que confirmaron la débil dependencia de J al retardo temporal. Además, se calculó la función de autocorrelación para la secuencias de las fases de Fourier obtenidas a partir de los datos empíricos. La longitud de autocorrelación lineal resultó ser cero. También se varió la longitud de la ventana obteniendo las mismas características cualitativas que se muestran en la figura 5.21. La elección de la longitud de la ventana está de acuerdo con los resultados del rango de escala [104]. Queremos enfatizar que las estimaciones de J son casi siempre significativas, tomando valores muy por debajo de la región de significancia del 1%.

En la curva de los valores de J se pueden identificar diferentes tendencias de datos vinculadas a mesetas de fluctuación, así como cambios en la profundidad del lago [103]. Las transiciones entre diferentes agrupaciones de diatomeas, donde las irregularidades en la población de diatomeas son altas, coinciden con picos de J . De particular interés es el mínimo pronunciado coincidente con un evento volcánico masivo (tefra). Aquí, la población de diatomeas fue prácticamente eliminada [103], por lo tanto, J presenta su valor mínimo. El punto principal de este análisis es que el índice J puede revelar diversas propiedades que de otra manera estarían ocultas en datos que provienen de un sistema complejo. Este sistema analizado es complejo en el sentido de que es multifactorial, es decir, su dinámica depende de muchos parámetros.

5.5.3. Registros de paleoclima

El paleoclima es el estudio del clima que ocurrió en los períodos anteriores al desarrollo de instrumentos de medición directa y confiable para detectar variaciones en el clima. Por lo tanto, el paleoclima se estudia mediante registros indirectos llamados proxy. Un proxy es un registro natural que se correlaciona con el clima y a partir del cual se puede inferir el paleoclima. Algunos ejemplos de proxy usados en el paleoclima son los núcleos de hielo, granos de polen, los corales y los anillos en los troncos de árboles. Un núcleo de hielo es una muestra cilíndrica de hielo que se obtiene al perforar el sustrato, generalmente en regiones polares, a diferentes profundidades y entre sus indicadores para determinar el paleoclima se encuentran algunos isótopos de oxígeno.

Se analizaron datos de paleoclima provenientes de Antártida y Groenlandia. Para el caso de la Antártida los datos de la variación de temperatura se obtuvieron aplicando el modelo de edad CD3 [111] a los registros del isótopo δD provenientes de un núcleo de hielo del Domo C. Los datos para Groenlandia se obtuvieron aplicando el modelo de edad SS09 [112] a los registros del isótopo $\delta^{18}O$ provenientes de un núcleo de hielo del proyecto Summit. Ambos conjuntos de datos, Antártida y Groenlandia, se obtuvieron del sitio http://cdiac.ornl.gov/trends/co2/ice_core_co2.html y fueron interpoladas cada 100 años con un método de interpolación estocástica desarrollado por [113]. Los datos para la Antártida abarcan 800 ka (curva negra en la figura 5.22) y los de Groenlandia 248 ka (curva negra en la figura 5.23).

Tanto para los datos de Antártida como para los de Groenlandia, se calculó el índice J en la modalidad univariante utilizando $\tau = 1$. En el caso de Antártida el índice J se calculó utilizando segmentos de 500 datos con ventanas sobrepuestas cada 100 datos (curva verde en la figura 5.22). Para Groenlandia se usaron segmentos de 200 datos con ventanas sobrepuestas cada 50 datos (curva azul en la figura 5.23). La elección de los tamaños de ventana se realizó buscando la invarianza del exponente de Hurst H para asegurar cierto nivel de estacionalidad. Estos resultados mostraron que la región de Antártida presenta un comportamiento persistente ($H = 0.66$), mientras que la región de Groenlandia es antipersistente ($H = 0.22$). También se calculó la dimensión de Hausdorff D obteniendo $D = 1.33$ para Antártida y $D = 1.73$ para Groenlandia.

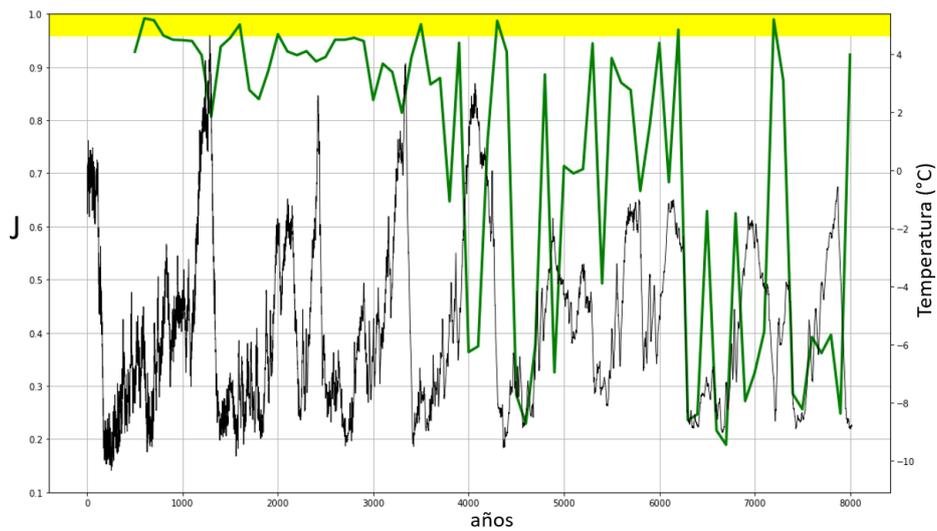


Figura 5.22: Resultados numéricos del índice J (verde) para los registros de variación de temperatura en Antártida (negro). La franja superior en amarillo indica la zona de resultados estadísticamente no significantes. Los valores por debajo de la franja son significantes con una significancia $p < 1\%$.

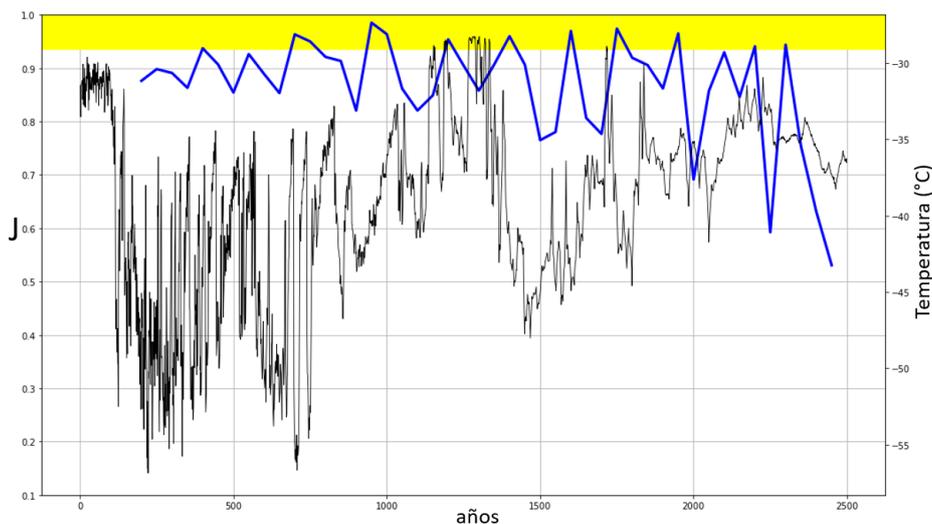


Figura 5.23: Resultados numéricos del índice J (azul) para los registros de variación de temperatura en Groenlandia (negro). La franja superior en amarillo indica la zona de resultados estadísticamente no significantes. Los valores por debajo de la franja son significantes con una significancia $p < 1\%$.

En las figuras 5.22 y 5.23 se observa que la mayoría de las estimaciones del índice J son significantes (están por debajo de la franja amarilla). Esto implica que las series de datos presentan algún signo de determinismo en su dinámica. Este es un resultado sumamente interesante, pues desde los trabajos pioneros de Lorenz en 1968 [114] determinar si el clima es determinista o

no se ha mantenido como una pregunta abierta. También se puede observar que, en promedio, los valores de J estimados para Groenlandia son más altos que los estimados para Antártida. Es decir, la dinámica de Groenlandia es más irregular que la dinámica en Antártida. Estos resultados son consistentes con los obtenidos a partir del exponente de Hurst.

