



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

---

---

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

*“El estudio de agujeros negros primordiales en la cosmología”*

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS ÁREA TERMINAL: FÍSICA

PRESENTA:

ARTURO GÓMEZ GÓMEZ

ASESOR:

SÉBASTIEN MICKAËL MARC FROMENTEAU

CUERNAVACA, MORELOS, 2023



## ***Agradecimientos***

*Quiero agradecer a mis abuelos y padres por el apoyo incondicional que me han brindado. De manera muy especial agradezco a mi asesor de tesis, el Dr. Sébastien Mickaël Marc Fromenteau por la confianza, tiempo y conocimiento dedicado para resolver cada una de mis dudas.*

*A mis sinodales por sus comentarios al revisar esta tesis, Dr. Alejandro Ramírez Solís, Dr. Joaquín Escalona Segura, Dr. Aldo Figueroa Lara y al Dr. Juan Carlos Degollado Daza.*

*También agradezco al Dr. Luis E. Padilla Albores y al Dr. Juan Carlos Hidalgo Cuellar por sus consejos y apoyo brindado.*

*A mis colegas y amigos sin ellos la carrera no se hubiera completado.*

*Por último pero no menos importante, quiero agradecer de manera muy especial a Mary Nicole Ocampo Camarena por todo su amor, cariño y apoyo durante tantos años.*

# Índice general

Resumen . . . . .	III
Abstract . . . . .	V
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivo General . . . . .	1
1.2 Objetivo Específico . . . . .	1
1.3 Estructura . . . . .	1
<b>2 Cosmología</b>	<b>3</b>
2.1 Métrica de FLRW . . . . .	3
2.2 Ecuaciones de Friedmann . . . . .	5
2.3 Radiación cósmica de fondo . . . . .	8
2.3.1 ¿Cómo se formó el CMB? . . . . .	9
2.3.2 Estadística de las anisotropías del CMB . . . . .	10
2.4 Problemas del Big Bang caliente . . . . .	12
2.4.1 Problema de la planitud . . . . .	13
2.4.2 Problema del horizonte . . . . .	14
2.4.3 Problema de los monopolos . . . . .	15
2.4.4 Formación de estructura . . . . .	15
<b>3 Inflación</b>	<b>17</b>
3.1 Condiciones para inflación . . . . .	17
3.2 Slow-roll . . . . .	19
3.3 Cantidad de inflación . . . . .	21
3.4 Solución a los problemas del Big Bang . . . . .	22
3.4.1 Problema de la planitud . . . . .	22
3.4.2 Problema del horizonte . . . . .	22
3.4.3 Problema de los monopolos . . . . .	23
3.5 Recalentamiento . . . . .	23
3.6 Fluctuaciones del campo escalar . . . . .	24
3.7 Perturbaciones cosmológicas . . . . .	27
3.7.1 Perturbaciones de curvatura . . . . .	27
3.7.2 Perturbaciones de densidad . . . . .	29
<b>4 Agujeros Negros Primordiales</b>	<b>33</b>
4.1 Características . . . . .	33
4.1.1 Masa de un ANP . . . . .	34
4.1.2 Radiación de Hawking . . . . .	35
4.2 Modelo de colapso esférico . . . . .	37
4.3 Formación de un ANP . . . . .	39

4.4	Formalismo de Press-Schechter . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>45</b>
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>57</b>
<b>A</b>	<b>Espectro de potencias del inflatón</b>	<b>59</b>
<b>B</b>	<b>Ecuación de las perturbaciones de densidad</b>	<b>61</b>
<b>C</b>	<b>Equilibrio termodinámico</b>	<b>65</b>

## Resumen

Desde el comienzo de la relatividad general hasta nuestros días, ha existido un gran interés por los agujeros negros. Sin embargo, fue hasta abril del 2019 cuando se obtuvo la primera imagen del disco de acreción de uno de ellos, corroborando su existencia. Todo esto fue gracias a la contribución de telescopios a lo largo del mundo, formando el “*Event Horizon Telescope*”. Esta tesis hace hincapié hacia otro tipo de agujeros negros conocidos como agujeros negros primordiales (ANPs) debido a las recientes publicaciones detectadas por LIGO (Observatorio Interferométrico de Ondas Gravitacionales) Y VIRGO, los cuales detectaron masas mayores de lo esperado. Pero estas masas atípicas no pudieron provenir del colapso gravitacional de estrellas, por lo tanto surge otra teoría de su origen, la cual dice que pudieron formarse debido al colapso de perturbaciones de gran densidad al inicio del Universo, provenientes de las fluctuaciones del campo escalar inflatón, y por acreción de materia a lo largo de los años se convirtieron en los agujeros súpermasivos detectados. El objetivo general de este trabajo es usar inflación como mecanismo para generar ANPs, y a partir de ahí el objetivo específico consiste en determinar la fracción inicial de masas que colapsará en un agujero primordial, siguiendo el proceso de colapso esférico usado por Press-Schechter, donde considero que las perturbaciones de densidad serán simétricamente esféricas con un cierto radio  $R$ , el filtro que ocuparé será una función ventana y un espectro de ley de potencias. El modelo de colapso esférico fue propuesto para la formación de estructura a gran escala en un dominio de materia, en este caso lo aplicaré en un dominio de radiación para obtener ANPs con tres umbrales distintos y un índice espectral variable, de esta manera vere el cambio que tienen las distribuciones de probabilidad y como afectará en la abundancia de ANPs. Para índices espectrales menores o iguales a 1.37 obtuvimos masas de ANPs que ya se habrían evaporado o estarían evaporándose, por encima de este índice se formaron agujeros negros con masas suficientemente grandes que todavía estarían presentes hoy en día.



## Abstract

From the beginning of general relativity to the present day, there has been a great interest in black holes. However, it was not until April 2019 when the first image of the accretion disk of one of them was obtained, corroborating its existence. All this thanks to the contribution of the telescopes around the world, forming the Event Horizon Telescope. This thesis emphasizes another type of black holes known as primordial black holes (PBHs), due to the recent publications detected by LIGO (Interferometer Gravitational Wave Observatory) and VIRGO, which detected masses larger than expected. But these atypical masses could not come from the gravitational collapse of stars, therefore, another theory of their origin arises, which says that they could be formed due to the collapse of high-density perturbations at the beginning of the Universe, coming from the fluctuations of the scalar field inflaton, and by accretion of matter over the years became the detected supermassive holes. The general objective of this work is to use inflation as a mechanism to generate PBHs, and from the specific objective is to determine the initial mass fraction that will collapse into a primordial black hole, following the spherical collapse process used by Press-Schechter, where I consider that the density perturbations will be symmetrically spherical with a certain radius  $R$ , the filter I will use will be a window function and a power-law spectrum. The spherical collapse model was proposed for large scale structure formation in a matter domain, in this case I will apply it in a radiation domain to obtain PBHs with three different thresholds, and a variable spectral index, in this way I will see the change that the probability distributions have and how it will affect the abundance of PBHs. For spectral indices less than or equal to 1.37 we obtained masses of PBHs that would have already evaporated or would be evaporating, above this index black holes with sufficiently large masses would form that would still be present today.



# Capítulo 1

## Introducción

Los agujeros negros primordiales son agujeros negros hipotéticos, formados de las perturbaciones de gran densidad provenientes de las fluctuaciones del inflatón en el Universo temprano. Fueron propuestos primeramente en 1967 por Zeldovich y Novikov [1] e independientemente en los 70s por Stephen Hawking [2]. Después, la idea de que los agujeros negros primordiales podrían formar parte de la materia oscura fue sugerida en 1975 por Chapline y Meszaros [3].

En este capítulo explicaré los objetivos generales y específicos, al igual que la estructura de la tesis.

### 1.1. Objetivo General

Estudiar el período de inflación como mecanismo inicial para la formación de agujeros negros primordiales.

### 1.2. Objetivo Específico

El objetivo específico de mi trabajo consiste en determinar la fracción inicial de masas que colapsará en un agujero negro primordial, en un dominio de radiación y siguiendo el formalismo de Press-Schechter. Para esto, usaré un espectro de ley de potencias con un índice espectral variable y veré el impacto en la abundancia de ANPs al ir modificando este índice.

### 1.3. Estructura

La tesis consta de 6 capítulos, los cuales estarán estructurados de la siguiente manera: El capítulo 2 se abordará con una introducción a la cosmología, donde se explican algunos conceptos básicos de relatividad general; entre ellos la métrica de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker y las ecuaciones de campo de Einstein. Posteriormente, hablaré de las ecuaciones de Friedmann que describen la evolución y los cambios de dominio de energía que ha tenido el Universo, de igual forma, mostraré los parámetros cosmológicos mas relevantes en esta tesis. Luego, pasaré a explicar qué es la radiación cósmica de fondo, su espectro de potencia y su estadística. Después, haré énfasis en el modelo del Big Bang y los problemas que no logra resolver.

El capítulo 3 tratará sobre inflación el cual es un período que se ha propuesto para complementar y solucionar los problemas que tiene el modelo del Big Bang. Comenzaré dando las condiciones para inflación junto a la aproximación slow-roll, hablaré de como calcular la cantidad de inflación usando el número de e-folds  $N$ . Posteriormente, explicaré la solución de los problemas de la planitud, del horizonte y de los monopolos magnéticos. Luego, daré una explicación de que sucede cuando el campo escalar llega a su mínimo del potencial en el período de recalentamiento. Al final del capítulo se estudiará el origen de las fluctuaciones primordiales generadas durante inflación, como afectaron a las perturbaciones cosmológicas, su estadística, y como pudieron ser las semillas para la formación de estructura.

En el capítulo 4 se hablará sobre agujeros negros primordiales, para esto comenzaré con las características de un agujero negro, la densidad de un agujero sin rotación ni carga y la métrica de Schwarzschild. Hablaré de como obtener la masa de un agujero negro primordial usando la masa del horizonte en la igualdad materia-radiación. Explicaré la radiación de Hawking y el tiempo de evaporación de un agujero primordial, donde mostraré la utilidad que tienen en la cosmología y como podrían ser candidatos a materia oscura. Luego, hablaré brevemente del modelo de colapso esférico, donde adaptaré esta idea para obtener la abundancia de ANPs. Posteriormente, mencionaré el mecanismo de formación de un agujero primordial a partir de las perturbaciones primordiales generadas durante inflación y la relación que tienen con las perturbaciones de densidad. Terminaré el capítulo con el formalismo de Press-Schechter, los diferentes umbrales críticos que se han estudiado y como obtener agujeros primordiales.

En el capítulo 5 se presentan los resultados de la fracción inicial de masas en un dominio de radiación usando un espectro de ley de potencias con distintos índices espectrales, se trabaja con la función ventana gaussiana y la función top-hat, donde al final del capítulo escribiré el código que se creó para obtener la abundancia de ANPs.

Finalmente en el capítulo 6 se presentan las conclusiones.

# Capítulo 2

## Cosmología

La Cosmología se encarga de estudiar el origen, formación y desarrollo que ha tenido el Universo a lo largo del tiempo, usando la relatividad general como marco teórico. En la actualidad, la cosmología moderna pretende explicar la estructura y dinámica del Universo a gran escala, y debido a las observaciones que se han obtenido del fondo cósmico de microondas en los últimos años, tenemos que a grandes escalas se presenta un alto grado de homogeneidad (o invariancia traslacional) e isotropía (invariancia rotacional) de las propiedades físicas y geométricas, a esto se le conoce como el principio cosmológico y es la base del modelo estándar. Además, otra característica que presenta el Universo es que no es estático y se encuentra expandiendo de manera acelerada.

### 2.1. Métrica de FLRW

El objeto que describirá el espacio-tiempo es la métrica, la cual es una forma bilineal o tensor covariante de orden dos simétrico [4], para eso, usamos el elemento de línea  $ds^2$ , el cual se escribe de manera general como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu, \quad (2.1)$$

donde  $g_{\mu\nu}$  es el tensor métrico,  $\mu$  y  $\nu$  hacen referencia a coordenadas espacio-temporales con valores:  $(0, 1, 2, 3)$ , con 0 la coordenada temporal.

Si el espacio-tiempo es plano tendremos la métrica de Minkowsky:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.2)$$

donde  $c \approx 3 \times 10^5 \text{ km/s}$  es la velocidad de la luz.

Sin embargo, la métrica que mejor se adapta a un Universo en expansión y aplicando el principio cosmológico es la métrica de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) [5], en coordenadas polares esféricas se puede escribir como:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (2.3)$$

con  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$  el elemento de ángulo sólido.

El factor de escala  $a(t)$  nos indica que tanto se está expandiendo el Universo con respecto al tiempo, y depende del dominio de energía que tenga en ese momento. La constante de

curvatura  $\kappa$  representa el tipo de curvatura que tiene el espacio-tiempo, con los siguientes valores:

$$\kappa = \begin{cases} +1 & \text{cerrado} \\ 0 & \text{plano} \\ -1 & \text{abierto} \end{cases}. \quad (2.4)$$

Usando el sistema de coordenadas comóviles, defino el tiempo conforme  $\tau$ :

$$d\tau \equiv \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.5)$$

Reescribimos la métrica FLRW:

$$ds^2 = a^2 [-c^2 d\tau^2 + d\chi^2 + S_\kappa^2(\chi) d\Omega^2], \quad (2.6)$$

tal que:

$$d\chi \equiv \frac{dr}{\sqrt{1 - \kappa r^2}}, \quad (2.7)$$

$$r = S_\kappa(\chi) = \begin{cases} \sinh \chi, & \kappa = -1 \\ \chi, & \kappa = 0 \\ \sin \chi, & \kappa = +1 \end{cases}. \quad (2.8)$$

Por isotropía, consideramos la propagación radial de la luz ( $d\Omega = 0$ ):

$$ds^2 = a^2 [-c^2 d\tau^2 + d\chi^2], \quad (2.9)$$

La luz viaja en geodésicas nulas  $ds^2 = 0$ , entonces la trayectoria de la luz tomará la forma de:

$$d\tau = \pm d\chi. \quad (2.10)$$

Para poder estudiar la evolución de la métrica, y por lo tanto del factor de escala recurrimos a las ecuaciones de campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (2.11)$$

Del lado izquierdo de (2.11) tenemos al tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$ , el cual se compone del tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  (puede obtenerse contrayendo el tensor de Riemann):

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\sigma\nu}^{\sigma} = g^{\sigma\lambda}R_{\lambda\mu\sigma\nu}, \quad (2.12)$$

El tensor de Riemann es una forma de "medir" que tan grandes son las desviaciones de la métrica curva con respecto a la métrica plana [6].

$R$  el escalar de Ricci (es una contracción del tensor de Ricci (2.12)):

$$R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R^\mu{}_\mu, \quad (2.13)$$

Mientras que del lado derecho  $G \approx 6.67 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$  es la constante gravitacional,  $\Lambda$  es conocida como la constante cosmológica y es la mejor descripción para explicar la expansión acelerada actual que presenta el Universo, si el término se agrega del lado izquierdo de (2.11) correspondería a una modificación de la gravedad, y finalmente  $T_{\mu\nu}$  es el tensor energía-momento.

Las ecuaciones (2.11) nos relacionan la geometría del espacio-tiempo, representado por el

tensor métrico, con la materia y la distribución de energía en el mismo, representada por el tensor de energía-momento. Este último se puede escribir en términos de la densidad de energía  $\rho$ , presión  $p$  y la cuadrivelocidad  $U^\mu$ :

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu}, \quad (2.14)$$

El tensor energía-momento adoptará la forma de un fluido perfecto al considerar las propiedades de homogeneidad e isotropía del Universo. Esto se debe a que no existirán presiones anisotrópicas, por lo tanto, las componentes que no esten en la diagonal del tensor valdrán cero:  $T_{ij} = 0$ ,  $\forall i \neq j$ .

Por lo que  $\rho$  y  $p$  no dependerán de la posición, solamente del tiempo:

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(-\rho c^2, p, p, p). \quad (2.15)$$

## 2.2. Ecuaciones de Friedmann

Por lo tanto, considerando una métrica de FLRW y un tensor energía-momento con la forma de un fluido perfecto, podemos resolver las ecuaciones de campo de Einstein.

La componente del tensor de Ricci distinta de cero y el escalar de Ricci serán:

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{c^2 a}, \quad (2.16)$$

$$R = -6 \frac{(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + \kappa c^2)}{c^2 a^2}, \quad (2.17)$$

Donde junto a la componente  $T_{00} = -\rho c^2$ , obtendremos dos ecuaciones diferenciales no lineales, conocidas como ecuaciones de Friedmann:

$$\frac{\dot{a}^2 + \kappa c^2}{a^2} = \frac{8\pi G \rho + \Lambda c^2}{3}, \quad (2.18)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{3} \Lambda c^2 - \frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right). \quad (2.19)$$

Las ecuaciones de Friedmann gobernarán la evolución del Universo, la primera ecuación (2.18) viene de la componente 00 de las ecuaciones de campo de Einstein y va a describir la relación entre el parámetro de Hubble con respecto a la densidad de energía, la curvatura y la constante cosmológica. Mientras que la segunda ecuación o también conocida como ecuación de aceleración (2.19) viene de la traza de estas componentes y va a relacionar la expansión del Universo con la presión, la densidad de energía y la constante cosmológica. Definiendo el ritmo de expansión del Universo mediante el parámetro de Hubble:

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.20)$$

Con  $\dot{a}$  la derivada con respecto al tiempo del factor de escala.

Una tercera ecuación puede surgir de la unión de (2.18) y (2.19), o de igual manera de la conservación del tensor energía-momento:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.21)$$

Donde para la parte temporal nos quedaría la ecuación de continuidad:

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right), \quad (2.22)$$

con  $\dot{\rho} \equiv d\rho/dt$ .

La cual nos relaciona el fluido cósmico con respecto a la expansión del Universo.

Si consideramos al Universo lleno con un fluido perfecto con ecuación de estado  $p(\rho)$ :

$$p = \omega\rho c^2, \quad (2.23)$$

donde  $\omega$  es una constante, y determina la clase de energía-materia que domina el Universo en ese momento. Si lo sustituimos en (2.22) obtendremos una ecuación diferencial mucho mas sencilla de resolver, e integrando nos queda:

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}, \quad (2.24)$$

La evolución de la densidad de energía y del factor de escala lo dividiremos en tres épocas: la época de radiación, la de materia y actualmente la época de energía oscura (ver figura 2.1).

Para el caso de materia relativista  $\omega = 1/3$  (ver Apéndice C), entonces:

$$\rho \propto a^{-4}, \quad (2.25)$$

$$a(t) \propto t^{1/2} \implies H(t) = \frac{1}{2t}, \quad (2.26)$$

Para el caso de materia no-relativista  $\omega = 0$  y nos queda:

$$\rho \propto a^{-3}, \quad (2.27)$$

$$a(t) \propto t^{2/3} \implies H(t) = \frac{2}{3t}, \quad (2.28)$$

Finalmente, para un Universo dominado por la constante cosmológica (un tipo de energía oscura) con  $\omega = -1$  nos queda:

$$\rho = cte, \quad (2.29)$$

$$a(t) \propto e^{H(t)t} \implies H = cte. \quad (2.30)$$

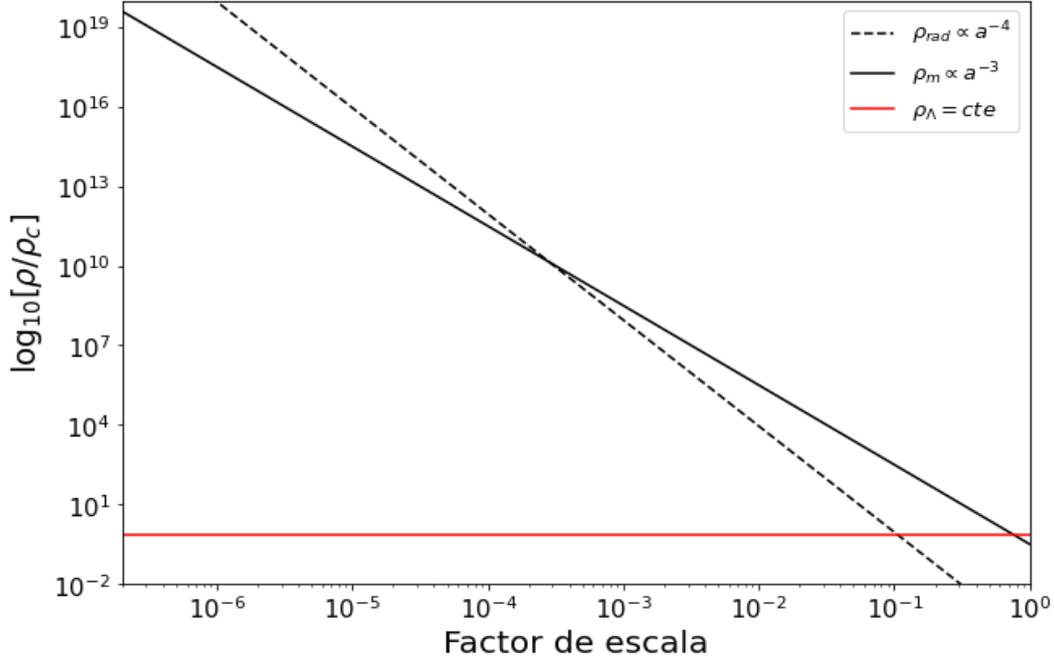


Figura 2.1: Evolución de la densidad de energía con respecto al factor de escala para un Universo plano dominado por radiación, materia y energía oscura en escala logarítmica.

Se considera que lo que sea que esta dominando el Universo en la actualidad hace que se expanda de manera exponencial-acelerada, manteniendo una densidad de energía y un parámetro de Hubble constante. El cual es conocido como la constante de Hubble, y toma el valor en el tiempo actual de [7]:

$$H_0 \equiv H(t_0) = 100 \times h \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}. \quad (2.31)$$

con  $h = 0.673 \pm 0.005$  [7], el parámetro de Hubble normalizado.

Usando la ecuación (2.18) con  $\Lambda = 0$  y  $\kappa = 0$ , definimos la densidad crítica [8] como la densidad de energía total que se necesita para tener un Universo plano:

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 2.775 \times 10^{11} h^2 M_\odot \text{Mpc}^{-3}, \quad (2.32)$$

con  $M_\odot = 1.989 \times 10^{30} \text{kg}$  la masa solar y  $\text{Mpc} = 3.086 \times 10^{22} \text{m}$  un megaparsec.

Donde a partir de (2.32) definimos el parámetro de densidad total como el cociente entre la densidad total (radiación, materia, energía oscura) y la densidad crítica:

$$\sum_i \Omega_i = \Omega_{tot} = \frac{\rho_{tot}}{\rho_c}, \quad (2.33)$$

Reescribimos la ecuación de Friedmann (2.18) de manera que relacione el parámetro de densidad (2.33) y la curvatura del Universo:

$$\Omega_{tot} - 1 = \frac{\kappa}{a^2 H^2}. \quad (2.34)$$

Por lo que si:

$$\kappa = +1 \Rightarrow \Omega_{tot} > 1, \rho_{tot} > \rho_c$$

$$\kappa = 0 \Rightarrow \Omega_{tot} = 1, \rho_{tot} = \rho_c$$

$$\kappa = -1 \Rightarrow \Omega_{tot} < 1, \rho_{tot} < \rho_c$$

Otra magnitud importante es el corrimiento al rojo  $z$ , el cual nos relaciona la longitud de onda (o frecuencia) de un haz de luz cuando es emitido y cuando es recibido:

$$1 + z = \frac{\lambda_{emi}}{\lambda_0} = \frac{a_0}{a(t_{emi})}. \quad (2.35)$$

Con el subíndice 0 la longitud y factor de escala recibido y emi la parte emitida. Además, la frecuencia de un fotón se reduce en un factor de  $1 + z$ . Entonces, se usa el corrimiento al rojo para referirse a la distancia que ha viajado la luz desde ese momento y así nos dirá la época del Universo, por lo tanto, el corrimiento al rojo se suele ocupar para indicar tiempos cosmológicos.

### 2.3. Radiación cósmica de fondo

La Radiación Cósmica de Fondo o Fondo Cósmico de Microondas, por sus siglas en inglés CMB (Cosmic Microwave Background) fue predicha por George Gamow junto con Robert Herman y Ralph Alpher en 1948. Sin embargo, fue hasta 1965 donde se encontró por primera vez por Arno Penzias y Robert Wilson mientras trabajaban en un receptor de radio en los Laboratorios Bell [9]. Con el descubrimiento de esta radiación se desechó cualquier idea de un Universo estacionario, apoyando junto con la nucleosíntesis y el corrimiento al rojo al modelo estándar del Big Bang.

Una de las características del CMB es que se ajusta con mucha precisión a una distribución espectral de un cuerpo negro, con una temperatura de  $2.725 \pm 0.010$  K.

Entonces podemos usar la ley de Planck, donde la densidad de energía espectral  $u(f)$  va a estar dada por [10]:

$$u(f) = \frac{8\pi h f^3}{c^3} \frac{1}{e^{hf/k_B T} - 1}, \quad (2.36)$$

donde  $h = 6.626 \times 10^{-34}$  Js es la constante de Planck,  $k_B = 1.381 \times 10^{-23}$  JK<sup>-1</sup> es la constante de Boltzmann,  $f$  es la frecuencia de la radiación electromagnética y T es la temperatura absoluta del cuerpo negro.

