



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

*“Restricciones a modelos de inflación del tipo atractores alfa
provenientes de recalentamiento”*

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS CON ÁREA TERMINAL EN FÍSICA

PRESENTA:

ABRIL MONSERRAT MORAN COLORADO

ASESOR:

GABRIEL GERMÁN VELARDE

Cuernavaca, Morelos, 2022

Índice general

1. Introducción	3
2. Cosmología moderna	5
2.1. El universo homogéneo e isotrópico - La métrica FLRW	6
2.2. Las ecuaciones de Einstein	7
2.2.1. Tensor de energía momento	8
2.2.2. Tensor de Einstein	8
2.3. Las ecuaciones que describen la dinámica del universo	10
2.4. La ley de Hubble y modelos cosmológicos simples	12
2.4.1. Materia	14
2.4.2. Radiación	14
2.4.3. Constante cosmológica	14
2.5. Historia térmica del universo	15
3. Cosmología inflacionaria	20
3.1. Los problemas de la vieja cosmología	20
3.1.1. El problema de la planitud	20
3.1.2. El problema del horizonte	21
3.1.3. Abundancia de partículas reliquia	22
3.2. Nociones básicas de inflación	23
3.3. Solución a problemas cosmológicos a través de inflación	25
3.3.1. El problema de la planitud	25
3.3.2. El problema del horizonte	25
3.3.3. Abundancia de partículas reliquia	27
3.4. Origen de estructura del universo	27
3.5. La época de recalentamiento	29
3.5.1. Recalentamiento canónico	30
4. Restricciones a modelos de inflación provenientes de recalentamiento	33
4.1. La idea general	33
4.2. Restricciones a modelos de inflación del tipo atractores α provenientes de recalentamiento	37
4.2.1. El modelo para $p = 1$	38
4.2.2. El modelo para $p = 2$	40
4.2.3. El modelo para $p = 3$	42
4.2.4. El modelo para $p = 4$	43

5. Cotas universales para el número de e-folds durante la evolución del universo	46
5.1. Cotas dependientes del modelo (MDB)	47
5.2. Cotas independientes del modelo (MIB)	48
5.3. Ejemplo: el modelo del tipo atractor α básico	54
6. Conclusiones	58
A. Potencial específico	59
A.1. Parte 1	59
A.2. Parte 2	61

Capítulo 1

Introducción

Los modelos cosmológicos inflacionarios nos permiten entender el comportamiento del universo en etapas tempranas. Aunque inicialmente esta idea de que el universo experimentó un crecimiento acelerado fue propuesta para explicar las inverosímiles condiciones iniciales del modelo del Big Bang, rápidamente se posicionó como la principal teoría que alumbró una de las preguntas que ha molestado a muchas generaciones de físicos: ¿cuál es el origen de la estructura en el universo? ¿cómo se formaron todas las galaxias y cúmulos de galaxias que vemos hoy en día?

Varios modelos inflacionarios han sido propuestos a través de los años [1], sin embargo, todavía no hay un consenso sobre qué exactamente empieza el periodo de inflación. La gran mayoría de estos modelos, por ejemplo, se basan en la idea de que un campo escalar, o tal vez más de uno, impulsa el inicio del periodo inflacionario. Después de este periodo, se cree que viene la etapa de recalentamiento, la cual sigue siendo sujeto de investigación, en donde surgen las partículas que conocemos del Modelo Estándar.

En este escrito se estudia una relación entre las etapas de inflación y recalentamiento. Se propone un procedimiento que nos permite obtener cotas para las cantidades cosmológicas que nos interesan al imponer una restricción en el número de e -folds durante la etapa de recalentamiento.

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera. En el capítulo 2 y 3 se da un repaso de algunos conceptos básicos sobre la cosmología moderna pre-inflacionaria y la cosmología inflacionaria, respectivamente, necesario para entender el capítulo 4.

En específico, el capítulo 2 habla de las ecuaciones de Einstein y de la métrica de Robertson-Walker con las cuales se obtienen las ecuaciones de Friedmann que describen la dinámica del universo; a partir de estas ecuaciones se dan ejemplos de modelos cosmológicos simples. Al final de este capítulo se habla también de la historia térmica del universo en donde se analiza la evolución de la densidad de energía de las partículas en el Modelo Estándar de acuerdo a la temperatura del universo.

En el capítulo 3 se discuten los problemas que tiene la vieja cosmología basada en el modelo del Big Bang, para después hablar de nociones básicas de inflación y como al introducir una época inflacionaria no solo se resuelven dichos problemas; sino que también se da una explicación al origen de estructura del universo. Finalmente se habla de la época de recalentamiento que nos da una conexión entre las ideas de inflación y el modelo del Big Bang.

El capítulo 4 muestra el procedimiento que nos permite obtener restricciones a las cantida-

des cosmológicas que nos interesan. Primero se habla de la idea general en donde se obtienen expresiones para las cantidades cosmológicas de interés sin especificar un potencial. Después se estudian cuatro casos diferentes para un modelo del tipo atractores alfa y se presentan los resultados obtenidos en las tablas 4.1 y 4.2, y en las figuras 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6.

El capítulo 5 está basado en un artículo en preparación titulado *Model independent bounds for the number of e -folds during the evolution of the universe* por Gabriel Germán, R. Gonzalez Quaglia, y A.M. Moran Colorado, en donde se presenta un procedimiento simple con el cual se pueden obtener cotas universales (independientes del modelo) para cantidades cosmológicas de interés. Finalmente, se presentan las conclusiones en el capítulo 6.

Capítulo 2

Cosmología moderna

Los modelos cosmológicos modernos se basan en la idea de que el universo es el mismo en cualquier punto. A esta idea se le conoce como principio cosmológico y, aunque claramente es muy diferente estar en el centro del sol que recostado en una cama, debemos pensar que el principio cosmológico es una aproximación que va mejorando conforme aumenta la escala de longitud que consideramos [2].

Una pieza clave para la cosmología moderna surgió cuando Edwin Hubble midió la distancia entre la tierra y ciertas estrellas cefeidas. Con estas medidas, Hubble notó que las estrellas más lejanas se movían más rápido que las estrellas más cercanas y en 1929 junto con su colega Milton Humason, determinaron una relación que describe este comportamiento (ver la figura 2.1) y que ahora se conoce como la ley de Hubble [3]

$$v = H_0 r, \tag{2.1}$$

en donde H_0 ¹ es la constante de Hubble. Esta ley es importante en el desarrollo de la cosmología moderna porque nos habla de un universo que se expande. Antes de saber los resultados de Hubble, las ecuaciones de Einstein predecían un universo en expansión, pero no había observaciones que lo confirmaran.

Otro resultado importante es el descubrimiento en 1965 de la radiación cósmica de fondo o CMB por sus siglas en inglés (Cosmic Microwave Background) por Arno Penzias y Robert Wilson [4]. Este resultado ayudó a inclinar la balanza a favor del modelo del Big Bang en comparación con el modelo del estado estacionario.

¹Cabe mencionar que el valor de la constante de Hubble es actualmente objeto de discusión por la discrepancia entre los valores obtenidos con diferentes métodos.

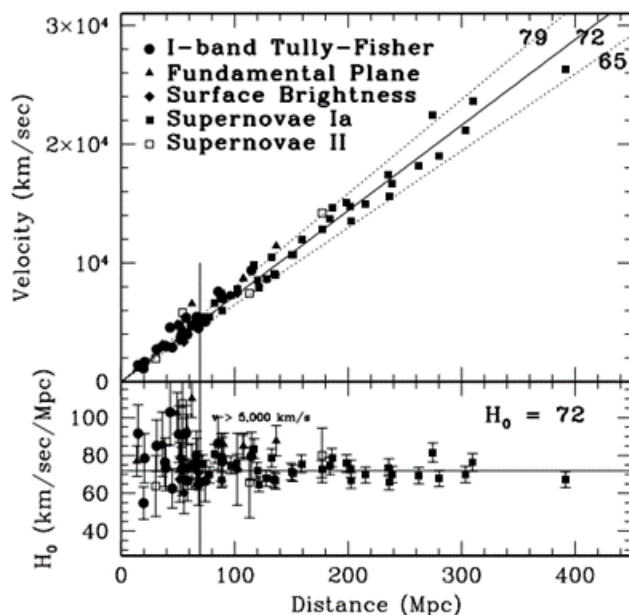


Figura 2.1: Resultados finales del proyecto del telescopio espacial Hubble en donde se reportó un valor de $H_0 = 72 \pm 8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [5]. En esta figura podemos observar la relación creciente entre la velocidad y la distancia.

2.1. El universo homogéneo e isotrópico - La métrica FLRW

El principio cosmológico está directamente relacionado con dos conceptos: isotropía y homogeneidad.

Un universo homogéneo e isotrópico se ve igual en cada punto y dirección que mires, es decir, serán igual de importantes cualesquiera dos lugares en el universo que consideremos. Para nuestros ojos mundanos esto podría verse como una descripción muy pobre del universo en donde vivimos lleno de estrellas, galaxias y cúmulos de galaxias. Cuando tomamos en cuenta escalas considerablemente más grandes a lo que estamos acostumbrados, unos cuantos cientos de Mpc por ejemplo, un universo homogéneo e isotrópico ya no suena tan mal.

En relatividad general la métrica nos dice cómo medir la distancia entre dos puntos en el espacio-tiempo. La métrica que nos ayuda a describir un universo homogéneo e isotrópico cuya expansión o contracción solo depende del tiempo fue derivada en 1930 por los físicos Howard Robertson y Arthur Walker [6]. A esta métrica se le llama a menudo métrica de Robertson-Walker (RW) o métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) de donde el intervalo espacio-temporal es

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - k(r/R_0)^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (2.2)$$

El parámetro $a(t)$ es el factor de escala adimensional del universo, nos dice como cambian las

distancias en un universo que se expande o contrae y está definido como

$$a(t) = \frac{R(t)}{R_0}, \quad (2.3)$$

donde $R(t)$ es el factor de escala del universo y R_0 es el factor de escala actual del universo. El parámetro k es la constante de curvatura con tres valores posibles: $k = 0$ para un universo plano, $k = 1$ para un universo cerrado y $k = -1$ para un universo abierto.

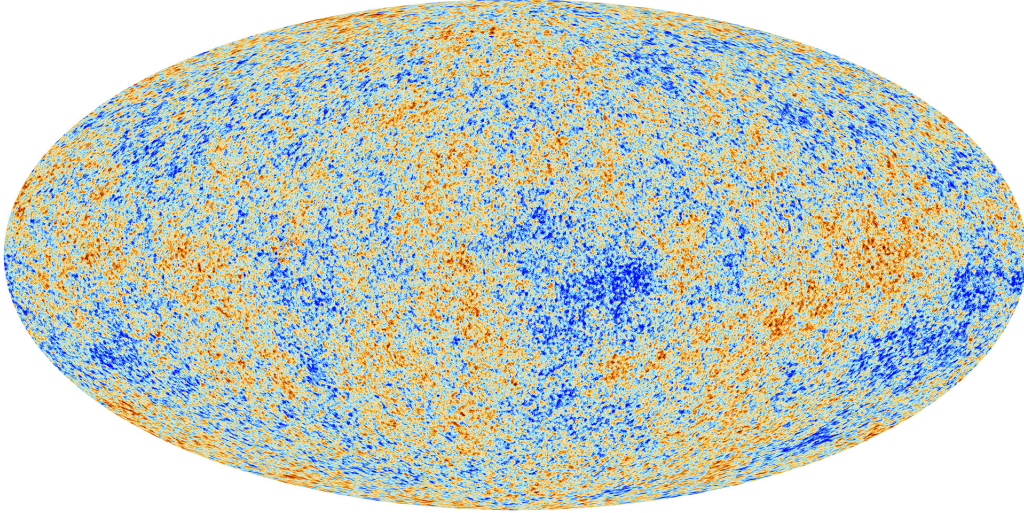


Figura 2.2: Anisotropías de la radiación cósmica de fondo observadas por Planck del orden de 10^{-5} . Las regiones más rojas representan temperaturas más altas a la promedio y las más azules representan regiones con temperaturas menores a la promedio [7].

2.2. Las ecuaciones de Einstein

Uno de los trabajos más importantes de Albert Einstein es la Teoría de la Relatividad General. Desde el punto de vista de Einstein, la gravedad es la manifestación física de un espacio-tiempo curvo con tres propiedades: 1) la métrica describe la geometría del espacio-tiempo, 2) las geodésicas de dicha geometría dictan el movimiento de los cuerpos libres y 3) las leyes de la física se reducen al caso de relatividad especial en un sistema de referencia local en caída libre [8]. Las ecuaciones de Einstein son las siguientes

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

En el lado izquierdo tenemos al tensor de Einstein que nos habla sobre la curvatura del espacio tiempo, y en el lado derecho al tensor de energía momento que nos dice qué está curvando al espacio tiempo.

Las ecuaciones de Einstein son un sistema de 10 ecuaciones diferenciales acopladas (aunque cada índice puede tener cuatro valores, los tensores $G_{\mu\nu}$ y $T_{\mu\nu}$ son simétricos).

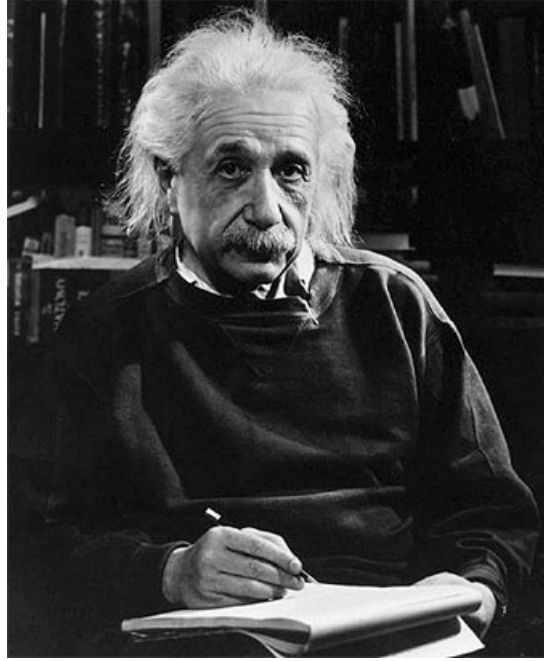


Figura 2.3: Albert Einstein. Nació en la ciudad de Ulm en Württemberg, Alemania. Sus trabajos más importantes incluyen la formulación de la Teoría de la Relatividad Especial (1905), la Teoría de la Relatividad General (1916), Investigaciones sobre la Teoría del Movimiento Browniano (1926) y su descubrimiento de la ley del efecto fotoeléctrico por el cual recibió el Premio Nobel de física en 1921 [9].

2.2.1. Tensor de energía momento

Podemos ver al tensor de energía momento como la fuente de campo gravitacional en las ecuaciones de Einstein. La forma más general de escribir este tensor es [10]:

$$\mathbf{T}(\tilde{dx}_\mu, \tilde{dx}_\nu) = T_{\mu\nu} := \left\{ \begin{array}{l} \text{flujo de momento } \mu \text{ sobre} \\ \text{una superficie a } x_\nu \text{ constante} \end{array} \right\}, \quad (2.5)$$

con momento μ nos referimos a la μ -ésima componente del cuádrimomento.

2.2.2. Tensor de Einstein

Como ya se dijo, el tensor de Einstein nos habla sobre la curvatura del espacio tiempo, y la forma en la que se cuantifica a la curvatura es a través del tensor de Riemann [11]

$$R^\alpha_{\mu\beta\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\beta}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\beta}, \quad (2.6)$$

que se puede obtener al calcular el cambio neto del vector \vec{V} después de transportarlo paralelamente alrededor de un lazo cerrado [10].