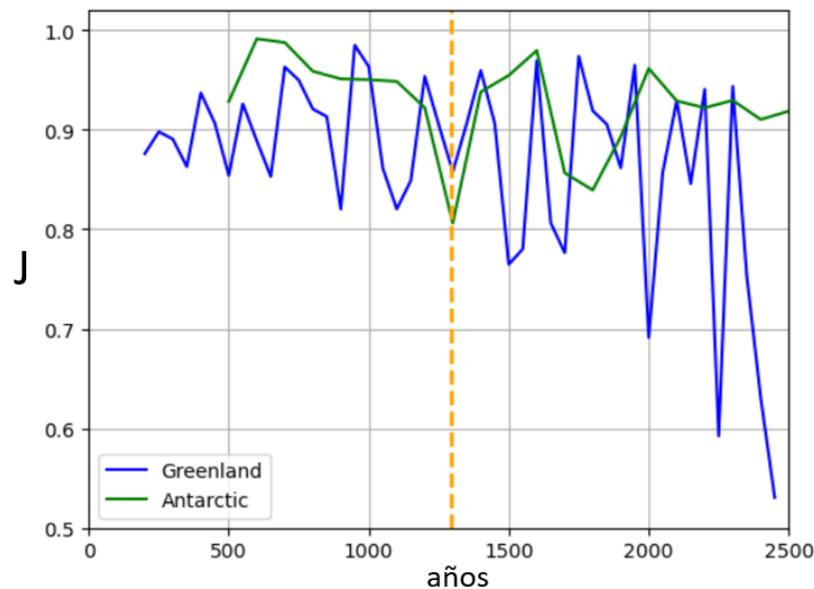


Figura 5.24: Resultados numéricos del índice J para Antártida (azul) y Groenlandia (verde). La línea punteada en color naranja indica la presencia de un mínimo en ambas curvas. Este mínimo coincide con la transgresión de Pelukian.

Al comparar las estimaciones del índice J correspondientes a Antártida y Groenlandia (figura 5.24) se observa la presencia de un mínimo en ambas curvas alrededor de 125,000 años atrás. Según la literatura [115], alrededor de esta fecha se tiene registrado en evento llamado *transgresión de Pelukian* que consiste en un incremento del nivel del mar debido al aumento de temperatura. Aún falta investigar qué otra información se puede extraer de los otros mínimos (o máximos) presentes en la curva de J .

Los resultados obtenidos en esta sección muestran que con el índice J es posible detectar importantes eventos climatológicos que no son visibles utilizando otros métodos. Además, la presencia de determinismo en las series es una motivación para seguir buscando modelos climatológicos deterministas.

Capítulo 6

Identificación de puntos críticos en imágenes

En este capítulo se muestran resultados preliminares sobre un nuevo método basado en la información contenida en las fases de Fourier para localizar el punto de percolación de un sistema a partir de las imágenes correspondientes al modelo.

6.1. Percolación

Durante la Segunda Guerra Mundial (1939-1945), Estados Unidos tuvo la necesidad de producir grandes cantidades de caucho debido a que las potencias del eje¹ controlaban la mayoría de los suministros mundiales de este elastómero natural. El caucho era importante porque se ocupaba para fabricar los neumáticos para los camiones de guerra y en otras muchas partes de diversas máquinas de guerra. Por las razones anteriores, y también debido al alto costo del caucho natural, Estados Unidos concentró sus esfuerzos en la producción masiva de caucho sintético. Esta situación provocó que se intensificara la investigación sobre los polímeros². Dentro de este contexto es que en 1941 Paul Flory, (quien fuera laureado en 1974 con el premio Nobel de química por sus logros fundamentales, teóricos y prácticos en el estudio de las macromoléculas) publicó un trabajo [106] en el que estudia el crecimiento de polímeros como redes ramificadas y demostró que la condición general para la formación de moléculas infinitamente grandes se expresa como:

$$\alpha = \frac{1}{f - 1}, \quad (6.1)$$

donde f es la funcionalidad de las unidades de ramificación y α es la probabilidad de ramificación de la cadena. Este proceso de polimerización se conoce como gelificación y en ciertos

¹Durante la segunda guerra mundial las naciones implicadas se dividieron en dos grupos: Aliados de la segunda guerra mundial y las potencias del eje (Alemania, Japón e Italia).

²Un polímero es una molécula de gran tamaño que se forma por la unión de unidades más pequeñas llamadas monómeros.

casos puede conducir a la formación de una red de enlaces químicos que abarcan todo el sistema.

En 1943, Walter Stockmayer [107] extendió el trabajo de Flory permitiendo identificar el punto de gelificación para la síntesis de polímeros sin equilibrio estequiométrico. Esta teoría de Flory-Stockmayer fue la primera en investigar los procesos que más tarde serían conocidos como percolación. Posteriormente, durante un simposio en Londres dedicado a los métodos de Monte Carlo en 1954, John Michael Hammersley presentó conferencia. Durante la discusión posterior Simon Ralph Broadbent le mencionó un problema interesante que podría analizarse utilizando algún método de Monte Carlo. El problema es el siguiente: “Dada una red regular de poros en dos o tres dimensiones de manera que dos poros vecinos estén conectados con una probabilidad p , ¿qué proporción de la red estaría llena de gas si éste se introduce por uno de los poros?”. Al plantear este problema Broadbent estaba pensando en el diseño de máscaras de gas para los mineros del carbón, específicamente en qué tamaño deberían tener los poros para ser funcionales. Al poco tiempo Broadbent y Hammersley comenzaron a trabajar juntos en el problema de “la propagación de un fluido en un medio aleatorio”, a este problema Hammersley lo llamó *percolación* debido a su similitud con el proceso que sucede dentro de una cafetera. Finalmente, en 1957 publicaron el primer artículo de teoría matemática sobre percolación [108].

Como un primer acercamiento, la percolación se puede considerar como un proceso opuesto a la difusión. En un proceso de difusión la especie difundida es quien decide hacia dónde y cómo moverse. En cambio, en un proceso de percolación el medio es el que decide cómo será el movimiento de la especie. Por lo tanto, si la conectividad de los componentes o de las distintas partes del medio es pobre entonces la especie no puede llegar muy lejos. Por otra parte, si los elementos que conforman el medio están bien conectados entonces la especie puede moverse libremente a casi cualquier lugar. La fracción de conectividad que tiene el medio se representa como p y con p_c se denota al valor *crítico* de conectividad tal que si $p < p_c$ la especie no es capaz de cruzar todo el medio. Cuando $p \geq p_c$ la especie es capaz de cruzar todo el medio y es cuando se dice que el sistema ha percolado. El valor p_c es un punto en el que ocurre una transición de fase geométrica pues indica el cambio de un sistema desconectado a uno conectado. Determinar el punto de percolación p_c para muchos sistemas 2D y 3D continúa siendo un problema abierto.

6.1.1. Simulación de un modelo de percolación

En este trabajo utilizamos un modelo de percolación por sitios sobre una retícula cuadrada bidimensional con conectividad de 8 vecinos cercanos. La probabilidad de que un sitio esté ocupado se representa con $p \in [0, 1]$, y la probabilidad de que el sitio esté vacío es $q = 1 - p$. En la literatura se reporta que este modelo percola en $p_c = 0.40$ [109]³.

³En realidad, el valor reportado es $p_c = 0.40725395$. Sin embargo, para los fines exploratorios de este trabajo utilizamos $p_c = 0.40$

	1	1	1				
	1	1	1				
	1	1	1				
						1	
				1	1		1
			1				

Figura 6.1: Diagrama de un estado de percolación para $p < p_c$. En color verde se muestra un clúster de tamaño 9 y en color azul un clúster de tamaño 5. Los vecinos cercanos se establecen utilizando la definición de Moore. Las celdas desocupadas se muestran vacías y no con 0 por simplicidad.