De (2.36) podemos obtener la Ley de Wien, la cual, usando la temperatura del CMB nos dará la longitud de onda máxima  $\lambda_{max} = 1.061 \times 10^{-3}$  m. Si integramos (2.36) sobre todas las frecuencias obtendremos la densidad de energía total de radiación  $\epsilon_r$  emitida por un cuerpo negro, dada por la Ley de Stefan-Boltzmann [10]:

$$\epsilon_{rad} = \rho_{rad} c^2 = \int_0^\infty d\nu u(\nu) = \alpha T^4, \quad (2.37)$$

con  $\alpha$  la constante de densidad de radiación y  $\rho_{rad}$  la densidad de radiación. :

$$\alpha = \frac{\pi^2 k_B^4}{15 \hbar^3 c^3} = 7.565 \times 10^{-16} \text{ JK}^{-4} \text{ m}^{-3}, \quad (2.38)$$

Además, podemos encontrar una relación entre la temperatura del Universo y el factor de escala usando la ecuación (2.25) (o ver el Apéndice C), en la época del dominio de radiación:

$$T \propto \frac{1}{a}. \quad (2.39)$$

Lo que nos dice (2.39), es que a medida que el Universo se expande va a disminuir la temperatura y esto será importante para la formación del CMB.

### 2.3.1. ¿Cómo se formó el CMB?

Del modelo estándar del Big Bang tenemos que hace 13,800 millones de años el Universo temprano era un plasma caliente, compuesto de fotones, electrones y bariones (protones y neutrones), donde la densidad de energía estaba dominada por la materia relativista (fotones y neutrinos), estos últimos se encontraban desacoplados del plasma.

Debido a las altas temperaturas la materia se encontraba solo en forma de partículas ionizadas, por lo que los electrones estaban libres y cada que un electrón y protón se querían combinar para formar un átomo de hidrógeno neutro, eran rotos por fotones, ya que estos no se podían propagar con mucha libertad debido a que presentaban un camino libre medio muy corto. Los electrones interactúan con los fotones a través de la dispersión de Thompson (es el límite de baja energía de la dispersión de Compton), y esta interacción constante entre electrones y fotones dio origen a una relación de equilibrio térmico entre la radiación y la materia ionizada:

$$e^{-} + \gamma \longleftrightarrow e^{-} + \gamma. \quad (2.40)$$

Sin embargo, el Universo se encuentra expandiendo y habíamos visto que la temperatura disminuía durante ésta expansión (2.39), cuando este proceso continua los fotones dejan de tener la energía suficiente para ionizar el átomo de hidrógeno, la energía de ionización del hidrógeno en su estado fundamental es  $hf = 13.6\text{eV}$  ( $1\text{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\text{J}$ ) y la temperatura para que suceda esto la obtenemos a partir de la ecuación (2.41):

$$E = hf = k_B T, \quad (2.41)$$

$\Rightarrow$

$$T = 1.5 \times 10^5 \text{K}. \quad (2.42)$$

Aún existía una relación de  $10^9$  fotones por barion, por lo que aún no se formaban átomos de hidrógeno neutros, por debajo de ésta temperatura comienza el proceso para dejar de ionizar al átomo de hidrógeno. Con energías superiores, la dispersión de Thomson deja de ser eficiente, entonces la densidad de electrones libres desciende. Por lo que al disminuir aún más la temperatura la reacción (2.43) se desplaza a la derecha y comienzan a combinarse los electrones con los protones para formar átomos de hidrógeno neutros, evitando que se rompan por los fotones.

$$e^{-} + p \longleftrightarrow H + \gamma. \quad (2.43)$$

Donde  $\gamma$  es un fotón arbitrario y  $H$  el átomo de hidrógeno (no debe confundirse con el parámetro de Hubble), a esta etapa se le conoce como recombinación.

Esto ocurrió hace 380,000 años después del Big Bang con una temperatura de 3000 K, el Universo pasó de ser opaco a volverse transparente a la radiación electromagnética. Finalmente, los fotones se desacoplaron del plasma haciendo su camino libre medio más largo, para esto, consideramos una esfera imaginaria que surge si juntamos todos los puntos desde donde los fotones sufrieron la última dispersión Thomson (se desacoplaron los fotones con la materia), a esto se le conoce como superficie de último esparcimiento, y es lo que detectamos en el CMB (figura 2.2).

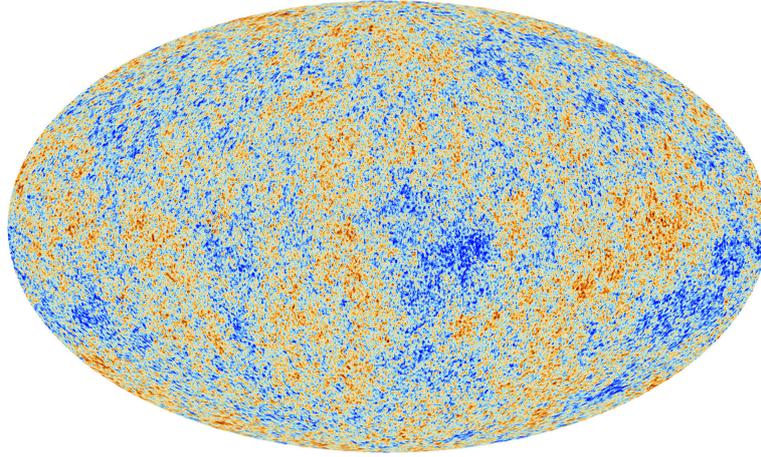


Figura 2.2: Imagen de las fluctuaciones de temperatura en el cielo del CMB tomada por el satélite Planck (2015).

### 2.3.2. Estadística de las anisotropías del CMB

La alta isotropía y homogeneidad que presenta el Universo se obtiene del CMB, con la aproximación más cercana de un espectro de cuerpo negro ideal. Pero no todo es altamente isotrópico, el satélite COBE (Cosmic Background Explorer) fue el primer satélite en descubrir ligeras anisotropías en la temperatura.

Considerando la temperatura promedio  $\langle T \rangle = 2.725$  K y con una posición angular  $(\theta, \varphi)$ , las desviaciones de esta temperatura de un punto a otro punto en el cielo serán del orden de:

$$\frac{\delta T}{\langle T \rangle}(\theta, \varphi) = 10^{-5}, \quad (2.44)$$

Expandimos en armónicos esféricos  $Y_m^l(\theta, \varphi)$  y nos queda:

$$\frac{\delta T}{\langle T \rangle}(\theta, \varphi) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_m^l(\theta, \varphi), \quad (2.45)$$

En (2.45)  $l$  va de 0 a  $\infty$ , con  $l = 0$  un monopolo,  $l = 1$  corresponde a un dipolo,  $l = 2$  corresponde a un cuadrupolo y así sucesivamente. El número  $m$  se encuentra en el rango de  $-l \leq m \leq +l$ . Los momentos multipolares  $a_{lm}$  son coeficientes que nos dicen el tamaño de las irregularidades en distintas escalas, podemos calcularlos usando la transformada de Fourier inversa:

$$a_{lm} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\delta T}{\langle T \rangle}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (2.46)$$

Si las fluctuaciones son del tipo gaussianas, la estadística de las anisotropías va a depender solo del espectro de potencia angular de radiación  $C_l$ :

$$C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l a_{lm} a_{lm}^* = \langle |a_{lm}^2| \rangle, \quad (2.47)$$

La función de correlación de dos puntos  $C(\theta)$  nos ayudará a medir la relación lineal entre dos variables. Si en la superficie de último espacamiento consideramos dos puntos con

dirección  $r_1$  y  $r_2$  separados por un ángulo  $\theta$ , donde se cumple que  $r_1 \cdot r_2 = \cos \theta$  :

$$C(\theta) = \left\langle \frac{\delta T}{T}(r_1) \frac{\delta T}{T}(r_2) \right\rangle_{r_1 \cdot r_2 = \cos \theta}, \quad (2.48)$$

Sustituyendo (2.45) en (2.48) y usando (2.47) nos queda [11]:

$$C(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \sum_{m=-l}^{m=l} Y_m^{l*}(r_1) Y_m^{l*}(r_2) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) C_l P_l(\cos \theta). \quad (2.49)$$

donde  $P_l$  son los polinomios de Legendre.

El espectro de potencias angular de las fluctuaciones de temperatura del CMB (figura 2.3) se puede escribir como función del momento multipolar con  $[\Delta_T^2] = [\mu\text{K}^2]$ :

$$\Delta_T^2 \equiv \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l \langle T \rangle^2. \quad (2.50)$$

Debido a las grandes presiones dentro del plasma primigenio (constituido por un fluido fotón-barión), por compresión y expansión se generaron oscilaciones acústicas. Las oscilaciones son ondas de presión que se propagaban en el plasma primordial, al igual como se propaga el sonido en algún medio, pero a velocidades muy altas. En el dominio de radiación la presión estaba dominada por la presión de fotones  $p = p_\gamma$ , y la densidad total del fluido estaba compuesta de la densidad de fotones y la densidad de bariones  $\rho = \rho_\gamma + \rho_b$ , por lo que la velocidad del sonido en el fluido fotón-barión esta dada por la ecuación de Newton-Laplace y usando (2.23):

$$c_s^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \left( \frac{dp_\gamma}{d\rho_\gamma} \frac{\partial \rho_\gamma}{\partial \rho} \right) = \frac{c^2}{3} \left[ 1 + \frac{\partial \rho_b}{\partial \rho_\gamma} \right]^{-1}, \quad (2.51)$$

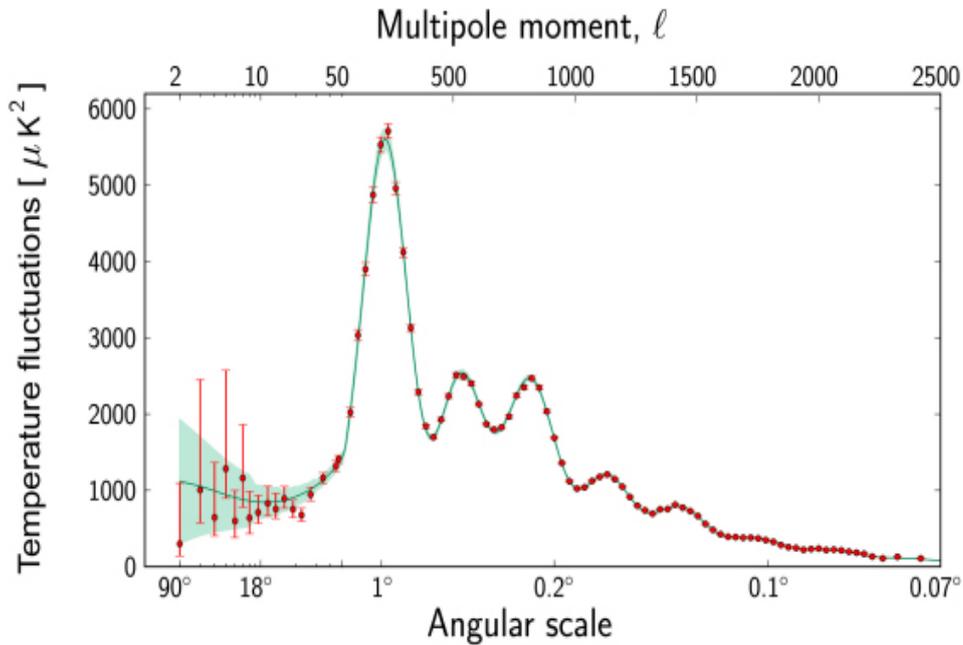


Figura 2.3: El espectro de potencias angular de las fluctuaciones de temperatura del CMB en función de la escala angular o los momentos multipolares, con datos de Planck (2013).

con:

$$\rho_\gamma = \bar{\rho}_\gamma(z) = \bar{\rho}_{\gamma,0} a^{-4},$$

y

$$\rho_b = \bar{\rho}_b(z) = \bar{\rho}_{b,0} a^{-3},$$

Donde  $\bar{\rho}_b(z)$  y  $\bar{\rho}_\gamma(z)$  son la densidad de energía promedio de bariones y fotones en un corrimiento al rojo  $z$ .

Hacemos  $R$  un factor que da cuenta del efecto inercial producido por la masa de los bariones:

$$R = \frac{\partial \rho_b}{\partial \rho_\gamma} = \frac{3 \bar{\rho}_b}{4 \bar{\rho}_\gamma}, \quad (2.52)$$

Entonces:

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3(1+R)}}, \quad (2.53)$$

Si la densidad de fotones es mayor que la densidad de bariones nos queda:

$$c_s^2 = \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_s = \frac{c^2}{3}. \quad (2.54)$$

El índice  $l$  de los armónicos esféricos (2.45) va a denotar el número de oscilaciones, durante la recombinación estas oscilaciones alcanzaron su máximo o mínimo de densidad y generaron picos acústicos en el espectro de potencias, los cuales corresponden a las frecuencias en las que los fotones se desacoplaron del plasma. El primer pico (figura 2.2) corresponde al primer máximo en el momento de la recombinación y nos indica la curvatura que tiene el Universo. El cociente entre el primer pico y el segundo nos indica la densidad de materia bariónica presente en el Universo, mientras que el cociente del segundo y tercer pico nos indica la densidad de materia oscura. La estructura a gran escala nos brinda mucha información sobre el contenido del Universo, el origen de las fluctuaciones primordiales y la expansión del fondo cósmico. A continuación hablaré del modelo del Big Bang y los problemas que surgen a partir de las observaciones del CMB que este modelo no puede explicar.

## 2.4. Problemas del Big Bang caliente

La teoría del Big Bang se ha enseñado erróneamente, donde se cree que partimos de una explosión, esto implica la existencia de un sistema de referencia absoluto, un “punto inicial” en el espacio donde todo comenzo y un observador fuera de este que vio todo [4]. Con esta interpretación hablamos de un sistema de referencia privilegiado donde la materia, energía y tiempo fueron creadas. La idea del modelo se refiere a un Universo de FLRW que se esta expandiendo en todas direcciones más el principio cosmológico, contradiciendo a lo que se creía en el siglo XX de un Universo estacionario, considerando la relatividad general. Al decir que es el mismo espacio-tiempo el que se expande podemos resolver el problema del desplazamiento al rojo, la abundancia de elementos ligeros, la radiación cósmica de fondo, la reionización, entre otros. Sin embargo, este modelo no carece de problemas, entre los que destacan: el no poder explicar el origen del Universo, la planitud que presenta, la alta homogeneidad e isotropía, la formación de galaxias y el porque no hemos podido detectar monopolos magnéticos.

### 2.4.1. Problema de la planitud

Teóricamente para un Universo plano el parámetro de densidad total se escribe como:

$$\Omega_{tot} = \Omega_{rad} + \Omega_m + \Omega_\Lambda = 1, \quad (2.55)$$

Esto se ajusta con las medidas obtenidas por el satélite Planck (2018) [7]:

$$\Omega_{rad,0} = 9.2653 \times 10^{-5}, \quad (2.56)$$

$$\Omega_{m,0} = 0.3153 \pm 0.0073, \quad (2.57)$$

$$\Omega_{\Lambda,0} = 0.6847 \pm 0.0073, \quad (2.58)$$

Del parámetro de densidad total y el parámetro de curvatura, esto apunta a un Universo plano o casi plano:

$$\Omega_{0,k} = -0.011^{+0.013}_{-0.012}, \quad (2.59)$$

Para que el Universo presente esta planitud en el pasado lo debio ser mucho más, el problema nos dice que a pesar de los cambios de densidad de energía-materia que ha tenido el Universo desde sus inicios hasta la actualidad, este se ha mantenido similar al valor de la densidad crítica.

Asumiendo un Universo sin energía oscura, con la radiación y materia siendo más importantes que la curvatura, tenemos para el caso de radiación:

$$\Omega_{tot} - 1 \propto t, \quad (2.60)$$

y para el caso del dominio de materia:

$$\Omega_{tot} - 1 \propto t^{2/3}. \quad (2.61)$$

Cada que avanza el tiempo comienza a disminuir  $|\Omega_{tot} - 1|$ .

Para tiempos de la era de Planck ( $10^{-43}$ s), la temperatura estaba dada por:

$$T_{pl} = \frac{m_{pl}c^2}{k_B} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{Gk_B^2}} \sim 10^{32} K. \quad (2.62)$$

con  $\hbar = h/2\pi = 1.054 \times 10^{-34}$  Js y  $m_{pl}$  es la masa de Planck [8]:

$$m_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.176 \times 10^{-8} \text{kg}. \quad (2.63)$$

Entonces la planitud que tuvo que tener el Universo en la era de Planck se puede obtener (usando  $T_0 = 2.725$  K):

$$\frac{|\Omega - 1|_{pl}}{|\Omega - 1|_0} \sim \left(\frac{a_{pl}}{a_0}\right)^2 \sim \left(\frac{T_0}{T_{pl}}\right)^2 \sim \mathcal{O}(10^{-64}). \quad (2.64)$$

Este valor es extremadamente pequeño, y es poco creible que se diera este ajuste tan fino. El modelo del Big Bang no lo puede explicar, ya que en cada cambio de dominio de energía que se presento tuvo que haber variaciones en el parámetro de curvatura.

### 2.4.2. Problema del horizonte

El horizonte de partículas  $H_P$  es la distancia máxima que la luz ha viajado de un tiempo inicial  $t_i$  hasta un tiempo final  $t$ :

$$H_P(t) = ca(t) \int_{t_i}^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.65)$$

El radio de Hubble  $c/H$  es la distancia recorrida por las partículas en el curso de un tiempo en expansión [12]. Es una forma de medir si las partículas están conectadas causalmente, entonces el radio de Hubble comóvil es:

$$R_H = \frac{c}{aH}. \quad (2.66)$$

Si tomamos  $t = 0$  como el inicio del Big Bang y usando el radio de Hubble comóvil (2.66), reescribimos:

$$H_P(t) = ca(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = ca(t) \int_0^a \frac{da(t')}{a(t')^2 H} = ca(t) \int_0^{\ln a} \frac{d \ln a(t')}{a(t') H}, \quad (2.67)$$

Por la isotropía de un Universo de FLRW, para una propagación radial ( $\theta = \varphi = cte \Rightarrow d\Omega = 0$ ) nos queda la ecuación (2.9).

Y el horizonte de partículas comóvil lo escribo como:

$$H_P(\tau) = c \int_0^{\tau(t)} d\tau' = c \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^{\ln a} R_H(t') d \ln a(t'), \quad (2.68)$$

Para un Universo dominado por un fluido usando la ecuación de estado (2.23):

$$R_H = c(aH)^{-1} = cH_0^{-1} a^{(1+3\omega)/2}, \quad (2.69)$$

$\Rightarrow$

$$H_P = c \int_0^{\ln a} H_0^{-1} a^{(1+3\omega)/2} d \ln a = \frac{2cH_0^{-1}}{(1+3\omega)} [a^{(1+3\omega)/2} - 0] = \frac{2}{(1+3\omega)} R_H, \quad (2.70)$$

Donde podemos ver que el horizonte de partículas es mayor a  $(aH)^{-1}$ , para un Universo dominado por radiación tenemos:

$$H_P \propto a, \quad (2.71)$$

y para materia:

$$H_P \propto a^{1/2}. \quad (2.72)$$

El problema del horizonte surge debido a la alta isotropía y homogeneidad que se observa en el CMB (figura 2.1), al momento del desacoplamiento ya no hay una interacción entre los fotones con la materia. Si tomamos regiones alejadas del Universo, tenemos que estas no pudieron tener la misma temperatura ya que no han podido estar en contacto causal, debido a que el horizonte de partículas es mayor al radio de Hubble. Entonces el tiempo que le tomaría a la luz viajar de un punto a otro es mayor que la edad que presenta el Universo, por lo que el modelo del Big Bang no puede explicar este problema por medio de un equilibrio térmico entre distintas regiones, ya que no había tiempo suficiente para que estas regiones interactuarán antes del desacoplamiento y pudieran tener la misma temperatura.

### 2.4.3. Problema de los monopolos

Se dice que un sistema experimenta una transición de fase cuando pasa de un estado con un grado de simetría a otro de distinto grado. Las transiciones de fase por rotura de simetría generarían defectos topológicos, los cuales dependen del tipo de rotura de simetría y dimensión espacial, con una dimensión cero se forman monopolos magnéticos. Este problema surge de combinar el modelo del Big Bang con la física de partículas. Si la transición ocurre en la época GUT (great unified theory), la masa de los monopolos podría ser del orden de  $10^{16}\text{GeV}/c^2$  [13]. Se comportan como materia barionica fría, con  $\rho_{mp} \propto a^{-3}$  [14], correspondiendo a una densidad numérica de monopolos similar a la densidad de bariones:

$$n_{mp} \approx n_b. \quad (2.73)$$

Si son producidos al inicio del Universo, la densidad de energía en los monopolos disminuye mas lento que la radiación y dominarían el Universo desde el inicio. El problema se debe al no poder detectar estas reliquias en la actualidad.

### 2.4.4. Formación de estructura

En un Universo que siempre ha obedecido el principio cosmológico a cualquier escala, no se podría formar estructura (planetas, estrellas, galaxias, etc), se necesitan de inhomogeneidades y un mecanismo que explique como obtenerlas.

Este cuarto problema nos interesará más para esta tesis (el cual será resuelto en el siguiente capítulo) ya que su explicación estará relacionada a la formación de agujeros negros primordiales.



# Capítulo 3

## Inflación

La inflación se puede definir como un período de expansión acelerada del Universo de manera exponencial,  $a = e^{Ht}$ , por lo que se dice que el Universo se encontraba muy cercano a una fase de De Sitter.

El primer modelo inflacionario fue propuesto por Alan Guth en 1981 [15], con el fin de resolver el problema de los monopolos magnéticos creando un falso vacío. Posteriormente, en colaboración con Andreas Albrecht y Paul Steinhardt, e independientemente Alekséi Starobinski y Andrei Linde [16], realizaron modificaciones al modelo inflacionario de Guth para darle su forma actual. La inflación no pretende sustituir el modelo del Big Bang sino más bien complementarlo, ayudando a explicar algunos de los problemas dentro de un modelo conocido como  $\Lambda$ CDM.

En este capítulo haré uso de las unidades naturales ( $\hbar = c = k_B = 1$ ).

### 3.1. Condiciones para inflación

Para que el Universo se expanda aceleradamente necesitamos que el factor de escala se encuentre acelerándose, por lo que utilizamos la primera ecuación de Friedmann (2.18), esto conlleva a:

$$\ddot{a} > 0. \quad (3.1)$$

Existe una expresión alternativa de la condición de inflación que le da un sentido más geométrico usando el radio comóvil de Hubble (2.66) (ver figura 3.1):

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{aH} < 0. \quad (3.2)$$

Además, podemos obtener una tercera condición usando la ecuación de aceleración (2.19), con  $\Lambda = 0$ , vemos que para que se cumpla que  $\ddot{a} > 0$  necesitamos que  $(\rho - 3p) < 0$ .

Asumiendo que la densidad de energía  $\rho$  debe ser siempre positiva, se tiene que  $p$  debe ser negativo:

$$p < -\frac{\rho}{3}. \quad (3.3)$$

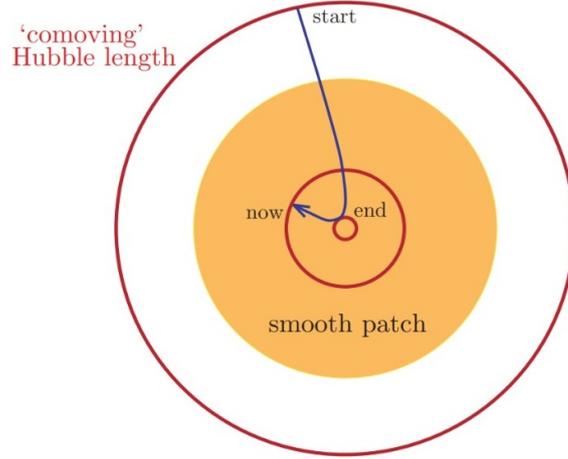


Figura 3.1: El radio de Hubble medido en coordenadas comóviles disminuye durante inflación, este será más pequeño que el horizonte de partículas (2.68), una vez que termine inflación este volvera a crecer [17].

Una manera de conseguir una presión negativa es a través de un campo escalar  $\phi$  (llamado también campo inflatón o inflatón), los cuales están presentes en el modelo estándar actual, un ejemplo de campo escalar es el campo escalar de Higgs, el cual juega un papel importante en la ruptura de simetría electrodébil. Dado el campo escalar  $\phi$  con una acción acoplada con la gravedad, formado de la acción gravitacional Einstein-Hilbert y una acción del campo escalar con término cinético canónico:

$$S_\phi[g] = \int d^4x \sqrt{-|g_{\mu\nu}|} \left( \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + V(\phi) \right), \quad (3.4)$$

con el lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (3.5)$$

con  $d^4x \sqrt{-|g_{\mu\nu}|}$  el elemento invariante de cuadri-volumen en la variedad considerada,  $R$  el escalar de Ricci,  $V(\phi)$  es el potencial del campo escalar  $\phi$  y para una métrica de FLRW  $\sqrt{|g_{\mu\nu}|} = a^3$ .