Recordemos que cada símbolo de Christoffel nos dice cuanto cambia la μ -ésima componente del ν -ésimo vector de la base respecto a la coordenada λ ,

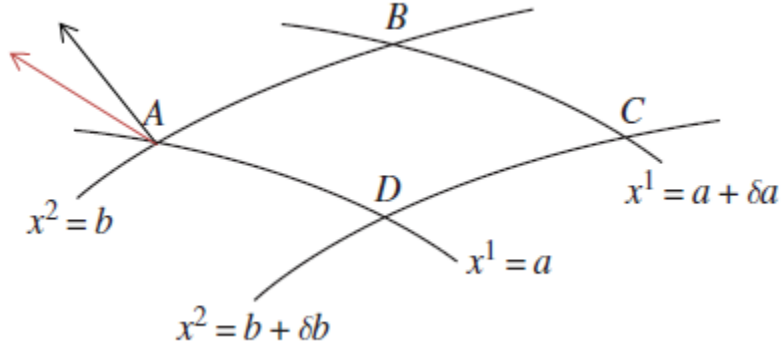


Figura 2.4: Lazo cerrado en el espacio-tiempo cuyos lados son las líneas $x^1 = a, x^1 = a + \delta a, x^2 = b, x^2 = b + \delta b$. Se transporta al vector de color negro por los puntos A, B, C, D y nuevamente a A. Como el lazo está sobre una superficie con curvatura, el vector cambia después de una vuelta y se convierte ahora en el vector de color rojo. Imagen modificada de [10].

$$\frac{\partial \vec{e}_\nu}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \vec{e}_\mu. \quad (2.7)$$

También podemos escribir los símbolos de Christoffel en términos de las derivadas parciales de la métrica,

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (g_{\rho\nu,\lambda} + g_{\rho\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\rho}), \quad (2.8)$$

donde

$$g_{\rho\nu,\lambda} \equiv \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\lambda}.$$

Entonces, un vector que se transporta paralelamente en un espacio plano alrededor de un lazo cerrado será el mismo al principio y al final, los símbolos de Christoffel son cero y, por tanto, el tensor de Riemann también es cero. Si el espacio no es plano, habrá un cambio en el vector después de transportarlo y podemos atribuir este cambio a la curvatura [10]. Si contraemos el primer y tercer índice del tensor de Riemann obtenemos el tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha + \Gamma_{\sigma\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma. \quad (2.9)$$

Y de manera similar, podemos definir el escalar de Ricci como:

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

Definimos entonces el tensor de Einstein en términos del tensor y del escalar de Ricci:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \quad (2.11)$$

Por último, podemos escribir las ecuaciones de Einstein indicando explícitamente el tensor de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.12)$$

2.3. Las ecuaciones que describen la dinámica del universo

Usando la notación de Einstein podemos escribir la métrica ² FLRW a través del elemento de línea como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j = -c^2 dt^2 + a^2(t)\tilde{g}_{ij}dx^i dx^j,$$

en donde

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{1-k(r/R_0)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix},$$

y

$$g_{ij} = a^2(t)\tilde{g}_{ij}.$$

Empezamos calculando los símbolos de Christoffel, los cuales se pueden resumir en [12]

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \longrightarrow \Gamma_{00}^0, \Gamma_{0i}^0, \Gamma_{ij}^0, \Gamma_{00}^i, \Gamma_{0j}^i, \Gamma_{jk}^i.$$

Utilizando (2.8) y la métrica de FLRW obtenemos:

$$\Gamma_{00}^0 = 0, \quad (2.13)$$

$$\Gamma_{0i}^0 = 0, \quad (2.14)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = c^{-1}\dot{a}a\tilde{g}_{ij}, \quad (2.15)$$

$$\Gamma_{00}^i = 0, \quad (2.16)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \delta_j^i c^{-1} \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.17)$$

$$\Gamma_{jk}^i = \tilde{\Gamma}_{jk}^i. \quad (2.18)$$

Ahora, el tensor de Ricci también lo podemos resumir como

$$R_{\mu\nu} \longrightarrow R_{00}, R_{0i}, R_{ij}.$$

Utilizando (2.9) y (2.13) - (2.18)

²Las dimensiones de las componentes de la métrica dependen de las coordenadas que se utilicen; es decir, las componentes de la métrica no son invariantes ante cambios de coordenadas. En cambio, el elemento de línea si es un invariante y sus dimensiones siempre son el cuadrado de una distancia elemental.

$$R_{00} = -3c^{-2} \frac{\ddot{a}}{a}, \quad (2.19)$$

$$R_{0i} = 0, \quad (2.20)$$

$$R_{ij} = c^{-2} \left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\frac{kc^2}{R_0^2} \right) \tilde{g}_{ij}. \quad (2.21)$$

Y por lo tanto también podemos obtener el escalar de Ricci usando (2.10) y (2.19) - (2.21)

$$R = \frac{6}{c^2 a^2} \left(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + \frac{kc^2}{R_0^2} \right). \quad (2.22)$$

El tensor de energía momento más simple que cumple con las propiedades de la métrica de FLRW es aquel que describe a un fluido perfecto en donde la densidad de energía y la presión solo dependen del tiempo [12]

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Si sustituimos las ecuaciones (2.23), (2.22) y (2.19) - (2.21) en (2.12), podemos reescribir las ecuaciones de Einstein. La primer ecuación se obtiene de la componente 00,

$$R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}, \quad (2.24)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2}, \quad (2.25)$$

y se conoce como la ecuación de Friedmann. La segunda ecuación diferente de cero se obtiene tomando la traza de las ecuaciones de Einstein

$$R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} g^{\mu\nu},$$

de donde obtenemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\rho + 3p), \quad (2.26)$$

que se conoce como la ecuación de aceleración. Derivemos ahora la ecuación de Friedmann

$$2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \left(\frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2}{a^2} \right) = \frac{8\pi G}{3c^2} \dot{\rho} + \frac{2kc^2}{R_0 a^3} \dot{a}, \quad (2.27)$$

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \frac{4\pi G}{3c^2} \dot{\rho} + \frac{kc^2}{R_0 a^2}. \quad (2.28)$$

Sustituyendo en la ecuación de aceleración y cancelando términos obtenemos

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p) = 0, \quad (2.29)$$

que es la ecuación de fluidos.

2.4. La ley de Hubble y modelos cosmológicos simples

Recordando lo que se dijo en la sección 2.1 respecto a la métrica, podemos saber la distancia entre dos puntos para un universo en expansión si utilizamos la métrica de FLRW. Pongamos un punto en el origen y otro punto en las coordenadas comóviles (r, θ, ϕ) ; en donde las coordenadas comóviles son aquellas que se mueven junto a la expansión. La distancia entre estos dos puntos se puede obtener del elemento de línea de la ecuación (2.2) para cierta t con θ y ϕ constantes [6]

$$ds = a(t)dr. \quad (2.30)$$

Integrando esta última expresión

$$d(t) = a(t) \int_0^r dr = a(t)r. \quad (2.31)$$

Podemos saber también la velocidad con la que se mueve un punto respecto del otro si se deriva la expresión anterior; como r es una coordenada comóvil y por lo tanto es constante en el tiempo

$$\dot{d} = \dot{a}r = \frac{\dot{a}}{a}d. \quad (2.32)$$

Si hemos puesto atención esta última expresión debe recordarnos a la ley de Hubble que mencionamos al principio de este capítulo, de donde obtenemos

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (2.33)$$

Se debe notar que aunque H es constante en el espacio, no necesariamente es constante en el tiempo. Si sustituimos lo anterior en la ecuación de Friedmann quedaría la siguiente expresión

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2}. \quad (2.34)$$

Es conveniente escribir la ecuación de Friedmann de forma adimensional a través del parámetro de densidad Ω , con el cual también podemos especificar de una buena forma la densidad del universo. Definimos la densidad crítica como el valor de ρ para el cual el universo tiene una geometría plana dada una H . Haciendo $k = 0$ y despejando ρ de la ecuación anterior, la densidad crítica sería entonces

$$\rho_c(t) = \frac{3c^2}{8\pi G}H^2. \quad (2.35)$$

La densidad crítica nos da un valor de referencia con el cual comparar la densidad del universo. Es con esto que definimos el parámetro de densidad como

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)}. \quad (2.36)$$

Si el parámetro de densidad evaluado en un tiempo t es igual a uno, tendríamos un universo plano; si es menor a uno, un universo con curvatura negativa y si es mayor a uno, un universo

con curvatura positiva. Utilizando el parámetro de densidad y la densidad crítica podemos escribir la ecuación de Friedmann de la siguiente manera

$$\Omega - 1 = \frac{kc^2}{R_0^2 a^2 H^2}. \quad (2.37)$$

Como H depende del tiempo, Ω también depende del tiempo. Al valor actual del parámetro de densidad se le denota como Ω_0 .

Ahora que ya reescribimos las ecuaciones Einstein de una forma conveniente, pasaremos a resolverlas para casos simples. La ecuación de Friedmann nos dice cómo evoluciona el factor de escala del universo, y la ecuación de fluidos nos dice cómo evoluciona la densidad de energía. Estas dos ecuaciones dependen de a , ρ y p . Entonces tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas, si queremos resolverlas necesitamos una ecuación más. Esta última se conoce como ecuación de estado y nos da una relación entre la densidad de energía y la presión

$$p = w\rho. \quad (2.38)$$

Sustituyendo (2.38) en (2.29)

$$\dot{\rho} + 3(1+w)\frac{\dot{a}}{a} = 0, \quad (2.39)$$

de donde obtenemos

$$\rho(a) = \rho_0 a^{-3(1+w)}. \quad (2.40)$$

Para un universo plano, $k = 0$, la ecuación de Friedmann se reduce a

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3c^2} a^{-(1+3w)}. \quad (2.41)$$

Si suponemos $a \propto t^q$ [6], obtenemos que el lado izquierdo de la ecuación (2.41) $\propto t^{2q-2}$ y el lado derecho $\propto -q(1+3w)$; realizando un poco de álgebra obtenemos

$$q = \frac{2}{3+3w}. \quad (2.42)$$

Normalizando la ecuación anterior se obtiene que el factor de escala del universo sería

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3+3w}, \quad (2.43)$$

y por lo tanto la constante de Hubble sería

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3(1+w)} t^{-1}. \quad (2.44)$$

Si sustituimos (2.43) en (2.40)

$$\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2}. \quad (2.45)$$

Esta última ecuación es válida para cualquier valor de w . Con las ecuaciones anteriores ya podemos obtener como evolucionan a , ρ y H para diferentes épocas en el universo dependiendo del valor de w en la ecuación de estado.

2.4.1. Materia

En un universo plano dominado por materia no relativista que ejerce una presión despreciable ($p = 0$), la ecuación de estado quedaría caracterizada por $w = 0$. Entonces, utilizando las ecuaciones (2.43), (2.44) y (2.45)

$$a_m(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}, \quad H_0 = \frac{2}{3t_0}, \quad \rho = \rho_0 a^{-3} = \frac{\rho_0 t_0^2}{t^2}. \quad (2.46)$$

2.4.2. Radiación

En un universo plano dominado por radiación $p = \frac{1}{3}\rho$ y, de acuerdo a la ecuación de estado, $w = \frac{1}{3}$. Haciendo lo mismo que en el caso de materia

$$a_r(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}, \quad H_0 = \frac{1}{2t_0}, \quad \rho = \rho_0 a^{-4} = \frac{\rho_0 t_0^2}{t^2}. \quad (2.47)$$

2.4.3. Constante cosmológica

Para un universo plano dominado por una constante cosmológica, la ecuación (2.25) se convierte en

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_\Lambda. \quad (2.48)$$

Como ρ_Λ es constante, podemos reescribir la ecuación anterior como [6]

$$\dot{a} = H_0 a, \quad (2.49)$$

donde

$$H_0 = \left(\frac{8\pi G \rho_\Lambda}{3c^2}\right)^{1/2}. \quad (2.50)$$

La solución para el factor de escala entonces sería

$$a_\Lambda(t) = e^{H_0(t-t_0)}. \quad (2.51)$$

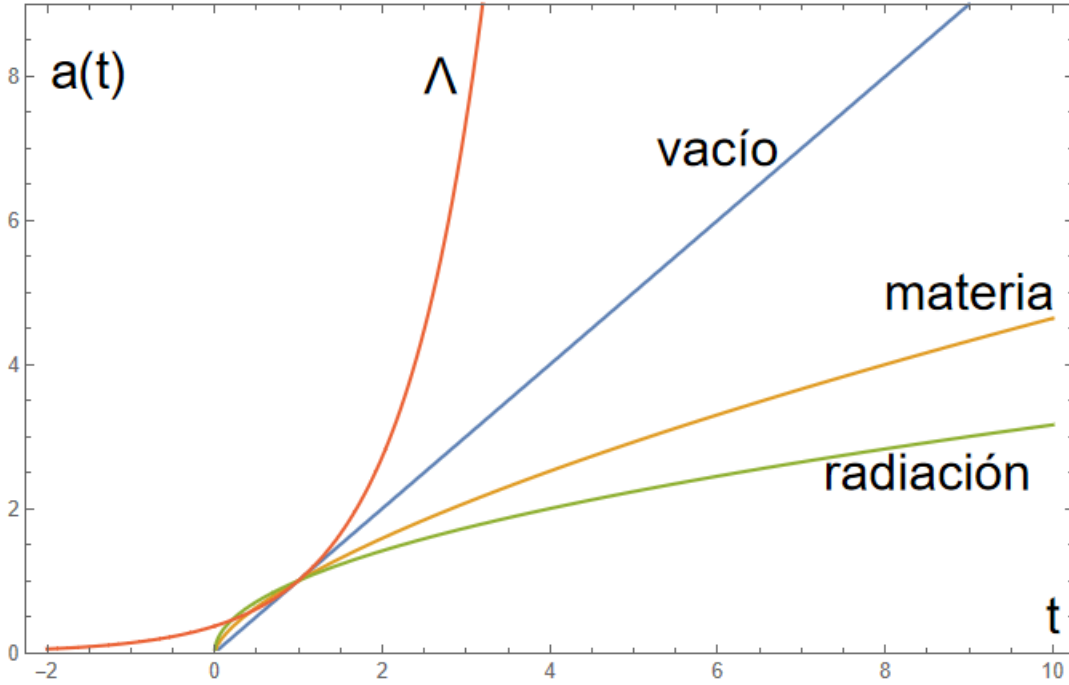


Figura 2.5: Dependencia del factor de escala del universo como función del tiempo para diferentes ecuaciones de estado: universo plano dominado por radiación (verde), universo plano dominado por materia (naranja), universo vacío $\rho = 0$ (azul) y universo plano dominado por una constante cosmológica (rojo).

2.5. Historia térmica del universo

La radiación cósmica de fondo muestra que las partículas en el universo temprano estaban uniformemente distribuidas y en equilibrio térmico. Por lo tanto, podemos utilizar la termodinámica que ya conocemos [13].

Si suponemos también que en esta época las partículas no interaccionan entre sí; la densidad de número n , la densidad de energía ρ y la presión p de este gas de partículas con g grados de libertad se pueden escribir en términos de la función de distribución $f(\vec{p})$ utilizando unidades naturales³ de la siguiente forma [13]

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p f(\vec{p}), \\
 \rho &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p E(\vec{p}) f(\vec{p}), \\
 p &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{|\vec{p}|^2}{3E(\vec{p})} f(\vec{p}),
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

³Cuando se utilizan unidades naturales se establece que $c = k_b = \hbar = 1$ y por lo tanto solo existe una dimensión fundamental, la energía.

donde

$$E(\vec{p})^2 = p^2 + m^2 \quad y \quad f(\vec{p}) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1}.$$

La función de distribución depende de dos parámetros: la temperatura T , que depende de la densidad de energía en el sistema; y el potencial químico μ , que depende de la densidad de número del sistema [13].