Para simular computacionalmente el proceso de percolación se crea una matriz A de ceros con dimensión (m, m) para cada valor de p . Cada entrada A_{nm} representa un sitio de una retícula cuadrada bidimensional. La entrada A_{nm} puede tener un máximo de 8 vecinos cercanos siguiendo el criterio de la vecindad de Moore. Posteriormente, para cada entrada A_{nm} se genera un número aleatorio con distribución normal $\xi \in [0, 1]$. Si $\xi \leq p$ entonces la entrada se considera ocupada y se hace $A_{nm} = 1$, en caso contrario la entrada continua vacía ($A_{nm} = 0$). Un clúster se forma cuando dos o más entradas vecinas están ocupadas y el tamaño del clúster es igual al número de entradas conectadas. En la figura 6.1 se ilustra el resultado de un estado del proceso de percolación correspondiente a $p < p_c$. En el diagrama se muestran dos clústeres indicados en distinto color cada uno.

Un método para localizar el punto de percolación p_c consiste en evaluar el tamaño del clúster máximo para cada estado del proceso de percolación. A medida que se incrementa el valor de p se van formando clústeres cada vez más grandes hasta que en el punto p_c aparece por primera vez un clúster gigante que atraviesa toda la retícula y que posteriormente va llenando toda la retícula. En la figura 6.2 se muestra la gráfica correspondiente al tamaño del clúster máximo contra el valor de p correspondiente a la simulación del modelo de percolación antes descrito. En la gráfica se observa un salto abrupto en la curva que es provocado por la aparición del primer clúster gigante que cruza la retícula de un extremo al extremo contrario. Este cambio de comportamiento indica que el sistema ha percolado y ocurre para $p_c = 0.40$, valor que coincide con el reportado en la literatura [109]. Para la simulación se crearon matrices A con dimensión de $(2^{13}, 2^{13}) = (2048, 2048)$ y se evaluaron cada $\Delta p = 0.01$. Se elige el valor de la dimensión como una potencia base 2 para poder implementar la curva de Hilbert, método que se discute más adelante.

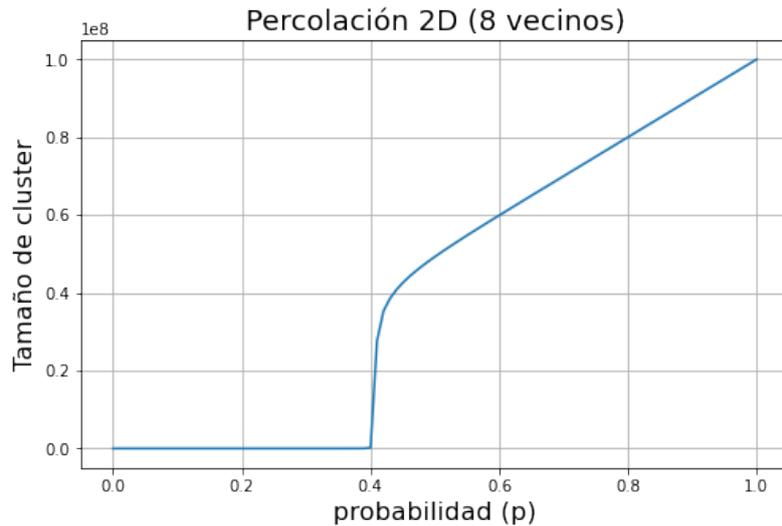


Figura 6.2: Gráfica del tamaño del clúster máximo contra el valor de p . Se observa que el sistema percola en $p_c = 0.40$.

Cada matriz A asociada a un estado del modelo de percolación con probabilidad p se puede representar mediante una imagen bidimensional a color. Estas imágenes tienen la misma dimensión en píxeles que la matriz A , y cada clúster se representa con un color distinto de acuerdo a su tamaño. En la figura 6.3 se muestran las imágenes correspondientes a tres estados distintos del modelo, en todas las imágenes el clúster máximo se representa en color amarillo. La primer imagen representa un estado $p < p_c$, se pueden observar clústeres de distintos tamaños y que el clúster máximo aún no es capaz de cruzar toda la retícula. La segunda imagen representa un estado justo en el punto de percolación p_c , se observa que el clúster máximo ya atraviesa toda la retícula de extremo a extremo. En la tercer imagen se aprecia como el clúster máximo comienza a llenar toda la retícula.

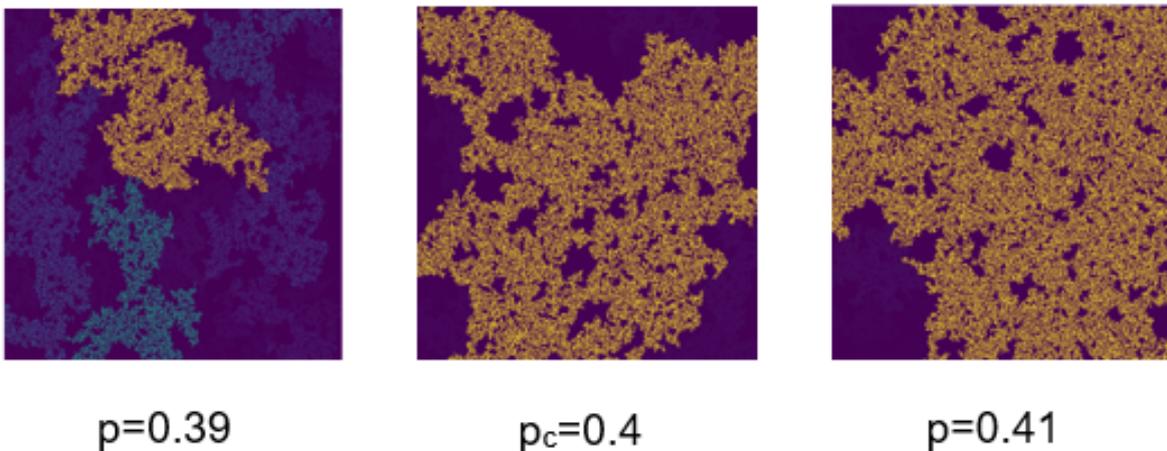


Figura 6.3: Las imágenes representan tres estados distintos del modelo de percolación: a) $p < p_c$, b) $p = p_c$ y c) $p > p_c$. En todos los casos el clúster máximo se representa en color amarillo.

6.1.2. Análisis de las imágenes

A continuación describimos el nuevo método de análisis propuesto. El primer paso consiste en cargar la imagen digital a color como una matriz. Una imagen digital a color con un tamaño de (m, m) píxeles se representa como una matriz I de tamaño (m, m) , donde cada entrada $I_{m,m}$ es una terna de valores entre 0 y 127. Cada valor representa la intensidad de los canales R, G y B respectivamente. El valor 0 indica el tono más intenso del canal y se va aclarando hasta llegar al valor de 127. Posteriormente se separa la matriz I en tres nuevas matrices I_R, I_G e I_B , cada una con la información correspondiente a los canales R, G y B de la imagen. Estas nuevas matrices conservan la información espacial sobre la disposición de los clústeres.

El siguiente paso es establecer una correspondencia que permita transformar la información bidimensional contenida en las matrices I a una serie de datos unidimensional que conserve la información espacial. Esto se logra utilizando la curva de Hilbert. La curva de Hilbert S_H es una curva fractal y simple⁴ que se construye mediante un proceso iterativo y se caracteriza por establecer una relación sobreyectiva entre el segmento $[0, 1]$ y el plano unitario $[0, 1] \times [0, 1]$ [110]. La distancia euclidiana entre dos puntos de la curva S_H está determinada por la relación $2^n - 1/2^n$, donde n es la n -ésima iteración. A medida que se incrementa el valor de n , la curva S_H se hace más extensa y se asegura que pasa por cualquier punto (x, y) perteneciente al plano unitario. Es decir, la curva S_H cubre todo el plano unitario. Además, esta curva es capaz de mantener la localidad en el sentido que dos puntos que se encuentran cercanos a lo largo de la curva S_H también serán cercanos en el plano. La afirmación contraria no siempre se cumple. En figura 6.4 se ilustran las primeras tres iteraciones del proceso de construcción de la curva S_h (rojo). Se puede observar que a mayor número de iteraciones la curva S_H tiene mayor longitud y tiende a llenar completamente el plano.