Usando el teorema de Noether y el cálculo de su densidad lagrangiana encontramos que el tensor energía-momento para  $\phi$  es:

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = -\frac{2}{\sqrt{|g_{\mu\nu}|}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g_{\mu\nu}} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (3.6)$$

Se suele dividir el campo escalar en dos partes: el valor medio del campo  $\phi_0$  (la parte homogénea) y las fluctuaciones cuánticas  $\delta\phi(\vec{x}, t)$  alrededor de  $\phi_0$ .

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi_0(t) + \delta\phi(\vec{x}, t). \quad (3.7)$$

Queremos encontrar la ecuación de movimiento de  $\phi$ , donde consideramos que solo estamos trabajando en un Universo de FLRW, con  $\phi = \phi_0$ :

$$\begin{aligned} \partial_i \phi &= 0, \\ \partial_t \phi &= \frac{\partial \phi}{\partial t} = \partial_0 \phi = \dot{\phi}, \end{aligned}$$

Entonces:

$$T_{ii}^{(\phi)} = g_{ii}\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{ii}|\dot{\phi}|^2 - g_{ii}V(\phi) \equiv p_{\phi}g^{ii},$$

$$T_{00}^{(\phi)} = |\dot{\phi}|^2 - \frac{1}{2}|\dot{\phi}|^2 + V(\phi) \equiv \rho_{\phi},$$

Reescribiendo la presión y la densidad de energía del campo como:

$$p_{\phi} = \frac{1}{2}|\dot{\phi}|^2 - V, \quad (3.8)$$

$$\rho_{\phi} = \frac{1}{2}|\dot{\phi}|^2 + V, \quad (3.9)$$

Siendo la ecuación de estado:

$$\omega_{\phi} = \frac{p_{\phi}}{\rho_{\phi}} = \frac{\frac{1}{2}|\dot{\phi}|^2 - V}{\frac{1}{2}|\dot{\phi}|^2 + V}. \quad (3.10)$$

Incorporando (3.8) y (3.9) a las ecuaciones de Friedmann con curvatura despreciable, podemos obtener:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right), \quad (3.11)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi}{3} \left(\dot{\phi}^2 - V(\phi)\right). \quad (3.12)$$

Tenemos que conocer la evolución del campo, para eso usamos la ecuación de Euler-Lagrange a un Universo en expansión, y aplicando la condición de homogeneidad nos queda:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(\mathcal{L}a^3)}{\partial\dot{\phi}} - \frac{\partial(\mathcal{L}a^3)}{\partial\phi} = 0,$$

Entonces sustituyendo (3.5) y dividiendo entre  $a^3$  obtenemos la ecuación de movimiento para el campo escalar en el fondo homogéneo, conocida como la ecuación de Klein-Gordon:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (3.13)$$

## 3.2. Slow-roll

Para que se produzca inflación se ocupa la ecuación (3.13) asumiendo que el campo escalar evoluciona lentamente (figura 3.2), a esto se conoce como aproximación de rodamiento lento (o slow roll en inglés), de lo contrario la inflación terminaría muy rápido y no habría alcanzado una expansión lo suficientemente grande.

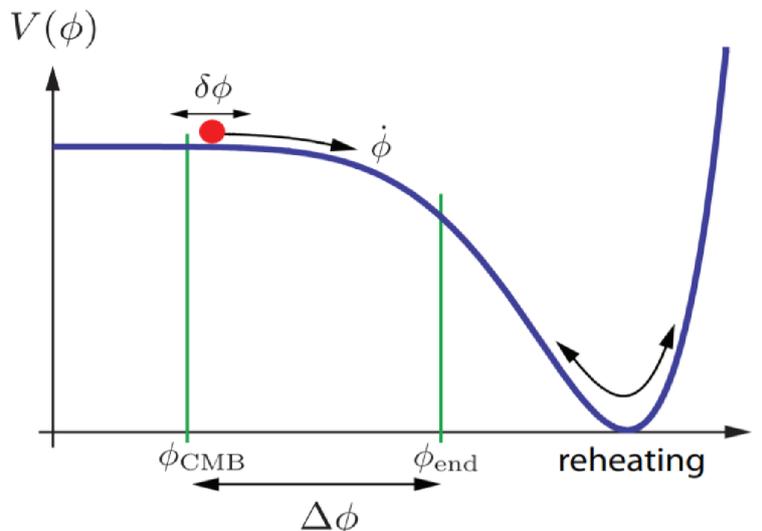


Figura 3.2: Figura de un potencial slow roll [18].

Las condiciones para slow roll son: en primer lugar, que la aceleración del campo escalar debe ser muy cercana a cero  $\ddot{\phi} \approx 0$ , por lo que la ecuación de Klein-Gordon (3.13) quedaría como:

$$3H\dot{\phi} = -\frac{d}{d\phi}V(\phi). \quad (3.14)$$

con  $3H\dot{\phi}$  el término de fricción.

El potencial que afecta al campo escalar debe ser mucho mayor a su energía cinética:

$$V(\phi) \gg \frac{1}{2}\dot{\phi}^2, \quad (3.15)$$

Entonces, la densidad de energía total está dominada por el potencial del campo escalar:

$$\rho_\phi \sim V, \quad (3.16)$$

Por lo que la ecuación (3.10) quedaría como:

$$\omega_\phi \approx -1. \quad (3.17)$$

La ecuación de aceleración (2.19) puede escribirse como:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2 + \dot{H} = H^2 \left( 1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right),$$

Para cuantificar la expansión acelerada se usan los parámetros de rodamiento lento, se define el primer parámetro como:

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (3.18)$$

Entonces:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2(1 - \epsilon), \quad (3.19)$$

En un Universo de De Sitter  $H$  es constante, por lo que durante inflación  $\dot{H} = 0$ . Un segundo parámetro podemos definirlo:

$$\eta = -\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}H}, \quad (3.20)$$

Habr  inflaci3n siempre y cuando se cumpla:

$$0 < \epsilon < 1,$$

y

$$|\eta| \ll 1.$$

Si  $\epsilon = |\eta| = 1 \Rightarrow \ddot{a} = 0$  e inflaci3n llegar  a su fin.

Debido al crecimiento exponencial del factor de escala, el parámetro de Hubble es independiente del tiempo durante inflaci3n, y podemos reescribir la ecuaci3n de Friedmann (2.18):

$$H^2 = \frac{\rho}{3\bar{m}_{pl}^2} \sim \frac{V}{3\bar{m}_{pl}^2}. \quad (3.21)$$

con la masa reducida de Planck  $\bar{m}_{pl}^2 = \frac{m_{pl}^2}{8\pi}$ .

Sustituyendo la ecuaci3n de Friedmann modificada (3.21) y la ecuaci3n de Klein-Gordon (3.13) en (3.18) se obtiene el parámetro con respecto al potencial:

$$\epsilon_V = \frac{\bar{m}_{pl}^2}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \approx \epsilon, \quad (3.22)$$

Para el segundo parámetro:

$$\eta_V = \eta + \epsilon = -\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}H} - \frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (3.23)$$

Derivando la ecuaci3n de Klein-Gordon (3.13) con respecto al tiempo:

$$3\dot{H}\dot{\phi} + 3H\ddot{\phi} = -V''\dot{\phi}, \quad (3.24)$$

Sustituyendo en (3.23) y usando (3.21) nos queda:

$$\eta_V = \frac{V''}{3H^2} + \frac{\dot{H}}{H^2} - \frac{\dot{H}}{H^2} = \bar{m}_{pl}^2 \frac{V''}{V}. \quad (3.25)$$

Este parámetro implica una inflaci3n suficientemente prolongada a partir de un potencial dado. Toda la cosmología inflacionaria va a depender de la forma que tenga nuestro potencial, ya que la energía está dominada por este mismo.

### 3.3. Cantidad de inflaci3n

La cantidad de inflaci3n se especifica por el número de e-folds  $N$ , el cual es una cantidad adimensional que nos dice el número de veces que aumentará el factor de escala durante el período de inflaci3n. Se calcula con el logaritmo natural entre la raz3n del factor de escala al tiempo final de inflaci3n con respecto al tiempo inicial:

$$N \equiv \ln \left( \frac{a(t_f)}{a(t_i)} \right) = \int_{t_i}^{t_f} H dt. \quad (3.26)$$

con  $t_i$ ,  $t_f$  el tiempo inicial y tiempo final de inflaci3n.

De la ecuaci3n (3.14) podemos saber el número de e-folds dado un valor del potencial en lugar del tiempo:

$$dt = -\frac{3H}{V'(\phi)} d\phi, \quad (3.27)$$

Sustituyendo en (3.26) y usando (3.21):

$$N = -3 \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{H^2}{V'} d\phi \approx \frac{1}{\bar{m}_{pl}^2} \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{V}{V'} d\phi, \quad (3.28)$$

Usando la ecuación (3.22), la ecuación (3.28) nos queda como:

$$N = \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_V} \bar{m}_{pl}} |d\phi|. \quad (3.29)$$

con  $\phi_i$  y  $\phi_f$  los valores iniciales y finales del campo escalar con  $\epsilon < 1$ ,  $\epsilon(\phi_f) = 1$ .

## 3.4. Solución a los problemas del Big Bang

### 3.4.1. Problema de la planitud

La solución para el problema de la planitud es que  $\Omega \rightarrow 1$  en lugar de alejarse. Este problema se soluciona usando inflación, una de las condiciones es que a medida que el Universo se expande de manera acelerada el radio de Hubble comóvil decrece (3.2):

$$R_{H_f} < R_{H_0}. \quad (3.30)$$

Usando la primera ecuación de Friedmann (2.34):

$$\Omega - 1 = \frac{|\kappa|}{a^2 H^2} \rightarrow \frac{1}{a^2 H^2} = R_H^2,$$

Podemos ver que no importa que curvatura inicial presentó el Universo antes de inflación. Si el radio de Hubble comóvil sufre una fuerte contracción durante la etapa inflacionaria la evolución va a estar dada por  $a^2 \propto e^{2N}$ :

$$\Omega - 1 \propto e^{-2N} \rightarrow 0. \quad (3.31)$$

Siendo necesarios  $N \geq \ln a \geq 60 - 70$  e-folds.

### 3.4.2. Problema del horizonte

Solucionamos el problema del horizonte con la misma condición del decrecimiento del radio de Hubble comóvil (3.2), por lo tanto el horizonte de partículas es mayor al radio de Hubble en el momento de la recombinación (figura 3.1).

$$H_p = \int_0^{\ln a} \frac{d \ln a}{H a} = \int_0^{\ln a} R_H(t) d \ln a. \quad (3.32)$$

Todo lo que estaba adentro de este radio estaba en equilibrio térmico, intercambiando fotones, por lo tanto estaban en contacto causal. Entonces regiones que ahora no se encuentran en contacto causal en el pasado si lo estuvieron (ver figura 3.3).

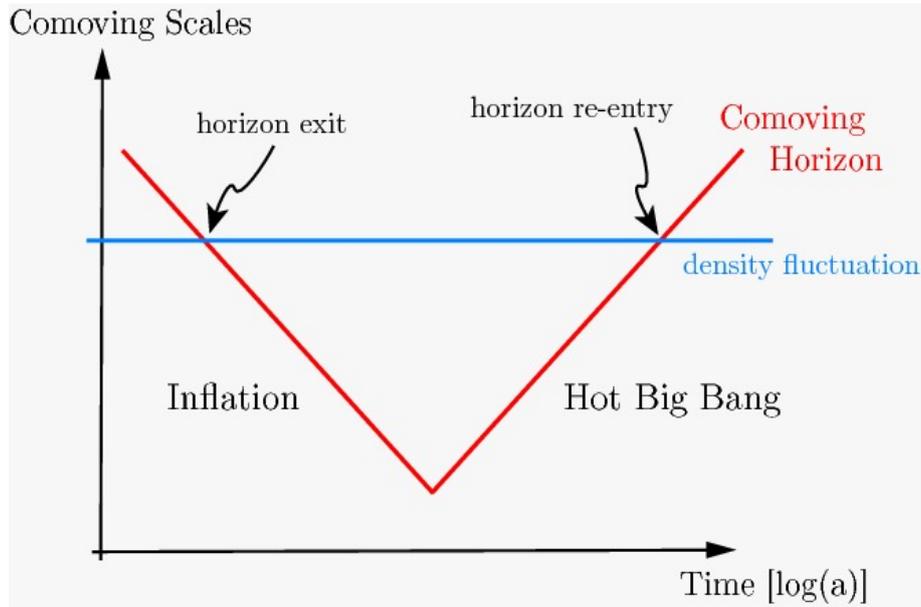


Figura 3.3: Solución al problema del horizonte: En esta gráfica se presenta una relación entre las escalas comóviles y el tiempo. Antes de inflación el horizonte de partículas se encontraba adentro del radio de Hubble comóvil, durante inflación el radio decrece y las escalas salen, "congelándose". Una vez que inflación termina las escalas vuelven a entrar, hasta la fecha hay escalas que están entrando con la misma amplitud que tenían cuando salieron del horizonte. Figura tomada de [17].

### 3.4.3. Problema de los monopolos

Al terminar la inflación, el Universo lleva a una expansión dramática del factor de escala  $a$ , donde la densidad de los monopolos terminó diluyéndose, la inflación se asegura de que las partículas que se formaron antes y después por transiciones de fase permanecieran fuera del Universo observable. De esta manera ha sido muy difícil el poder detectar monopolos magnéticos:

$$n_{mp} = \frac{m_{mp}}{a^3} \rightarrow 0. \quad (3.33)$$

## 3.5. Recalentamiento

El proceso cuando termina la inflación se le conoce como recalentamiento, dando paso a un dominio de radiación donde el modelo estándar de la cosmología toma lugar. Esto ocurre cuando el campo escalar comienza a oscilar al mínimo del potencial  $V(\phi)$ , la energía potencial asociada al campo escalar disminuye convirtiéndose en energía cinética y de acuerdo al término de fricción (3.14) se disipa la energía.

El campo escalar se comporta como materia sin presión  $p_\phi = 0$ , entonces de (3.8) nos queda:

$$V \approx \frac{1}{2} \dot{\phi}^2, \quad (3.34)$$

Entonces (3.9) quedaría como:

$$\rho_\phi = \langle \dot{\phi}^2 \rangle, \quad (3.35)$$

Derivando (3.9) con respecto al campo:

$$\dot{\rho}_\phi = \dot{\phi}\ddot{\phi} + V'\dot{\phi}, \quad (3.36)$$

Si multiplicamos por  $\dot{\phi}$  la ecuación (3.13):

$$\dot{\phi}\ddot{\phi} + \dot{\phi}V' + 3H\dot{\phi}^2 = 0, \quad (3.37)$$

Entonces, sustituyendo en (3.36):

$$\dot{\rho}_\phi = -3H\dot{\phi}^2 = -3H\rho_\phi, \quad (3.38)$$

La temperatura comienza a elevarse al decaer la energía potencial del campo escalar en partículas del modelo estándar de física de partículas, tales como radiación. Esta tasa de decaimiento se mide por  $\Gamma_\phi$ , añadiéndolo a la ecuación (3.38) y si el decaimiento es lento la densidad de energía del campo escalar es:

$$\dot{\rho}_\phi + (3H + \Gamma_\phi)\rho_\phi = 0. \quad (3.39)$$

En este momento el Universo deja de estar en una fase de De Sitter con factor de escala  $a = e^{Ht}$  y pasa a un Universo dominado por radiación con  $a \propto \sqrt{t}$ .

### 3.6. Fluctuaciones del campo escalar

Uno de los problemas más importantes que el modelo del Big Bang no logra explicar es la formación de galaxias. Un Universo isotrópico y homogéneo no nos conducirá a que la estructura se forme, ya que nada colapsaría. Para esto necesitamos de inhomogeneidades en la densidad de energía, conocidas como perturbaciones de densidad, las cuales pueden provenir de las fluctuaciones cuánticas (debido al principio de incertidumbre de Heisenberg) en el campo escalar inflatón en su estado de vacío, para esto dividimos el campo escalar en una parte homogénea no perturbada y una perturbación a primer orden, en un gauge de densidad uniforme (ecuación 3.7).

Nos interesa saber como estas fluctuaciones dependen de la escala  $k$ , para esto, si imaginamos que el campo es periódico dentro de una caja comóvil de lado  $L$  la fluctuación se puede expandir en una suma de Fourier [19]:

$$\delta\phi(\vec{x}, t) = \sum_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \delta\phi(\vec{k}, t), \quad (3.40)$$

donde  $\vec{k}$  es el vector de onda comóvil y  $\vec{x}$  es la distancia comóvil.

Para describir las propiedades estadísticas de las fluctuaciones usamos un campo aleatorio, si el campo fue periódico dentro de una caja de lado comóvil  $L$ , tendríamos las condiciones de frontera que conocemos:

$$\Delta k = \frac{2\pi}{L}, \quad (3.41)$$

Uno puede llevar el tamaño de la caja al infinito, entonces la suma de Fourier se convertirá en una integral:

$$\delta\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \delta\phi(\vec{k}, t), \quad (3.42)$$

Por isotropía del fondo y al trabajar con perturbaciones a primer orden las funciones de los modos  $\phi_k$  dependen solo de  $k = |\vec{k}|$ .

Perturbando la ecuación de Klein-Gordon (3.13), podemos escribir la ecuación de las fluctuaciones como:

$$\delta\ddot{\phi}_k + 3H\delta\dot{\phi}_k + \left(\frac{k^2}{a^2} + V''\right)\delta\phi_k = 0, \quad (3.43)$$

Se desprecia el último término debido a las condiciones de slow-roll:

$$V'' \ll V \approx 3H^2, \quad (3.44)$$

Cambiamos al tiempo conforme para una expansión del tipo de De Sitter, con  $\tau < 0$ :

$$\tau = -\frac{1}{aH}, \quad (3.45)$$

Para esto defino una variable que me relacione el factor de escala y el modo de fourier de la perturbación  $\phi$ :

$$v_k = a\delta\phi_k, \quad (3.46)$$

Puedo escribir el parámetro de Hubble en términos del tiempo conforme usando  $\frac{d\tau}{dt} = a^{-1}$ :

$$H = \frac{da}{dt} \frac{d\tau}{dt} = \frac{a'}{a^2}, \quad (3.47)$$

Usando (3.46) para cada modo  $k$ :

$$\delta\dot{\phi} = \frac{d\delta\phi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{a} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{v_k}{a}\right) = \frac{1}{a} \left(\frac{v'_k}{a} - \frac{a'v_k}{a^2}\right), \quad (3.48)$$

$$\delta\ddot{\phi} = \frac{d\delta\dot{\phi}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{a} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{v'_k}{a^2} - \frac{a'v_k}{a^3}\right) = \frac{v''_k}{a^3} - \frac{3a'v'_k}{a^4} - \frac{a''v_k}{a^4} + \frac{3a'^2v_k}{a^5}, \quad (3.49)$$

Entonces de la ecuación (3.44) se obtiene la ecuación de Mukhanov-Sasaki:

$$v_k + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)v_k = 0. \quad (3.50)$$

Para resolver esta ecuación se consideran los casos subhorizonte y súperhorizonte en donde se encuentra la escala  $k$ . En el caso subhorizonte, la longitud de onda comóvil de la perturbación es más pequeña que el horizonte de Hubble  $\lambda \ll (aH)^{-1}$ , por lo tanto:

$$k \gg aH = -\frac{1}{\tau}, \quad (3.51)$$

$\Rightarrow$

$$k^2 \gg a''/a,$$

Entonces, la ecuación toma forma de un oscilador armónico simple con frecuencia independiente del tiempo:

$$v''_k + k^2v_k = 0, \quad (3.52)$$

En este límite  $|k\tau| \gg 1$  y la solución es una onda plana:

$$\lim_{k\tau \gg 1} v_k = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}}. \quad (3.53)$$

Se le conoce a esto como vacío de Bunch-Davies donde los modos oscilan dentro del horizonte.

Para el caso en que la longitud de onda sea mayor al horizonte  $\lambda \gg (aH)^{-1}$ :

$$k \ll aH = -\frac{1}{\tau}, \quad (3.54)$$

$\Rightarrow$

$$k^2 \ll a''/a,$$

Y la ecuación de Mukhanov-Sasaki (3.52) se reduce a:

$$v_k'' - \frac{a''}{a}v_k = 0, \quad (3.55)$$

La solución es de la forma:

$$v_k = B_k a, \quad (3.56)$$

Donde  $B_k$  es una constante de integración que se puede calcular emparejando y llevando al horizonte las soluciones para la escala (en ambos casos, subhorizonte y superhorizonte).

$$a|B_k| = \frac{k}{H|B_k|} = \frac{1}{\sqrt{2k}}, \quad (3.57)$$

Usando el cambio de variable (3.47) podemos igualar la constante de integración con las fluctuaciones del campo escalar expresada en el espacio de Fourier:

$$|\delta\phi_k| = |B_k| \approx \frac{H}{\sqrt{2k^3}}, \quad (3.58)$$

$\Rightarrow$

$$v_k = \frac{Ha}{\sqrt{2k^3}}. \quad (3.59)$$

Un aspecto importante a considerar al trabajar con perturbaciones es el espectro de potencias (ver Apéndice A), el cual describe como las amplitudes de las perturbaciones varían con la escala. El espectro de potencias contiene la información sobre la varianza de un proceso aleatorio, sin importar que el proceso sea o no gaussiano. Sin embargo, en el caso de que sea un proceso aleatorio gaussiano el espectro contiene toda la información de la varianza para cada modo  $k$  de fourier. Se define como la transformada de Fourier de la función de correlación de dos puntos  $\xi(r)$ , y para el caso del campo inflatón, definimos que el espectro de potencias primordial para escalas superiores al horizonte se puede escribir como la covarianza de las fluctuaciones del inflatón:

$$\langle \delta\phi_k \delta\phi_{k'} \rangle = (2\pi)^3 \delta(k + k') \left( \frac{v_k}{a} \right)^2 = (2\pi)^3 \delta(k + k') \frac{H^2}{2k^3}, \quad (3.60)$$

Por lo tanto, el espectro de potencias del inflatón es:

$$P_{\delta\phi}(k) = \frac{H^2}{2k^3}, \quad (3.61)$$

y el espectro de potencias adimensional toma la forma de:

$$\mathcal{P}_{\delta\phi}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{H^2}{2k^3} = \left( \frac{H}{2\pi} \right)_{k=aH}^2. \quad (3.62)$$

La ventaja del espectro adimensional es que es independiente del volumen.

## 3.7. Perturbaciones cosmológicas

Todo comienza en un régimen sub-horizonte, eventualmente inflación estira las fluctuaciones cuánticas del inflatón y cuando las escalas cruzan el horizonte las fluctuaciones se convirtieron en clásicas y pueden ser vistas en términos de campos aleatorios clásicos. Debido a que las perturbaciones generadas por las fluctuaciones del vacío son a primer orden (perturbaciones lineales) y estocásticas, los modos de Fourier están no correlacionados, entonces, usando el teorema del límite central obtenemos perturbaciones del tipo gaussianas. Como los modos son independientes de cada uno, se espera que las perturbaciones surjan como un campo gaussiano aleatorio. Otra característica de las perturbaciones es que son adiabáticas, significa que tienen la propiedad de que el estado local de la materia en algún punto del espacio-tiempo del Universo perturbado sea el mismo que en el background (Universo FLRW) a un tiempo ligeramente distinto, es decir, pueden ser descritas por una única perturbación en expansión con respecto al background. Después de inflación son inducidas perturbaciones en la densidad de energía, estas perturbaciones se les conoce como perturbaciones primordiales de densidad y fueron las semillas que posteriormente evolucionaron por inestabilidad gravitatoria causando las anisotropías del CMB hasta dar forma a la estructura a gran escala que conocemos, gracias a que la gravedad hace que regiones sobredensas se vuelvan aún más densas, y regiones subdensas se vuelvan menos densas.

La manera en la que las fluctuaciones del campo escalar afectan a la densidad de energía van a estar relacionadas con las ecuaciones de Einstein perturbadas:

$$\delta G_{\mu\nu} = 8\pi G \delta T_{\mu\nu}, \quad (3.63)$$

Consideramos que inflación domina sobre el resto de componentes, por lo que las perturbaciones en el tensor energía momento se van a limitar a fluctuaciones del inflatón, y por las ecuaciones de Einstein perturbadas (3.63) ocasionan perturbaciones en la métrica:

$$\delta\phi \rightarrow \delta T_{\mu\nu} \rightarrow \delta g_{\mu\nu}, \quad (3.64)$$

De esta forma las perturbaciones en la métrica están fuertemente acopladas a las perturbaciones del campo inflatón:

$$\delta\phi \longleftrightarrow \delta g_{\mu\nu}. \quad (3.65)$$

Las perturbaciones se descomponen en tres clases: un ejemplo son las perturbaciones escalares, las cuales corresponden a las perturbaciones de densidad generadas durante inflación y son las que ocuparemos en la formación de agujeros negros primordiales; perturbaciones vectoriales, las cuales corresponden a las perturbaciones de vorticidad y no son producidas durante inflación; y perturbaciones tensoriales, las cuales corresponden a las ondas gravitacionales, estas últimas no las estudiaremos debido a que estamos a primer orden.