En el límite ultrarelativista la temperatura es mucho más grande que la masa de la partícula, $T \gg m$, y por lo tanto podemos aproximar $E = \sqrt{p^2 + m^2} \approx p$. Para $|\mu| \ll T$ y $m \ll T$, podemos aproximar $\mu = 0$ y $m = 0$ y así obtenemos [13]

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{e^{p/T} \pm 1} = \begin{cases} \frac{3}{4\pi^2} \zeta(3) g T^3. & \text{fermiones} \\ \frac{1}{\pi^2} \zeta(3) g T^3. & \text{bosones} \end{cases} \quad (2.53)$$

$$\rho = \frac{g}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi p^3 dp}{e^{p/T} \pm 1} = \begin{cases} \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g T^4. & \text{fermiones} \\ \frac{\pi^2}{30} g T^4. & \text{bosones} \end{cases} \quad (2.54)$$

$$p = \frac{g}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{\frac{4}{3}\pi p^3 dp}{e^{p/T} \pm 1} = \frac{1}{3} \rho \approx \begin{cases} 1.0505 n T. & \text{fermiones} \\ 0.9004 n T. & \text{bosones} \end{cases} \quad (2.55)$$

El promedio de la energía de una partícula sería

$$\langle E \rangle = \frac{\rho}{n} = \begin{cases} \frac{7\pi^4}{180\zeta(3)} T \approx 3.151 T. & \text{fermiones} \\ \frac{\pi^4}{30\zeta(3)} T \approx 2.701 T. & \text{bosones} \end{cases} \quad (2.56)$$

En el límite no relativista las energías cinéticas son mucho menores que las masas de las partículas, $T \ll m$, podemos aproximar $E = m + p^2/2m$. Además en este caso también se cumple que $T \ll m - \mu$ por lo que

$$e^{E-\mu/T} \pm 1 \approx e^{E-\mu/T}, \quad (2.57)$$

y así obtenemos [13]

$$n = g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{m-\mu}{T}}, \quad (2.58)$$

$$\rho = n \left(m + \frac{3T}{2} \right), \quad (2.59)$$

$$p = nT, \quad (2.60)$$

$$\langle E \rangle = m + \frac{3T}{2}. \quad (2.61)$$

Si comparamos ambos límites, el no relativista y el ultrarelativista, encontramos que para una temperatura por debajo de la masa de la partícula; la densidad de número, la densidad de energía y la presión decaen de forma exponencial. Lo que está pasando es que cuando la temperatura está por encima de la masa de la partícula, las reacciones de creación y aniquilación están balanceadas, pero una vez que la temperatura cae por debajo de la masa de la partícula, la energía ya no es la suficiente para crear partículas y por lo tanto estas cantidades bajan [13].

Consideremos ahora que en el universo temprano estaban las partículas en el Modelo Estándar actual. Abajo se muestra una tabla con las partículas incluidas en el Modelo Estándar con sus respectivas masas y grados de libertad.

Quarks	t	$172.76 \pm 0.30 \text{ GeV}$	\bar{t}	$spin = \frac{1}{2}$	$g = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$
	b	$4.18 \pm \text{ GeV}$	\bar{b}	3 colores	
	c	$1.27 \pm 0.02 \text{ GeV}$	\bar{c}		
	s	$93 \pm \text{ MeV}$	\bar{s}		
	d	$4.67 \pm \text{ MeV}$	\bar{d}		
	u	$2.16 \pm \text{ MeV}$	\bar{u}		
<hr/>					72
Gluones	8 bosones sin masa			$spin = 1$	$g = 2$
	<hr/>				
Leptones	τ^-	$1776.86 \pm 0.12 \text{ MeV}$	τ^+	$spin = \frac{1}{2}$	$g = 2 \cdot 2 = 4$
	μ^-	105.658 MeV	μ^+		
	e^-	510.998 keV	e^+		
<hr/>					12
	ν_τ	$< 18.5 \text{ MeV}$	$\bar{\nu}_\tau$	$spin = \frac{1}{2}$	$g = 2$
	ν_μ	$< 0.19 \text{ MeV}$	$\bar{\nu}_\mu$		
	ν_e	$< 1.1 \text{ eV}$	$\bar{\nu}_e$		
<hr/>					6
Bosones gauge electrodébiles	W^+	$80.379 \pm 0.012 \text{ GeV}$		$spin = 1$	$g = 3$
	W^-	$80.379 \pm 0.012 \text{ GeV}$			
	Z^0	$91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}$			
	γ	$0 (< 1 \times 10^{-18} \text{ eV})$			$g = 2$
<hr/>					11
Boson de Higgs	H^0	$125.25 \pm 0.17 \text{ GeV}$		$spin = 0$	$g = 1$
<hr/>					1
<hr/>					$g_f = 72 + 12 + 6 = 90$
<hr/>					$g_b = 16 + 11 + 1 = 28$

Cuadro 2.1: Se muestran las partículas en el Modelo Estándar de Cosmología. En la primera columna escribimos el nombre de la familia de partículas seguida (en la segunda columna) de los tipos de partículas para posteriormente especificar sus masas, espines y número de grados de libertad; mismos que son compartidos por sus antipartículas [14].

La densidad de energía total en el universo es la suma de todas las densidades de energía

de las diferentes especies de partículas:

$$\rho(T) = \Sigma \rho_i(T).$$

En el universo temprano la densidad de energía de las partículas relativistas era dominante sobre las partículas no relativistas; utilizando la ecuación (2.54) podemos escribir la densidad de energía como [13]

$$\rho(T) = \frac{\pi^2}{30} g_b(T) T^4 + \frac{\pi^2}{30} \frac{7}{8} g_f(T) T^4, \quad (2.62)$$

donde g_b es la suma sobre todos los bosones relativistas y g_f la suma sobre todos los fermiones relativistas. Factorizando y definiendo el número de grados de libertad efectivos como

$$g_*(T) = g_b(T) + \frac{7}{8} g_f(T), \quad (2.63)$$

obtenemos que la densidad de energía es

$$\rho(T) = \frac{\pi^2}{30} g_*(T) T^4. \quad (2.64)$$

Despejando $g_*(T)$ de la ecuación anterior, podemos redefinir el número de grados de libertad como

$$g_*(T) \equiv \frac{30}{\pi^2} \frac{\rho(T)}{T^4}, \quad (2.65)$$

y

$$g_{*p}(T) \equiv \frac{90}{\pi^2} \frac{p(T)}{T^4}, \quad (2.66)$$

utilizando la ecuación (2.55). Del cuadro 2.1 sabemos que para $T \gg m_t \sim 175 \text{ GeV}$, todas las partículas son relativistas. Si sumamos todos sus grados internos de libertad

$$g_* = 90 + \frac{7}{8} \cdot 28 = 106.75. \quad (2.67)$$

La transición electrodébil ocurrió alrededor de $T \sim 100 \text{ GeV}$ y parece que durante este periodo g_* no cambia. Las primeras partículas que se aniquilan en esta fase son los quarks t . Los siguientes en aniquilarse son los bosones W^\pm, Z^0 y H^0 . A $T \sim 10 \text{ GeV}$, tenemos

$$g_* = 18 + \frac{7}{8} \cdot 78 = 86.25. \quad (2.68)$$

Los siguientes en aniquilarse son los quarks b y c y después el leptón τ . Si ya hubo tiempo para que el quark s se aniquilara, entonces tendríamos

$$g_* = 18 + \frac{7}{8} \cdot 38 = 51.25. \quad (2.69)$$

A $T \sim 150 \text{ MeV}$, empieza la transición de fase QCD, en donde la interacción entre los quarks y gluones restantes ya no es despreciable. En esta transición de fase los quarks y los gluones forman sistemas de tres quarks, llamados bariones, y pares quark-antiquark, llamados mesones. Hay muchas especies de bariones y mesones, pero solo los piones son relativistas por debajo de la temperatura de la transición QCD. Entonces las únicas partículas que quedan

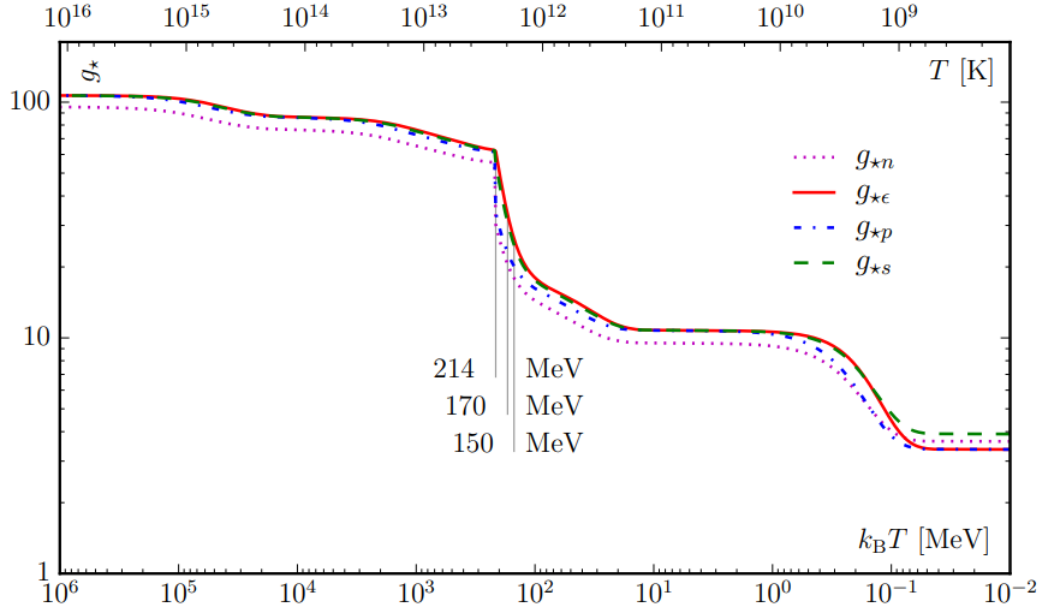


Figura 2.6: Evolución de varias cantidades como funciones de la temperatura. La línea punteada corresponde a la densidad de número ($g \star n$), la de puntos y trazos cortos azules a la presión ($g \star p$), la de trazos largos verdes a la densidad de entropía ($g \star s$) y la línea sólida roja a la densidad de energía ($g \star \epsilon$) [15].

ahora son piones, muones, electrones, neutrinos y fotones. Los siguientes en aniquilarse son los piones y los muones, a $T \sim 100 \text{ MeV}$

$$g_* = 2 + \frac{7}{8} \cdot 10 = 10.75. \quad (2.70)$$

Finalmente, a $T \sim 500 \text{ keV}$, se aniquilan los electrones [13].

Capítulo 3

Cosmología inflacionaria

3.1. Los problemas de la vieja cosmología

El modelo del Big Bang es la mejor descripción que tenemos del universo. Sin embargo, a pesar de todos los éxitos que esta teoría nos ha dado, hay algunas cosas que este modelo no puede explicar, por ejemplo, el problema de planitud, el problema del horizonte y la abundancia de partículas reliquia. En las siguientes páginas se revisarán dichos problemas.

3.1.1. El problema de la planitud

De acuerdo con la ecuación de Friedmann que escribimos en términos del parámetro de densidad (2.37), cuando $\Omega = 1$ el universo es plano ya que la densidad crítica es igual a la densidad del universo. De esa misma ecuación sabemos que

$$\Omega - 1 \propto a^{-2} H^{-2}. \quad (3.1)$$

Utilizando los resultados obtenidos en la sección 2.4.2, durante un periodo dominado por radiación [2]

$$a^2 H^2 \propto (t^{1/2})^2 (t^{-1})^2 = t^{-1}, \quad (3.2)$$

y por lo tanto

$$\Omega - 1 \propto t. \quad (3.3)$$

Para un periodo dominado por materia, utilizando los resultados de la sección 2.4.1

$$a^2 H^2 \propto (t^{2/3})^2 (t^{-1})^2 = t^{-2/3}, \quad (3.4)$$

y por lo tanto

$$\Omega - 1 \propto t^{2/3}. \quad (3.5)$$

En ambos casos se obtiene que el parámetro de densidad para un universo con geometría plana es una función que depende del tiempo y que además esta función es creciente. Una pequeña desviación de la densidad crítica resultaría en un universo que se hace más curvo

conforme pase el tiempo [2]. Gracias a resultados de la radiación cósmica de fondo junto con otras observaciones, se sabe que el parámetro de densidad está acotado [6]

$$|\Omega_0 - 1| \leq 0.005.$$

Este ya es un valor muy cercano a cero, lo cual quiere decir que el parámetro de densidad era incluso más cercano a uno para etapas más antiguas. Para tener una mejor idea de qué tan restringido está este valor en diferentes etapas, consideremos un caso simple en que el universo siempre ha estado dominado por radiación y por lo tanto el parámetro de densidad tiene una relación lineal con el tiempo. Si el tiempo actual es $t_0 \simeq 4 \times 10^{17}$ s, entonces, en la época de desacoplamiento $t \simeq 10^{13}$

$$|\Omega - 1| \leq 10^{-7},$$

en la época de nucleosíntesis $t \simeq 1$

$$|\Omega - 1| \leq 10^{-20},$$

y en la escala electrodébil $t \simeq 10^{-12}$

$$|\Omega - 1| \leq 10^{-32}.$$

Entonces, para explicar lo que observamos en el universo actual tenemos que restringir el parámetro de densidad a un valor muy específico. Podría ser que este valor en realidad si sea una coincidencia, aunque esta parece una explicación muy improbable y poco satisfactoria [6].

Una cosa buena que sale de que el parámetro de densidad sea prácticamente cero ya en la época de nucleosíntesis es que nos da una buena excusa para considerar una geometría plana y simplificar las ecuaciones de Friedmann como lo hicimos en el capítulo 2.4.

3.1.2. El problema del horizonte

La isotropía es una de las características de la radiación cósmica de fondo que más les interesa a los físicos. Esto es, si medimos la temperatura de la radiación cósmica de fondo en dos puntos opuestos en el cielo, vamos a obtener la misma temperatura salvo unas cuantas cien milésimas, casi como si estos fotones estuvieran en equilibrio térmico. Esta característica que al principio utilizamos para escribir una métrica simple que describa el comportamiento del universo, resulta ser un problema para la teoría estándar del Big Bang [6].

La distancia a la superficie de última dispersión en la actualidad es

$$d(t_0) = c \int_{t_{ud}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)},$$

de donde podemos sacar que $d(t_0) = 0.98d_h(t_0)$ donde $d_h(t_0)$ es la distancia del horizonte. Esto quiere decir que la distancia que los fotones viajan desde la superficie de última dispersión es más pequeña que la distancia al horizonte. Si consideramos dos puntos opuestos en esta superficie, entonces actualmente están separados una distancia de $1.96d_h(t_0)$; es decir, la distancia es mayor que el horizonte y por lo tanto están desconectados causalmente. Lo que esto significa es que esos fotones que estamos recibiendo no han tenido tiempo de intercambiar información entre ellos pero aun así tienen la misma temperatura [6].