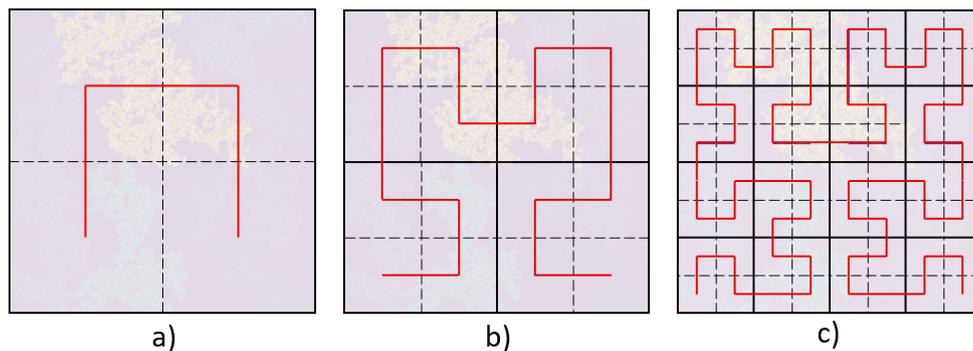


Figura 6.4: Ilustración del proceso mediante el cual la curva de Hilbert S_h , mostrada en rojo, cubre el plano. Se muestran las tres primeras iteraciones: a) $n = 1$, b) $n = 2$, c) $n = 3$.

Al construir la curva de Hilbert a las matrices bidimensionales I_R, I_G e I_B se obtienen las series de datos s_R, s_G y s_B . Estas series contienen información sobre la intensidad del color y posición relativa de los píxeles en la imagen original, que a su vez representa un estado del modelo de

⁴Que no se corta a sí misma.

percolación correspondiente a una probabilidad p . A continuación se aplica el método descrito en la sección correspondiente al índice J para obtener los ángulos α de una caminata sobre un toroide tridimensional. Con el fin de aplicar la modalidad bivalente del método, se organizan las series en las parejas (s_R, s_G) , (s_R, s_B) y (s_G, s_B) , obteniendo las series de ángulos α_{RG} , α_{RB} y α_{GB} respectivamente. Para cada serie de ángulos α se calcula el cociente definido en la ecuación 6.2

$$H_\alpha = \frac{H}{H_{max}}, \quad (6.2)$$

donde H_α es la entropía de Shannon sobre la distribución de ángulos α , y H_{max} representa la máxima entropía de Shannon que puede tener la misma distribución de ángulos α . La entropía de Shannon se define como $H = \sum_{i=1}^k P_i \log_2(P_i)$, donde k representa los estados de α y P_i es la probabilidad de que aparezca el ángulo α_i . De la ecuación 6.2 se puede ver que cuando la distribución de ángulos α presenta un alto grado de variabilidad se tiene $H \approx H_{max}$ y por tanto $H_\alpha \approx 1$. En cambio, cuando la distribución de ángulos α presenta desviaciones significantes a H_{max} entonces $H_\alpha \approx 0$. El último paso consiste en promediar los tres valores de H_α obtenidos a partir de las series α_{RG} , α_{RB} y α_{GB} , el resultado se muestra en la figura 6.5. En la figura se puede apreciar que para $0 < p < 0.4$ los valores de H_α prácticamente son iguales a 1, lo cual indica que la caminata sobre el toroide es muy irregular pues los ángulos α presentan un alto grado de variabilidad. Justo en el valor $p = 0.4$, valor que coincide con el punto de percolación del sistema, la curva de H_α comienza a disminuir hasta alcanzar valores cercanos a 0 conforme se incrementa la probabilidad p . Es decir, la curva correspondiente a los valores promedio de H_α presenta un comportamiento que permite identificar cuando la imagen corresponde al punto de percolación p_c . También permite conocer si la imagen está por debajo o encima de p_c . Es decir, si la imagen corresponde a un estado subcrítico o supercrítico.

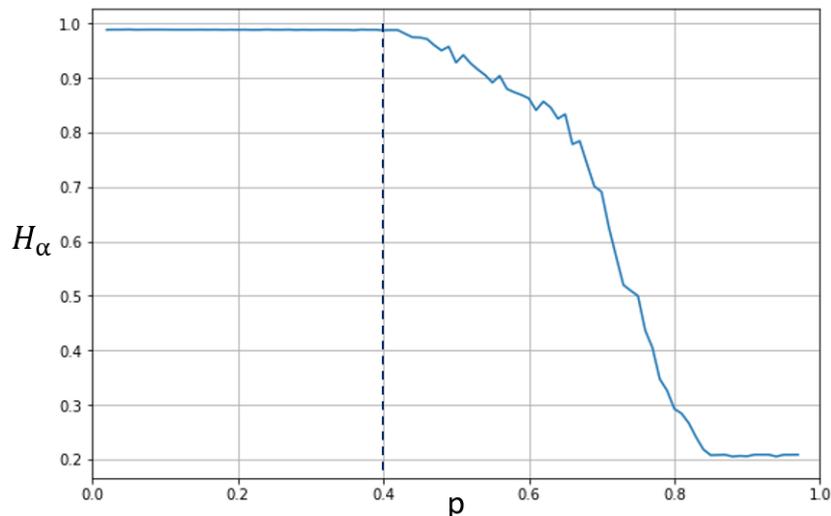


Figura 6.5: Resultados numéricos de H_α como función de la probabilidad de ocupación p para el modelo de percolación 2D de ocho vecinos. La línea vertical punteada en negro indica el valor de p_c .

El método antes descrito también se aplicó a un modelo de percolación por sitios sobre una

retícula cuadrada donde los vecinos cercanos se definen de acuerdo a la vecindad de von Neumann (4 vecinos). Los resultados fueron similares, la curva promedio de H_α mostraba un cambio de comportamiento justo en el punto de percolación $p_c = 0.59$.

Los resultados presentados en esta sección son importantes porque muestran un método que permite, al menos en los sistemas estudiados, identificar el punto de percolación a partir únicamente de la información espacial de imágenes asociadas al fenómeno. Esto significa que, a diferencia de los métodos clásicos, con la metodología presentada no es necesario conocer las ecuaciones del modelo de percolación para determinar los procesos subcríticos, críticos y supercríticos. Además, este trabajo abre el camino para una posible nueva clasificación de imágenes de acuerdo a la criticalidad de su información espacial.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo de investigación se mostró la importancia de las fases de Fourier en el área del análisis no lineal de series de tiempo. También se desarrollaron métodos que permiten extraer y aprovechar la información que contienen las fases. Se obtuvieron dos resultados principales: i) Índice estadístico para detectar irregularidades y signos de determinismo en series de tiempo y ii) Método para detectar puntos críticos en imágenes bidimensionales generadas por modelos de percolación. A continuación se hace una discusión sobre estos resultados.

Se introdujo un nuevo método para el análisis de series de tiempo que se basa exclusivamente en la información no lineal contenida en las fases de Fourier y que se centra en la determinación de un índice estadístico J . Este método se presenta como una alternativa simple y eficiente para los casos en que no es posible aplicar correctamente los métodos de análisis que se basan en la reconstrucción del espacio de estados. A continuación se enlistan las principales características del método:

- **Capacidad para extraer características deterministas no lineales en las series de tiempo.** El cálculo del índice J se realiza en el espacio de las fases de Fourier. De acuerdo con el teorema de Wiener-Khinchin, en las fases de Fourier se encuentra la información no lineal de un sistema y también la información sobre determinismo.
- **No es necesario realizar la reconstrucción del espacio de estados.** La reconstrucción del espacio de estados es un procedimiento restrictivo debido a que solamente puede aplicarse a sistemas deterministas, de baja dimensión y con bajos niveles de ruido. Además, en varios pasos de la reconstrucción es necesario realizar el ajuste de diversos parámetros para los cuáles no existen criterios bien definidos.
- **Sensible a las irregularidades intrínsecas presentes en la dinámica del sistema.** Utilizando simulaciones numéricas y comparaciones con el exponente de Lyapunov, se ha mostrado que el índice J tiene la capacidad de cuantificar el grado de *irregularidad* en la dinámica no lineal de un sistema. Los valores del índice J están restringidos al intervalo $[0, 1]$. Valores cercanos a 0 indican dinámicas con bajo grado de irregularidad, mientras que valores próximos a 1 corresponden a series con alto grado de irregularidad. En los casos analizados en este trabajo se ha observado que los sistemas caóticos presentan valores

de $J > 0.4$, mientras que las dinámicas cuasiperiódicas tienen valores menores. Falta investigar si existe un umbral universal que permita discriminar entre caos y periodicidad.