### 3.7.1. Perturbaciones de curvatura

Las fluctuaciones del inflatón no se mantienen constantes en escalas súperhorizonte, por lo tanto añadiremos otro tipo de perturbación escalar que nos será de mayor utilidad conocida como perturbación de curvatura  $\mathcal{R}$ , la cual tiene la propiedad de ser constante fuera del horizonte (ver figura 3.4). Podemos relacionar  $\mathcal{R}$  con las fluctuaciones del campo inflatón por:

$$\mathcal{R}_k = - \left[ \frac{H}{\dot{\phi}} \delta\phi_k \right]_{k=aH}, \quad (3.66)$$

donde  $\dot{\phi}_k$  es el valor de la derivada con respecto al tiempo del campo inflatón cuando una longitud de onda dada cruza el horizonte. Los modos se congelan fuera del horizonte y volverán a entrar una vez que inflación termine.

Para el caso de las perturbaciones de curvatura, escribo el espectro de potencias adimensional:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} P_{\mathcal{R}}(k), \quad (3.67)$$

El espectro de potencias de las perturbaciones de curvatura y el espectro de potencias de las fluctuaciones del campo inflatón se relacionan de la ecuación (3.67) y (3.62):

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \left( \frac{H}{\dot{\phi}} \right)^2 \langle \delta\phi_k \delta\phi_{k'} \rangle = \left[ \left( \frac{H}{\dot{\phi}} \right)^2 P_{\delta\phi}(k) \right]_{k=aH} = \left[ \left( \frac{H}{\dot{\phi}} \right) \left( \frac{H}{2\pi} \right) \right]_{k=aH}^2, \quad (3.68)$$

Usando slow-roll (3.14) y la primer ecuación de Friedmann (3.21), el espectro se puede escribir a la salida del horizonte a partir de un potencial dado [20]:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \approx \frac{1}{12\pi^2 \bar{m}_{pl}^6} \left( \frac{V^3}{V'^2} \right)_{k=aH}, \quad (3.69)$$

o bien usando el primer parámetro de slow roll (3.22) [21]:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \approx \frac{H^2}{8\pi^2 \bar{m}_{pl}^2 \epsilon}, \quad (3.70)$$

Podemos comparar las expresiones de arriba a observables del CMB, entonces en la salida del horizonte el espectro de potencia (3.68) se parametriza a una ley de potencias:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \equiv A_s \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_s - 1}. \quad (3.71)$$

$k_*$  es una escala pivote cuyo valor es  $k_* = 0.05 \text{Mpc}^{-1}$ , la amplitud  $A_s$  (también se escribe como  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_*)$ ) dada por  $\ln(10^{10} A_s) = 3.044 \pm 0.014$ , y el índice espectral  $n_s = 0.9649 \pm 0.0042$  [7].

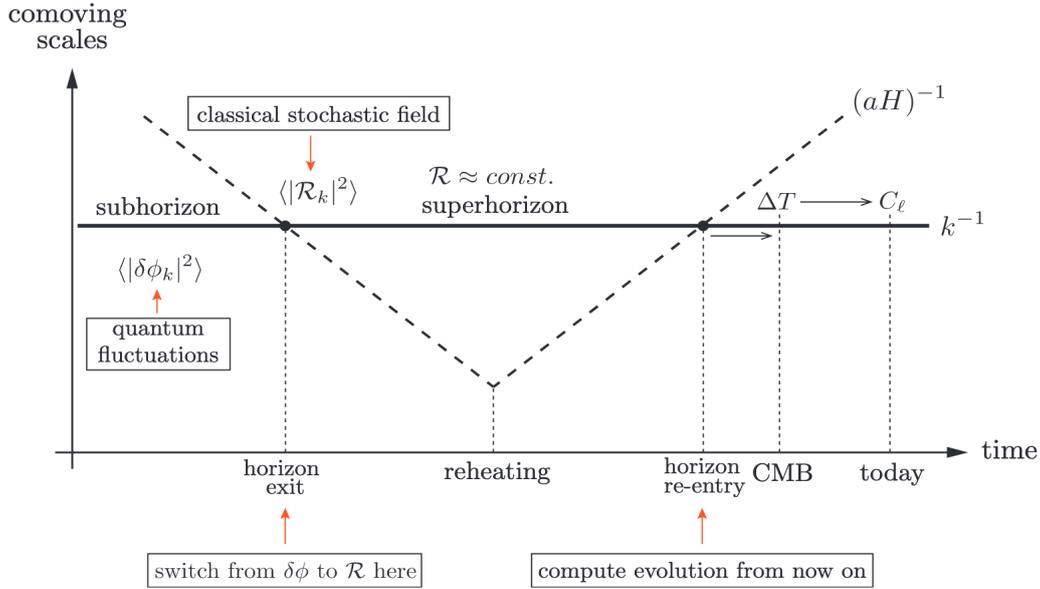


Figura 3.4: Evolución de las perturbaciones de curvatura antes y después de inflación: del lado izquierdo por el principio de incertidumbre se crearon a escalas subhorizonte fluctuaciones cuánticas del vacío que dieron lugar a perturbaciones de curvatura, las cuales se mantendrán constantes una vez que la escala salga del horizonte. Una vez que vuelvan a entrar en el dominio de radiación o materia, crearán perturbaciones de densidad (o temperatura) que quedarán impresas en la formación del CMB. Figura tomada de [22].

Definimos el índice espectral de la perturbación de curvatura como la derivada del espectro de potencias con la escala a primer orden:

$$n_s(k) - 1 \equiv \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k}. \quad (3.72)$$

Para el caso  $n_s = 1$ , se le conoce como espectro invariante de escala o también llamado espectro de Harrison-Peebles-Zeldovich, significa que cada longitud de onda tiene la misma intensidad, es una de las predicciones de la teoría inflacionaria y es confirmada por las observaciones a grandes escalas en el espectro de potencias de las anisotropías en el CMB. Por lo tanto inflación es responsable de la creación de perturbaciones de curvatura con un espectro casi invariante de escala.

### 3.7.2. Perturbaciones de densidad

Las perturbaciones de curvatura  $\mathcal{R}$  dan lugar a perturbaciones de la materia a través de la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho. \quad (3.73)$$

Esta ecuación nos relaciona el potencial gravitacional  $\Phi$  con la distribución de masa,  $\rho$  es la densidad en una posición  $\vec{x}$  y tiempo  $t$ , estas perturbaciones crecerán dando lugar a la estructura que conocemos.

El contraste de densidad describe como se distribuye la materia en relación con la densidad promedio en un punto dado y en un tiempo dado. Nos dice donde hay una sobrecarga de materia y se expresa como la perturbación de densidad entre la densidad promedio:

$$\delta(\vec{x}, t) = \frac{\rho(\vec{x}, t) - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\delta\rho}{\rho_0}. \quad (3.74)$$

Nos referimos a una estructura en una escala dada como lineal cuando  $|\delta| \ll 1$ .

En escalas dentro del radio de Hubble podemos trabajar con una gravedad newtoniana, para esto, consideramos un espacio lleno con un fluido ideal no relativista con  $\rho(\vec{x}, t)$  la densidad de masa local, la presión del fluido  $p(\vec{x}, t) \ll \rho(\vec{x}, t)$  y velocidad  $\vec{v}$ . Las ecuaciones de movimiento están dadas por la dinámica del fluido con ecuación de estado  $p = p(\rho)$  (2.23). La ecuación de continuidad describe la conservación de la masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0. \quad (3.75)$$

La ecuación de Euler se deriva de la segunda ley de Newton aplicada a un fluido:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\rho \vec{v} \nabla) \cdot \vec{v} = -\nabla p - \rho \nabla \phi. \quad (3.76)$$

En ausencia de perturbaciones el fluido es homogéneo y estático [23], sin embargo, no habría formación de estructura. Para esto, descomponemos las cantidades en su parte homogénea mas una perturbación:

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho,$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \delta\vec{v},$$

$$p = p_0 + \delta p,$$

$$\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi.$$

Usando el contraste de densidad (3.74), obtenemos las ecuaciones de movimiento perturbadas:

$$\frac{d\delta}{dt} = -\nabla \cdot \delta\vec{v}, \quad (3.77)$$

$$\frac{d\delta\vec{v}}{dt} + (\delta\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}_0 = -\frac{1}{\rho_0} \nabla\delta p - \nabla\delta\phi, \quad (3.78)$$

$$\nabla^2 \delta\Phi = 4\pi G \delta\rho, \quad (3.79)$$

Por lo tanto, considerando fluctuaciones adiabáticas y cambiando a coordenadas comóviles obtendremos la ecuación de perturbaciones de la densidad (ver Apéndice B):

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = \left(4\pi G\rho_0 - c_s^2 \frac{\nabla_c^2}{a^2}\right) \delta. \quad (3.80)$$

Esta ecuación caracteriza el crecimiento de las perturbaciones de densidad  $\delta(\vec{x}, t)$ , con  $\nabla_c$  la derivada espacial en coordenadas comóviles y se relaciona con las derivadas espaciales físicas por  $\nabla_c \equiv a(t)\nabla$  y  $c_s$  la velocidad del sonido adiabático definida en el capítulo anterior (2.54).

Debido a que (3.80) es una ecuación diferencial de segundo orden tendremos 2 soluciones:

$$\delta(\vec{x}, t) = \delta_1(\vec{x}, t) + \delta_2(\vec{x}, t), \quad (3.81)$$

Además, la evolución del tiempo es independiente de la posición, entonces podemos separar las soluciones en su parte espacial  $\delta(x)$  y en su parte temporal  $D(t)$ , a este último se le conoce como factor de crecimiento lineal.

Para perturbaciones lineales el contraste de densidad es muy pequeño  $\delta \ll 1$ , entonces podemos descomponerlo al espacio de Fourier y los modos  $k$  seran independientes:

$$\ddot{\delta}_k + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_k = (4\pi G\rho_0 - c_s^2 k^2) \delta_k. \quad (3.82)$$

con  $k$  el número de onda de la perturbación y  $\lambda \equiv 2\pi/k$  la longitud de onda comóvil de la perturbación.

Del último término de la ecuación (3.82) podemos definir la escala de Jeans:

$$k_J = \frac{\sqrt{4\pi G\rho_0}}{c_s}, \quad (3.83)$$

Ahora definimos la longitud de Jeans:

$$\lambda_J \equiv \frac{2\pi}{k_J} = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}}, \quad (3.84)$$

Si tenemos un fondo estático  $H = 0$  ( $\dot{a} = 0$ ):

- Para  $k > k_J \Rightarrow \lambda < \lambda_J$  la presión resiste a la gravedad y las perturbaciones  $\delta_k$  son estables presentandose como ondas sonoras.
- Para  $k < k_J \Rightarrow \lambda > \lambda_J$  la gravedad vence a los gradientes de presión por lo tanto las perturbaciones son inestables, crecen y tenemos colapso.

Podemos definir la longitud de Jeans como la barrera o longitud límite donde sabre si mis perturbaciones colapsarán o no, la masa de Jeans se define como la cantidad de materia en una esfera de radio  $R_J = \lambda_J/2$ :

$$M_J = \frac{4\pi}{3} R_J^3. \quad (3.85)$$

Si consideramos escalas  $R_H \ll \lambda_J$  podemos ignorar cualquier perturbación en la componente de radiación y tratarlo simplemente como un fondo plano.

En el dominio de materia ( $p = 0$ ) y usando la ecuación (2.28), la ecuación (3.82) toma la forma:

$$\ddot{\delta}_k + \frac{4}{3t}\dot{\delta}_k - 4\pi G\rho_m \delta_k = 0, \quad (3.86)$$

con densidad :

$$\rho_m = \frac{1}{6\pi G t^2}, \quad (3.87)$$

$\Rightarrow$

$$\ddot{\delta}_k + \frac{4}{3t}\dot{\delta}_k - \frac{2}{3t^2}\delta_k = 0. \quad (3.88)$$

Por lo tanto, las perturbaciones crecen con un factor de  $t^{2/3}$ .

$$D_1(t) \propto t^{2/3} \propto a(t), \quad (3.89)$$

En términos del corrimiento al rojo:

$$D(z) \propto \frac{1}{1+z}, \quad (3.90)$$

A tiempos tempranos el Universo tiende asintóticamente hacia un Universo de Einstein-de Sitter [24].

Y la segunda solución conduce a una densidad decreciente continua, las regiones subdensas experimentan un crecimiento negativo.

$$D_2(t) \propto t^{-1}. \quad (3.91)$$

# Capítulo 4

## Agujeros Negros Primordiales

Los agujeros negros primordiales (ANPs) son agujeros negros hipotéticos, que de ser descubiertos, serían los primeros agujeros negros que se crearon al inicio del Universo temprano. El mecanismo de formación es diferente al que conocemos de colapso estelar, debido a que en ese período aún no se habían formado las estrellas.

En este capítulo comenzaré con una introducción a las características principales que tiene un agujero negro que no presenta rotación ni carga, la masa de un ANP, la radiación de Hawking, la contribución que tendrían los ANPs en la cosmología, hablaré sobre el modelo de colapso esférico para poder explicar el mecanismo de formación de un agujero primordial usando inflación, y finalmente, hablare de como calcular la abundancia de ANPs usando el formalismo de Press-Schechter.

### 4.1. Características

Una de las predicciones de la relatividad general es la existencia de agujeros negros. Un agujero negro es una región del espacio-tiempo donde el campo gravitacional es tan fuerte que nada puede escapar de su horizonte de eventos (incluso la luz), este horizonte es la superficie límite que restringe la región de no retorno [25]. Todo agujero negro sea primordial o astrofísico está caracterizado por su masa  $\mathbf{M}$ , su momento angular  $\mathbf{J}$  y su carga eléctrica  $\mathbf{Q}$ , a esto se le conoce como el teorema de no pelo, y nos dice que no importa que haya entrado en el agujero, este siempre sera caracterizado por estas 3 componentes. Sin embargo, el principal parámetro que determinará las propiedades de un agujero negro primordial será su masa  $M$ , supondremos que al inicio no presentarán carga ni momento angular debido a que asumimos que estos se pierden por emisión cuántica e inflación. Segun las obervaciones los agujeros negros astrofísicos se pueden clasificar por su masa [26]:

1. Agujeros negros estelares: Son las reliquias provenientes de estrellas, con un rango de masas entre  $3M_{\odot} \leq M_{ANE} \leq 10^2 M_{\odot}$
2. Agujeros negros intermedios: Este tipo de agujeros negros junto con los agujeros negros supermasivos siguen siendo un misterio, debido a que su formación no pudo ser originada por una estrella, ya que su rango de masas es muy alto  $10^2 M_{\odot} \leq M_{ANI} \leq 10^6 M_{\odot}$ .
3. Agujeros negros supermasivos: Este tipo de agujeros negros se han encontrado en los centros de casi todas las galaxias y rondan entre  $10^6 M_{\odot} \leq M_{ANSM} \leq 10^{10} M_{\odot}$ .

Guardan una relación con los ANP, al suponer que los agujeros negros primordiales fueron los progenitores (las semillas) para la formación de este tipo de agujeros y por acreción de materia crecieron a lo largo de los años.

### 4.1.1. Masa de un ANP

En 1916, el físico alemán Karl Schwarzschild obtuvo la primera solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein, la cual corresponde a la descripción de un sistema que ocurre en el vacío, con simetría esférica, estático e invariante bajo inversión temporal, cuya métrica esta dada por:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (4.1)$$

con  $r$  un radio fijo y  $r_s$  el radio de Schwarzschild (con unidades) definido como:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}, \quad (4.2)$$

donde  $M$  es la masa del agujero negro y  $c$  es la velocidad de la luz.

Para agujeros negros que no roten el radio de Schwarzschild nos indica donde se encuentra el horizonte de eventos, este horizonte esta vinculado a la velocidad de escape que coincidirá con la velocidad de la luz. Para que se forme un agujero negro se necesita que se comprima  $M$  hasta el tamaño  $r_s$ , y la densidad de materia promedio del agujero sin rotación ni carga puede ser escrita como  $\rho_{AN} = M/r_s^3$ , por lo tanto:

$$\rho_{AN}(M) = \frac{3c^6}{32\pi G^3 M^2} = 10^{21} \left(\frac{M_\odot}{M}\right)^2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}. \quad (4.3)$$

Podemos ver que entre más grande sea un agujero negro menor será su densidad y viceversa. Para que en la actualidad se formen agujeros con masas muy pequeñas se requiere de altas densidades de energía, como serían las estrellas de neutrones o un plasma de quarks-gluones [27]. Si queremos masas cada vez más pequeñas necesitamos ir atrás en el tiempo en el dominio de radiación, donde el Universo se encontraba envuelto en una alta densidad de energía. Los ANPs cumplen con estas características y pueden formarse con masas muy pequeñas al final de inflación, la masa sería muy cercana a la masa del horizonte de partículas en el tiempo de su formación [28]:

$$M_{ANP} = \gamma M_{HP} = \gamma \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\rho_{rad}}{H^3}\right)_{k=aH}. \quad (4.4)$$

$\gamma$  es un factor de eficiencia numérico que se ajusta a la fracción del horizonte de partículas que colapsa en un agujero negro primordial y durante el dominio de radiación se estima que vale  $\gamma|_{rad} = \omega^{3/2} \approx 1/(\sqrt{3})^3 \approx 0.2$  [29] [30]. Al cruce del horizonte el radio del horizonte de partículas tomará el orden del radio de Hubble:

$$R_{HP} \simeq R_H. \quad (4.5)$$

En el dominio de radiación  $R = (aH)^{-1} \propto a$  y del Apéndice C la expansión con una entropía constante da  $\rho_{rad} \propto g_*^{1/3} T^4 \propto g_*^{1/3} a^{-4}$ , con  $g_*$  el número de grados de libertad relativistas aproximados a la temperatura  $T$  [31], consideramos que los ANPs se formaron en un dominio de radiación y toman un valor de  $g_* = 106.75$  [32][33].

Expresamos la masa del horizonte en el tiempo de igualdad de radiación-materia  $\rho_{rad}(a_{eq}) = \rho_m(a_{eq})$  como:

$$M_{H,eq} = \frac{4\pi}{3} \rho_{rad,eq} H_{eq}^{-3} = \frac{4\pi}{3} \frac{\Omega_{rad,0} \rho_c}{a_{eq} k_{eq}^3} = 1.48 \times 10^{17} M_{\odot}, \quad (4.6)$$

con  $g_{*,eq} = 3.38$ ,  $\rho_{rad,0} = \Omega_{rad,0} \rho_c$ ,  $a_{eq} = (1 + z_{eq}(t))^{-1}$  y  $k_{eq} = a_{eq} H_{eq}$  y de los datos de planck 2018 [7] tenemos:  $z_{eq} = 3402 \pm 26$ ,  $\Omega_{rad,0} = 9.2653 \times 10^{-5}$  y  $k_{eq} = 0.010384 \pm 0.000081 \text{Mpc}^{-1}$ . Entonces, dividiendo (4.4) entre (4.6):

$$\frac{M_H}{M_{H,eq}} = \frac{\rho_{rad} H^{-3}}{\rho_{rad,eq} H_{eq}^{-3}} = (k_{eq} R)^2 \left( \frac{g_{*,eq}}{g_*} \right)^{1/3}, \quad (4.7)$$

Entonces:

$$M_{ANP} = \gamma M_{H,eq} (k_{eq} R)^2 \left( \frac{g_{*,eq}}{g_*} \right)^{1/3}, \quad (4.8)$$

Además, puedo escribir la relación entre la masa de un agujero negro y el tiempo de su formación como [34]:

$$M_{ANP} = \gamma \frac{t}{2G} \simeq 10^{15} \left( \frac{t}{10^{-23} \text{s}} \right) \text{g}. \quad (4.9)$$

Si un ANP crece por acreción, su masa final sería más grande que la masa del horizonte en su formación [35]. Tomando (4.3) y en un Universo dominado por radiación, la densidad de un ANP es:

$$\rho_{ANP} \simeq 10^6 \left( \frac{t}{\text{s}} \right)^{-2} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}. \quad (4.10)$$

### 4.1.2. Radiación de Hawking

Al inicio se consideraba a los agujeros negros como objetos que solo podían absorber partículas, no obstante en 1974, Stephen Hawking (1942-2018) demostró que los agujeros negros no son del todo negros y pueden emitir radiación [36]. Esto debido a que las fluctuaciones del vacío crean pares de partícula-antipartícula (partículas virtuales), sin embargo, debido a efectos gravitacionales estas serían convertidas a partículas reales que se aniquilarían al instante. Pero, si estas partículas se forman a orillas del horizonte de eventos, una sería absorbida por el agujero mientras que la otra escaparía, haciendo que se perdiera energía. En 1973 el físico mexicano-israelí Jacob Bekenstein sentó las bases para explicar la entropía de un agujero negro [37], que más tarde fue precisada por Stephen Hawking. Hawking calculo que los agujeros negros irradian térmicamente con una temperatura de:

$$T_{AN} = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B} \approx 10^{-7} \left( \frac{M_{\odot}}{M} \right) \text{K}, \quad (4.11)$$

Usando (4.11) se puede calcular el cambio en la entropía de un agujero negro cuando se agrega una cantidad de calor  $dQ = c^2 dM$ :

$$dS_{AN} = \frac{dQ}{T_{AN}} = \frac{8\pi G k_B M dM}{\hbar c} = d \left( \frac{4\pi G k_B M^2}{\hbar c} \right), \quad (4.12)$$

Por lo tanto, la entropía de un agujero negro es [38]:

$$S_{AN} = \frac{k_B c^3 A}{4G\hbar}. \quad (4.13)$$

con  $A = 16\pi(GM/c^2)^2$ .

Además,  $dQ$  se relaciona con el calor específico  $C$  como  $dQ = MCdT$ , entonces:

$$C = T_{AN} \left( \frac{\partial S_{AN}}{\partial T_{AN}} \right)_{\mathbf{J}=\mathbf{Q}=0} = -\frac{8\pi k_B GM^2}{\hbar c}. \quad (4.14)$$

El signo menos nos dice que a medida que un agujero negro pierde masa la temperatura se incrementa, usando la ley de radiación de Stefan-Boltzmann nos queda:

$$\frac{dM}{dt} \approx \frac{\hbar c^4}{G^2 M^2}, \quad (4.15)$$

Por lo tanto, el tiempo de evaporación de un ANP esta dado por:

$$t_{evap} \approx \frac{G^2 M^3}{\hbar c^4} \sim 10^{10} \left( \frac{M_{ANP}}{10^{15}g} \right) \text{ años}. \quad (4.16)$$

La edad del Universo se aproxima a  $10^{10}$  años, por lo que ANPs con masas  $M \sim 10^{15}g$  se estarían evaporando en la actualidad, contribuyendo al fondo difuso de rayos  $\gamma$  cosmológicos y galácticos [34] [39]. Agujeros menores que  $10^{15}g$  ya se habrían evaporado, dejando a su paso que muchos procesos cosmológicos y astrofísicos en el Universo temprano se vieran afectados: entre estos efectos comenzaré con agujeros que se hubieran evaporado a 1s del Big Bang, estos podrían haber generado la entropía del Universo [40], podrían cambiar los detalles de la bariogénesis al producir un exceso de bariones sobre antibariones [41], al igual que la nucleosíntesis [42]. Si se hubieran evaporado a tiempos posteriores, ayudarían a la reionización del Universo [43].

Agujeros con masas mayores a  $10^{15}g$  podrían ser detectados por sus efectos gravitacionales. Debido a las observaciones hechas por LIGO y VIRGO en el 2015 de la fusión de dos agujeros negros con una masa total de aproximadamente  $60 M_\odot$  [44], el estudio de ANPs ha incrementado en los últimos ocho años, dado que estos pueden ser las semillas que posteriormente formaron agujeros negros supermasivos y que residen en los núcleos de las galaxias [45] [46]. Además, si ellos se formaron antes de la igualdad entre materia y radiación, los ANPs son no-bariónicos y podrían ser candidatos a materia oscura [47]. Al día de hoy no se ha encontrado de que esta compuesta la materia oscura, se sabe que aunque no podemos verla, consta aproximadamente del 85% de la materia del Universo, en forma de materia no-bariónica [48]. Interacciona con la gravedad y algunos de los efectos donde se ha observado son: las curvas de rotación de galaxias, galaxias en un cúmulo, las oscilaciones acústicas de bariones, lentes gravitacionales y el fondo cósmico de microondas. La materia oscura no interactúa con la fuerza electromagnética, por lo que no emite ni refleja luz, solo interactúa con la gravedad, además, se espera que sea fría (no-relativista). Hay muchos candidatos que se han propuesto y se han ido descartando en los últimos años, la ventaja que tienen los ANPs contra los demás candidatos es que no necesitan de algún tipo de partícula (sin descubrirse aún) del modelo estándar de la física de partículas. Sin embargo, si los ANPs fueran materia oscura corresponderían a una pequeña parte de esta, debido a que son objetos compactos con masas muy pequeñas. Otra característica importante es que las grandes perturbaciones de densidad colapsan a muy poca distancia unas de otras, por lo que los ANPs podrían haberse generado en cúmulos que pudieron fusionarse [49]. Incluso si los ANPs nunca se formaron, contribuyen a dar restricciones a modelos de inflación.