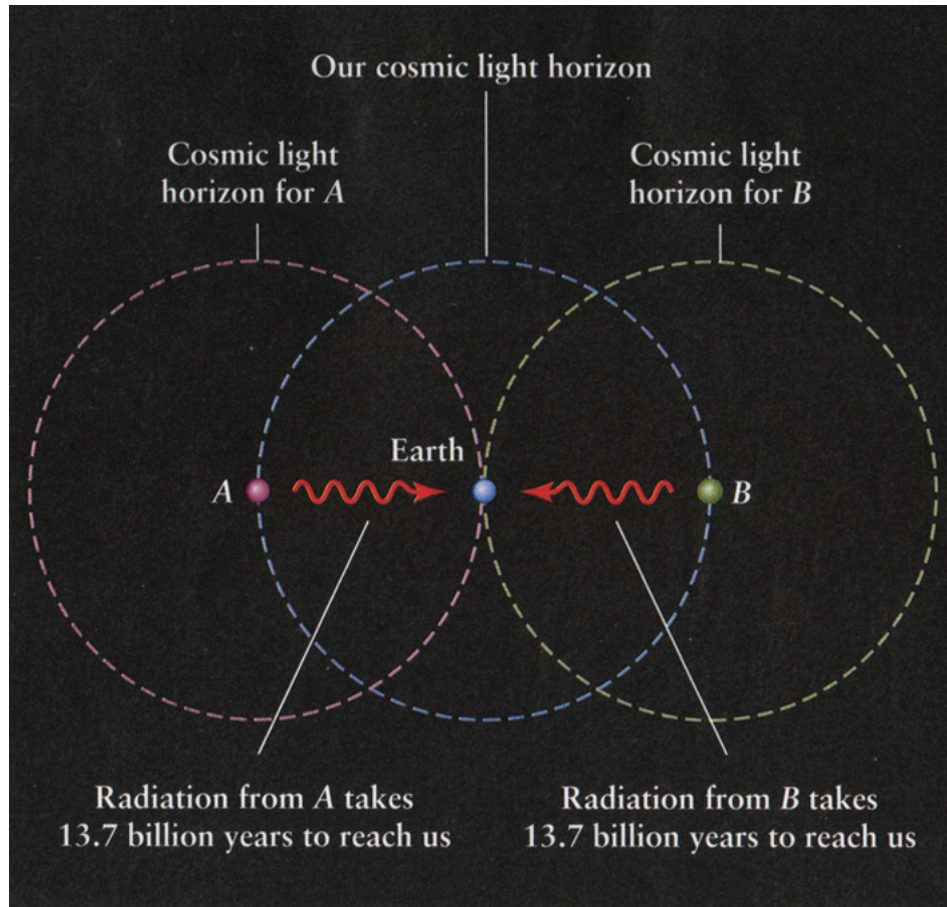


Figura 3.1: Cada círculo representa el horizonte de lo que está en el centro. Los horizontes de los fotones que salen de los puntos A y B no tienen ninguna intersección y por lo tanto están desconectados causalmente, sin embargo, cuando llegan a la tierra tienen la misma temperatura.

3.1.3. Abundancia de partículas reliquia

Este problema sale de combinar el modelo del Big Bang con conceptos modernos de física de partículas, en específico con las teorías de gran unificación. Este tipo de teorías busca mostrar que la fuerza electromagnética, la fuerza nuclear débil y la fuerza nuclear fuerte son en realidad diferentes aspectos de una sola fuerza. Las teorías de gran unificación predicen no sólo la existencia de monopolos magnéticos, sino que también estos deberían ser muy masivos y, por lo tanto, rápidamente se convertirían en partículas no relativistas que dominarían la densidad de energía del universo cuando $t \approx 10^{-16}$ s. Sin embargo, las observaciones apuntan a que ni siquiera existen los monopolos magnéticos, mucho menos que dominan la densidad de energía del universo [6]. Otro tipo de partículas que causan este tipo de problemas son los gravitinos y los campos escalares.

3.2. Nociones básicas de inflación

Inflación es una hipótesis propuesta en 1981 por Alan Guth [16] que se define como un periodo en el universo temprano en donde el factor de escala tenía una aceleración positiva ($\ddot{a} > 0$). De la ecuación de aceleración

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho + 3p),$$

podemos ver que la condición de inflación implica que $(\rho + 3p) < 0$ y por lo tanto $p < -\rho/3$. El caso más simple de inflación surge cuando el universo está dominado por una constante cosmológica ($w = -1$), en tal caso la ecuación de aceleración sería

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda_i}{3} > 0,$$

y la ecuación de Friedmann

$$H^2 = \frac{\Lambda_i}{3}.$$

Como se vió en la sección 2.4.3, la solución para el factor de escala sería

$$a(t) = e^{H_i(t-t_i)},$$

con

$$H_i = \left(\frac{\Lambda_i}{3}\right)^{1/2}.$$

No hay un consenso aún sobre el mecanismo que impulsa a que empiece una época de inflación en el universo. Dicho esto, hablaremos sobre un mecanismo que podría hacerlo: un campo escalar. Consideremos entonces un campo escalar ϕ mínimamente acoplado cuya densidad Lagrangiana es [17]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - V(\phi) \quad (3.6)$$

El tensor energía momento para este campo es

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - \mathcal{L}g^{\mu\nu} \quad (3.7)$$

Si asumimos que ϕ es espacialmente homogéneo, el tensor $T^{\mu\nu}$ tiene la forma de un fluido perfecto en donde la densidad de energía y la presión son

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (3.8)$$

y

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.9)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.8) y (3.9) en (2.29), la ecuación de fluidos, obtenemos una ecuación para el comportamiento de ϕ

$$\ddot{\phi} + 3H(t)\dot{\phi} = -\frac{d}{d\phi}V(\phi) = -V'(\phi),$$

$$\ddot{\phi} + 3H(t)\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (3.10)$$

y si sustituimos (3.8) en (2.25), la ecuación de Friedmann, y haciendo $k = 0$ obtenemos

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right). \quad (3.11)$$

La forma estándar para resolver estas ecuaciones es a través de la aproximación de rodamiento lento en donde el campo varía lentamente en el tiempo

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi), \quad (3.12)$$

y el término $\ddot{\phi}$ es despreciable. Bajo estas condiciones el campo escalar, al que también se le llama inflatón, se comporta como una constante cosmológica

$$\rho_\phi \approx -p_\phi \approx V(\phi), \quad (3.13)$$

y la ecuación de Friedmann y la ecuación del comportamiento de ϕ se reducen a

$$H^2 \approx \frac{8\pi G}{3} V(\phi), \quad (3.14)$$

y

$$3H\dot{\phi} \approx -V'(\phi). \quad (3.15)$$

Si definimos los parámetros de rodamiento lento¹ como [18]

$$\epsilon(\phi) = \frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2, \quad (3.16)$$

$$\eta(\phi) = M_{pl}^2 \frac{V''}{V}, \quad (3.17)$$

inflación ocurre cuando

$$\epsilon \ll 1, \quad (3.18)$$

y

$$|\eta| \ll 1. \quad (3.19)$$

También se puede calcular el número de e -folds² con esta aproximación [12]

$$\begin{aligned} N &\equiv \int_{t_i}^{t_f} H dt \simeq \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi \simeq -3 \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{H^2}{V'} d\phi \\ &\simeq -\frac{1}{M_{pl}^2} \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V}{V'} d\phi. \end{aligned} \quad (3.20)$$

¹Aquí utilizamos para los parámetros $M_{pl}^2 = 1/8\pi G$.

²El número de e -folds nos dice el intervalo de tiempo en el que el factor de escala crece por un factor de e .

3.3. Solución a problemas cosmológicos a través de inflación

3.3.1. El problema de la planitud

Recordando la ecuación de Friedmann expresada en términos del parámetro de densidad

$$\Omega - 1 = \frac{kc^2}{a^2 H^2}.$$

Para la época de inflación $H(t) = H_i = \text{constante}$ y $a \propto e^{H_i t}$, lo que nos lleva a

$$\Omega - 1 \propto e^{-2H_i t}.$$

Durante inflación la diferencia entre el parámetro de densidad y uno decae exponencialmente con el tiempo. Si ahora comparamos el parámetro de densidad al inicio y al final de inflación, obtenemos

$$\frac{\Omega(t_f) - 1}{\Omega(t_i) - 1} = e^{-2N},$$

en donde utilizamos

$$N = \int_{t_i}^{t_f} H_i dt = H_i(t_f - t_i). \quad (3.21)$$

Si al principio de inflación el universo estaba muy curvado con $|\Omega(t_i) - 1| \sim 1$, entonces al final de inflación:

$$\Omega(t_f) - 1 \sim e^{-2N}.$$

Esta última expresión nos da una medida de que tanto se aplanó el universo al final de inflación dependiendo del número de e -folds. Entonces, podemos hacer que el parámetro de densidad sea tan cercano a uno como queramos de tal forma que con la expansión posterior del universo obtengamos el valor para la curvatura que nos dicen las observaciones [2]. El número mínimo de e -folds que se necesitan cuando se compara este modelo con las observaciones es $N \approx 60$ [6].

3.3.2. El problema del horizonte

Supongamos que la etapa de inflación sucede entre dos etapas dominadas por radiación. Es decir, para un tiempo menor a t_i la densidad de energía estaba dominada por radiación, después, empieza el periodo inflacionario instantáneamente en t_i y termina instantáneamente en t_f para volver a una expansión dominada por radiación [6], de forma que el factor de escala se vería como

$$a(t) = \begin{cases} a_i \left(\frac{t}{t_i}\right)^{1/2} & t < t_i \\ a_i e^{H_i(t-t_i)} & t_i < t < t_f \\ a_i e^{H_i(t_f-t_i)} \left(\frac{t}{t_f}\right)^{1/2} & t > t_f. \end{cases} \quad (3.22)$$

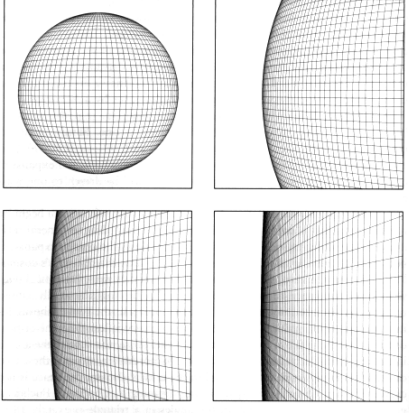


Figura 3.2: A lo largo de las imágenes se ve como la superficie de la esfera se va haciendo cada vez más plana cuando crece. De la misma manera, la etapa de inflación hace que el espacio-tiempo se aplane.

La distancia al horizonte a un tiempo t es

$$d_{hor}(t) = a(t)c \int_0^t \frac{dt}{a(t)}.$$

Utilizando (3.22) obtenemos la distancia al horizonte cuando empezó inflación

$$d_{hor}(t_i) = a(t_i)c \int_0^{t_i} \frac{dt}{a_i(t/t_i)^{1/2}} = 2ct_i,$$

y cuando terminó inflación:

$$d_{hor}(t_f) = a_i e^N c \left(\int_0^{t_i} \frac{dt}{a_i(t/t_i)^{1/2}} + \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt}{a_i e^{H_i(t-t_i)}} \right),$$

$$d_{hor}(t_f) = e^N c (2t_i + H_i^{-1} - e^{-N} H_i^{-1}).$$

Si el número de e -folds es grande, entonces la distancia al horizonte al final de inflación es:

$$d_{hor}(t_f) = e^N c (2t_i + H_i^{-1}). \quad (3.23)$$

Esto indica que el tamaño del horizonte crece exponencialmente durante inflación. Si inflación empezó en $t_i \approx 10^{-36}$ s, entonces el horizonte inmediatamente antes de inflación era

$$d_{hor}(t_i) = 2ct_i \approx 6 \times 10^{-28} \text{ m}. \quad (3.24)$$

Si asumimos que el número de e -folds es $N = 65$ y $H_i^{-1} \approx t_i^{-1}$

$$d_{hor}(f_i) = e^N 3ct_i \approx 15 \text{ m}. \quad (3.25)$$

Entonces en este modelo la distancia al horizonte creció de 15 m al final de inflación a 200 Mpc en el tiempo de la última dispersión. Esta distancia es lo suficientemente grande para que puntos opuestos en la superficie de última dispersión estén causalmente conectados [6].

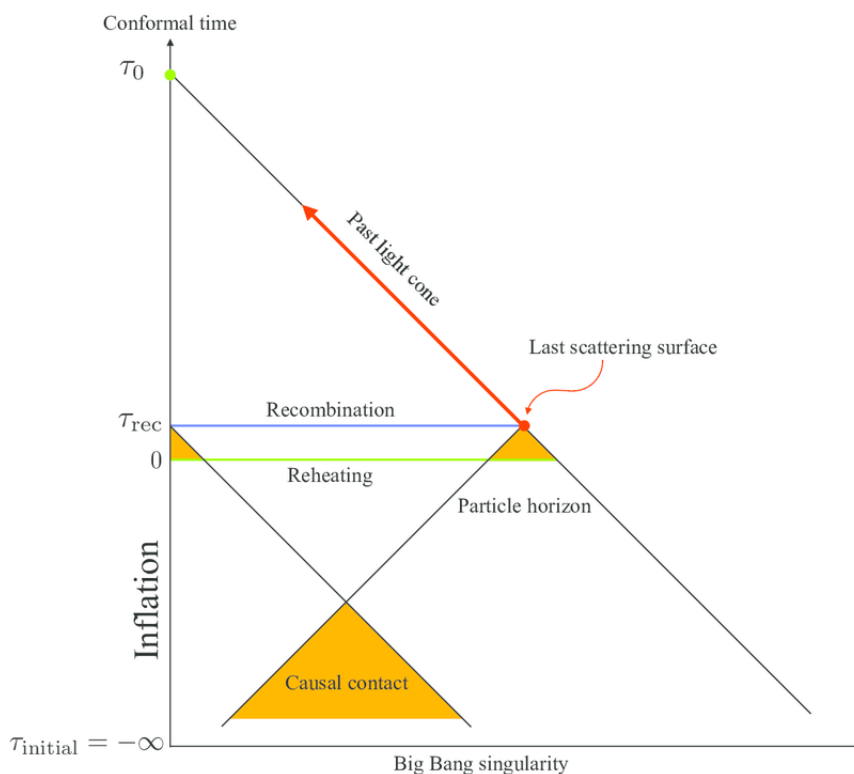


Figura 3.3: En esta imagen podemos ver como la etapa inflacionaria resuelve el problema del horizonte a través de conos de luz. Sin una etapa de inflación el cono de luz para la superficie de última dispersión (el punto rojo) solo llegaría a la línea horizontal verde y diferentes regiones del CMB no estarían en contacto causal. Con una etapa de inflación el cono de estas regiones se extiende y; en cierto punto, se traslapan (sombra naranja) por lo que ahora sí están en contacto causal [19].

3.3.3. Abundancia de partículas reliquia

Inflación provoca que la densidad de número, ya sean monopolos magnéticos o cualquier otra partícula de la que ya se discutió, sea diluido a tal punto de ser casi indetectable. Cabe mencionar que esto solo se cumple si durante la época de recalentamiento, de la hablaremos más adelante, no hay suficiente energía como para volver a crear estas partículas [2].

3.4. Origen de estructura del universo

El inflatón tiene fluctuaciones cuánticas submicroscópicas. Un periodo inflacionario hace que estas fluctuaciones se expandan a un nivel macroscópico, causando las inhomogeneidades en el universo que llevaron a la formación de estructuras. Centrémonos en la formación de estructuras en la escala de cúmulos de galaxias y supercúmulos de galaxias. La idea básica detrás de la formación de este tipo de estructuras es la inestabilidad gravitacional. La expansión en un universo dominado por materia provoca que regiones más densas se expandan más

lento que el universo mismo y, a su vez, estas regiones colapsan en cúmulos ligados gravitacionalmente si son lo suficientemente densas. Estos cúmulos al ser tan densos empezarán a atraer materia de regiones menos densas [6].