- **Robusto ante ruido.** Se analizaron series de tiempo, provenientes de sistemas dinámicos periódicos y caóticos, contaminadas con una alta cantidad de ruido ($NSR \approx 0$). Aún así, el índice J fue capaz de identificar la dinámica intrínseca del sistema. Esta característica es especialmente útil para estudiar señales provenientes del mundo real, pues frecuentemente los datos registrados tienen una baja relación señal-ruido.
- **No se requiere generación de datos sustitutos.** Para buscar indicios de determinismo en una serie de tiempo solamente hay que compararla con un conjunto de fases de Fourier aleatorias del mismo tamaño. Por lo tanto, no es necesario repetir este procedimiento para cada segmento de datos analizados reduciendo enormemente el esfuerzo computacional. Con este propósito se calculó una curva con una significancia del 1% que muestra las estimaciones de ruido en función de la cantidad de datos y que funciona para cualquier tipo de datos, en este sentido la curva es universal. Las estimaciones de J que están por debajo de esta curva de ruido son fuertes indicadores de determinismo. Para realizar correctamente la comparación estadística de la curva con datos reales es necesario tener un conjunto suficientemente grande de fases de Fourier aleatorias.
- **Computacionalmente simple y rápido.** Al no requerir la reconstrucción del espacio de estados ni tampoco una comparación con datos sustitutos, el cálculo del índice J requiere menor poder y tiempo de computo que otros métodos clásicos. Por ejemplo, los exponentes de Lyapunov.
- **Aplicable de forma univariada y bivariada.** Por construcción, el método para determinar el índice J requiere dos series de tiempo. Sin embargo, es posible aplicar el método solamente a una serie creando una copia mediante un atraso temporal τ . En las simulaciones numéricas se ha mostrado que el valor de τ no influye cualitativamente en los resultados. El hecho que J se pueda aplicar de forma univariante y que no necesite datos sustitutos es una gran ventaja sobre otras medidas clásicas como la información mutua. La razón es que en el caso univariante los datos sustitutos fallan. Además, se ha mostrado que para los casos en que se tienen más de dos registros estos se pueden analizar por parejas aplicando el índice J en la modalidad bivariante.
- **No se requiere preprocesamiento de datos.** No es necesario aplicar ningún tipo de tratamiento previo a las series de tiempo para computar el índice J .

Estas características del índice J hacen que su aplicación a datos provenientes del mundo real sea, en muchas ocasiones, directa y ventajosa sobre otros métodos antes discutidos. Aún así, el método presenta ciertas detalles que deben tomarse en cuenta. Para empezar, el índice J y el exponente de Lyapunov λ no son equivalentes pese a que se comportan de manera un tanto similar. El exponente de Lyapunov es una medida asintótica que no depende de las coordenadas del sistema pues se calcula sobre el espacio de estados. En cambio el índice J es sensible a las particulares propias del sistema que se manifiestan en las series de tiempo. Además, λ posee un valor bien definido que permite distinguir entre una dinámica caótica ($\lambda > 0$) y una periódica

($\lambda < 0$). Mientras que con J solamente se conoce que entre más cercano a 1 sea su valor, mayor es el grado de irregularidad del sistema. En todos los ejemplos numéricos analizados se observó que las dinámicas caóticas poseen valores de $J > 0.4$, pero no se puede asegurar que este sea el valor umbral que separa a los sistemas periódicos de los caóticos pues posible que este valor sea distinto en otros sistemas. Es más, la existencia de este umbral sigue siendo una pregunta abierta hasta el momento de la escritura de este trabajo. Independientemente de la existencia de este umbral, la utilidad del índice J queda de manifiesto en las aplicaciones del mundo real que se han estudiado. En estos casos los eventos localizados por el índice J no son nada triviales de detectar utilizando los métodos clásicos.

Otro aspecto importante es que el índice J no es sensible al grado de acoplamiento entre dos sistemas interrelacionados. Es decir, J no funciona como una medida de sincronización. Esta propiedad puede ser una ventaja dependiendo el tipo de análisis que se esté realizando. Un análisis más completo de las series de tiempo podría realizarse utilizando J junto con otra medida de sincronización como la información mutua.

También se desarrolló una metodología basada en fases de Fourier que permite detectar los puntos críticos en un modelo de percolación bidimensional. Esta nueva metodología se basa en medir la entropía de Shannon en los ángulos de giro α que se obtienen a partir de una caminata sobre un toroide tridimensional que vive en el espacio de las fases de Fourier. Lo novedoso del método es que el punto de percolación se detecta a partir de la información espacial que contienen las imágenes bidimensionales generadas por el modelo de percolación, a diferencia de los métodos clásicos que lo hacen sobre las propiedades estadísticas del modelo dinámico. Antes de aplicar este método a situaciones reales es necesario realizar más investigación y cálculos. Sin embargo, con los resultados obtenidos se puede plantear trabajo a futuro. Por ejemplo, detectar transiciones en fase en experimentos para los cuales no se conocen las ecuaciones dinámicas. También se podría obtener un criterio que permita clasificar imágenes de cualquier tipo en relación a un punto crítico. Es decir, saber cuando una imagen presenta propiedades subcríticas, críticas o supercríticas.

Por último, se debe enfatizar que aún queda mucho por hacer y explorar en el análisis de las fases de Fourier. Por ejemplo, en cuánto al índice J falta investigar si la longitud de los pasos que se dan sobre el toroide aporta nueva información dinámica. También existen otros casos en los que sería interesante aplicar el índice J . Por ejemplo, sistemas con retroalimentación y atraso temporal, para los cuáles el cálculo del exponente de Lyapunov es todo un reto.

Bibliografía

- [1] Zeng, A., Shen, Z., Zhou, J., Wu, J., Fan, Y., Wang, Y., & Stanley, H. E. (2017). The science of science: From the perspective of complex systems. *Physics Reports*, *714*, 1-73.
- [2] Bertuglia, C. S., & Vaio, F. (2005). *Nonlinearity, chaos, and complexity: the dynamics of natural and social systems*. Oxford University Press, USA.
- [3] Strogatz, S. H. (2018). *Nonlinear dynamics and chaos with student solutions manual: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. CRC press.
- [4] Bassett, D. S., & Gazzaniga, M. S. (2011). Understanding complexity in the human brain. *Trends in Cognitive Sciences*, *15*(5), 200-209.
- [5] DeGuzman, G. C., Ding, M., Fuchst, A., & Holroyd, T. Cooperative and critical phenomena in the human brain revealed by multiple squids. *Measuring Chaos in the Human Brain*, 97.
- [6] Goldberger, A. L., & West, B. J. (1987). Applications of nonlinear dynamics to clinical cardiology. *Annals of the New York Academy of Sciences*, *504*, 195-213.
- [7] Cherry, E. M., Fenton, F. H., Krogh-Madsen, T., Luther, S., & Parlitz, U. (2017). Introduction to focus issue: Complex cardiac dynamics. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, *27*(9).
- [8] Shuangcheng, L., Qiaofu, Z., Shaohong, W., & Erfu, D. (2006). Measurement of climate complexity using sample entropy. *International Journal of Climatology: A Journal of the Royal Meteorological Society*, *26*(15), 2131-2139.
- [9] Elsner, J. B., & Tsonis, A. A. (1992). Nonlinear prediction, chaos, and noise. *Bulletin of the American Meteorological Society*, *73*(1), 49-60.
- [10] Dijkstra, H. A. (2013). *Nonlinear Climate Dynamics*. Cambridge University Press.
- [11] Mihailović, D. T., Mimić, G., & Arsenić, I. (2014). Climate predictions: The chaos and complexity in climate models. *Advances in Meteorology*, *2014*.
- [12] Farmer, J. D. (2002). Market force, ecology and evolution. *Industrial and Corporate Change*, *11*(5), 895-953.