## 4.2. Modelo de colapso esférico

Ocuparé la idea de que las perturbaciones de densidad que colapsarán en ANPs tengan una forma de esferas simétricas, por lo tanto, antes de hablar de la formación de ANPs explicaré el modelo de colapso esférico (o modelo top-hat) para la formación de estructura a gran escala propuesto por Gunn y Gott en 1972 [50].

Hasta ahora he tratado las perturbaciones en un régimen lineal  $\delta \ll 1$ , sin embargo, una vez que  $\delta \sim 1$  ya no estamos trabajando con perturbaciones pequeñas y necesitamos considerar el régimen no lineal. Usamos el Universo de Einstein-de Sitter, donde se considera el Universo de FLRW con curvatura espacial cero,  $\Omega_m = 1.0$  y  $\Omega_\Lambda = 0.0$ . La sobredensidad tomará la forma de una esfera de radio  $R$  con una densidad interna uniforme y alcanzará un radio máximo  $R_{max}$ , donde colapsará debido a su propia gravedad.

La masa total dentro de la esfera es:

$$M(< R) = \frac{4\pi}{3} R^3(t) \bar{\rho} [1 + \delta], \quad (4.17)$$

Con  $\bar{\rho}$  la densidad promedio fuera de la esfera y  $\delta$  la sobredensidad inicial.

El primer teorema de Newton nos dice que: «una distribución de materia simétricamente esférica afecta gravitatoriamente a los objetos externos como si toda su masa estuviera concentrada en el centro de la esfera» [51]. Por lo tanto, la ecuación de movimiento para el radio de la esfera esta dada por:

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2}, \quad (4.18)$$

Si integramos una vez con respecto al tiempo [30]:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{R} = E, \quad (4.19)$$

donde  $E$  es la energía específica del cascarón de la esfera.

Las soluciones de (4.19) están dadas por la forma paramétrica (ver figura 4.1):

$$R = A(1 - \cos \theta), \quad (4.20)$$

$$t = B(\theta - \sin \theta), \quad (4.21)$$

con:

$$A = \frac{GM}{2|E|}, \quad (4.22)$$

$$B = \frac{GM}{(2|E|)^{3/2}}, \quad (4.23)$$

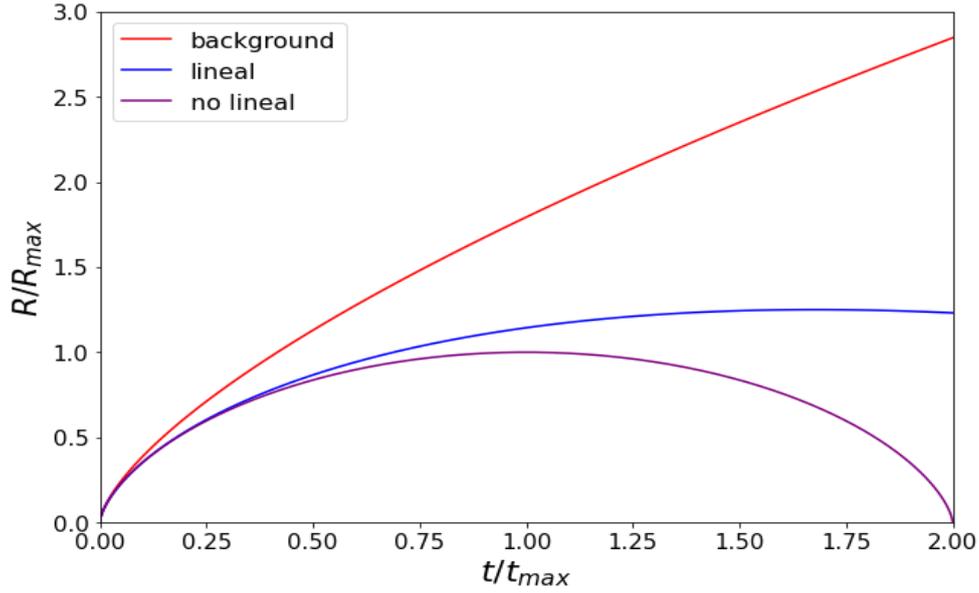


Figura 4.1: La evolución del radio (factor de escala) en el background, en el régimen lineal y no lineal

⇒

$$A^3 = GMB^2, \quad (4.24)$$

Expandiendo en serie de Taylor las funciones  $\sin \theta$  y  $\cos \theta$ :

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots, \quad (4.25)$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots, \quad (4.26)$$

⇒

$$R = \frac{A\theta^2}{2} \left( 1 - \frac{\theta^2}{12} + \dots \right), \quad (4.27)$$

$$t = \frac{B\theta^3}{6} \left( 1 - \frac{\theta^2}{20} + \dots \right), \quad (4.28)$$

Por lo tanto, nos queda:

$$R(t) = \frac{A}{2} \left( \frac{6t}{B} \right)^{2/3} \left[ 1 - \frac{1}{20} \left( \frac{6t}{B} \right)^{2/3} \right]. \quad (4.29)$$

La evolución del contraste de densidad está dada por:

$$\delta = \frac{9GM}{2} \frac{B^2}{A^3} \frac{(\theta - \sin \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^3} - 1 = \frac{9}{2} \frac{(\theta - \sin \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^3} - 1, \quad (4.30)$$

De (4.29) podemos ver que las perturbaciones crecen con respecto al tiempo  $\delta \propto R^{-3} \propto t^{-2}$ , del segundo término  $t \rightarrow 0$  y la sobredensidad lineal se puede estimar como:

$$\delta_{lin} = \lim_{t \rightarrow 0} \delta(t) \approx \frac{3}{20} \left( \frac{6t}{B} \right)^{2/3}, \quad (4.31)$$

La esfera alcanza un punto de máxima expansión conocido como "turnaround", esto ocurrirá en  $\theta = \pi \rightarrow R_{max} = 2A$  a un tiempo máximo  $t_{max} = t_{ta} = \pi B$ . El contraste de densidad lineal en el turnaround es:

$$\delta_{lin}^{ta} = \frac{3}{20}(6\pi)^{2/3} = 1.06, \quad (4.32)$$

Después del turnaround la esfera sufre un colapso gravitacional, el colapso final ocurre cuando  $\theta = 2\pi \rightarrow R_{col} = 0$  a un tiempo  $t = 2\pi B$ :

$$\delta_{lin}^{col} = \frac{3}{20}(12\pi)^{2/3} = 1.686 \quad (4.33)$$

De acuerdo al modelo de colapso esférico, regiones con  $\delta(\vec{x}, t) > \delta_c \approx 1.686$  lograrán colapsar, este valor es independiente de la masa  $M$  y de la sobredensidad inicial sobre una esfera de radio  $R$ , sin embargo, este valor cambiará para producir ANPs, ya que estamos considerando que estos se formarán en escalas pequeñas y en un dominio de radiación.

### 4.3. Formación de un ANP

Además de las altas densidades de energía que tenía el Universo temprano durante el dominio de radiación, los ANPs requieren de otras características para su formación. En el anterior capítulo vimos que inflación genera las perturbaciones de curvatura que salen del horizonte y se mantienen constantes provenientes del inflatón. Podemos ocupar estas perturbaciones para la construcción de ANPs relacionandolas con perturbaciones en la densidad, las cuales colapsarán gravitacionalmente usando la idea del modelo de colapso esférico que se vio en la anterior sección. La gravedad superará la presión para una sobredensidad de radio  $R$  y formará un ANP si su tamaño es mayor a la longitud de Jeans y mas pequeño que el horizonte por causalidad [52]. Si en algún momento antes de inflación se formaron agujeros negros (ejemplo: en la era de Planck) estos serían diluidos al momento de la expansión exponencial, por lo que los agujeros que se estudiarán serán creados después de inflación. Las escalas para formar un ANP deben de ser mayores que la escala pivote del CMB  $k_{ANP} \gg k_{CMB}$ , y su espectro de potencia igual debe ser mayor  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_{ANP}) \gg \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_{CMB}) \sim 10^{-9}$ . Para conectar las perturbaciones de curvatura con las perturbaciones de densidad  $\delta\rho$  usamos el contraste de densidad (3.76). Podemos expresar el contraste de densidad en terminos de las perturbaciones de curvatura  $\mathcal{R}$  [19] a través del potencial gravitacional de Poisson perturbado (3.81):

$$\delta(k, t) = \frac{2(1 + \omega)}{5 + 3\omega} \left( \frac{k}{aH} \right)^2 \mathcal{R}_k, \quad (4.34)$$

Con  $\omega$  la constante adimensional de la ecuación de estado (2.23).

Y el espectro de las perturbaciones de densidad lo puedo escribir como la varianza de las perturbaciones de densidad al cuadrado  $\mathcal{P}_\delta = \langle \delta_k^2 \rangle$ , entonces:

$$\mathcal{P}_\delta = \frac{4(1 + \omega)^2}{(5 + 3\omega)^2} \left( \frac{k}{aH} \right)^4 \mathcal{P}_{\mathcal{R}}, \quad (4.35)$$

La formación de ANPs esta relacionada con el espectro de potencias de las perturbaciones de densidad en el Universo temprano, en esta tesis consideraré su formación en un dominio de radiación, entonces de (4.34) y (4.35):

$$\delta(k, t)|_{rad} = \frac{4}{9} \left( \frac{k}{aH} \right)^2 \mathcal{R}_k, \quad (4.36)$$

⇒

$$\mathcal{P}_\delta(k)|_{rad} = \frac{16}{81} \left( \frac{k}{aH} \right)^4 \mathcal{P}_\mathcal{R}(k). \quad (4.37)$$

Si  $\xi_\delta(r=0)$  el espectro de potencias nos da la varianza del campo (ver Apéndice A):

$$\sigma_\delta^2(k) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P_\delta(k) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin(kr)}{kr} k^2 dk = \int_0^\infty \mathcal{P}_\delta(k) \frac{dk}{k}. \quad (4.38)$$

La varianza nos dirá la amplitud de la perturbación de densidad, para medir la perturbación en un punto particular, se suaviza el campo de densidad convolucionando el contraste con una función ventana. Reemplazaré el campo de densidad por un campo suavizado, en el espacio real:

$$\delta(\vec{x}, R) = \int \delta(\vec{x}') W(\vec{x} - \vec{x}', R) d^3 \vec{x}', \quad (4.39)$$

La función ventana es un filtro que se usa para suavizar el campo de densidad, así la varianza estará definida para los modos que estén dentro del horizonte. En el espacio de Fourier la convolución se convierte en una multiplicación:

$$\delta(\vec{k}, R) = \int \delta(\vec{x}, R) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) d^3 \vec{x} = \delta(\vec{k}) \tilde{W}(kR). \quad (4.40)$$

donde  $\tilde{W}(kR)$  es la transformada de Fourier de la función ventana.

En esta tesis elegiré una función ventana top-hat (ver figura 4.2) y una función ventana gaussiana (ver figura 4.3). La función ventana top-hat en el espacio real:

$$W(\vec{x}; R) = \left( \frac{4\pi R^3}{3} \right)^{-1} \Theta(R - \vec{x}) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi R^3} & \vec{x} \leq R \\ 0 & \vec{x} > R, \end{cases} \quad (4.41)$$

con  $\Theta(R - \vec{x})$  la función Heaviside, y en el espacio de Fourier:

$$\tilde{W}(kR) = \frac{3}{(kR)^3} [\sin(kR) - kR \cos(kR)] = \frac{3j_1(kR)}{kR}. \quad (4.42)$$

con  $j_1(kR)$  una función de Bessel.

Usando ahora una función ventana gaussiana para suavizar el campo de densidad, en el espacio real:

$$W(\vec{x}; R) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} R^3} \exp\left(-\frac{\vec{x}^2}{2R^2}\right), \quad (4.43)$$

y en el espacio de Fourier:

$$\tilde{W}(kR) = \exp\left(-\frac{k^2 R^2}{2}\right). \quad (4.44)$$

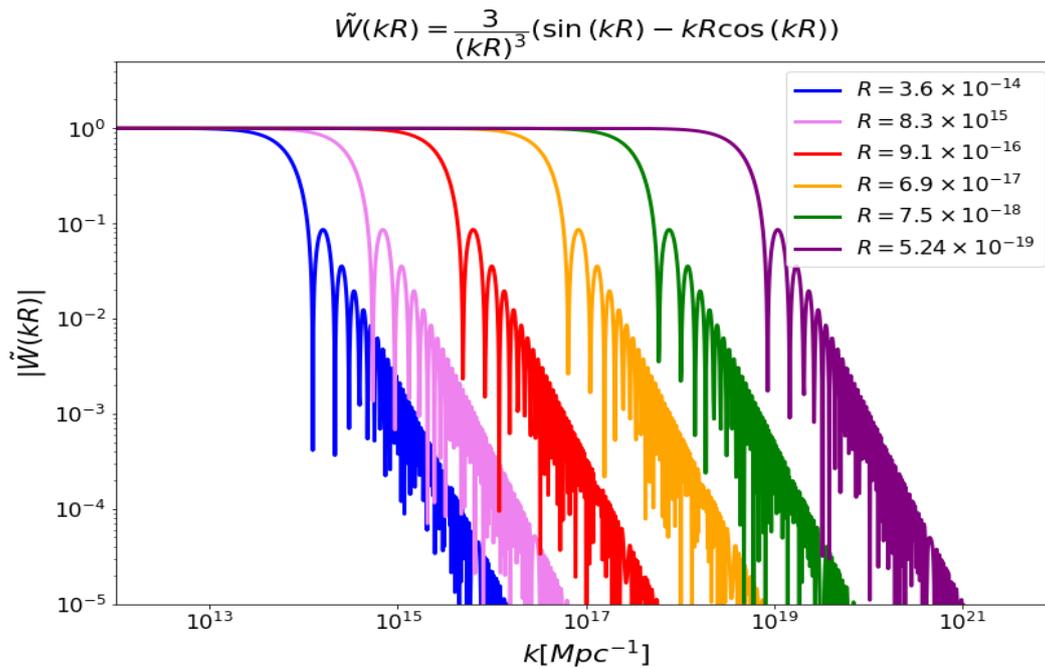


Figura 4.2: Función ventana top-hat con respecto a la escala para 6 radios distintos.

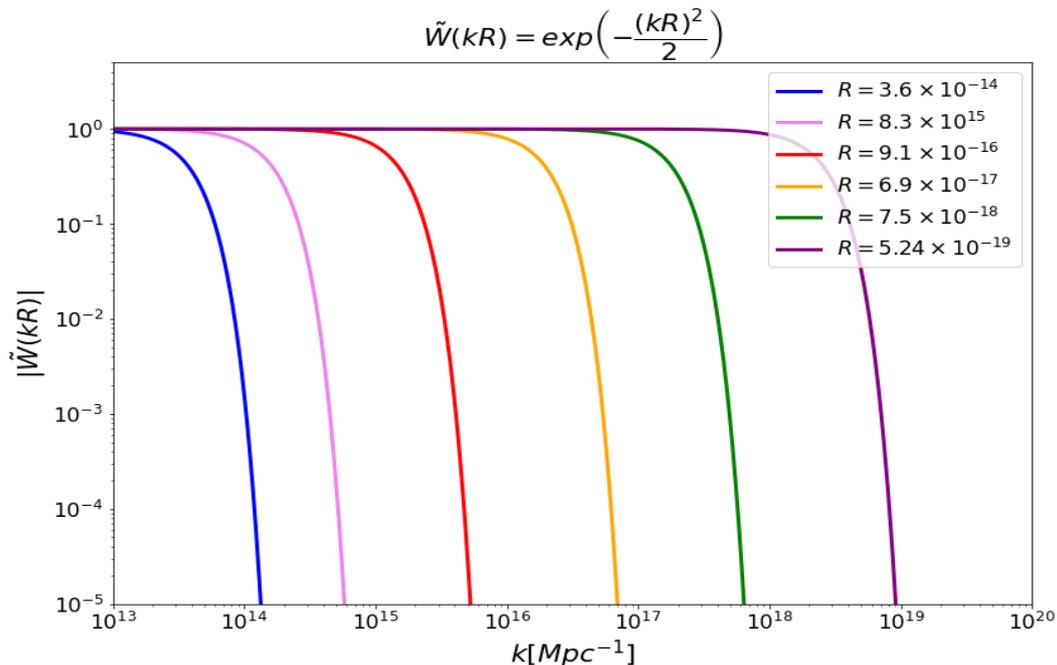


Figura 4.3: Función ventana gaussiana con respecto a la escala para 6 radios distintos.

La varianza se puede escribir como el momento de segundo orden del contraste de densidad usando (4.40), se calcula convolucionando el espectro de potencias con una función ventana, y la varianza de la distribución de masa suavizada promediada en esferas de radio  $R$  es:

$$\sigma_{\delta}^2(R) = \int_0^{\infty} \mathcal{P}_{\delta}(k) |\tilde{W}(kR)|^2 \frac{dk}{k}, \quad (4.45)$$

Vemos que la ecuación (4.45) se puede aproximar a  $\sigma_\delta^2 \sim \mathcal{P}_\delta(k_{ANP})$ .

Podemos sustituir en términos del espectro de potencias de curvatura usando (4.35):

$$\sigma_\delta^2(R) = \frac{4(1+\omega)^2}{(5+3\omega)^2} \int_0^\infty \left(\frac{k}{aH}\right)^4 \mathcal{P}_\mathcal{R}(k) |\tilde{W}(kR)|^2 d \ln k, \quad (4.46)$$

La formación de ANPs es causal, quiere decir que para su formación las escalas deben de estar adentro del radio de Hubble, por lo que  $R \leq 1/aH$ , entonces en el dominio de radiación:

$$\sigma_\delta^2(R) = \frac{16}{81} \int_0^\infty (kR)^4 \mathcal{P}_\mathcal{R}(k) |\tilde{W}(kR)|^2 d \ln k, \quad (4.47)$$

Debido a que  $81/16 \sim 5$  podemos relacionar el espectro de potencia de las perturbaciones de curvatura con la varianza como [32]:

$$\mathcal{P}_\mathcal{R}(k_{ANP}) \sim 5\sigma_\delta^2. \quad (4.48)$$

A partir de la varianza puedo obtener la probabilidad de encontrar el promedio del contraste de densidad en una región esférica, parto de que el campo de densidad es un campo aleatorio gaussiano (debido a la forma de las perturbaciones primordiales), por lo que mis distribuciones de probabilidad serán gaussianas:

$$P(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\delta(R)} \exp\left(-\frac{(\delta - \mu)^2}{2\sigma_\delta^2(R)}\right). \quad (4.49)$$

Con  $\mu$  la media, asumiré que en mis distribuciones, todas tienen  $\mu = 0$ .

## 4.4. Formalismo de Press-Schechter

El formalismo de Press-Schechter nos ayuda a predecir el número de objetos colapsados dado una masa  $M$ . Fue introducido en 1974 por William Press y Paul Schechter, y nos dice que si suavizamos el campo de densidad, la fracción del espacio en la cual el campo excede algún valor umbral  $\delta_c$  será en forma de objetos colapsados [53], (ver figura 4.4). La probabilidad de que una región del Universo con un tamaño  $R$  y una sobredensidad  $\delta$ , en algún punto,  $\delta$  exceda algún valor crítico  $\delta_c$ , esta dadá por la integración de la distribución de probabilidad gaussiana desde el umbral crítico hasta infinito:

$$P[> M] = P[\delta > \delta_c | M] = \int_{\delta_c}^\infty P(\delta) d\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\delta(R)} \int_{\delta_c}^\infty \exp\left(-\frac{\delta^2(R)}{2\sigma_\delta^2(R)}\right) d\delta, \quad (4.50)$$

La integral (4.50) nos da una función error complementaria:

$$P[> M] = \frac{1}{2} \text{Erfc}\left(\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma_\delta}\right), \quad (4.51)$$

Erfc es la función error complementaria, que se escribe como:

$$\text{Erfc}(x) = 1 - \text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt.$$

Sin embargo hay un problema, para campos gaussianos tenemos que la mitad de las perturbaciones de densidad son subdensas. Quiere decir que solo la mitad de la masa del

Un universo está disponible para formar objetos colapsados [19], si hacemos  $M \rightarrow 0$  entonces  $P[> M] = 1/2$ . Se soluciona este problema si se multiplica por un factor de 2, conocido como "factor de engaño", al hacer esto  $P[> 0] = 1$  y el resultado se ajusta muy bien a las simulaciones de N-cuerpos.

En el modelo de colapso esférico original  $\delta_c = 1.686$ , sin embargo, este rango cambiará para la formación de agujeros negros primordiales, por lo que se ha estudiado mucho cuál es el valor umbral requerido; la primera estimación fue sugerida por Bernard Carr [52] usando que el colapso ocurrirá cuando el tamaño de una sobredensidad sea mayor que la longitud de Jeans (3.84) y menor que el tamaño del horizonte de partículas. Entonces, dentro del horizonte usamos la gravedad newtoniana y la sobredensidad de la perturbación debe ser más grande que la velocidad del sonido de la perturbación al cuadrado:

$$\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\rho}|_{k=aH} > \delta_c = c_s^2 = \frac{1}{3}, \quad (4.52)$$

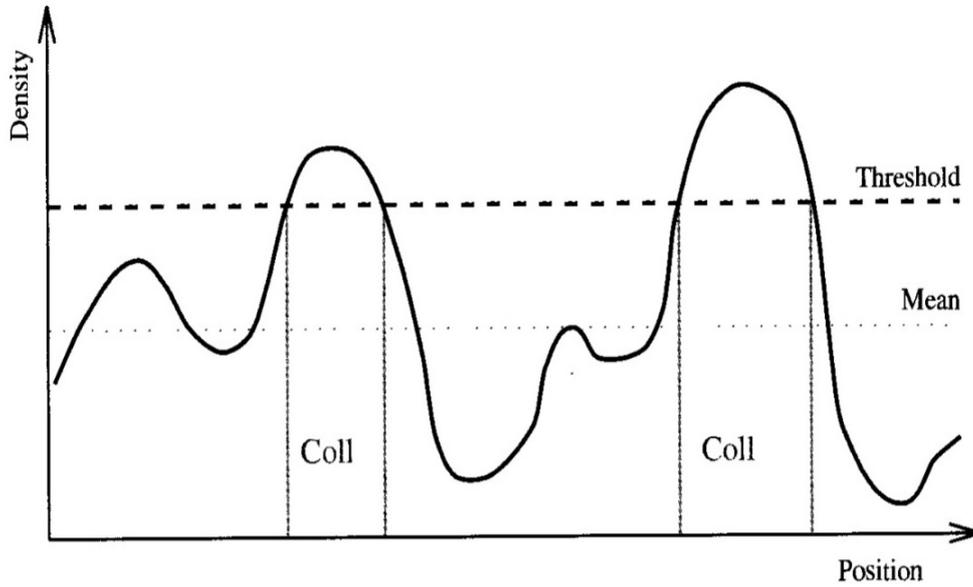


Figura 4.4: Representación del formalismo de Press-Schechter aplicado a un campo de densidad suavizado. Podemos ver que regiones por arriba de un cierto umbral tenderán a colapsar y a formar estructura, figura obtenida de [19].

El umbral crítico depende del perfil inicial de la perturbación de curvatura, Harada encontró una solución analítica en el 2014 [54]:

$$\delta_c = \frac{3(1 + \omega)}{(5 + 3\omega)} \sin^2 \left( \frac{\pi\sqrt{\omega}}{1 + 3\omega} \right) \approx 0.41, \quad (4.53)$$

La probabilidad de que una zona sobredensa colapse y forme ANPs va a estar dada por la fracción inicial de masas  $\beta(M)$ , basándose en el tratamiento de Press-Schechter.