Veamos un ejemplo simple [6] de cómo evolucionan en el tiempo pequeñas perturbaciones en un universo estático y con densidad uniforme $\bar{\rho}$. Consideremos una esfera de radio R a la cual le agregamos o quitamos una cantidad pequeña de materia. La densidad en la esfera sería

$$\rho(t) = \bar{\rho}[1 + \delta(t)], \quad (3.26)$$

con $\delta \ll 1$. Entonces, a partir de esta expresión simple para la densidad, queremos ver como evoluciona en el tiempo una pequeña perturbación, es decir, queremos encontrar $\delta(t)$. En este ejemplo primero encontraremos dos ecuaciones que relacionen el radio R de la esfera y la perturbación δ y luego resolveremos este sistema de ecuaciones para deltas pequeñas. La primera ecuación es la de la aceleración gravitacional en la superficie de la esfera

$$\ddot{R} = -\frac{G\Delta M}{R^2} = -\frac{4\pi}{3}GR\bar{\rho}\delta, \quad (3.27)$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi}{3}G\bar{\rho}\delta. \quad (3.28)$$

Si $\delta > 0$, es decir que hay un exceso de masa, la esfera colapsa. La segunda ecuación es la masa de la esfera, que permanece constante durante el colapso

$$M = \frac{4\pi}{3}\bar{\rho}(t)[1 + \delta(t)]R^3(t).$$

Despejando $R(t)$ de la segunda ecuación y definiendo

$$R_0 \equiv \left(\frac{3M}{4\pi\bar{\rho}}\right)^{-1/3}, \quad (3.29)$$

obtenemos

$$R(t) = R_0[1 + \delta(t)]^{-1/3}. \quad (3.30)$$

Si $\delta \ll 1$

$$R(t) \approx R_0 \left(1 - \frac{1}{3}\delta\right). \quad (3.31)$$

Derivando dos veces

$$\ddot{R}(t) \approx -\frac{1}{3}R_0\ddot{\delta} \approx -\frac{1}{3}R\ddot{\delta}. \quad (3.32)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (3.27) obtenemos

$$\ddot{\delta} = 4\pi G\bar{\rho}\delta, \quad (3.33)$$

cuya solución más general es

$$\delta(t) = A_1 e^{t/t_{din}} + A_2 e^{-t/t_{din}}, \quad (3.34)$$

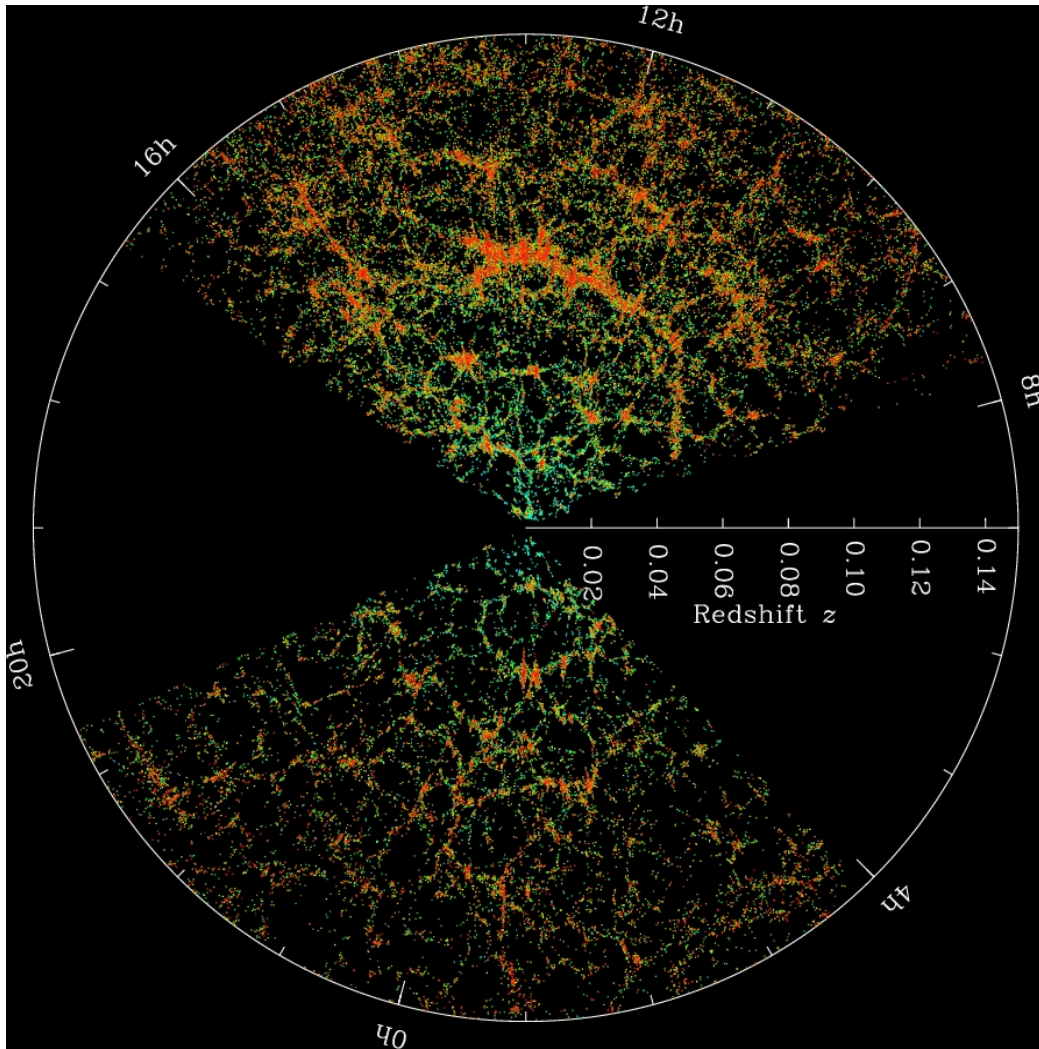


Figura 3.4: Mapa del universo del SDSS (Sloan Digital Sky Survey) en donde cada punto representa una galaxia en el universo.

con

$$t_{din} = \left(\frac{1}{4\pi G \bar{\rho}} \right)^{1/2}. \quad (3.35)$$

Después de un tiempo, el término exponencial creciente empieza a dominar. Esta solución nos indica que, en este modelo simple, pequeñas fluctuaciones en la densidad en un universo estático crecen exponencialmente con el tiempo [6].

3.5. La época de recalentamiento

Para recuperar el modelo del Big Bang, la energía potencial del inflatón debe convertirse en las partículas del Modelo Estándar y el universo debe termalizarse al final de inflación. A esta etapa se le conoce como época de recalentamiento.

3.5.1. Recalentamiento canónico

Con las ecuaciones (3.10) y (3.11) podemos saber la evolución del inflatón para un potencial específico. Consideremos el potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (3.36)$$

Las ecuaciones que describen la dinámica del inflatón son

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + m^2\phi = 0, \quad (3.37)$$

$$H^2 = \frac{8\pi}{3M_p^2} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right). \quad (3.38)$$

Se puede parametrizar la ecuación (3.38) con el parámetro de Hubble H y la variable θ de la siguiente forma [20]

$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} H M_p \sin \theta, \quad (3.39)$$

$$m\phi = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} H M_p \cos \theta. \quad (3.40)$$

Si derivamos la ecuación (3.39) y la reemplazamos en (3.37) obtenemos

$$\dot{H} = -H(3H + (\dot{\theta} + m) \cot \theta), \quad (3.41)$$

que se puede separar como

$$\dot{H} = -3H^2 \sin^2 \theta, \quad (3.42)$$

y

$$\dot{\theta} = -m - \frac{3}{2}H \sin 2\theta. \quad (3.43)$$

Ahora, como queremos saber $\phi(t)$ necesitamos resolver las dos ecuaciones diferenciales anteriores. Si consideramos un $mt \gg 1 \rightarrow m \gg 1/t \sim H$, el segundo término de la ecuación (3.43) se puede ignorar y la solución para la ecuación de θ quedaría como $\theta \approx -mt$. Por lo tanto el campo escalar oscila con un frecuencia $\omega \propto m$. Integrando la ecuación (3.42) y sustituyendo el valor de θ :

$$H(t) = \frac{2}{3t} \left(1 - \frac{\sin(2mt)}{2mt} \right)^{-1}. \quad (3.44)$$

Haciendo un desarrollo en $(mt)^{-1}$

$$H(t) \simeq \frac{2}{3t} \left(1 + \frac{\sin(2mt)}{2mt} \right), \quad (3.45)$$

sustituyendo en (3.40) obtenemos el comportamiento para $\phi(t)$

$$\phi(t) \simeq \Phi(t) \cos(mt) \left(1 + \frac{\sin(2mt)}{2mt} \right), \quad (3.46)$$

donde

$$\Phi(t) \frac{M_p}{\sqrt{3\pi m t}}. \quad (3.47)$$

De la ecuación (3.45) podemos saber el comportamiento del factor de escala

$$a(t) \propto t^{2/3},$$

que es igual al factor de escala de un universo dominado por materia (o partículas no relativistas de masa m), y por lo tanto la densidad de energía decae como

$$\rho_\phi \sim a^{-3} \sim t^{-2}. \quad (3.48)$$

Entonces podemos ver a las oscilaciones del campo escalar ϕ como una colección de partículas escalares mutuamente independientes que oscilan a la misma frecuencia m . Para intervalos de tiempo más grandes que el periodo de oscilación [20], podemos relacionar la densidad de energía y la densidad de número utilizando la ecuación (3.47)

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} m^2 \Phi^2,$$

y como $\rho_\phi \sim nm$

$$n_\phi = \frac{1}{2} m \Phi^2.$$

La época de recalentamiento empieza cuando la densidad de energía del inflatón se transfiere a la densidad de energía de otros campos, lo que conlleva a que la amplitud de oscilación decaiga aún más.

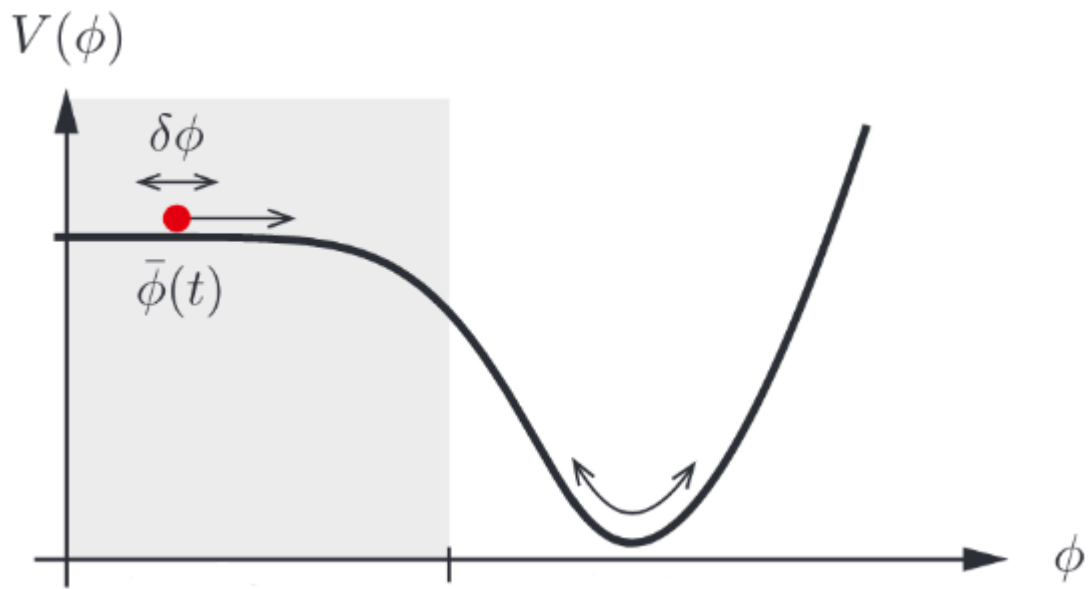


Figura 3.5: En la figura se muestra al inflatón rodando por el potencial. La parte sombreada representa la época de inflación. Después de esta época el inflatón oscila en el mínimo como se muestra con las flechas. Esta es la época de recalentamiento en donde la energía del inflatón se convierte en las partículas del Modelo Estándar [21].

Capítulo 4

Restricciones a modelos de inflación provenientes de recalentamiento

4.1. La idea general

El objetivo final es estudiar modelos de inflación y obtener cotas para diferentes cantidades cosmológicas para un modelo en específico. Primero, se reescriben los parámetros que definen al potencial en términos de las observables r (la relación tensor-escalar) y n_s (el índice espectral escalar). Después, como dichas cantidades cosmológicas ya están en términos de r y n_s , podemos restringirlas con los valores límite observacionales/teóricos de los mismos r y n_s [22]. De la aproximación de rodamiento lento, las observables están dadas por [22]

$$\begin{aligned}n_t &= -2\epsilon = -\frac{r}{8}, \\n_s &= 1 + 2\eta - 6\epsilon, \\n_{tk} &= 4\epsilon(\eta - 2\epsilon) = \frac{r}{8} \left(n_s - 1 + \frac{3}{8}r \right), \\n_{sk} &= 16\eta\epsilon - 24\epsilon^2 - 2\xi_2, \\A_s(k) &= \frac{1}{24\pi^2\epsilon} \frac{V_k}{M_{pl}^4}.\end{aligned}$$

Aquí denotamos $n_{sk} \equiv \frac{dn_s}{d\ln k}$ y $n_{tk} \equiv \frac{dn_t}{d\ln k}$. La amplitud de las perturbaciones de densidad escalares con número de onda k es $A_s(k)$. Todas las cantidades anteriores están evaluadas en la escala pivote $k = k_p$ y los parámetros de rodamiento lento se definen como [22]

$$\begin{aligned}\epsilon &\equiv \frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2, \\ \eta &\equiv M_{pl}^2 \frac{V''}{V}, \\ \xi_2 &\equiv M_{pl}^4 \frac{V'V'''}{V^2},\end{aligned}$$

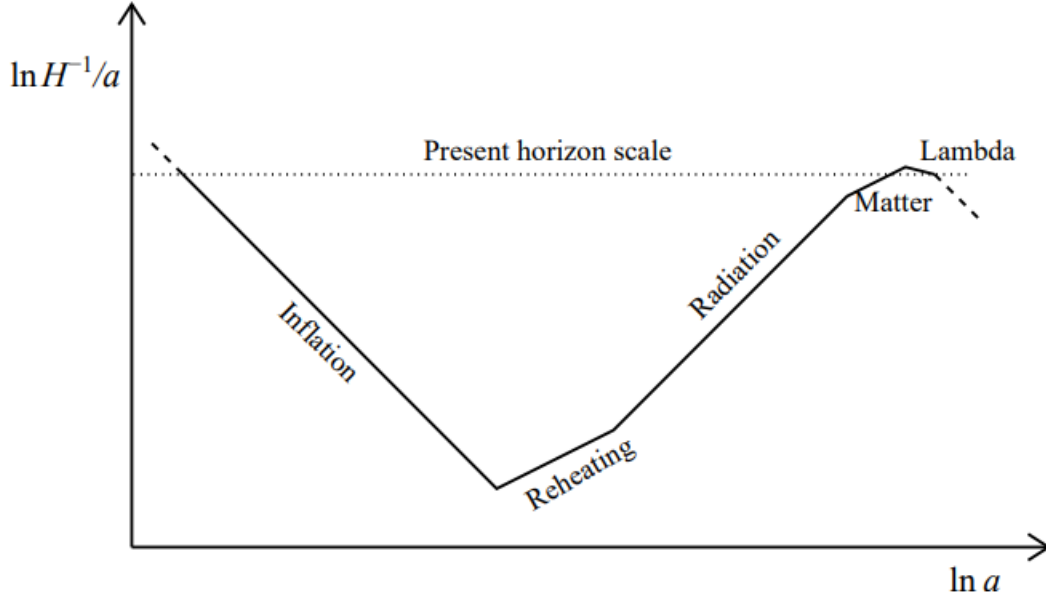


Figura 4.1: Evolución de la escala comóvil $1/aH$. La línea sólida representa la evolución desde la escala pivote durante inflación (pendiente -1), pasando por la etapa de recalentamiento, la etapa de radiación (pendiente 1), la etapa de materia (pendiente $1/2$) y finalmente la época actual (pendiente -1). La línea punteada representa la escala pivote [23]

en donde nuevamente $M_{pl}^2 \equiv 1/8\pi G$ es la masa reducida de Planck con un valor de 2.44×10^{18} GeV y la notación (\prime) representa una derivada respecto al campo ϕ [22].