- [13] Arthur, W. B. (1999). Complexity and the economy. *science*, 284 (5411), 107-109. *Ashby, W.(1956). An Introduction to Cybernetics.*
- [14] Bonanno, G., Lillo, F., & Mantegna, R. N. (2001). Levels of complexity in financial markets. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 299(1-2), 16-27.
- [15] Ladyman, J., Lambert, J., & Wiesner, K. (2013). What is a complex system?. *European Journal for Philosophy of Science*, 3, 33-67.
- [16] Goldenfeld, N., & Kadanoff, L. P. (1999). Simple lessons from complexity. *Science*, 284, 87–89.
- [17] Whitesides, G. M., & Ismagilov, R. F. (1999). Complexity in chemistry. *Science*, 284, 89–92.
- [18] Parrish, J. K., & Edelstein-Keshet, L. (1999). Complexity, pattern, and evolutionary trade-offs in animal aggregation. *Science*, 284, 99–101.
- [19] Kwapien, J., & Drożdż, S. (2012). Physical approach to complex systems. *Physics Reports*, 515(3-4), 115-226.
- [20] MacKay, R. S. (2008). Nonlinearity in complexity science. *Nonlinearity*, 21(12), T273.
- [21] Ott, E. (2002). *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press
- [22] Rickles, D., Hawe, P., & Shiell, A. (2007). A simple guide to chaos and complexity. *Journal of epidemiology and community health*, 61(11), 933.
- [23] Cencini, M., Falcioni, M., Olbrich, E., Kantz, H., & Vulpiani, A. (2000). Chaos or noise: Difficulties of a distinction. *Physical Review E*, 62(1), 427.
- [24] Glass, L. (2009). Introduction to controversial topics in nonlinear science: Is the normal heart rate chaotic?. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 19(2).
- [25] Kantz, H., & Schreiber, T. (2004). *Nonlinear time series analysis* (Vol. 7). Cambridge University Press.
- [26] Scott, A. (2007). *The nonlinear universe: chaos, emergence, life*. Berlin: Springer.
- [27] Bradley, E., & Kantz, H. (2015). Nonlinear time-series analysis revisited. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 25(9), 097610.
- [28] R ath, C., Gliozzi, M., Papadakis, I. E., & Brinkmann, W. (2012). Revisiting algorithms for generating surrogate time series. *Physical Review Letters*, 109(14), 144101.
- [29] A. Martínez-Guerrero, A. Aguado-García, M. Corsi-Cabrera, G. Martínez-Mekler, P. Olgu n-Rodríguez, W. Rios-Herrera, J. Zapata-Berruecos, and M. M ller, *Physica A* 604, 127878 (2022)

- [30] Aguilar-Hernández, A. I., Serrano-Solis, D. M., Ríos-Herrera, W. A., Zapata-Berruecos, J. F., Vilaclara, G., Martínez-Mekler, G., & Müller, M. F. (2024). Fourier phase index for extracting signatures of determinism and nonlinear features in time series. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 34(1).
- [31] Chialvo, D. R. (2018). Life at the edge: complexity and criticality in biological function. *arXiv preprint arXiv:1810.11737*.
- [32] Huygens, C. (1656). Instructions concerning the use of pendulum-watches for finding the longitude at sea. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 4, 937.
- [33] Willms Allan R., Kitanov Petko M. and Langford William F. (2017). Huygens' clocks revisited. *R. Soc. Open Sci.* 4170777170777.
- [34] Huygens C. (1673). *Horologium Oscillatorium Sive de Motu Pendulorum ad Horologia Aptato Demonstrationes Geometricae*. Paris, France: Apud F. Muguet.
- [35] Poincaré, H. (1892). Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. *Paris: Gauthiers-Villar*, 8, 206-214.
- [36] Lyapunov, A. M. (1892). The general problem of the stability of motion. *International Journal of Control*, 55(3), 531-534.
- [37] Sanjuán, M. A. F. (2016). Dinámica No Lineal, Teoría del Caos y Sistemas Complejos: una perspectiva histórica. *Rev R Acad Cienc Exact Fís Nat*, 109(1–2), 107-126.
- [38] Lorenz, E. N., "Deterministic nonperiodic flow", *J. Atmos. Sci.* 20 (1963) p. 130-141.
- [39] Maxwell, J. C. (1873). Does the progress of physical science tend to give any advantage to the opinion of necessity (or determinism) over that of the contingency of events and the freedom of the will. *The scientific letters and papers of James Clerk Maxwell*, 2, 814-823.
- [40] Bendixson, I. (1901). Sur les courbes définies par des équations différentielles.
- [41] Bryan, G. H. (1902). Elementary principles in statistical mechanics.
- [42] Birkhoff, G. D. (1927). *Dynamical Systems (Vol. 9)*. American Mathematical Soc..
- [43] Wiener, N. (1948). Time, communication, and the nervous system. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 50(4), 197-220.
- [44] Smale, S. (1967). Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American mathematical Society*, 73(6), 747-817.
- [45] Mandelbrot, B. B. (1975). Stochastic models for the Earth's relief, the shape and the fractal dimension of the coastlines, and the number-area rule for islands. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 72(10), 3825-3828.

- [46] Feigenbaum, M. J. (1975). Universality in complex discrete dynamics. *Los Alamos Theoretical Division Annual Report*, 1976, 1976.
- [47] Mane, T. F. (1981). Detecting strange attractors in fluid turbulence. *Dynamical Systems and Turbulence*. Berlin: Springer, 21-80.
- [48] Sauer, T., Yorke, J. A., & Casdagli, M. (1991). Embedology. *Journal of statistical Physics*, 65, 579-616.
- [49] Packard, N. H., Crutchfield, J. P., Farmer, J. D., & Shaw, R. S. (1980). Geometry from a time series. *Physical Review Letters*, 45(9), 712.
- [50] Auslander, J., & Yorke, J. A. (1980). Interval maps, factors of maps, and chaos. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 32(2), 177-188.
- [51] M. Small and C. K. Tse, "Optimal embedding parameters: a modelling paradigm," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 194, no. 3-4, pp. 283–296, 2004
- [52] Krakovská, A., Mezeiová, K., & Budáčová, H. (2015). Use of false nearest neighbours for selecting variables and embedding parameters for state space reconstruction. *Journal of Complex Systems*, 2015.
- [53] Antonio Aguirre, L., & Letellier, C. (2005). Observability of multivariate differential embeddings. *Journal of Physics., Mathematical and General*, 38(28), 6311-6326.
- [54] Dechert, W. D., & Gençay, R. (1996). The topological invariance of Lyapunov exponents in embedded dynamics. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 90(1-2), 40-55.
- [55] Sauer, T. D., Tempkin, J. A., & Yorke, J. A. (1998). Spurious Lyapunov exponents in attractor reconstruction. *Physical Review Letters*, 81(20), 4341.
- [56] Yang, H. L., Radons, G., & Kantz, H. (2012). Covariant Lyapunov vectors from reconstructed dynamics: The geometry behind true and spurious Lyapunov exponents. *Physical Review Letters*, 109(24), 244101.
- [57] Nayfeh, A. H., & Balachandran, B. (2008). *Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational, and Experimental Methods*. John Wiley & Sons.
- [58] Theiler, J., Eubank, S., Longtin, A., Galdrikian, B., & Farmer, J. D. (1992). Testing for nonlinearity in time series: The method of surrogate data. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 58(1-4), 77-94.
- [59] Paluš, M. (1998). Chaotic Measures and Real-World Systems: Does the Lyapunov Exponent Always Measure Chaos?. In *Nonlinear Analysis of Physiological Data* (pp. 49-66). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- [60] Tanaka, T., Aihara, K., & Taki, M. (1998). Analysis of positive Lyapunov exponents from random time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 111(1-4), 42-50.