Por lo tanto, la abundancia de agujeros primordiales se calcula como:

$$\beta(M) = \frac{\rho_{ANP}}{\rho_{tot}} = \text{Erfc} \left( \frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma_\delta(R)} \right). \quad (4.54)$$

La fracción de masas que colapsará en un ANP está relacionada con la amplitud de la distribución (varianza), para varianzas más grandes obtendremos más ANPs (ver figura

4.5). Usaremos el espectro de ley de potencias (3.71) para hacer los cálculos, para el filtro top-hat la varianza nos queda [55]:

$$\sigma_\delta^2(R) = \frac{16}{81} \frac{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_*)}{k_*^{n_s-1}} \int_0^\infty k^{n_s+3} R^4 |\tilde{W}(kR)|^2 d \ln k = \frac{16}{9} \frac{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_*)}{(k_* R)^{n_s-1}} \int_0^\infty du u^{n_s} j_1^2(u), \quad (4.55)$$

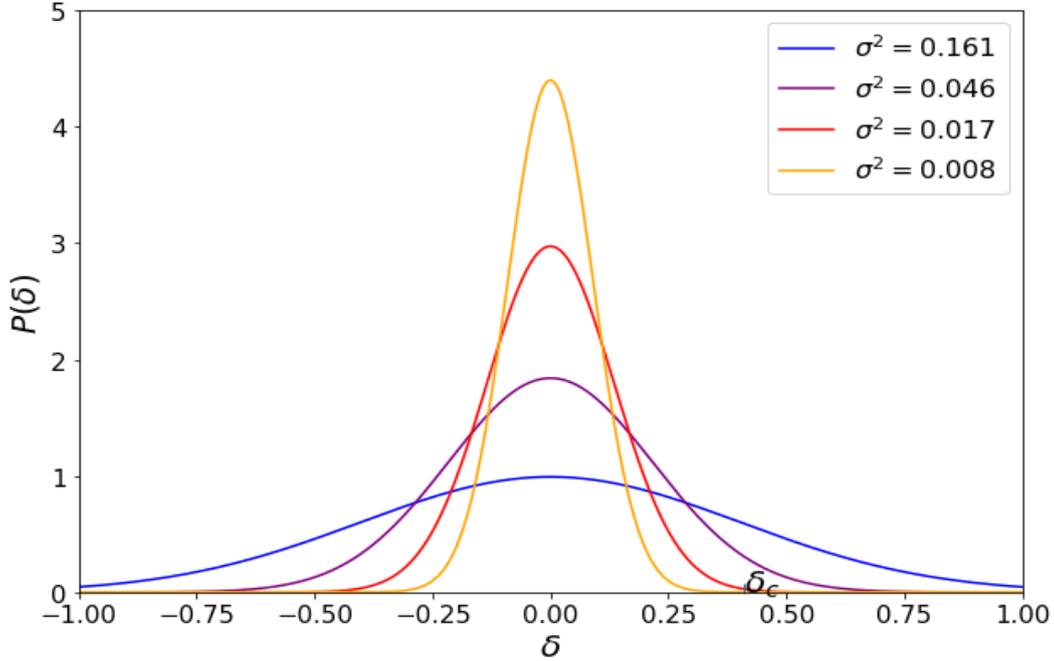


Figura 4.5: En esta gráfica muestro cuatro distribuciones de probabilidad gaussianas, con varianzas distintas y un umbral crítico  $\delta_c = 0.41$ , la gaussiana azul tiene una varianza más grande por lo que la integral bajo la curva sera mayor.

Para el filtro gaussiano [56]:

$$\sigma_\delta^2 = \frac{8}{81} \frac{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_*)}{(k_* R)^{n_s-1}} \int_0^\infty (k^2 R^2)^{(n_s+3)/2-1} \exp(-k^2 R^2) d(k^2 R^2) = \frac{8}{81} \frac{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_*)}{(k_* R)^{n_s-1}} \Gamma\left(\frac{n_s+3}{2}\right), \quad (4.56)$$

con  $\Gamma$  la función gamma definida como:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Si el espectro es invariante de escala  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_*)$ , entonces, la varianza suavizada para el filtro top-hat es:

$$\sigma_\delta^2(R) = \frac{16}{81} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_*) R^4 \int_0^\infty k^3 |\tilde{W}(kR)|^2 dk = \frac{16}{9} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_*) \int_0^\infty u j_1^2(u) du, \quad (4.57)$$

con  $u = kR$ .

Y para la función ventana gaussiana:

$$\sigma_\delta^2(R) = \frac{16}{81} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_*) \Gamma(2). \quad (4.58)$$

A continuación, en el siguiente capítulo mostraré los resultados de mi trabajo de tesis.

# Capítulo 5

## Resultados

En este capítulo se presentan los resultados de las fracciones de colapso obtenidas para formar ANPs, usando un espectro de potencia tipo inflación a la Starobinski (modelo estándar de la cosmología), donde voy a variar el valor del índice espectral para ver como afectará a la formación de agujeros negros en un dominio de radiación. La forma del espectro de curvatura será de las observables del CMB, en forma de ley de potencias, recordando la ecuación (3.71):

$$P_{\mathcal{R}}(k) = A_s \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_s - 1}.$$

Donde  $A_s$  es la amplitud de la perturbación,  $k_* = 0.05 \text{Mpc}^{-1}$  y  $n_s$  es el índice espectral que voy a variar entre el valor medido por la colaboración PLANCK (0.965) y un valor exagerado de 1.4. El objetivo está de ver el impacto de la modificación del índice espectral sobre cada etapa de la evaluación de la formación de los ANPs. Presento en la figura 5.1 el espectro de potencias de las perturbaciones de curvatura (arriba) y el espectro de potencias de las perturbaciones de densidad (abajo) con respecto a la escala desde  $10^{-5} \text{Mpc}^{-1}$  a  $10^{23} \text{Mpc}^{-1}$ , para seis índices espectrales distintos. El espectro de potencias de las perturbaciones de densidad baja un factor de  $16/81$  con respecto al de curvatura. Para  $n_s = 1$  tenemos que cada longitud de onda tiene la misma intensidad, por lo tanto, el espectro es invariante de escala, podemos ver que para tener amplitudes más grandes en el espectro necesitamos aumentar el índice.

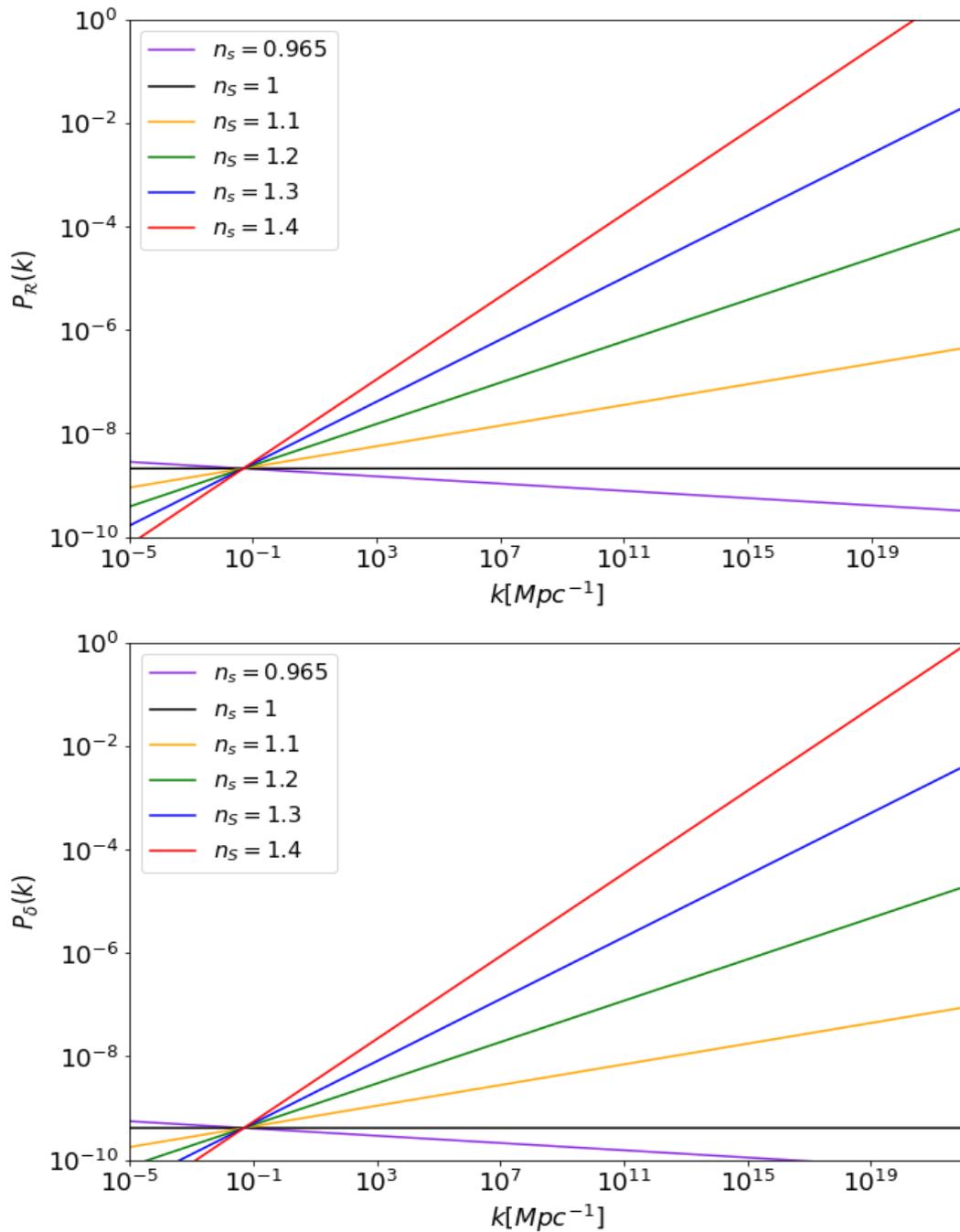


Figura 5.1: Gráficas del espectro de potencias de curvatura (arriba) y el espectro de potencias de las perturbaciones de densidad (abajo) con respecto a una escala entre  $10^{-5}$  y  $10^{23}\text{Mpc}^{-1}$ , para distintos índices espectrales.

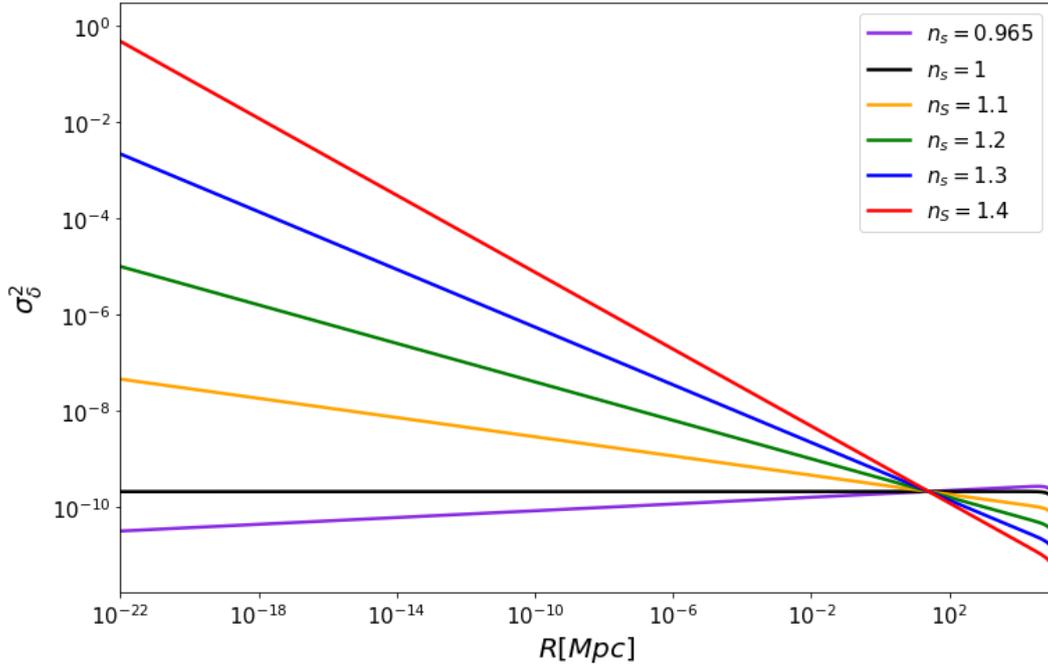


Figura 5.2: La varianza con respecto al radio de la perturbación.

La primera etapa es la estimación de la varianza dentro de una esfera de radio  $R$ . Como se presentó en la sección 4.3, evaluó la varianza dentro de un rango de  $R$  desde  $10^{-22}$ Mpc hasta  $10^5$ Mpc, con una función ventana gaussiana. En la figura 5.2 se muestra la varianza del contraste de densidad con respecto al radio de la perturbación, la forma de la gráfica se debe a que el radio va como  $R = 1/k \leq 1/aH$ , por lo tanto, para radios más pequeños le corresponden varianzas más grandes y viceversa.

Ahora calculamos la fracciones iniciales de masas que pueden colapsar y formar agujeros negros primordiales, en función de la varianza y del contraste crítico (umbral), para esto, se tomarón tres umbrales. El primero corresponde al umbral de Bernard Carr con  $\delta_c = 0.33$ , como se menciona en la sección 4.4, se propone que el colapso ocurrirá cuando la sobredensidad sea menor que el horizonte de partículas y mayor que la longitud de Jeans. El segundo fue propuesto por Tomohiro Harada, Chul-Moon Yoo y Kazunori Kohri, con  $\delta_c = 0.41$ , en el cual proponen por simulaciones numéricas un modelo de tres zonas, la primer zona corresponde a la sobredensidad con simetría esférica en un Universo de FLRW cerrado. Por último, se propone el umbral de Niemeyer y Jedamzik con  $\delta_c = 0.7$  [57], donde proponen, igual por simulaciones numéricas, tres familias de perturbaciones de curvatura con la forma de una gaussiana, un sombrero mexicano y un polinomio de orden seis. En la figura 5.3 se intento graficar los seis índices espectrales propuestos, sin embargo, solo se obtuvo colapso para  $n_s = 1.3$  y  $n_s = 1.4$ . Por lo tanto, se busca obtener datos entre ese rango de valores.

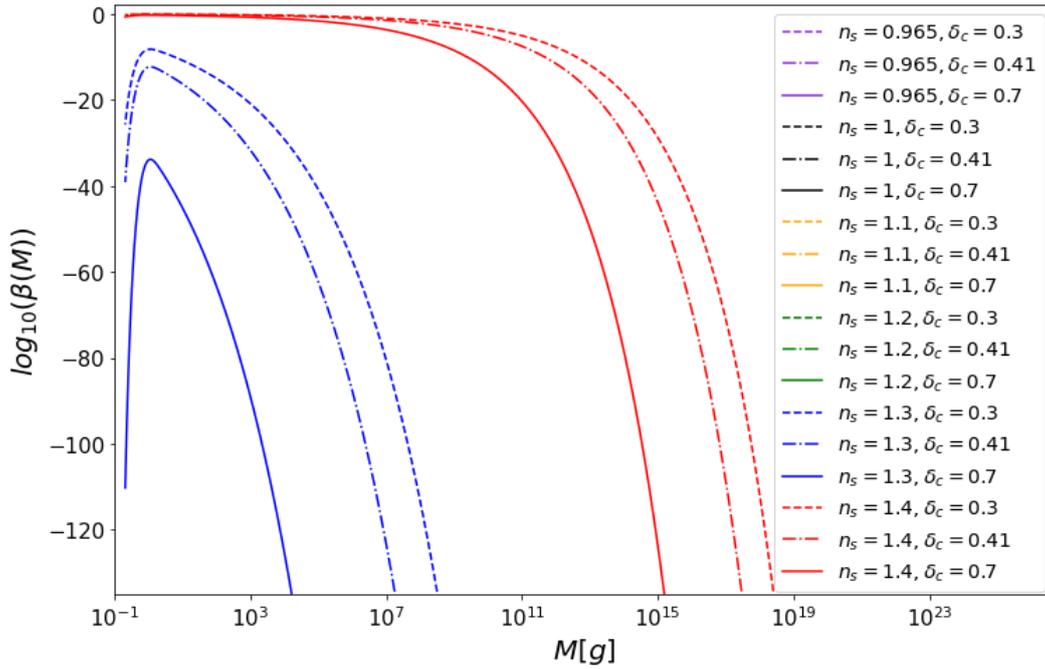


Figura 5.3: En esta gráfica se muestra la fracción de colapso para el índice espectral 1.3 y 1.4 con tres umbrales distintos, para el caso de los índices espectrales  $n_s \leq 1.2$  no hubo colapso.

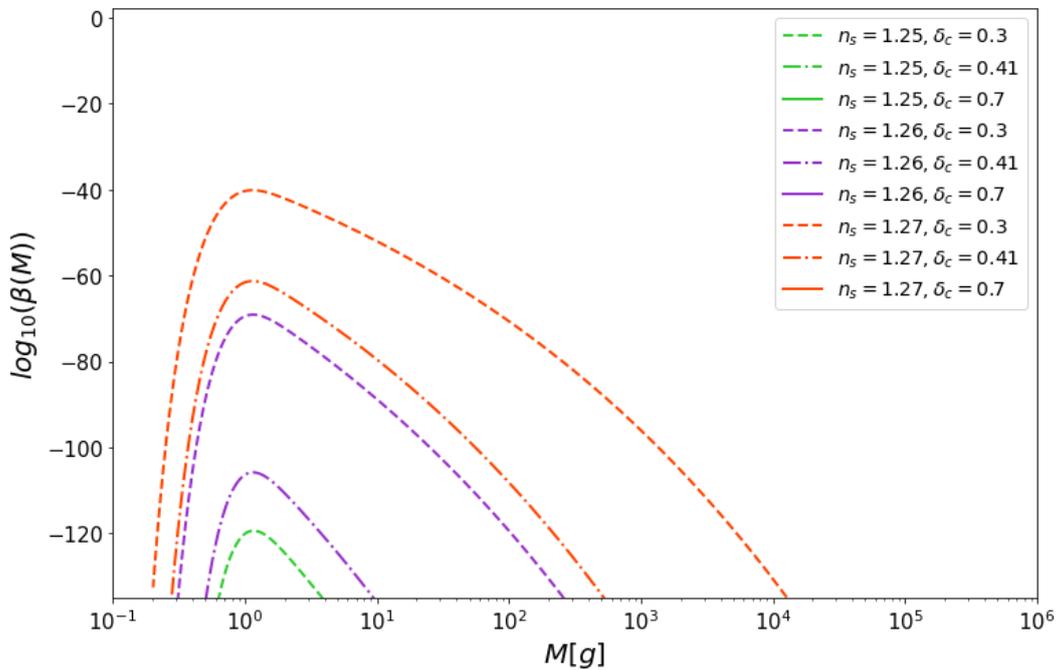


Figura 5.4: En esta gráfica se muestra el colapso para índices espectrales entre 1.25 y 1.27, podemos observar que para  $n_s = 1.25$  solo se formaron agujeros primordiales con  $\delta_c = 0.33$ , para  $n_s = 1.26$  y  $n_s = 1.27$  solo hubo formación hasta el umbral  $\delta_c = 0.41$ .

Para las figuras 5.5 en adelante tenemos formación para todos los umbrales, en el caso de la figura 5.7 y 5.8 podemos observar que prácticamente todo está colapsando, esto se

debe a que la pendiente del espectro toma amplitudes de las perturbaciones muy cercanas a uno, por lo tanto tenemos varianzas demasiado grandes.

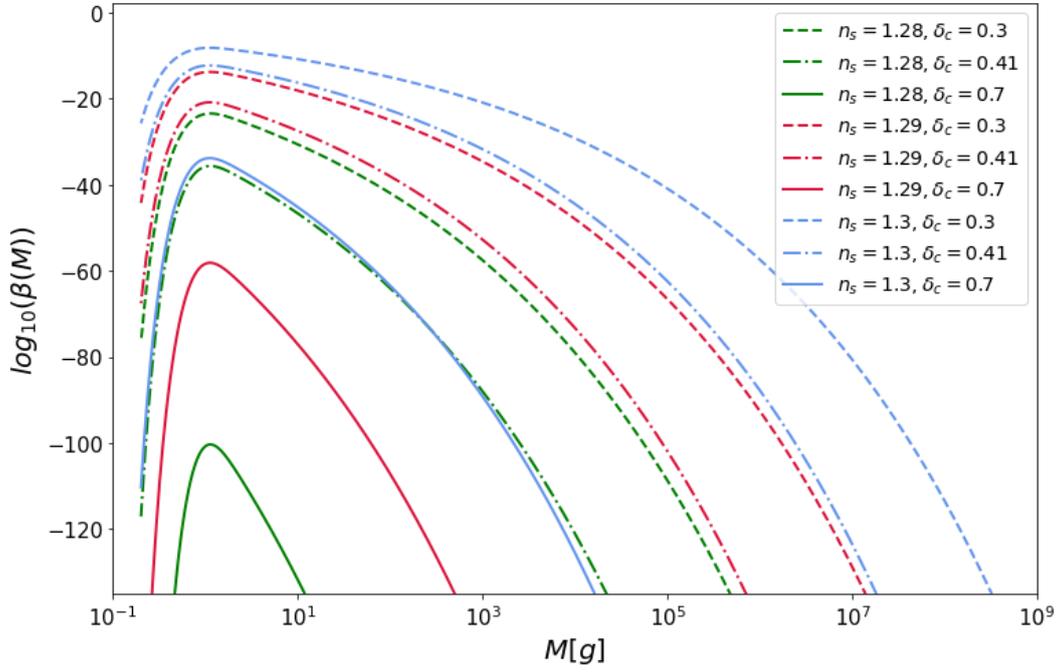


Figura 5.5: Fracción de colapso para  $n_s = 1.28$  a  $n_s = 1.3$ .

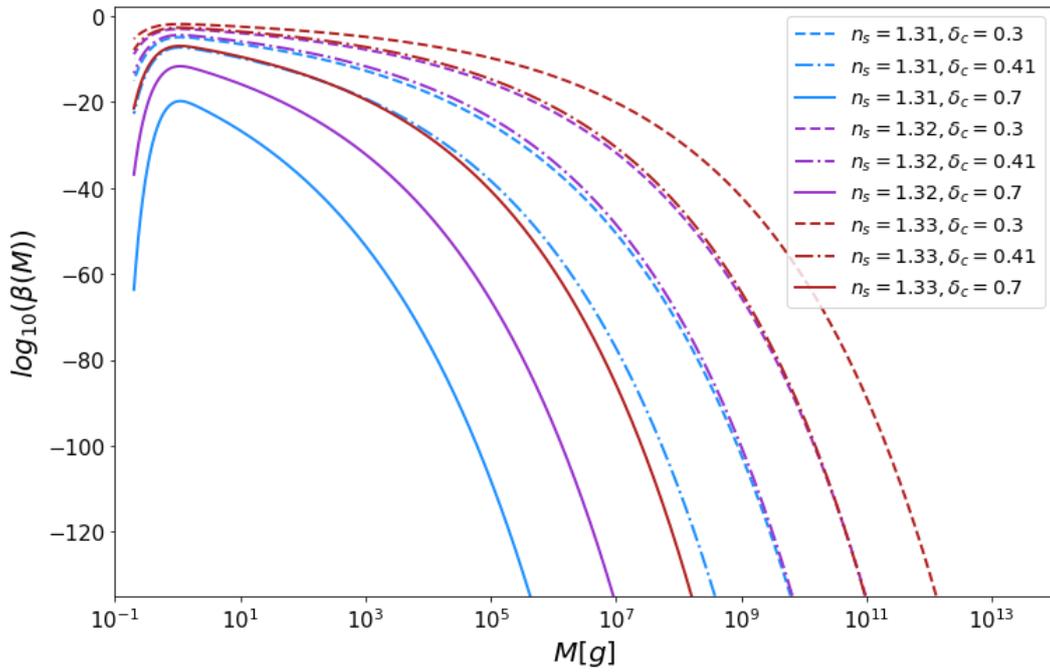


Figura 5.6: Fracción de colapso para  $n_s = 1.31$  a  $n_s = 1.33$ .

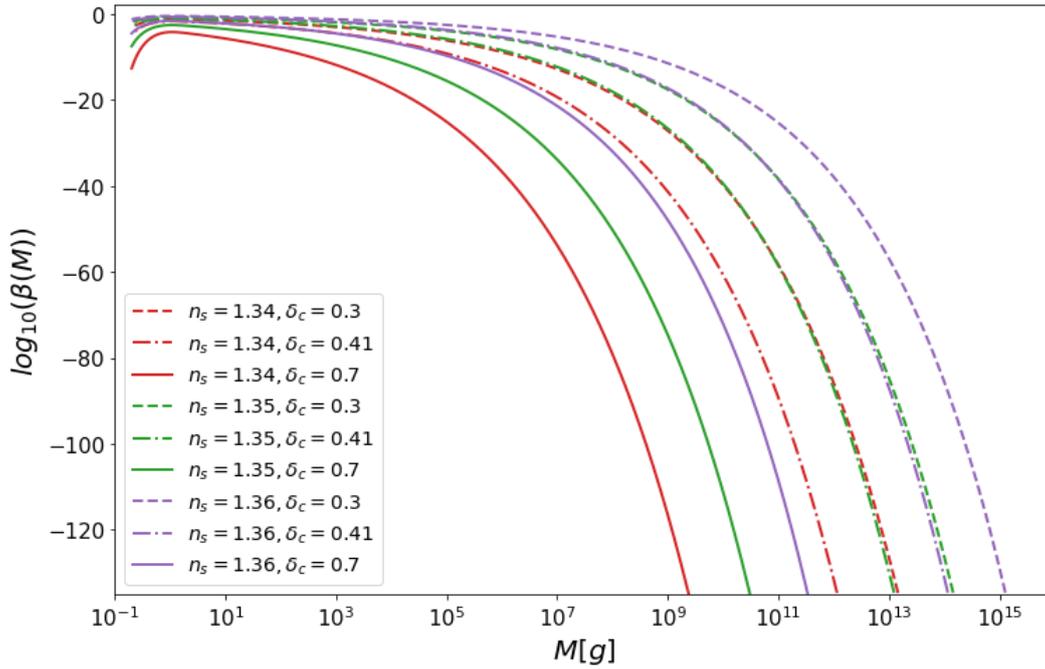


Figura 5.7: Fracción de colapso para  $n_s = 1.34$  a  $n_s = 1.36$ .