Se puede relacionar la escala de Hubble comóvil $a_k H_k = k$ a la escala presente de la siguiente manera [24]

$$\frac{k}{a_0 H_0} = \frac{a_k}{a_e} \frac{a_e}{a_{re}} \frac{a_{re}}{a_{eq}} \frac{a_{eq} H_{eq}}{a_0 H_0} \frac{H_k}{H_{eq}}, \quad (4.1)$$

donde cada subíndice representa diferentes épocas; (e) para el final de inflación, (re) para recalentamiento, (eq) para la igualdad entre radiación y materia y (0) para la época actual. Usando la definición para el número de e -folds tenemos $e^{N_k} = a_e/a_k$, $e^{N_{re}} = a_{re}/a_e$, $e^{N_{rd}} = a_{eq}/a_{re}$ y tomando el logaritmo natural obtenemos

$$\ln \frac{k}{a_0 H_0} = -N_k - N_{re} - N_{rd} + \ln \frac{a_{eq} H_{eq}}{a_0 H_0} + \ln \frac{H_k}{H_{eq}}. \quad (4.2)$$

El parámetro de Hubble durante inflación está dado por $H_k = \pi M_{pl} (r A_s)^{1/2} / \sqrt{2}$ y la amplitud escalar primordial es $\ln(10^{10} A_s) = 3.089$ según los resultados de Planck [25]. Con la ecuación (2.40) para la densidad de energía

$$\rho = a^{-3(1+w)},$$

y la definición del número de e -folds podemos obtener una expresión para el número de e -folds durante recalentamiento

$$N_{re} = [3(1 + w_{re})]^{-1} \ln \left(\frac{\rho_e}{\rho_{re}} \right). \quad (4.3)$$

La densidad de energía al final de la etapa de recalentamiento es

$$\rho_{re} = \frac{\pi^2}{30} g_{re} T_{re}^4. \quad (4.4)$$

En un universo en expansión la densidad de entropía esta dada por

$$s \equiv \frac{\rho + p}{T},$$

y si está dominada por partículas relativistas, entonces con buena aproximación la densidad de entropía es

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_{s,re} T^3,$$

donde, sumando todas las especies relativistas y permitiendo la posibilidad de que algunas especies puedan tener una temperatura T_i diferente de la temperatura T de aquellas especies que permanecen en equilibrio térmico,

$$g_{s,re} = \sum_{i=bosones} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{i=fermiones} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3.$$

La entropía se mantuvo constante desde T_{re} y por lo tanto se preserva en el CMB y en el fondo de neutrinos actual, por lo que la relación anterior nos lleva a

$$g_{s,re} = \frac{1}{T^3} \left(\sum_{i=bosones} g_i T_i^3 + \frac{7}{8} \sum_{i=fermiones} g_i T_i^3 \right) = \frac{1}{T^3} \left(2T_0^3 + 6 \times \frac{7}{8} T_{\nu 0}^3 \right),$$

en donde la temperatura actual del CMB es $T_0 = 2.725$ K y la temperatura del fondo de neutrinos es $T_{\nu 0} = (4/11)^{1/3} T_0$, por lo tanto

$$g_{s,re} = \frac{T_0^3}{T^3} \frac{43}{11}.$$

Para un universo dominado por partículas relativistas $T = T_0$ y la expresión anterior sería entonces $g_{s,re} = \frac{43}{11}$.

Podemos pensar que la entropía producida en varios procesos en el universo es insignificante comparada con la entropía total del universo mismo, por lo tanto se puede tratar a la expansión del universo como adiabática de tal forma que la entropía total se conserva

$$d(sa^3) = 0 \quad \Rightarrow \quad g_{s,re} T^3 a^3 = cte,$$

entonces

$$g_{s,re} T_{re}^3 a_{re}^3 = g_{s,re} T_0^3 a_0^3,$$

lo que nos lleva a

$$\frac{T_{re}}{T_0} = \left(\frac{43}{11g_{s,re}} \right)^{1/3} \frac{a_0 a_{eq}}{a_{eq} a_{re}}. \quad (4.5)$$

Combinando las ecuaciones (4.3), (4.4) y (4.5) obtenemos

$$\frac{3(1+w_{re})}{4} N_{re} = \frac{1}{4} \ln \frac{30}{\pi^2 g_{re}} + \frac{1}{4} \ln \frac{\rho_e}{T_0^4} + \frac{1}{3} \ln \frac{11g_{s,re}}{43} + \ln \frac{a_{eq}}{a_0} - N_{rd}. \quad (4.6)$$

Combinando las ecuaciones (4.2) y (4.6) tenemos

$$N_{re} = \frac{4}{1-3w_{re}} \left[-N_k - \frac{1}{3} \ln \frac{11g_{s,re}}{43} - \frac{1}{4} \ln \frac{30}{\pi^2 g_{re}} - \ln \frac{\rho_e^{1/4} k}{H_k a_0 T_0} \right], \quad (4.7)$$

que es una expresión para el número de e -folds durante recalentamiento independiente del modelo que se utilice para inflación. Utilizando esta última expresión y la ecuación (4.2) el número de e -folds durante la etapa dominada por radiación está dado por

$$N_{rd} = -\frac{3(1+w_{re})}{4} N_{re} + \frac{1}{4} \ln \frac{30}{\pi^2 g_{re}} + \frac{1}{3} \ln \frac{11g_{s,re}}{43} + \ln \frac{a_{eq} \rho_e^{1/4}}{a_0 T_0}. \quad (4.8)$$

De la ecuación (4.3) podemos saber la temperatura al final de la fase de recalentamiento

$$T_{re} = \left(\frac{30\rho_e}{\pi^2 g_{re}} \right)^{1/4} e^{-\frac{3}{4}(1+w_{re})N_{re}}. \quad (4.9)$$

La ecuación (4.7) también puede escribirse de la siguiente manera

$$N_{re} = (1-3w_{re})^{-1} \left(\ln \left[\frac{V_k}{V_e} r e^{-4N_k} \right] + \ln \left[\frac{\pi^4 A_s g_{re}}{270} \left(\frac{43}{11g_{s,re}} \right)^{4/3} \left(\frac{a_0 T_0}{k} \right)^4 \right] \right), \quad (4.10)$$

donde V_k es el valor del potencial cuando el modo k sale del radio de Hubble durante inflación y V_e es el valor del potencial al final de inflación y se utilizó

$$\rho_e = \frac{3}{2} V_e = \frac{9}{2} \frac{V_e}{V_k} H_k^2 M_{pl}^2 = M_{pl}^4 \frac{9\pi^2 A_s}{4} \frac{V_e}{V_k} r, \quad (4.11)$$

y

$$w_e = \frac{p_e}{\rho_e} = \frac{K_e - V_e}{K_e + V_e}, \quad (4.12)$$

que nos lleva a

$$K_e = -V_e \frac{w_e + 1}{w_e - 1} \Big|_{w_e = -1/3} = \frac{1}{2} V_e, \quad (4.13)$$

y por lo tanto

$$\rho_e = K_e + V_e = \frac{3}{2} V_e. \quad (4.14)$$

Para potenciales que se comportan como $V \sim \phi^n$ alrededor del mínimo se tiene que la ecuación de estado está dada por [26]

$$w = \frac{n-2}{n+2}. \quad (4.15)$$

El procedimiento que se sigue con los casos del potencial que consideramos es el siguiente: se impone la restricción $N_{re} \geq 0$ de donde se sacan nuevos límites para las observables r y n_s , en todos los casos se considera que la ecuación de estado es $w = 0$. Después, utilizando los nuevos límites para las observables, se obtienen nuevos límites para otras cantidades cosmológicas.

En el apéndice A se puede ver un ejercicio ilustrativo para un potencial más sencillo (del tipo leyes de potencia) en donde se muestra el procedimiento descrito anteriormente.

4.2. Restricciones a modelos de inflación del tipo atractores α provenientes de recalentamiento

La clase de atractores alfa que estudiaremos están dados por el potencial

$$V = V_0 \left(1 - \operatorname{sech}^p \left(\lambda \frac{\phi}{M_{pl}} \right) \right), \quad (4.16)$$

el cual es una generalización del potencial básico dado por el caso $p = 2$

$$V = V_0 \left(1 - \operatorname{sech}^2 \left(\lambda \frac{\phi}{M_{pl}} \right) \right) = V_0 \tanh^2 \left(\lambda \frac{\phi}{M_{pl}} \right),$$

en donde $\lambda = 1/\sqrt{6\alpha}$. Este potencial alrededor del mínimo se comporta como

$$\frac{V}{V_0} = \frac{1}{2}p \left(\lambda \frac{\phi}{M_{pl}} \right)^2 + \frac{1}{24}p(2+3p) \left(\lambda \frac{\phi}{M_{pl}} \right)^4 + \dots$$

que es una función cuadrática para una p razonable. Sustituyendo la ecuación para la amplitud de las perturbaciones escalares A_s en ϕ_k

$$A_s(k) = \frac{1}{24\pi^2\epsilon_k} \frac{V_k}{M_{pl}^4}, \quad (4.17)$$

en la ecuación (4.16) y utilizando la definición de ϵ_k tenemos

$$\operatorname{Se} = \left(1 - \frac{3\pi^2 A_s M_{pl}^4 r}{2V_0} \right)^{1/p}, \quad (4.18)$$

en donde

$$\operatorname{Se} \equiv \operatorname{sech} \left(\lambda \frac{\phi_k}{M_{pl}} \right). \quad (4.19)$$

En términos de Se los parámetros de rodamiento lento son

$$\epsilon_k = \frac{p^2 \operatorname{Se}^{2p} (1 - \operatorname{Se}^2)}{2(1 - \operatorname{Se}^p)^2} \lambda^2, \quad (4.20)$$

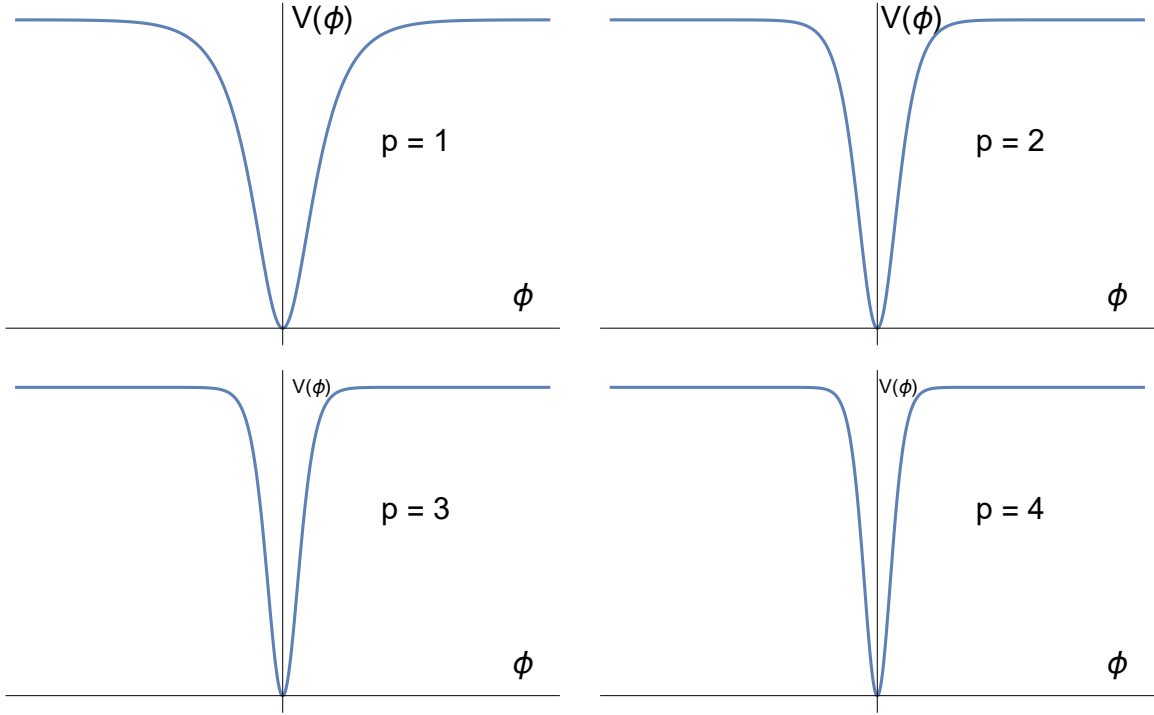


Figura 4.2: En la figura se muestra la gráfica del potencial según la ecuación (4.16) para cuatro valores de p . Nótese que el potencial solo se ensancha dependiendo del valor de p , pero siempre es positivo.

$$\eta_k = \frac{p \text{Se}^p (\text{Se}^2 - p(1 - \text{Se}^2))}{1 - \text{Se}^p} \lambda^2. \quad (4.21)$$

Con la ecuación $16\epsilon_k = r$ podemos obtener

$$\lambda = \left(\frac{r(1 - \text{Se}^p)^2}{8p^2 \text{Se}^{2p}(1 - \text{Se}^2)} \right)^{1/2}. \quad (4.22)$$

Entonces, el valor del inflatón al salir del horizonte es

$$\phi_k = \frac{M_{pl}}{\lambda} \text{arcsech}(\text{Se}). \quad (4.23)$$

Ahora podemos encontrar el índice running

$$n_{sk} = \frac{3}{32} r^2 - \frac{1}{2} \delta_{n_s} r - \frac{1}{4} r (p^2 - (1+p)(2+p) \text{Se}^2) \left(\frac{r(1 - \text{Se}^p)^2}{8p^2 \text{Se}^{2p}(1 - \text{Se}^2)} \right). \quad (4.24)$$

4.2.1. El modelo para $p = 1$

Para $p = 1$ el potencial esta dado por

$$V = V_0 \left(1 - \text{sech} \left(\lambda \frac{\phi}{M_{pl}} \right) \right). \quad (4.25)$$

De la ecuación (4.18)

$$\text{Se} = 1 - \frac{3\pi^2 A_s M_{pl}^4 r}{2V_0}, \quad (4.26)$$

y de la ecuación (4.22) sigue que

$$\lambda = \frac{\sqrt{A_s}}{\sqrt{\frac{2}{3} \left(4 \frac{V_0}{M_{pl}^4} - 3\pi^2 A_s r \right) \left(2 \frac{V_0}{M_{pl}^4} - 3\pi^2 A_s r \right)^2 M_{pl}^4}} V_0 r \pi. \quad (4.27)$$

El parámetro V_0 sigue de resolver $\delta_{n_s} + 2\eta - \frac{3}{8}r = 0$

$$V_0 = \frac{3\pi^2 A_s M_{pl}^4 r (24\delta_{n_s} - r + \sqrt{64\delta_{n_s}^2 + 16\delta_{n_s} r + 17r^2})}{16(4\delta_{n_s} - r)}, \quad (4.28)$$

y de la ecuación (4.23)

$$\phi_k = \frac{M_{pl}}{\lambda} \left(\frac{-8\delta_{n_s} + 3r + \sqrt{64\delta_{n_s}^2 + 17r^2 + 16\delta_{n_s} r}}{16\delta_{n_s} + 2r} \right), \quad (4.29)$$

mientras que el final de inflación esta dado al resolver $\epsilon = 1$

$$\phi_e = \frac{M_{pl}}{\lambda} \text{arcsech} \left(\frac{-\lambda^2 - R_1^{2/3} + 6}{3\lambda\sqrt[3]{R_1}} - \frac{1}{3} \right), \quad (4.30)$$

donde $R_1 = \lambda^3 + 3\sqrt{6}\sqrt{-\lambda^4 + 22\lambda^2 + 4} - 36\lambda$. El número de e -folds durante inflación es

$$N_k = \frac{1}{\lambda^2} \left(\cosh \left(\lambda \frac{\phi_k}{M_{pl}} \right) - \cosh \left(\lambda \frac{\phi_e}{M_{pl}} \right) - 2 \ln \left[\cosh \left(\lambda \frac{\phi_k}{2M_{pl}} \right) \right] + 2 \ln \left[\cosh \left(\lambda \frac{\phi_e}{2M_{pl}} \right) \right] \right) \quad (4.31)$$

Finalmente el índice n_{sk} puede escribirse como:

$$n_{sk} = \frac{1}{256} \left(51r^2 + 80r\delta_{n_s} - 64\delta_{n_s}^2 - (13r + 8\delta_{n_s}) \sqrt{17r^2 + 16r\delta_{n_s} + 64\delta_{n_s}^2} \right). \quad (4.32)$$