- [61] Wiener, N. (1930). Generalized harmonic analysis. *Acta Mathematica*, 55(1), 117-258.
- [62] Schreiber, T., & Schmitz, A. (2000). Surrogate time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 142(3-4), 346-382.
- [63] Dolan, K. T., & Spano, M. L. (2001). Surrogate for nonlinear time series analysis. *Physical Review E*, 64(4), 046128.
- [64] Kugiumtzis, D. (1999). Test your surrogate data before you test for nonlinearity. *Physical Review E*, 60(3), 2808.
- [65] Grassberger, P., & Procaccia, I. (1983). Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 9(1-2), 189-208.
- [66] Euler, L. (1750). De propagatione pulsuum per medium elasticum. *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, 67-105.
- [67] Euler, L. (1753). De serierum determinatione seu nova methodus inveniendi terminos generales serierum. *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 36-85.
- [68] Bernoulli, D. (1753). Réflexions et éclaircissemens sur les nouvelles vibrations des cordes. *Hist. Mém Acad. R. Sci. Lett. Berlin*, 9, 147-172.
- [69] de Lagrange, J. L. (1759). Recherches sur la nature et la propagation du son. *Miscellanea Taurinensia*, 1, 39-148.
- [70] Gauss, C. F. (1886). *Theoria interpolationis methodo nova tractata* Werke band 3, 265–327. Göttingen: Königlische Gesellschaft der Wissenschaften.
- [71] Heideman, M., Johnson, D., & Burrus, C. (1984). Gauss and the history of the fast Fourier transform. *IEEE Assp Magazine*, 1(4), 14-21.
- [72] J. B. J. Fourier (1922). *Théorie analytique de la chaleur*. Available as a Dover Reprint.
- [73] Bracewell, R. N. (1989). The Fourier Transform. *Scientific American*, 260(6), 86-95.
- [74] Whitney, H. (1936). Differentiable manifolds. *Annals of Mathematics*, 645-680. *Warwick*, 1980, 366-381.
- [75] Kennel, M. B., Brown, R., & Abarbanel, H. D. (1992). Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction. *Physical Review A*, 45(6), 3403.
- [76] Srinivasan, R. (1961, May). The significance of the phase synthesis. In *Proceedings of the Indian Academy of Sciences-Section A* (Vol. 53, pp. 252-264). Springer India.
- [77] Ramachandran, G. N., & Srinivasan, R. (1961). An apparent paradox in crystal structure analysis. *Nature*, 190(4771), 159-161.

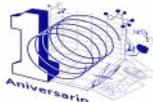
- [78] Huang, T., Burnett, J., & Deczky, A. (1975). The importance of phase in image processing filters. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 23(6), 529-542.
- [79] Oppenheim, A., Lim, J., Kopec, G., & Pohlig, S. C. (1979, April). Phase in speech and pictures. In *ICASSP'79. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing* (Vol. 4, pp. 632-637). IEEE.
- [80] Farmer, J. D., & Sidorowich, J. J. (1987). Predicting chaotic time series. *Physical Review Letters*, 59(8), 845.
- [81] Casdagli, M. (1989). Nonlinear prediction of chaotic time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 35(3), 335-356.
- [82] Sugihara, G., & May, R. M. (1990). Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series. *Nature*, 344(6268), 734-741.
- [83] Kaplan, D. T., & Glass, L. (1992). Direct test for determinism in a time series. *Physical Review Letters*, 68(4), 427.
- [84] Jeong, J., Gore, J. C., & Peterson, B. S. (2002). A method for determinism in short time series, and its application to stationary EEG. *IEEE Transactions on biomedical engineering*, 49(11), 1374-1379.
- [85] Naro, D., Rummel, C., Schindler, K., & Andrzejak, R. G. (2014). Detecting determinism with improved sensitivity in time series: Rank-based nonlinear predictability score. *Physical Review E*, 90(3), 032913.
- [86] Gontis, V., Ruseckas, J., & Kononovičius, A. (2010). A long-range memory stochastic model of the return in financial markets. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 389(1), 100-106.
- [87] Feigenbaum, M. J. (1978). Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*, 19(1), 25-52.
- [88] Robert May, "Simple mathematical models with very complicated dynamics", *Nature* **vol. 261** (1976)
- [89] Verhulst, P. F.: "Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement". *Corresp. Math. Phys.* 10, 113121 (1838).
- [90] M. Hénon, "Numerical study of quadratic area-preserving mappings", *Quart. Appl. Math.* **27** (1969) 291.
- [91] M. Hénon, "A two-dimensional mapping with a strange attractor", *Comm.Math. Phys.* **50** (1976) 69.
- [92] Steven H. Strogatz, "Nonlinear Dynamics and Chaos", ISBN 13:978-0-8133-4910-7.

- [93] Lorenz, E. N., “Maximum simplification of solutions of dynamic equations”, *Telus* 12,243-254 (1960).
- [94] Lorenz, E. N., “The statistical prediction of solutions of dynamic equations”, *Proc. Internat.Sympos. Numerical Weather Prediction, Tokyo, pp. 629635*.
- [95] Saltzman, B. “Finite amplitude free convection as an initial value problem-I”, *Journal of Atmospheric Sciences*, 19(4),329-341 (1962).
- [96] O. E. Rossler, An Equation for Continuous Chaos, *Phys. Lett. A* 57, 397 (1976).
- [97] Van der Pol, B. and van der Mark, J. “Frequency Demultiplication”, *Nature* **120**, 363-364 (1927).
- [98] Rosenblum, M. G., Pikovsky, A. S., & Kurths, J. (1996). Phase synchronization of chaotic oscillators. *Physical review letters*, 76(11), 1804.
- [99] Kreuz, T., Mormann, F., Andrzejak, R. G., Kraskov, A., Lehnertz, K., & Grassberger, P. (2007). Measuring synchronization in coupled model systems: A comparison of different approaches. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 225(1), 29-42.
- [100] Prichard, D., & Theiler, J. (1994). Generating surrogate data for time series with several simultaneously measured variables. *Physical Review Letters*, 73(7), 951.
- [101] K. Schindler, H. Leung, E. Elger, and K. Lehnertz, Assessing Seizure Dynamics by Analysing the Correlation Structure of Multichannel Intracranial EEG, *Brain* 130, 65 (2007).
- [102] Margalef, R., & Kinne, O. (1997). Excellence in Ecology. Germany: Ecology Institute.
- [103] Vilaclara, G., Martínez-Mekler, G., Cuna, E., & Ugalde, E. (2010). Diatom-inferred palaeoenvironmental changes of a Pliocene lake disturbed by volcanic activity. *Journal of Paleolimnology*, 44, 203-215.
- [104] Ugalde, E., Martínez-Mekler, G., & Vilaclara, G. (2006). Scaling and extended scaling in sediment registers of a paleolake perturbed by volcanic activity. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 366, 485-494.
- [105] Martínez-Mekler, G., Ugalde, E., & Vilaclara, G. (2007). Power spectrum crossover in sediments of a paleolake disturbed by volcanism. *The European Physical Journal Special Topics*, 143, 217-222.
- [106] Flory, P. J., Molecular Size Distribution in Three Dimensional Polymers. I. Gelation. *J. Am. Chem. Soc.* **63**, 3083 (1941).
- [107] Stockmayer, W. H. (1943). Theory of molecular size distribution and gel formation in branched-chain polymers. *The Journal of Chemical Physics*, 11(2), 45-55.

- [108] Broadbent, S. R., & Hammersley, J. M. (1957, July). Percolation processes: I. Crystals and mazes. In *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society* (Vol. 53, No. 3, pp. 629-641). Cambridge University Press.
- [109] Feng, X., Deng, Y., & Blöte, H. W. (2008). Percolation transitions in two dimensions. *Physical Review E*, 78(3), 031136.
- [110] Hilbert, D. (1891). Projektive Geometrie;(MS. Vorlesung, SS 1891). *Niedersächsische Staats-und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung, Cod. Ms. D. Hilbert, 535*, 21-64.
- [111] Jouzel, J., Masson-Delmotte, V., Cattani, O., Dreyfus, G., Falourd, S., Hoffmann, G., ... & Wolff, E. W. (2007). Orbital and millennial Antarctic climate variability over the past 800,000 years. *Science*, 317(5839), 793-796.
- [112] Johnsen, S. J., Clausen, H. B., Dansgaard, W., Gundestrup, N. S., Hammer, C. U., Andersen, U., ... & Fisher, D. (1997). The $\delta^{18}O$ % record along the Greenland Ice Core Project deep ice core and the problem of possible Eemian climatic instability. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 102(C12), 26397-26410.
- [113] Nieto-Barajas, L. E., & Sinha, T. (2015). Bayesian interpolation of unequally spaced time series. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 29(2), 577-587.
- [114] E. N. Lorenz, "Climatic Determinism", *Meteorological Monographs* 8, 1-3 (1968).
- [115] R. B. Alley, J. T. Andrews, J. Brigham-Grette, G. K. C. Clarke, K. M. Cuffey, J. J. Fitzpatrick, S. Funder, S. J. Marchall, G. H. Miller, J. X. Mitrovica, D. R. Muhs, B. L. Otto-Bliesner, L. Polyak, and J. W. C. White, "History of the Greenland Ice Sheet: paleoclimatic insights," *Quaternary Science Reviews* 29, 1728-1756 (2010).