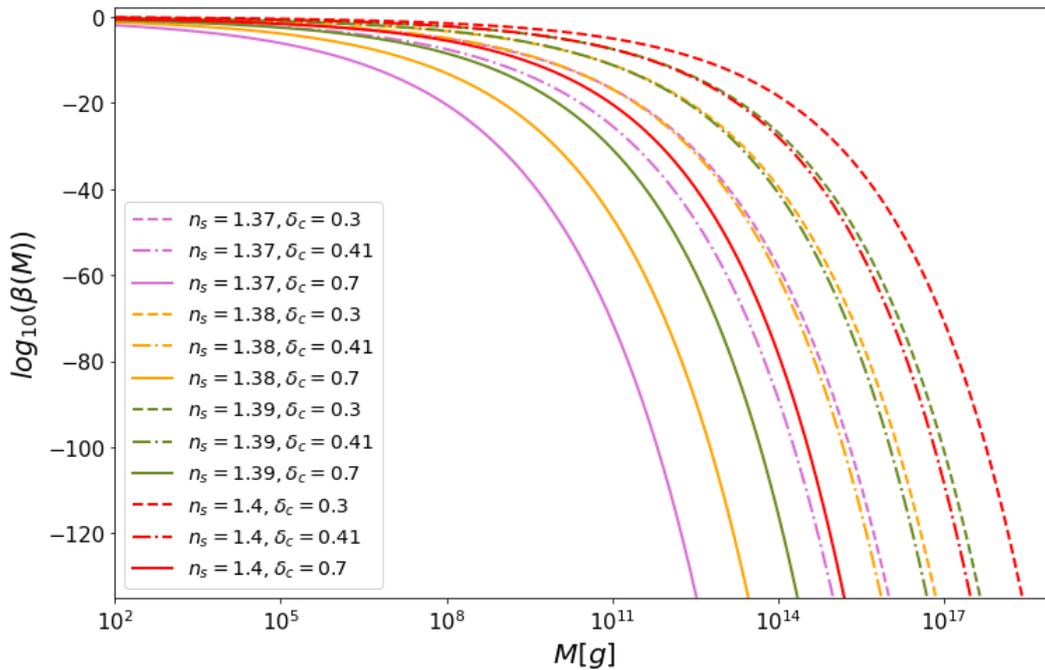


Figura 5.8: Fracción de colapso para  $n_s = 1.37$  a  $n_s = 1.4$ .

En el cuadro 5.1 se muestran las masas máximas que tendrían los agujeros negros primordiales limitando  $\beta_{ANP}$  en un rango de  $10^{-135}$  hasta  $10^0$  para los tres umbrales. Para índices espectrales menores a 1.25 no hubo formación de ANPs. Esto se debe a que la amplitud de las distribuciones gaussianas aún no son suficientemente grandes para tomar valores mas arriba de 0.7 y nos queda fracciones de colapso iguales a cero. Para  $n_s \leq 1.37$  tendríamos agujeros negros con masas menores que  $10^{15}g$  que ya se

habrían evaporado o se estarían evaporando, afectando a diversos procesos cosmológicos, entre ellos: generar la entropía del Universo, cambiar los detalles de la bariogénesis, la nucleosíntesis y la reionización del Universo. Con masas iguales a  $10^{15}g$  contribuirían al fondo difuso de rayos  $\gamma$ .

Para  $n_s \geq 1.37$  tenemos agujeros negros con masas un poco mayores de  $10^{15}$  a  $10^{18}g$  que todavía no se han evaporado, contribuyendo al problema de la materia oscura y a los agujeros negros supermasivos. Restringimos el índice espectral a  $n_s < 1.4$  puesto que a índices más altos todo colapsaría en ANPs con  $\beta_{ANP} \sim 1$ .

$n_s$	$\delta_c = 0.33$		$\delta_c = 0.41$		$\delta_c = 0.7$	
	$\beta(M)$	$M_{ANP}[g]$	$\beta(M)$	$M_{ANP}[g]$	$\beta(M)$	$M_{ANP}[g]$
0.9649	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1.1	0	0	0	0	0	0
1.2	0	0	0	0	0	0
1.25	$10^{-120}$	3.9	0	0	0	0
1.26	$10^{-69}$	$2.6 \times 10^2$	$10^{-106}$	9.8	0	0
1.27	$10^{-41}$	$1.3 \times 10^3$	$10^{-62}$	$5.1 \times 10^2$	0	0
1.28	$10^{-24}$	$4.8 \times 10^5$	$10^{-36}$	$2.2 \times 10^4$	$10^{-101}$	$1.1 \times 10^1$
1.29	$10^{-14}$	$9.0 \times 10^6$	$10^{-21}$	$7.2 \times 10^5$	$10^{-59}$	$4.9 \times 10^2$
1.30	$10^{-9}$	$3.3 \times 10^8$	$10^{-14}$	$1.8 \times 10^7$	$10^{-34}$	$1.7 \times 10^4$
1.31	$10^{-6}$	$6.1 \times 10^9$	$10^{-8}$	$3.8 \times 10^8$	$10^{-20}$	$4.3 \times 10^5$
1.32	$10^{-4}$	$9.6 \times 10^{10}$	$10^{-5}$	$6.6 \times 10^9$	$10^{-12}$	$9.1 \times 10^6$
1.33	$10^{-2}$	$1.2 \times 10^{12}$	$10^{-3}$	$9.7 \times 10^{10}$	$10^{-8}$	$1.7 \times 10^8$
1.34	$10^{-1.5}$	$1.7 \times 10^{13}$	$10^{-2}$	$1.3 \times 10^{13}$	$10^{-5}$	$2.4 \times 10^9$
1.35	$10^{-1}$	$1.1 \times 10^{14}$	$10^{-1.5}$	$1.4 \times 10^{13}$	$10^{-3}$	$4.5 \times 10^{10}$
1.36	$10^{-0.6}$	$1.3 \times 10^{15}$	$10^{-1}$	$8.0 \times 10^{13}$	$10^{-2}$	$4.9 \times 10^{11}$
1.37	$10^{-0.4}$	$9.8 \times 10^{16}$	$10^{-0.6}$	$9.9 \times 10^{15}$	$10^{-1.5}$	$5.1 \times 10^{12}$
1.38	$10^{-0.3}$	$6.5 \times 10^{16}$	$10^{-0.4}$	$7.3 \times 10^{15}$	$10^{-0.8}$	$4.4 \times 10^{13}$
1.39	$10^{-0.2}$	$4.3 \times 10^{17}$	$10^{-0.3}$	$5.0 \times 10^{16}$	$10^{-0.6}$	$2.1 \times 10^{14}$
1.40	$10^{-0.2}$	$3.2 \times 10^{18}$	$10^{-0.2}$	$3.0 \times 10^{17}$	$10^{-0.4}$	$1.9 \times 10^{15}$

Cuadro 5.1: Masas máximas de ANPs a partir de diferentes índices espectrales y para tres umbrales distintos.

En este trabajo también se considero la función ventana top-hat, sin embargo, hubo complicaciones al obtener la fracción de colapso en el código, esto se debe a que la función ventana presenta oscilaciones rápidas en el espacio de fourier, por lo tanto, la distribución de masas no puede ser calculada con la función ventana sin hacer alguna modificación [58]. En la figura 5.9 podemos observar que la función top-hat mantuvo la varianza a una altura constante para cada índice espectral. Por ese motivo la fracción de masas divergió.

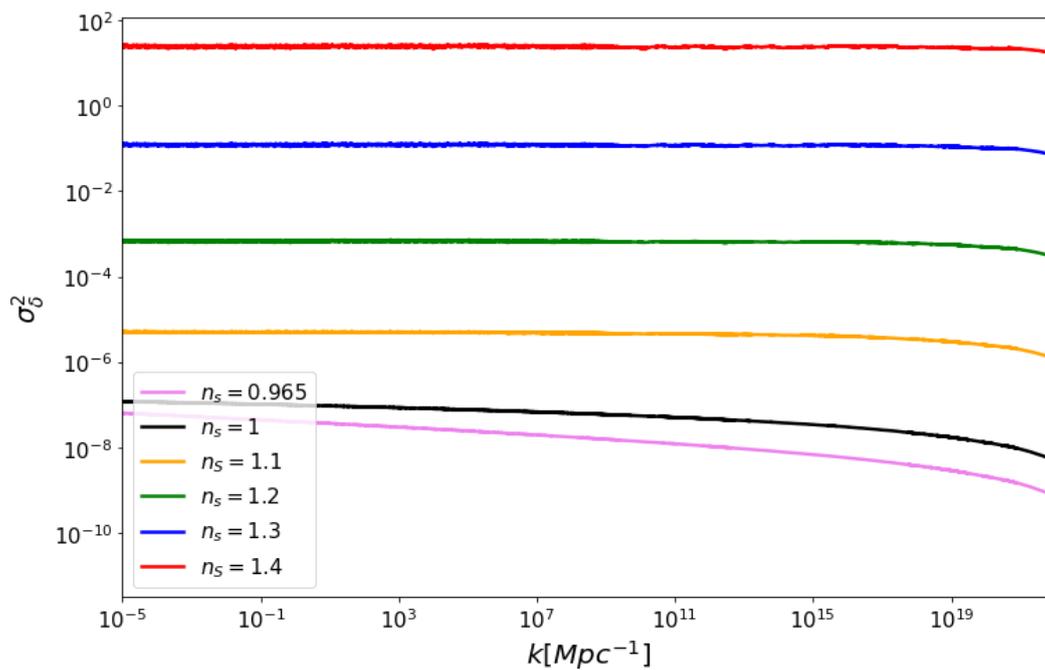


Figura 5.9: Varianza con respecto a la escala usando una función ventana top-hat.

# Abundancia de ANPs

August 24, 2023

```
[1]: import numpy as np
import scipy as scp
import matplotlib.pyplot as plt
import sympy as sp
from scipy import integrate
from scipy import special
```

```
[2]: #Escribo los parámetros con datos del satélite Planck 2018:
#Escala pivot (en  $Mpc^{-1}$ )
k_pivot=0.05
#Amplitud de las perturbaciones de curvatura primordial
As=2.101*10**(-9)

#Escribo distintos índices espectrales
ns1=1.25
ns2=1.3
ns3=1.4

#Defino el rango de valores para la escala k (en  $Mpc^{-1}$ ):
inicio=0
fin=5
Delta=0.001
num_elementos=int((fin-inicio)/Delta +1)
k_arr=10**(np.linspace(-5,23,num_elementos))

#Defino el espectro de potencias de las perturbaciones de curvatura como una
↳ ley de potencias:
P_R=As*(k_arr/k_pivot)**(ns1-1)
P_R2=As*(k_arr/k_pivot)**(ns2-1)
P_R3=As*(k_arr/k_pivot)**(ns3-1)
```

```
[3]: #Ec. de estado para radiación:
w=1./3
#Contraste crítico por B.carr:
delta_c_b=w
#Contraste crítico por Harada:
delta_c_h=(3+3*w)*(np.sin(np.pi*np.sqrt(w)/(1+3*w)))*2/(5+3*w)
#Contraste crítico por Niemeyer & Jedamzik:
```

```

delta_c_nj=0.7
#Escribo el espectro de potencias del contraste de densidad en términos del  $\Delta$ 
↳espectro de potencias de curvatura:
P_d=(4.*(1+w)**2.*P_R)/(5.+3.*w)**2.
P_d2=(4.*(1+w)**2.*P_R2)/(5.+3.*w)**2.
P_d3=(4.*(1+w)**2.*P_R3)/(5.+3.*w)**2.

```

```

[4]: # defino una función ventana gaussiana:
def W(k,R):
    return np.exp(-(k*R)**2./2.)
#defino una función ventana top-hat:
def W2(k,R):
    return (3.*(np.sin(k*R)-k*R*np.cos(k*R))/(k*R)**3.)
#defino la varianza donde añadi  $(k/aH)^4$  del espectro de densidad:
def var(P,W,k,R):
    return(integrate.simps(np.abs(W)**2.*P*k**3.*R**4.,k))
#defino la fracción de colapso:
def beta(var,deltc):
    return(special.erfc(deltc/(np.sqrt(2.*var))))

```

```

[5]: #Escribo el radio de la perturbación (en Mpc):
R_arr= 1/k_arr
#creo unas listas vacías para añadir la función varianza y la fracción de  $\Delta$ 
↳colapso:
listvar=[]
listvar2=[]
listvar3=[]
listbeta1=[]
listbeta2=[]
listbeta3=[]
listbeta4=[]
listbeta5=[]
listbeta6=[]
listbeta7=[]
listbeta8=[]
listbeta9=[]
for ii in range(len(R_arr)):
    #defino variables temporales para la función ventana y la varianza
    tmpW=W(k_arr,R_arr[ii])
    tmpvar1=var(P_d,tmpW,k_arr,R_arr)
    tmpvar2=var(P_d2,tmpW,k_arr,R_arr)
    tmpvar3=var(P_d3,tmpW,k_arr,R_arr)

    #añado las variables temporales a las listas vacías
    listvar.append(tmpvar1)
    listvar2.append(tmpvar2)
    listvar3.append(tmpvar3)

```

```

listbeta1.append(beta(tmpvar1,delta_c_b))
listbeta2.append(beta(tmpvar1,delta_c_h))
listbeta3.append(beta(tmpvar1,delta_c_nj))

listbeta4.append(beta(tmpvar2,delta_c_b))
listbeta5.append(beta(tmpvar2,delta_c_h))
listbeta6.append(beta(tmpvar2,delta_c_nj))

listbeta7.append(beta(tmpvar3,delta_c_b))
listbeta8.append(beta(tmpvar3,delta_c_h))
listbeta9.append(beta(tmpvar3,delta_c_nj))

```

```

[6]: #grados de libertad relativistas:
g=106.75
geq=3.38

#escala (en Mpc-1) y factor de escala de la igualdad materia-radiación:
keq=1.038*10**(-2)
aeq=1/3403

#factor de escala para la tasa de expansión de hubble
h=0.674

#parámetro de radiación actual:
Omega_rad_0=9.265*10**(-5)

#densidad crítica (en masas solares sobre Mpc3):
densidad_c=2.77*10**(11)*h**2

#densidad de radiación actual:
rad_0=Omega_rad_0*densidad_c

#masa del horizonte en la igualdad materia-radiación (en masas solares)
Meq=4*np.pi*rad_0/(3*keq**3*aeq)

#masa solar (en gramos):
M_solar=1.988*10**(33)

#factor de colapso:
gamma=0.2

#masa del agujero negro primordial (en gramos):
M_anp=gamma*Meq*(keq*R_arr)**2*(geq/g)**(1/3)*M_solar

```

```

[ ]: #Grafica de la fracción de colapso con respecto a la masa del agujero negro
↳primordial

```

```

plt.figure(figsize=(12,8))
plt.semilogx(M_anp,np.log10(listbeta1),'--',linewidth=2,label=r'$n_s=1.
↵2,\delta_{c}=0.3$',color='orchid')
plt.semilogx(M_anp,np.log10(listbeta2),'-.',linewidth=2,label=r'$n_s=1.
↵2,\delta_c=0.41$',color='orchid')
plt.semilogx(M_anp,np.log10(listbeta3),linewidth=2,label=r'$n_s=1.
↵2,\delta_{c}=0.7$',color='orchid')

plt.semilogx(M_anp,np.log10(listbeta4),'--',linewidth=2,label=r'$n_s=1.
↵3,\delta_{c}=0.3$',color='blue')
plt.semilogx(M_anp,np.log10(listbeta5),'-.',linewidth=2,label=r'$n_s=1.
↵3,\delta_c=0.41$',color='blue')
plt.semilogx(M_anp,np.log10(listbeta6),linewidth=2,label=r'$n_s=1.
↵3,\delta_{c}=0.7$',color='blue')

plt.semilogx(M_anp,np.log10(listbeta7),'--',linewidth=2,label=r'$n_s=1.
↵4,\delta_{c}=0.3$',color='red')
plt.semilogx(M_anp,np.log10(listbeta8),'-.',linewidth=2,label=r'$n_s=1.
↵4,\delta_c=0.41$',color='red')
plt.semilogx(M_anp,np.log10(listbeta9),linewidth=2,label=r'$n_s=1.
↵4,\delta_{c}=0.7$',color='red')
plt.ylabel(r'$\log_{10}(\beta(M))$',fontsize=20)
plt.xlabel(r'$M[g]$',fontsize=20)
#plt.savefig('massfraction.pdf',bbox_inches='tight',pad_inches=0)
plt.legend(fontsize=14,loc='best')
plt.xticks(fontsize=15)
plt.yticks(fontsize=15)
plt.ylim(-135,2)
plt.xlim(1.e-1,1.e23)
plt.show()

```

# Capítulo 6

## Conclusiones

En este trabajo de tesis se ha estudiado la formación de agujeros negros primordiales provenientes de las perturbaciones cosmológicas originadas por las fluctuaciones cuánticas del inflatón, el estudio fue en el dominio de radiación usando el formalismo de Press-Schechter. Se puede concluir que inflación no solo nos da una solución a algunos de los problemas que tiene el modelo del Big Bang caliente, del mismo modo nos da un mecanismo para poder generar agujeros negros en el Universo temprano. En cuanto a los resultados, podemos concluir que la amplitud de las anisotropías del espectro de potencias del CMB no es suficiente para formar ANPs, la amplitud que se requiere usando perturbaciones primordiales gaussianas corresponde a valores aproximados a  $10^{-2}$ . De esta manera, tendríamos contrastes de densidad de 0.1 suficientemente grandes para formar colapso. La probabilidad de formar agujeros primordiales es mayor si aumentamos el índice espectral, por ende la varianza de la distribución es más grande, y esto sucede cuando los radios son más pequeños a escalas grandes. La escala que se obtuvo donde comenzó el colapso fue de aproximadamente  $k_{ANP} \sim 10^{14} Mpc^{-1}$ , equivalente a un radio de  $10^{-14} Mpc$ , a su vez, la abundancia también depende del umbral que se use, para esto, el umbral que presento mayor abundancia fue el de Bernard Carr. Por lo tanto, agujeros primordiales que se han evaporado o estarían evaporándose tienen un índice espectral  $n_s \leq 1.37$ , agujeros primordiales que todavía no se evaporan y pueden contribuir al problema de la materia oscura y a la formación de agujeros supermasivos tendrían un índice  $n_s \geq 1.37$ . En la tesis solo logré tener datos para la función gaussiana, si bien se espera que en el futuro se logré mejorar el código. Por último, me gustaría comentar que una manera de mejorar la abundancia de agujeros primordiales, de una forma más "natural (sin tener que modificar la pendiente del espectro), se puede obtener a través de modelos de inflación que presenten una fase de ultra-slow roll, de este modo se logra obtener un pico en el espectro de potencias primordial que modificará bastante los resultados. Además de eso, su formación también ha sido estudiada en dominios diferentes al de radiación, como por ejemplo: en un dominio de materia o directamente de recalentamiento, y esto también podría mejorar el resultado.



# Apéndice A

## Espectro de potencias del inflatón

En el espacio de Fourier, la función de correlación de dos puntos para los modos del campo escalar es:

$$\begin{aligned} \langle \delta\phi_{\vec{k}} \delta\phi_{\vec{k}'} \rangle &= \left\langle \int d^3x \delta\phi(\vec{x}, t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \int d^3x' \delta\phi(\vec{x}', t) e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}'} \right\rangle = \dots \\ &\dots = \left\langle \int \int d^3x d^3x' \delta\phi(\vec{x}, t) \delta\phi(\vec{x}', t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}'} \right\rangle = \dots \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Usando un cambio de variable  $\vec{r} = |\vec{x}' - \vec{x}|$ :

$$\begin{aligned} &\left\langle \int d^3x \int d^3r \delta\phi(\vec{x}, t) \delta\phi(\vec{x} + \vec{r}, t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-i\vec{k}'\cdot(\vec{x} + \vec{r})} \right\rangle = \dots \\ &\dots = \left\langle \int d^3x e^{-i(\vec{k} + \vec{k}')\cdot\vec{x}} \int d^3r \delta\phi(\vec{x}, t) \delta\phi(\vec{x} + \vec{r}, t) e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}} \right\rangle, \end{aligned}$$

Donde se cumple que  $\delta\phi_{\vec{k}}^* = \delta\phi_{-\vec{k}}$ , y definiendo la función delta de Dirac:

$$\delta(\vec{k} + \vec{k}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x e^{-i\vec{x}\cdot(\vec{k} + \vec{k}')},$$

Esta función es no nula solo si su argumento es un vector nulo  $\vec{k}' = -\vec{k}$ . La función de correlación de dos puntos para el campo escalar, por isotropía depende solo de  $r = |\vec{r}|$ :

$$\xi_{\delta\phi}(r) = \langle \delta\phi(\vec{x}, t) \delta\phi(\vec{x} + \vec{r}, t) \rangle, \quad (\text{A.2})$$

$\Rightarrow$

$$\langle \delta\phi_{\vec{k}} \delta\phi_{\vec{k}'} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\vec{k} + \vec{k}') \int d^3r \xi_{\delta\phi}(r) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (\text{A.3})$$

Por otro lado, la amplitud de las fluctuaciones de distintas longitudes es descrito por el espectro de potencias primordial, que es la transformada de Fourier de la función de correlación (considerando isotropía nuevamente, solo importa la magnitud del vector de onda  $k \equiv |\vec{k}|$ ):

$$\begin{aligned} P_{\delta\phi}(k) &= \int d^3r \xi_{\delta\phi}(r) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \int_0^\infty \xi_{\delta\phi}(r) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-ikr \cos\theta} \sin\theta d\theta d\varphi r^2 dr = \dots \\ &\dots = 2\pi \int_0^\infty \xi_{\delta\phi}(r) \int_{-1}^1 e^{-ikru} du r^2 dr = \frac{4\pi}{k} \int_0^\infty \xi_{\delta\phi}(r) \sin(kr) r dr, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Y la función de correlación se obtiene de la transformada de Fourier inversa:

$$\begin{aligned}\xi_{\delta\phi}(r) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k P_{\delta\phi}(k) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty P_{\delta\phi}(k) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{ikr \cos\theta} \sin\theta d\theta d\varphi k^2 dk = \dots \\ &\dots = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty P_{\delta\phi}(k) \int_{-1}^1 e^{ikru} du k^2 dk = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty P_{\delta\phi}(k) \sin(kr) k dk,\end{aligned}\tag{A.5}$$

con  $u = \cos\theta$ .

$\Rightarrow$

$$\langle \delta\phi_{\vec{k}} \delta\phi_{\vec{k}'} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\vec{k} + \vec{k}') P_{\delta\phi}(k).\tag{A.6}$$

Y el espectro de potencias adimensional:

$$\mathcal{P}_{\delta\phi}(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} P_{\delta\phi}(k).\tag{A.7}$$

Este mismo desarrollo se ocupa para las perturbaciones escalares de curvatura y de densidad.