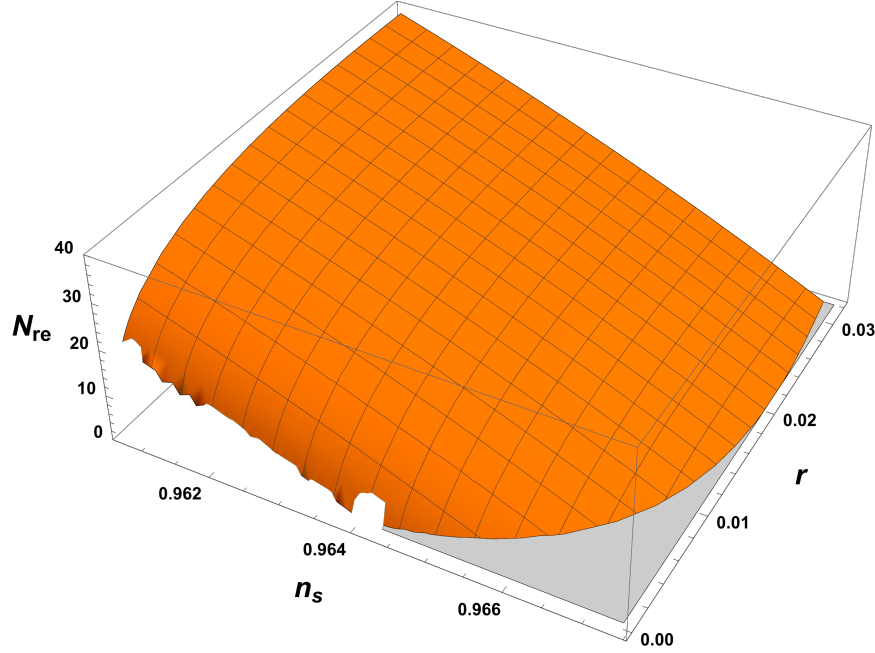


Figura 4.3: Gráfica del número de e -folds durante la etapa de recalentamiento como función de las observables r y n_s para el modelo $p = 1$ y ecuación de estado $w_{re} = 0$. El rango inicial para el índice espectral es $0.9607 < n_s < 0.9691$ y para la relación tensor-escalar $r < 0.032$. Al imponer la restricción $N_{re} \geq 0$ obtenemos nuestros nuevos límites $0.9674 > n_s > 0.9607$ y $4.27 \times 10^{-4} < r < 0.032$. De aquí obtenemos límites para las cantidades cosmológicas que se muestran en la tabla 4.1

4.2.2. El modelo para $p = 2$

El potencial para el modelo $p = 2$ es

$$V = V_0 \left(1 - \operatorname{sech}^2 \left(\lambda \frac{\phi}{M_{pl}} \right) \right). \quad (4.33)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en la sección anterior tenemos

$$V_0 = \frac{6\pi^2 A_s M_{pl}^4 \delta_{n_s} r}{4\delta_{n_s} - r}. \quad (4.34)$$

El parámetro λ es

$$\lambda = \sqrt{\frac{\delta_{n_s}(4\delta_{n_s} - r)}{8r}}. \quad (4.35)$$

Entonces,

$$\phi_k = \sqrt{\frac{8r}{\delta_{n_s}(4\delta_{n_s} - r)}} M_{pl} \operatorname{arcsech} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{\delta_{n_s}}} \right). \quad (4.36)$$

El final de inflación está dado por la condición $\epsilon = 1$ en ϕ_e

$$\phi_e = \sqrt{\frac{8r}{\delta_{n_s}(4\delta_{n_s} - r)}} M_{pl} \operatorname{arcsech} \left(\frac{\sqrt{2} \sqrt[4]{r} \sqrt{\sqrt{\delta_{n_s}(4\delta_{n_s} - r) + r} - \sqrt{r}}}{\sqrt{\delta_{n_s}(4\delta_{n_s} - r)}} \right). \quad (4.37)$$

El número de e -folds durante inflación es

$$N_k = \frac{8\delta_{n_s} - r - \sqrt{r^2 + r\delta_{n_s}(4\delta_{n_s} - r)}}{\delta_{n_s}(4\delta_{n_s} - r)}.$$

Y el índice running es simplemente

$$n_{sk} = -\frac{\delta_{n_s}^2}{2}.$$

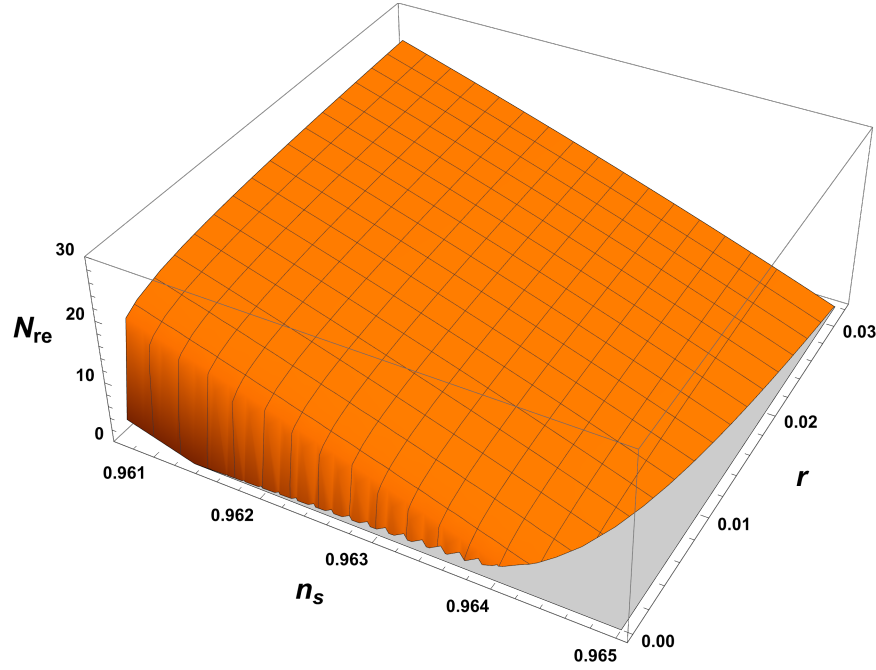


Figura 4.4: Gráfica del número de e -folds durante la etapa de recalentamiento como función de las observables r y n_s para el modelo $p = 2$ y ecuación de estado $w_{re} = 0$. Los resultados de los límites para las cantidades cosmológicas están dados en la tabla 4.1

	$p = 1$	$p = 2$
n_s	$0.9674 > n_s > 0.9607$	$0.9650 > n_s > 0.9607$
r	$4.27 \times 10^{-4} < r < 0.032$	$8.90 \times 10^{-11} < r < 0.032$
n_{sk}	$(-5.8 \times 10^{-4}, -8.4 \times 10^{-4})$	$(-6.1 \times 10^{-4}, -7.7 \times 10^{-4})$
λ	$2.68 > \lambda > 0.182$	$2946 > \lambda > 0.1212$
N_k	$57 > N_k > 46.7$	$56.7 > N_k > 50.4$
N_{re}	$0 < N_{re} < 38.8$	$0 < N_{re} < 25$
N_{rd}	$57.6 > N_{rd} > 28.6$	$57.6 > N_{rd} > 38.9$
T_{re}	$(2.8 \times 10^{15}, 7.1 \times 10^2)$	$(2.7 \times 10^{15}, 2.1 \times 10^7)$

Cuadro 4.1: Resultados de los límites para los casos $p = 1$ y $p = 2$. Las cantidades cosmológicas que consideramos son el índice running n_{sk} , el número de e -folds durante la etapa de inflación N_k , el número de e -folds durante la etapa de recalentamiento N_{re} , el número de e -folds durante la etapa dominada por radiación N_{rd} y la temperatura de recalentamiento T_{re} .

4.2.3. El modelo para $p = 3$

El potencial para el modelo $p = 3$ es

$$V = V_0 \left(1 - \operatorname{sech}^3 \left(\lambda \frac{\phi}{M_{pl}} \right) \right). \quad (4.38)$$

Con el mismo procedimiento obtenemos V_0 , no se mostrará la solución porque es extensa. El parámetro λ es entonces

$$\lambda = \frac{R_5}{6\sqrt{2}(1-R_5)} \sqrt{\frac{r}{1-(1-R_5)^{2/3}}}, \quad (4.39)$$

con $R_5 = 3A_s M_{pl}^4 \pi^2 r / V_0$. Por lo tanto

$$\phi_k = \frac{M_{pl}}{\lambda} \operatorname{arcsech} \left((1-R_5)^{1/3} \right), \quad (4.40)$$

y el final de inflación ocurre cuando $\epsilon = 1$. El número de e -folds durante inflación es

$$N_k = \frac{1}{36\lambda^2} \left(12 \ln \left[\cosh \left(\lambda \frac{\phi_k}{M_{pl}} + 1 \right) \right] - 12 \ln \left[\cosh \left(\lambda \frac{\phi_e}{M_{pl}} + 1 \right) \right] \right) \\ - 15 \cosh \left(\lambda \frac{\phi_k}{M_{pl}} \right) + 15 \cosh \left(\lambda \frac{\phi_e}{M_{pl}} \right) - \cosh \left(\lambda \frac{\phi_k}{M_{pl}} \right) + \cosh \left(\lambda \frac{\phi_e}{M_{pl}} \right). \quad (4.41)$$

Y el índice n_{sk} es

$$n_{sk} = -\frac{r^2 (9 - 20(1-R_5)^{2/3}) R_5^2}{288 (1 - (1-R_5)^{2/3}) (1-R_5)^2} + \frac{3r^2}{32} - \frac{\delta_{n_s} r}{2}. \quad (4.42)$$

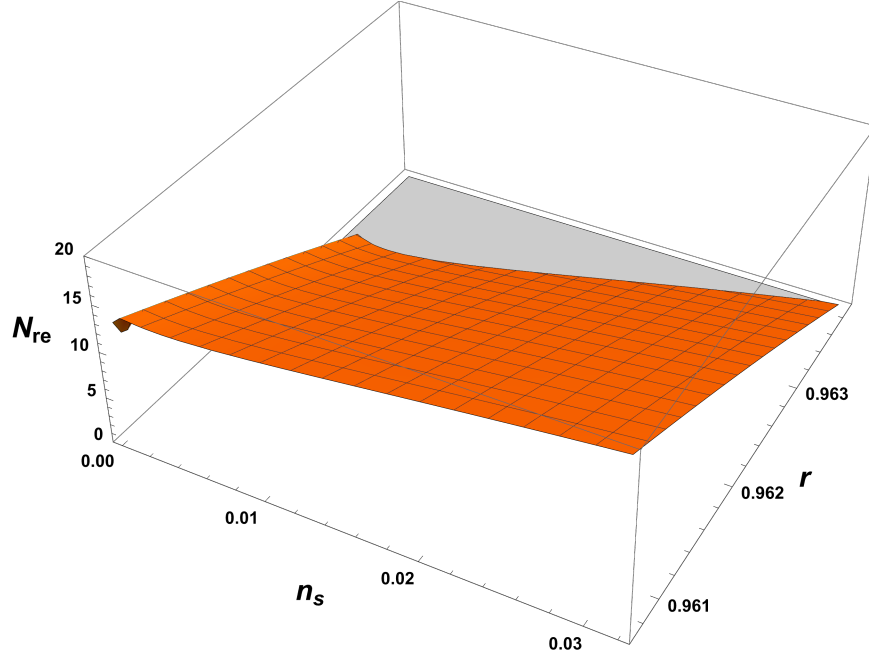


Figura 4.5: Gráfica del número de e -folds del modelo $p = 3$ como función de las observables y ecuación de estado $w_{re} = 0$. Los resultados de los límites para las cantidades cosmológicas están dados en la tabla 4.2

4.2.4. El modelo para $p = 4$

De igual forma, podemos obtener

$$V_0 = \frac{3A_s\pi^2 r R_2}{32(8\delta_{n_s} - 3r)(4\delta_{n_s} - r)} M_{pl}^4, \quad (4.43)$$

de donde sigue

$$\lambda = \frac{\sqrt{2r}(8\delta_{n_s} - 3r)(4\delta_{n_s} - r)}{R_3 \sqrt{1 - \sqrt{\frac{R_3}{R_2}}}}, \quad (4.44)$$

en donde $R_2 \equiv 512\delta_{n_s}^2 - 192r\delta_{n_s} + 9r^2 - r\sqrt{r(256\delta_{n_s} - 15r)}$ y $R_3 \equiv 128r\delta_{n_s} - 39r^2 - r\sqrt{r(2256\delta_{n_s} - 15r)}$. Al cruzar el horizonte el inflatón es

$$\phi_k = \frac{M_{pl}}{\lambda} \operatorname{arcsech} \left(1 - \frac{3M_{pl}^4}{2V_0} A_s \pi^2 r \right)^{1/4}, \quad (4.45)$$

mientras que el final de inflación ocurre cuando $\epsilon = 1$

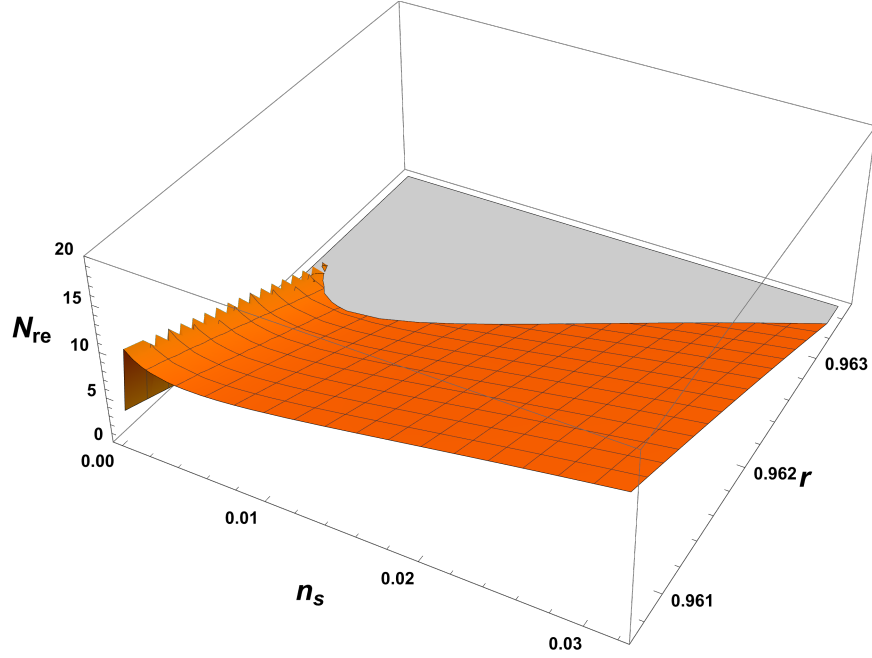


Figura 4.6: Gráfica del número de e -folds durante la etapa de recalentamiento como función de las observables r y n_s para el modelo $p = 4$ y ecuación de estado $w_{re} = 0$. Los resultados de los límites para las cantidades cosmológicas están dados en la tabla 4.2

$$\phi_e = \frac{M_{pl}}{\lambda} \operatorname{arcsech} \left(\frac{1}{4\sqrt{6}\lambda} \left(-3 + \sqrt{9 - 192\lambda^2 + 3R_4} + \sqrt{18 - 384\lambda^2 - 3R_4 - \frac{18\sqrt{3}(1 - 32\lambda^2 - 512\lambda^4)}{\sqrt{3 - 64\lambda^2 + R_4}}} \right)^{1/2} \right), \quad (4.46)$$

en donde $R_4 = \frac{32\lambda^2(2-48\lambda^2+2^{1/3}(-2+3\lambda(33\lambda+\sqrt{-12+321\lambda^2+6144\lambda^4}))^{2/3})}{(-1+\frac{3}{2}\lambda(33\lambda+\sqrt{-12+321\lambda^2+6144\lambda^4}))^{1/3}}$. El número de e -folds durante inflación es entonces

$$N_k = \frac{1}{128\lambda^2} \left(12 \cosh \left(2\lambda \frac{\phi_k}{M_{pl}} \right) - 12 \cosh \left(2\lambda \frac{\phi_e}{M_{pl}} \right) + \cosh \left(4\lambda \frac{\phi_k}{M_{pl}} \right) - \cosh \left(4\lambda \frac{\phi_e}{M_{pl}} \right) \right). \quad (4.47)$$

Finalmente el índice running es

$$n_{sk} = \frac{3}{32}r^2 - \frac{1}{2}\delta_{n_s}r - \frac{r^2R_5(15R_5 - 7(1 + \sqrt{1 - R_5}))}{256(1 - R_5)^2}, \quad (4.48)$$

donde nuevamente $R_5 \equiv 3A_s\pi^2rM_{pl}/2V_0$.