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS



Instituto de
Investigación en
Ciencias
Básicas y
Aplicadas



INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

POSGRADO EN CIENCIAS

Cuernavaca, Mor., a 19 de abril de 2024

DRA. LINA ANDREA RIVILLAS ACEVEDO
COORDINADORA DEL POSGRADO EN CIENCIAS
PRESENTE

Atendiendo a la solicitud para emitir DICTAMEN sobre la revisión de la tesis titulada: ANÁLISIS NO LINEAL DE SERIES DE TIEMPO E IMÁGENES BASADO EN FASES DE FOURIER, que presenta el alumno M. en C. Alberto Isaac Aguilar Hernández (10033391) para obtener el título de Doctor en Ciencias.

Director de tesis: Dr. Gustavo Carlos Martínez Mekler.

Unidad Académica: Instituto de Investigación en Ciencias Básicas y Aplicadas (IICBA)

Nos permitimos informarle que nuestro voto es:

NOMBRE	DICTAMEN	FIRMA
Dr. Rogelio Valdéz Delgado CInC-UAEM	APROBADO	
Dr. José Daniel Arzate Mena CInC-UAEM	APROBADO	
Dr. Markus Franziskus Müller CInC-UAEM	APROBADO	
Dr. Francois Alain Leyvraz Waltz ICF-UNAM	APROBADO	
Dr. Hernán Larralde Ridaura ICF-UNAM	APROBADO	
Dr. Joaquín Escalona Segura CInC-UAEM	APROBADO	
Dr. Raúl Salgado García CInC-UAEM	APROBADO	





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

Sello electrónico

ROGELIO VALDEZ DELGADO | Fecha:2024-04-19 10:21:42 | FIRMANTE

stu3LAin4Z2p01myERzNR+MbhXY+ss4TPOu4dePTdMW/MmYWJ3EHSCl0hh87MR6GMqhYVnbH59RGhVg99/FH4Bv1kcs2392NtLqyBfw3emtp1jjRCQatfwaZBvNT0p2JNUs
WL2m5rFN6lbbkM/1+sluiVifEjJth94nVYh7yRQ8IVfofTKgScoO/7/INrU00MvUOyZqjHb/yOHhQUuWPXgWUDzMWnrrfinEULGAgYQbzA0XwnSoldUGMYkR3vYUI2Hv4ANYIglKZLo
N0+owEvvbE7YRGWpR0lZzB6sV3AKZsJEAmFS1Dzpl2Nk0xoEsFE/WefKOpMgGFrGSdKANhg==

MARKUS FRANZISKUS MULLER | Fecha:2024-04-19 10:35:45 | FIRMANTE

m3HMNwNgkfi7PgROnJdsx3g3MF6nM/FcDjCE9HbnZ1haHMKZLhBSYo8691XQ3X766dk5pZuMGupBIUPAZ+NWRP23zYgK0sLT+PPXWCDxFNfReVB/2GNjhuTTSU3J7iegoB
nzZV/jo4GLRaJs8p8LfhqEC8wDYNUUN1jRChuVC8LqVmCQMd1K/WLDD9RE7zj9LNEPVzn0g70H+39Ttw4tPXvWXIb4hYjPiKx5YNU3rrHj278F+wssL4WHJe0edf/GT7FizulVdhz
guPUHgfAvT0MnExGLVTBwcpC07dR1X9REYUd7v+ET0LxS6NRbm1bjn89TV714rVXVnn36zUNnQg==

RAUL SALGADO GARCIA | Fecha:2024-04-19 10:48:25 | FIRMANTE

Gsc55ChD2qTMrLuj1fqbei/cPxEsFGaEXDOLcjm1T+tlr+RX7bJ75jr8oi3H14GtgvdSSGyRGQhVjwbn1n8DTGgWXfJIZZmycX9+dUJyC9o6vmX2Wk+o9vybWeMHGJ7YmsxbKTZ
q4cRH2FlatxJA+feCL+E15cpIYdCFDOjSoKrl5A4RSPi9YNmxHLNWK3BCq/6MMng/jKdu20XNwzL3DXBZ9dawlYOY+SePu1g/nG6rmvxv2GiAEze//bkQp04cZUxzuekaaMuFpel
eRRwPQWlqawA9DipnCi7IWOZs6jo9tJlwf8LgVxLiMMcJg9ohk+gVnafgJB76Zy6sNjA==

HERNÁN LARRALDE RIDAURA | Fecha:2024-04-19 10:51:29 | FIRMANTE

giA8wCJgmBnkBmjQ5eFwRlOAGUcxuk9spqef60KQAsinFNi9gKPtZ1NJ2x7fQfN2jllufly7HDwU3t9/C1y9363zA2VxZu0lveZ9sHcrWyEzouJKABmX6mFs0KLxcJGezd64sNdG0F4
OTeJyw+VBSPubgdIPPBg42zfnli6QtlYrARzPwpL7UEoglvRz4s2a+KTkafxmUQ3PRNFUA13LlyUEGjZfZUq912uNyHzLyn2GDfblK8OMB/isOLw53ue3rUMR6zKTBa4DhTP
p6JMIYvMGXn4f/3d5LAXeOEajE+VhVvU8LgXay8w8w/ttuZ5djZ3NNyKfBwEa483pg==

JOSE DANIEL ARZATE MENA | Fecha:2024-04-19 10:55:08 | FIRMANTE

BWWOfKe1ooCPiRkxVn850C5Tn+vJcDQbdGSSoJb/SORtqWrAsTCFD11KvF7z1UP38iz7EiFEbob2ydnJkAu2FvuJSK6h9vyQW8tZccqwlTj/uePh4VrLzPVG05OgTqRVC04F90o/
wi15P1lwZukMTMgiEd0RNuyvFJnllKxX/lzqicNvOBbEH2Tlp3QV3la9frLM0sLIA9tzmka1tylLNKc77xOgC/aunFTqilFa7wakkpwmQG50TBQSTx3uxS5O6Hm1IEZoHixe8c3TlpejP
h7UaRwe38AEQt7xVVPJH9OAmo2MKgjdQoKvqsq7w8o4i5umJ16bFA4kt7OLIAZERw==

JOAQUIN ESCALONA SEGURA | Fecha:2024-04-19 11:07:36 | FIRMANTE

tC7Hz4F8U4aDXUx1qCifncxEtGJWLTpjXyxeLcyA8fvDBqgwAjGR04HQVbm5HdtNDFikVoWxnxDoW0WffJjuhCBnbnP9ZrJaTtnyTKwVytH1qS8ke2drNtEY/K6tf7+fkMYcR
MLM4Ju9N7yluMuY7BbYJtS1rhTuzHICoPPgzT6W8B7quPdaerHLSHm6E7+pl9IAI/QFaNkmIq0TLaxqqhICAdbPJJkgjGHVrfBl6a3KRgu12yKVImpskvGc5pZemqk99qL1esZQmz
nf9K/509e2eKugMdwzh7OLBPvdS7+jtFomWWBpV6cRRwHp88DhoNZZYIZjuzwoT4+AQ==

FRANCOIS ALAIN LEYVRAZ WALTZ | Fecha:2024-04-19 12:50:50 | FIRMANTE

Q/4eYFztdalSZspDR9BR2+dCGYMuxb4UXKrJg3AdvXZptOj5INplfO69f1iryv7rVeD5TvwTqDc4iRg6amk0yM+J5yjplsnew+7WFKgt+ltvHdOgcPp8VP15Dwpl+4jwnVMd0lKv9QD
lOn1FWYjplNJOq95CbdyUGyIHU6VpaslZB1BRNCmsdBqy5ng8Gfy4Fi2sJslw3DhWGCrlr4Kd/GFc+I4tSKD/xkpGoaTcz63oT92skYnDihE8tBSX+ENzWYTs+DjK3m05ipJm+1ejt
mddyf8teRx+GUDfD0HBv1NhF4J3CBxM4dmuWPwbo7oGPrXutxBjuAmWZ9lo4qg==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o
escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



tW3kpXwQu

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/FhJMF1KZX8gwOhpFRs4tfvQcUDKyok0u>



UAEM
RECTORÍA
2023-2029