# Apéndice B

## Ecuación de las perturbaciones de densidad en un régimen lineal

Escribo las ecuaciones de movimiento del fluido:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi, \quad (\text{B.2})$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (\text{B.3})$$

con:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \rho \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \rho,$$

Y  $\frac{d}{dt}$  la derivada temporal total:

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla, \quad (\text{B.4})$$

En la ausencia de perturbaciones defino las cantidades del fluido como  $\rho_0$ ,  $\vec{v}_0$ ,  $p_0$  y  $\Phi_0$ , entonces:

$$\frac{d\rho_0}{dt} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_0 = 0, \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{d\vec{v}_0}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_0 - \nabla \Phi_0, \quad (\text{B.6})$$

$$\nabla^2 \Phi_0 = 4\pi G \rho_0. \quad (\text{B.7})$$

Pero un Universo físico (real) no carece de perturbaciones, entonces definimos las cantidades del fluido perturbadas:  $\rho \equiv \rho_0 + \delta\rho$ ,  $\vec{v} \equiv \vec{v}_0 + \delta\vec{v}$ ,  $p \equiv p_0 + \delta p$ ,  $\Phi \equiv \Phi_0 + \delta\Phi$ . Entonces la ecuación de continuidad (B.5) se escribiría como:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \rho + \rho \nabla \cdot \vec{v} = \dots \\ \dots &= \frac{\partial(\rho_0 + \delta\rho)}{\partial t} + ([\vec{v}_0 + \delta\vec{v}] \cdot \nabla)(\rho_0 + \delta\rho) + ([\rho_0 + \delta\rho] \nabla) \cdot (\vec{v}_0 + \delta\vec{v}) = \dots \\ & \dots = \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \rho_0 + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \delta\rho + (\delta\vec{v} \cdot \nabla) \rho_0 + \dots \\ & \dots + (\delta\vec{v} \cdot \nabla) \delta\rho + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_0 + \rho_0 \nabla \cdot \delta\vec{v} + \delta\rho \nabla \cdot \vec{v}_0 + \delta\rho \nabla \cdot \delta\vec{v} = 0, \end{aligned}$$

Esto se simplifica:

$$\frac{d\delta\rho}{dt} + \rho_0 \nabla \cdot \delta\vec{v} + \delta\rho \nabla \cdot \vec{v}_0 = 0, \quad (\text{B.8})$$

Usando el contraste de densidad  $\delta \equiv \delta\rho/\rho_0$ , la ecuación (B.8) queda como:

$$\begin{aligned} & \frac{d\rho_0\delta}{dt} + \rho_0 \nabla \cdot \delta\vec{v} + \rho_0\delta \nabla \cdot \vec{v}_0 = \dots \\ \dots & = \delta \frac{d\rho_0}{dt} + \rho_0 \frac{d\delta}{dt} + \rho_0 \nabla \cdot \delta\vec{v} + \rho_0\delta \nabla \cdot \vec{v}_0 = 0, \end{aligned}$$

Finalmente, tenemos:

$$\frac{d\delta}{dt} = -\nabla \cdot \delta\vec{v}. \quad (\text{B.9})$$

Para la ecuación de Euler (B.6) tenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\vec{v}_0 + \delta\vec{v})}{\partial t} + ([\vec{v}_0 + \delta\vec{v}] \cdot \nabla)(\vec{v}_0 + \delta\vec{v}) = \dots \\ & \dots = \frac{\partial\vec{v}_0}{\partial t} + \frac{\partial\delta\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \nabla)\vec{v}_0 + \dots \\ & \dots + (\delta\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}_0 + (\vec{v}_0 \cdot \nabla)\delta\vec{v} + (\delta\vec{v} \cdot \nabla)\delta\vec{v} = \dots \\ & \dots = -\frac{\nabla\delta(p_0 + \delta p)}{\rho_0} - \nabla\Phi_0 - \nabla\delta\Phi, \end{aligned}$$

Por lo tanto, nos queda:

$$\frac{d\delta\vec{v}}{dt} + (\delta\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}_0 = -\frac{1}{\rho_0} \nabla\delta p - \nabla\delta\Phi. \quad (\text{B.10})$$

Y para la ecuación de Poisson (B.7):

$$\nabla^2(\Phi_0 + \delta\Phi) = 4\pi G(\rho_0 + \delta\rho),$$

Ignoramos las derivadas espaciales de la parte homogénea entonces nos queda:

$$\nabla^2\delta\Phi = 4\pi G\rho_0\delta. \quad (\text{B.11})$$

Ahora cambiamos a coordenadas comóviles  $\vec{r}$ , nos relacionan las coordenadas físicas  $\vec{x}$  por  $\vec{x} \equiv a(t)\vec{r}$ . Además, distinguimos las derivadas espaciales en coordenadas comóviles con un subíndice c, y se relacionan con las físicas por  $\nabla_c \equiv a(t)\nabla$ . La velocidad total del fluido perturbado  $\vec{v}$  se puede escribir como:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{da(t)\vec{r}}{dt} = a(t)\frac{\partial\vec{r}}{\partial t} + \vec{r}\frac{\partial a}{\partial t}. \quad (\text{B.12})$$

Con  $\vec{v}_0 = \vec{r}\frac{\partial a}{\partial t} = \vec{r}\dot{a}$  y  $\delta\vec{v} = a(t)\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}$ .

Durante la perturbación  $\delta\vec{v}$  se genera una velocidad adicional  $\vec{u}$  de tal manera que  $\vec{u} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial t}$ , entonces la ecuación de continuidad perturbada (B.9) nos queda:

$$\frac{d\delta}{dt} = -\nabla \cdot a\vec{u} = -a\nabla \cdot \vec{u} = -\nabla_c \cdot \vec{u}, \quad (\text{B.13})$$

La ecuación de Poisson perturbada (B.11) quedaria como:

$$\frac{\nabla_c^2}{a^2} \delta\Phi = 4\pi G\delta\rho = 4\pi G\rho_0\delta, \quad (\text{B.14})$$

Y para la ecuación de Euler perturbada (B.14) nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{da\vec{u}}{dt} + (a\vec{u} \cdot \nabla)\dot{a}\vec{r}_0 &= a\frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{u}\frac{da}{dt} + \dots \\ \dots + (a\vec{u} \cdot \nabla)\dot{a}\vec{r}_0 &= -\frac{1}{a\rho_0}\nabla_c\delta p - \frac{\nabla_c\delta\Phi}{a}, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Usamos la propiedad  $(a\vec{u} \cdot \nabla)\dot{a}\vec{r}_0 = \dot{a}\vec{u}$ , entonces:

$$\frac{ad\vec{u}}{dt} + 2\dot{a}\vec{u} = -\frac{1}{a\rho_0}\nabla_c\delta p - \nabla_c\frac{\delta\Phi}{a}, \quad (\text{B.16})$$

Tomamos la derivada espacial comóvil en ambos lados de la ecuación (B.16), donde asumimos que  $\nabla_c\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt}\nabla_c$ :

$$a\frac{d\nabla_c \cdot \vec{u}}{dt} + 2\dot{a}\nabla_c\vec{u} = -\frac{1}{a\rho_0}\nabla_c^2\delta p - \nabla_c^2\frac{\delta\Phi}{a}, \quad (\text{B.17})$$

Usando la ecuación (B.13) y (B.14) queda:

$$-a\frac{d^2\delta}{dt^2} - 2\dot{a}\frac{d\delta}{dt} = -\frac{1}{a\rho_0}\nabla_c^2\delta p - \nabla_c^2\frac{\delta\Phi}{a}, \quad (\text{B.18})$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{d\delta}{dt} = \frac{1}{a^2\rho_0}\nabla_c^2\delta p + 4\pi G\rho_0\delta, \quad (\text{B.19})$$

Si las fluctuaciones son adiabáticas entonces la velocidad del sonido  $c_s$  cumple que:

$$c_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}, \quad (\text{B.20})$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{d\delta}{dt} = \frac{c_s^2\nabla_c^2\delta}{a^2} + 4\pi G\rho_0\delta, \quad (\text{B.21})$$

Descomponemos  $\delta$  en un conjunto de ondas planas en el espacio de Fourier:

$$\delta(\vec{k}, t) = \int d^3k\delta(\vec{x}, t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (\text{B.22})$$

$$\delta(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k\delta(\vec{k}, t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (\text{B.23})$$

Usando el vector de onda comóvil  $\vec{k}_c \equiv a\vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{x}$  y el número de onda de la perturbación  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Entonces, si  $\delta \ll 1$  podemos descomponerlo en el espacio de Fourier y tratar cada modo  $k$  de forma independiente:

$$\frac{d^2\delta_k}{dt^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{d\delta_k}{dt} = (4\pi G\rho_0 - k^2c_s^2)\delta_k. \quad (\text{B.24})$$



# Apéndice C

## Equilibrio termodinámico

Usaré la función de distribución de momentos en equilibrio térmico, el signo más corresponde a la distribución de Fermi-Dirac para fermiones, y el signo menos corresponde a la distribución de Bose-Einstein para bosones:

$$f(\mathbf{p}) = \frac{1}{\exp [(E - \mu)/k_B T] \pm 1}, \quad (\text{C.1})$$

Con  $E$  la energía relativista de las partículas  $E = \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2}$  con masa  $m$  y momento  $\mathbf{p}$  y  $\mu$  el potencial químico. Con (C.1) calculo la densidad del número de partículas  $n$ , la densidad de energía  $\rho$  y la presión  $p$ :

$$n = \frac{g_*}{(2\pi)^3} \int f(\mathbf{p}) d^3 \mathbf{p}, \quad (\text{C.2})$$

$$\rho = \frac{g_*}{(2\pi)^3} \int E(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}) d^3(\mathbf{p}), \quad (\text{C.3})$$

$$p = \frac{g_*}{(2\pi)^3} \int \frac{|\mathbf{p}|^2}{3E(\mathbf{p})} f(\mathbf{p}) d^3 \mathbf{p}. \quad (\text{C.4})$$

$g_*$  nos dice los grados de libertad relativistas. De la segunda ley de la termodinámica escribiré la densidad de entropía  $s$  como:

$$s = \frac{\rho + p - \mu n}{T}. \quad (\text{C.5})$$

Para el caso de partículas ultrarelativistas  $k_B T \gg \mu$  y  $T \gg m$  (ver la tabla C.1).

Caso ultrarelativista		
Función	Bosones	Fermiones
$n$	$\frac{\zeta(3)}{\pi^2} \frac{g_* n (k_B T)^3}{(\hbar c)^3}$	$\frac{3}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} \frac{g_* n (k_B T)^3}{(\hbar c)^3}$
$\rho$	$\frac{\pi^2 g_{*\rho} (k_B T)^4}{30 (\hbar c)^3}$	$\frac{7}{8} \frac{\pi^2 g_{*\rho} (k_B T)^4}{30 (\hbar c)^3}$
$p$	$\rho/3$	$\rho/3$
$s$	$\frac{2\pi^2}{45} \frac{g_{*s} k_B^4 T^3}{(\hbar c)^3}$	$\frac{7}{8} \frac{2\pi^2}{45} \frac{g_{*s} k_B^4 T^3}{(\hbar c)^3}$

Cuadro C.1: Funciones en equilibrio termodinámico para el caso ultrarelativista

Con  $\zeta(3)$  la constante de Apéry ó la función zeta de Riemann definida en 3. En el dominio de radiación las partículas relativistas dominaban sobre las no relativistas, entonces (usando unidades naturales) la densidad de energía la puedo escribir como :

$$\rho_r = \frac{\pi^2 g_{*\rho} T^4}{30}, \quad (\text{C.6})$$

Entonces la ecuación de Friedmann en el dominio de radiación queda:

$$H^2 = \frac{4\pi^3 G}{45} g_{*\rho} T^4. \quad (\text{C.7})$$

Y la densidad de entropía, la cual se define como la entropía sobre el volumen  $V = a^3$ :

$$s = \frac{S}{V} = g_{*s} \frac{2\pi^2}{45} T^3, \quad (\text{C.8})$$

Con  $g_{*s}$  los grados efectivos de libertad asociados a la entropía, este se obtiene sumando todas las partículas relativistas (bosones y fermiones):

$$g_{*s} = \sum_B g_{*s_B} + \frac{7}{8} \sum_F g_{*s_F}, \quad (\text{C.9})$$

Además, para un volumen comóvil con entropía S constante (la conservación de la entropía) tenemos:

$$S = sa^3 = g_{*s}(T) \frac{2\pi^2}{45} T^3 a^3 = cte, \quad (\text{C.10})$$

Si  $g_{*s}$  es constante, tenemos que  $T \propto a^{-1}$ .

De esta forma puedo expresar la densidad de radiación como:

$$\rho_r \propto g_{*\rho} g_{*s}^{-4/3} a^{-4}, \quad (\text{C.11})$$

Si asumimos que el número efectivo de grados de libertad para la densidad de energía y entropía son iguales  $g_{*\rho} = g_{*s} = g_*$ , puedo escribir la densidad de energía como:

$$\rho_r \propto g_*^{-1/3} a^{-4}. \quad (\text{C.12})$$

# Bibliografía

- [1] Ya B Zel'dovich and ID Novikov. The hypothesis of cores retarded during expansion and the hot cosmological model. *Astronomicheskii Zhurnal*, 43:758, 1966.
- [2] Stephen Hawking. Gravitationally collapsed objects of very low mass. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 152(1):75–78, 1971.
- [3] George F Chapline. Cosmological effects of primordial black holes. *Nature*, 253(5489):251–252, 1975.
- [4] Jordi Ceba. *Cosmología física*. Ediciones AKAL, 2007.
- [5] Steven Weinberg. *Cosmology*. OUP Oxford, 2008.
- [6] Saúl Ramos-Sánchez. *Relatividad para futuros físicos*, volume 1. CopIt ArXives, 2018.
- [7] Nabila Aghanim, Yashar Akrami, Mark Ashdown, J Aumont, C Baccigalupi, M Ballardini, AJ Banday, RB Barreiro, N Bartolo, S Basak, et al. Planck 2018 results-vi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A6, 2020.
- [8] Particle Data Group, RL Workman, VD Burkert, V Crede, E Klempt, U Thoma, L Tiator, K Agashe, G Aielli, BC Allanach, et al. Review of particle physics. *Progress of theoretical and experimental physics*, 2022(8):083C01, 2022.
- [9] Arno A Penzias and Robert W Wilson. A measurement of excess antenna temperature at 4080 mhz. In *Astrophysical Journal*, pages 419–421. Harvard University Press, 1965.
- [10] Andrew Liddle. *An introduction to modern cosmology*. John Wiley & Sons, 2015.
- [11] David H Lyth and Andrew R Liddle. *The primordial density perturbation: Cosmology, inflation and the origin of structure*. Cambridge university press, 2009.
- [12] Antonio Riotto. Inflation and the theory of cosmological perturbations. *arXiv preprint hep-ph/0210162*, 2002.
- [13] Philippe Mermod. Magnetic monopoles at the lhc and in the cosmos. *arXiv preprint arXiv:1305.3718*, 2013.
- [14] Jan Novák. The mathematical theory of perturbations in cosmology. 2015.
- [15] Alan H Guth. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D*, 23(2):347, 1981.

- [16] Andrei D. Linde. A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems. *Phys. Lett. B*, 108:389–393, 1982.
- [17] Daniel Baumann. Tasi lectures on inflation. *arXiv preprint arXiv:0907.5424*, 2009.
- [18] Daniel Baumann. Cosmological inflation: Theory and observations. *Advanced Science Letters*, 2(2):105–120, 2009.
- [19] Andrew R Liddle and David H Lyth. *Cosmological inflation and large-scale structure*. Cambridge university press, 2000.
- [20] Manuel Drees and Encieh Erfani. Running-mass inflation model and primordial black holes. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2011(04):005, 2011.
- [21] Luis E Padilla, Juan Carlos Hidalgo, and Gabriel German. Constraining inflationary potentials with inflaton pbhs. *arXiv preprint arXiv:2303.16428*, 2023.
- [22] Daniel Baumann. Cosmology, part iii mathematical trips. *University lecture notes*, 56:34, 2014.
- [23] Dmitry S Gorbunov and Valery A Rubakov. *Introduction to the theory of the early universe: Cosmological perturbations and inflationary theory*. World Scientific, 2011.
- [24] [www.astro.rug.nl/~weygaert/tim1publication/lss2009/lss2009.linperturb.pdf](http://www.astro.rug.nl/~weygaert/tim1publication/lss2009/lss2009.linperturb.pdf). 2009.
- [25] Valeri P Frolov and Andrei Zelnikov. *Introduction to black hole physics*. OUP Oxford, 2011.
- [26] Marco Celoria, Roberto Oliveri, Alberto Sesana, and Michela Mapelli. Lecture notes on black hole binary astrophysics. *arXiv preprint arXiv:1807.11489*, 2018.
- [27] García-Bellido Juan, Carr Bernard, and Clesse Sebastien. Primordial black holes and a common origin of baryons and dark matter, 2021.
- [28] BJ Carr, Kazunori Kohri, Yuuiti Sendouda, and Jun’ichi Yokoyama. New cosmological constraints on primordial black holes. *Physical Review D*, 81(10):104019, 2010.
- [29] Villanueva-Domingo Pablo, Mena Olga, and Palomares-Ruiz Sergio. A brief review on primordial black holes as dark matter front. *astron. Space Sci*, 8:87, 2021.
- [30] Bernard J Carr. The primordial black hole mass spectrum, 1975.
- [31] EW Kolb and MS Turner. The early universe addison wesley, redwood city, ca 1990. p. coles and f. lucchin, cosmology, 1995.
- [32] Ogan Özsoy and Gianmassimo Tasinato. Inflation and primordial black holes. *Universe*, 9(5):203, 2023.
- [33] Lars Husdal. On effective degrees of freedom in the early universe. *Galaxies*, 4(4):78, 2016.
- [34] Bernard J Carr. Primordial black holes: Do they exist and are they useful? *arXiv preprint astro-ph/0511743*, 2005.

- [35] Bernard Carr, Florian Kühnel, and Marit Sandstad. Primordial black holes as dark matter. *Physical Review D*, 94(8):083504, 2016.
- [36] Stephen W Hawking. Particle creation by black holes. *Communications in mathematical physics*, 43(3):199–220, 1975.
- [37] Jacob D Bekenstein. Black holes and entropy. *Physical Review D*, 7(8):2333, 1973.
- [38] Jacob D Bekenstein. Do we understand black hole entropy? *arXiv preprint gr-qc/9409015*, 1994.
- [39] Edward L Wright. On the density of pbh’s in the galactic halo. *arXiv preprint astro-ph/9509074*, 1995.
- [40] AA Starobinskii and Ya. B Zeldovich. *Sov. j. exp. theor.* 1976.
- [41] Michael S Turner. Baryon production by primordial black holes. *Physics Letters B*, 89(1):155–159, 1979.
- [42] Kazunori Kohri and Jun’ichi Yokoyama. Primordial black holes and primordial nucleosynthesis: Effects of hadron injection from low mass holes. *Physical Review D*, 61(2):023501, 1999.
- [43] Ping He and Li-Zhi Fang. Constraints on primordial black holes and primordial density perturbations from the epoch of reionization. *The Astrophysical Journal*, 568(1):L1, 2002.
- [44] Benjamin P Abbott, Richard Abbott, TDe Abbott, MR Abernathy, Fausto Acernese, Kendall Ackley, Carl Adams, Thomas Adams, Paolo Addesso, RX Adhikari, et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, 116(6):061102, 2016.
- [45] Norbert Duechting. Supermassive black holes from primordial black hole seeds. *Physical Review D*, 70(6):064015, 2004.
- [46] M Yu Khlopov, Sergei G Rubin, and Alexander S Sakharov. Primordial structure of massive black hole clusters. *Astroparticle Physics*, 23(2):265–277, 2005.
- [47] Anne M Green and Bradley J Kavanagh. Primordial black holes as a dark matter candidate. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 48(4):043001, 2021.
- [48] Gianfranco Bertone and Dan Hooper. History of dark matter. *Reviews of Modern Physics*, 90(4):045002, 2018.
- [49] Sebastien Clesse and Juan García-Bellido. The clustering of massive primordial black holes as dark matter: measuring their mass distribution with advanced ligo. *Physics of the Dark Universe*, 15:142–147, 2017.
- [50] James E Gunn and J Richard Gott III. On the infall of matter into clusters of galaxies and some effects on their evolution. *Astrophysical Journal*, vol. 176, p. 1, 176:1, 1972.
- [51] Isaac Newton. 1687, philosophiae naturalis principia mathematica. *Reg. Soc. Praeses, London*, 1848.

- [52] Bernard J Carr and Stephen W Hawking. Black holes in the early universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 168(2):399–415, 1974.
- [53] William H Press and Paul Schechter. Formation of galaxies and clusters of galaxies by self-similar gravitational condensation. *The Astrophysical Journal*, 187:425–438, 1974.
- [54] Tomohiro Harada, Chul-Moon Yoo, and Kazunori Kohri. Threshold of primordial black hole formation. *Physical Review D*, 88(8):084051, 2013.
- [55] Rafid Mahbub. *Primordial black hole formation in the inflationary Universe*. PhD thesis, University of Minnesota, 2022.
- [56] Manuel Drees and Encieh Erfani. Running spectral index and formation of primordial black hole in single field inflation models. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2012(01):035, 2012.
- [57] Jens C Niemeyer and Karsten Jedamzik. Dynamics of primordial black hole formation. *Physical Review D*, 59(12):124013, 1999.
- [58] Andrew D Gow, Christian T Byrnes, Philippa S Cole, and Sam Young. The power spectrum on small scales: Robust constraints and comparing pbh methodologies. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2021(02):002, 2021.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MORELOS



## INSTITUTO DE INVESTIGACION EN CIENCIAS BASICAS Y APLICADAS

CONTROL ESCOLAR DE LICENCIATURA



### VOTOS APROBATORIOS

**SECRETARIA EJECUTIVA DEL  
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS APLICADAS  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS**

#### **P R E S E N T E**

Por medio del presente le informamos que después de revisar la versión escrita de la tesis que realizó el **C. ARTURO GÓMEZ GÓMEZ** con número de matrícula **10018799** cuyo título es:

***"El estudio de agujeros negros primordiales en la cosmología"***

Consideramos que **SI** reúne los méritos que son necesarios para continuar los trámites para obtener el título de **LICENCIADO EN CIENCIAS ÁREA TERMINAL: FÍSICA.**

Cuernavaca, Mor a 20 de febrero del 2024

Atentamente

***Por una humanidad culta***

Se adiciona página con la e-firma UAEM de los siguientes:

**Dr. Alejandro Ramírez Solís**

**(Presidente)**

**Dr. Joaquín Escalona Segura**

**(Secretario)**

**Dr. Sébastien Mickaël Marc Fromenteau**

**(Vocal)**

**Dr. Aldo Figueroa Lara**

**(Suplente)**

**Dr. Juan Carlos Degollado Daza**

**(Suplente)**





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

### Sello electrónico

**ALEJANDRO RAMIREZ SOLIS | Fecha:2024-02-21 19:32:07 | Firmante**

jhx7agZVN106rOqklYvc/p6uA8n+Ozs/SOvv3i5jw3np1NZp5JSCCY1ggbqCzFlg7lejthULw2U6libzCLwkBrE8sVAPg/crmppboYFk/crf8f/LKwlthvmha4kL2fj3w1/43RuYSErwmXxFO ykwvhGt/S8rSDufX3dWJ6g/U51DsdIRZF/3zHkcanUXGd89ve+NcMjch2yfl1qdcNG2EfrjOpG3ixm3zAFnkUs9ffNsBpBiDzHANtV9aEL4pCWUhu//+mL/LvL3iT8FnL4tEfzIHb8hO69 p/tZjKoCLbJ3Sk0OeB3lakqn+eycfRDLmci/OACtBMoMlfk2/g1MDQ==

**JUAN CARLOS DEGOLLADO DAZA | Fecha:2024-02-21 20:16:08 | Firmante**

vcmF3riZBWZi5X2FnGQzXVtAONEfsuoLoOE2tglR/nGuTwcflBxNNBQEZ1Fe4ivE/otk/4LIFSxhPRr/qGtZmUl6y3wWHfyW3DFG3NnpzeutC7Q0wby5K3cRXzn4OOcgZvVXDo6lp/ g4mS87FrHppdsF4ST2BM7zc1K9Nj0O/6zr20zZYFy3XNW+9G9vvRZmXaBeKguo+IRFBGVNsYSoeyYnoByl29gQXSTRUFv0+rqYwVZxWoXXNQLI9GtffrtykXGXSpSci1IXqseP G/ek5RV30/8S5mXf1P/7C4MrRmnsRb+5iXXtJvb+5cz6o8lq3KTbq4qn69ooxqONCg8pg==

**JOAQUIN ESCALONA SEGURA | Fecha:2024-02-23 12:09:09 | Firmante**

yoxtPNlj/8Wwfx/GiRBGZCVyemwExNbm7v1Q5AXbKolL9vrpTqm95N/NhgXPYs3u+QAAeDmgd1L4PHoTQng/xvw4H/RK5bxYHwWk43petqU0p2iv9f3SvnmrcfK5ezzvqvkPElej O9fHizV9GCy97kZqg7GEEY+3HmgjzLRm+KG7i/qj3Z7JjqWxZwW1Nbd4Ki7CVylSm0hDS8Z/NLvtcX79Nu2LQxX8YMSHmy4WTnMbeXD00T+qVLguAQrp2+fWmsxggSVs8lW3 NHjWFG7KJf8JET+15jzG0b9AMObShd3M7UlcYO/mFAWBX8HAgFS2sxXAJLmH6JMZna+ci8g==

**ALDO FIGUEROA LARA | Fecha:2024-02-27 13:57:08 | Firmante**

dleTVhGhwNcYejZUPWq2+Rm1X/izqHBoLDPuWq14Vj6FqCULnuZV8j4anSWpydv50gk1O/e3Xzmg1i9O1L3JskmZG/QVvVNWsdF/ytig0/OzZ1/6gWGFyK22YgTXFYwbx74fHhz LmODh1LcDlyU1TCHaEOq479O5stNjHdCiDNrAWdlc7nUjK3nR96hguiGGVvxkUcd+kH5uW+PmO+nsdHOVFCWPiJwgzh+3Nlb8COup56jj2A6wm+HSG6OiG+HtZYwf0l6X9Yh z4c5nReCkFX1SN/dB+8BBjp+1Zyw7yjUSWrmYmNhN3/yLL6aB9oflnPbQEep6qoukX0LmSUKiw==

**SEBASTIEN MICKAEL MARC FROMENTEAU | Fecha:2024-02-27 14:25:32 | Firmante**

g0Q+93PS37jXhfkDHOLYH68ybkq2XSx2SjtvYU2JtSkC6/4mRM+8tQ0CC4eET2isRfJSBdRu8L/s6S6xh1oWlr2EzKoYQACh93XI7p/zh2T9NoZ0ey5wrFMN1f006gYSDnCGlqra 77G4Q1Ttd0mXSFOe31Z1GT3RfldAHcLq0syBXL7LU3EpNw5Rn9JiSOSEz8ZE4ubL0eJuYZOOcelwK3cComNha8DFe7yR8RAUwLhxncWzkYpVjLXu5kqMrAKDZeL/QPBcCtffhn oITLr6edRYAK9t4iayR4GVygt+b74lxi6lVdlXJDSb4VUjH5J9MU9uA+rd/SGAjaK+knIQ==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



**b0im3grhE**

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/CTLy3HEFoskrBZabGgXZb6jMf7swyLI>



UAEM  
RECTORÍA  
2023-2029