	$p = 3$	$p = 4$
n_s	$0.9639 > n_s > 0.9607$	$0.9635 > n_s > 0.9607$
r	$5.71 \times 10^{-5} < r < 0.032$	$8.94 \times 10^{-11} < r < 0.032$
n_{sk}	$(-6.2 \times 10^{-4}, -7.4 \times 10^{-4})$	$(-6.5 \times 10^{-4}, -7.6 \times 10^{-4})$
λ	$2.46 > \lambda > 0.0971$	$1470 > \lambda > 0.0826$
N_k	$56.6 > N_k > 52$	$57 > N_k > 52.9$
N_{re}	$0 < N_{re} < 18.5$	$0 < N_{re} < 15$
N_{rd}	$57.6 > N_{rd} > 43.7$	$58.5 > N_{rd} > 46.4$
T_{re}	$(6.3 \times 10^{15}, 2.2 \times 10^{10})$	$(2.7 \times 10^{15}, 3.9 \times 10^{10})$

Cuadro 4.2: Resultados de los límites para los casos $p = 3$ y $p = 4$. Las cantidades cosmológicas que consideramos son el índice running n_{sk} , el número de e -folds durante la etapa de inflación N_k , el número de e -folds durante la etapa de recalentamiento N_{re} , el número de e -folds durante la etapa dominada por radiación N_{rd} y la temperatura de recalentamiento T_{re} .

Capítulo 5

Cotas universales para el número de e -folds durante la evolución del universo

El modelo Λ CDM es considerado el modelo estándar de la cosmología tanto por su simplicidad como por sus diversas predicciones. Una característica importante en este modelo es la descripción de las diferentes épocas por las que pasa el universo a lo largo de su historia. La primera es la época inflacionaria en donde el universo se expande de una manera exponencialmente acelerada. Esta época típicamente se modela utilizando un campo escalar, al que generalmente se le llama inflatón, que es responsable de esta aceleración. Después de esta época, el universo queda en un estado frío y casi vacío. Por esta razón, es necesario un mecanismo que llene al universo de partículas y aumente su temperatura, es decir, que el universo tenga una etapa de recalentamiento después de la etapa de inflación. Se han estudiado distintos modelos de recalentamiento en la literatura pero, como esta etapa pasa fuera de nuestra esfera de Hubble, nos enfocamos en extraer información usando métodos indirectos. Después de la época de recalentamiento toma lugar la época dominada por radiación, la época dominada por materia y finalmente la época dominada por energía oscura en la que supuestamente vivimos actualmente. La ecuación fundamental para el modelo Λ CDM es la ecuación de Friedmann

$$3H^2 = 8\pi G \sum_{i=1}^n \rho_i, \quad (5.1)$$

en donde el parámetro de Hubble está definido como $H = \frac{\dot{a}}{a}$, $a(t)$ es el factor de escala del universo y ρ es la densidad de energía de cada sustancia (o fluido) presente en el universo. En principio, tenemos que considerar todos los fluidos presentes en el universo para poder utilizar la ecuación de Friedmann y tener una ecuación precisa para el parámetro de Hubble. Sin embargo, casi cualquier libro o artículo de revisión en cosmología contiene soluciones para modelos simples con geometría plana (como se hizo en el capítulo 2) en donde se considera que solo un fluido domina al universo a la vez. Aunque sencilla, esta descripción del universo es bastante buena con pequeñas desviaciones en las transiciones de una época a otra. Como se vió en el capítulo 2

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+\omega)}, \quad (5.2)$$

de donde podemos obtener

$$k^2 = \frac{\rho_0}{3} a^{(-1-3\omega)}, \quad (5.3)$$

en donde k es el vector de onda definido como $k = aH$ y ω es el parámetro de la ecuación de estado $p = w\rho$.

El punto clave en este trabajo es que, con la aproximación de que el universo sólo está dominado por un solo fluido a la vez y la suposición de que inflación se lleva a cabo con un solo campo, podemos desarrollar un formalismo con el cual es posible establecer cotas universales en el número de e -folds durante las etapas de inflación, recalentamiento y radiación con correcciones de a lo sumo un e -fold.

5.1. Cotas dependientes del modelo (MDB)

El enfoque habitual para imponer restricciones a los modelos inflacionarios provenientes de recalentamiento comienza con el trabajo realizado hace muchos años [27], [23], [28], y culmina en una expresión para el número de e -folds durante recalentamiento [1], [24], [29] como sigue (ver también, por ejemplo, sección 3 de [30])

$$N_{re} = \frac{4}{1 - 3\omega_{re}} \left(-N_k - \frac{1}{3} \ln \left[\frac{11g_{s,re}}{43} \right] - \frac{1}{4} \ln \left[\frac{30}{\pi^2 g_{re}} \right] - \ln \left[\frac{\rho_e^{1/4} k}{H_k a_0 T_0} \right] \right), \quad (5.4)$$

donde ω_{re} es la ecuación de estado al final de recalentamiento y ρ_e es la densidad de energía al final de inflación. Esta cantidad depende del modelo y se puede escribir como $\rho_e = \frac{3}{2} V_e = \frac{9}{2} \frac{V_e}{V_k} H_k^2 M_{pl}^2 = \frac{9\pi^2 A_s}{4} \frac{V_e}{V_k} r M_{pl}^4$, donde V_e es el potencial del modelo al final de la inflación. El número de grados de libertad relativistas de las especies al final de recalentamiento se denota por g_{re} y por $g_{s,re}$ el número de grados de libertad de entropía después de recalentamiento. El número de e -folds durante la etapa de radiación viene dado por

$$N_{rd} = -\frac{3(1 + \omega_{re})}{4} N_{re} + \frac{1}{4} \ln \left[\frac{30}{g_{re} \pi^2} \right] + \frac{1}{3} \ln \left[\frac{11g_{s,re}}{43} \right] + \ln \left[\frac{a_{eq} \rho_e^{1/4}}{a_0 T_0} \right]. \quad (5.5)$$

Estas expresiones se obtienen combinando dos ecuaciones básicas, una que restringe la cantidad total de expansión

$$\ln \frac{k}{a_0 H_0} = \ln \frac{a_k}{a_e} \frac{a_e}{a_r} \frac{a_r}{a_{eq}} \frac{a_{eq} H_k}{a_0 H_0} = -N_k - N_{re} - N_{rd} + \ln \frac{a_{eq} H_k}{a_0 H_0}, \quad (5.6)$$

donde el número de e -folds durante la inflación $N_k \equiv \ln \left(\frac{a_e}{a_k} \right)$, recalentamiento $N_{re} \equiv \ln \left(\frac{a_r}{a_e} \right)$, y radiación $N_{rd} \equiv \ln \left(\frac{a_{eq}}{a_r} \right)$ se definen como es habitual. Una segunda ecuación, junto con consideraciones sobre la conservación de la entropía después de recalentamiento, sigue la evolución posinflacionaria de la densidad de energía y la temperatura y viene dada por

$$N_{re} = \frac{1}{3(1 + \omega_{re})} \ln \frac{\rho_e}{\rho_{re}} \quad (5.7)$$

Por lo tanto, una de estas tres cantidades, N_k , permanece sin restricciones y se da solo especificando un modelo de inflación. De (5.7) también sigue una ecuación para la temperatura de recalentamiento

$$T_{re} = \left(\frac{30 \rho_e}{\pi^2 g_{re}} \right)^{1/4} e^{-\frac{3}{4}(1+\omega_{re})N_{re}}, \quad (5.8)$$

donde $\rho_{re} = (\pi^2 g_{re}/30) T_{re}$. Siguiendo a [24], el estudio de la Eq. (5.4) para N_{re} generalmente se ha hecho sin especificar los límites superiores y las gráficas en el plano $n_s - N_{re}$ se extienden a un número elevado arbitrario de e -folds. Veremos en la siguiente sección cómo se pueden encontrar límites independientes del modelo para N_k , N_{re} y N_{rd} , en particular, que cualquier modelo de inflación de un solo campo debe satisfacer.

5.2. Cotas independientes del modelo (MIB)

Como ya se mencionó, vamos a utilizar la aproximación de que el universo sólo está dominado por un solo fluido a la vez para obtener cotas universales. De la ecuación (5.1) podemos obtener

$$\log k = -\frac{1}{2}(1 + 3\omega) \log a + b. \quad (5.9)$$

La ecuación (5.9) tiene una consecuencia inmediata, cada época en la historia del universo (inflación, recalentamiento y radiación) se puede ver como una línea recta, por lo tanto, si encontramos las intersecciones b de estas líneas rectas podemos describir completamente a cada época. De (5.9) sabemos que la pendiente es

$$m = -\frac{1}{2}(1 + 3\omega), \quad (5.10)$$

para cada línea de cada fluido, y por lo tanto

$$\text{Radiación } m = -1, \quad \text{Materia } m = -\frac{1}{2}, \quad \text{Aceleración } m = 1.$$

La ecuación de Friedmann puede escribirse también como

$$H = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{i0}}{a^n}}, \quad (5.11)$$

donde Ω_{i0} es el parámetro de densidad de cada fluido medido actualmente y el exponente n depende de cada fluido que se considere.

Podemos visualizar la idea general con la Fig. 5.1. Como ya se mostró, se puede describir a cada época con una línea recta si sabemos su ecuación de estado. Luego, si sabemos su ecuación de estado, entonces sería posible encontrar un punto por el que esta línea pase y, con su proyección en el eje $\ln a$, podríamos encontrar un número de e folds para cada época. Sin embargo, como no sabemos la ecuación de estado de la etapa de recalentamiento, tenemos que determinar primero las líneas de inflación y radiación, y después igualar la línea de recalentamiento con el final y el principio de las líneas de inflación y radiación.

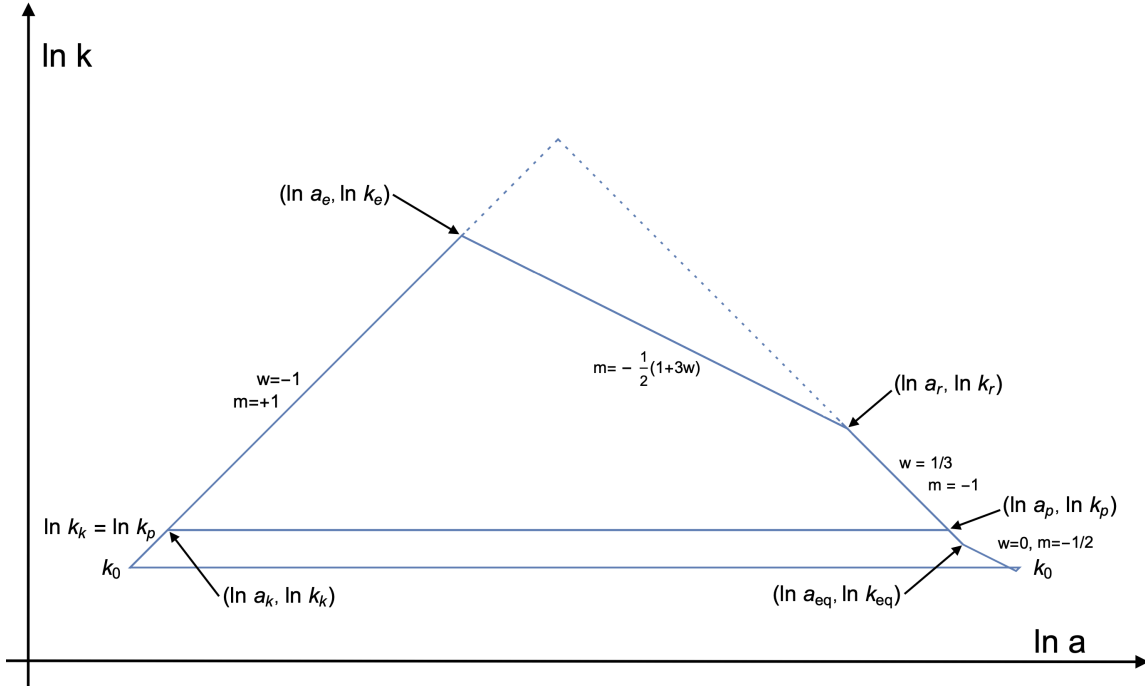


Figura 5.1: Diagrama esquemático en el plano en donde se muestra la evolución del universo, cada línea recta representa una época en donde domina un solo fluido. La primera línea a la izquierda representa a la época inflacionaria con $m = 1$. Dentro de esta época se encuentra la escala pivote k_k , que corresponde al momento en que los modos salieron del horizonte. Esta época termina en el primer punto de intersección (a_e, k_e) . La línea de en medio corresponde a la época de recalentamiento. En este diagrama esta línea es solo una representación de la etapa de recalentamiento ya que no sabemos la ecuación de estado. Después de recalentamiento, la segunda transición ocurre en el punto (a_r, k_r) en donde comienza la época de radiación con pendiente $m = -1$. La línea horizontal que empieza en k_k y termina en k_p es el número total de e -folds N_{kp} desde que los modos salieron del horizonte hasta el momento en que volvieron a entrar. El momento en el que se da la igualdad entre radiación y materia se representa en el punto (a_{eq}, k_{eq}) . Nótese que $k_k \neq k_{eq}$. Finalmente, la línea punteada representa el caso límite en donde la etapa de recalentamiento es instantánea.

Primero obtendremos la línea para radiación. De la ecuación (5.11) obtenemos para el caso de un universo dominado por radiación en términos del vector de onda k

$$k = H_0 \frac{\sqrt{\Omega_{r0}}}{a}. \quad (5.12)$$

Como necesitamos tener un punto específico por donde debe pasar la línea recta de radiación, necesitamos evaluar la ecuación anterior en un punto específico. El punto que elegimos es la escala pivote k_k que es la escala en la que los modos en el universo temprano salieron del horizonte durante inflación y luego volvieron a entrar en el horizonte más tarde durante la etapa dominada por radiación. Por lo tanto, la escala pivote corresponde a la escala durante la época dominada por radiación k_p . Por lo tanto, durante esta etapa, el vector de onda k_k es igual a la escala pivote k_p y, por eso, el factor de escala puede ser evaluado en tal punto

$$a_p = H_0 \frac{\sqrt{\Omega_{r0}}}{k_k}. \quad (5.13)$$

Entonces, la línea recta de radiación que pasa por el punto $(\ln a_p, \ln k_p)$ está dada por

$$\ln k = -\ln a + H_0 \sqrt{\Omega_{r0}}. \quad (5.14)$$

La siguiente línea recta que necesitamos encontrar es la de inflación. Al notar que la escala pivote definida anteriormente también tiene un factor de escala a_k evaluado en esa escala, podemos calcular el número de e -folds de la escala de pivote durante inflación a la escala cuando esos modos volvieron a entrar en el horizonte durante la etapa de radiación de la siguiente manera

$$N_{kp} = \ln \left(\frac{a_p}{a_k} \right) \rightarrow a_k = a_p e^{-N_{kp}}. \quad (5.15)$$

Nótese que $k_k = k_p$ aunque $a_k \neq a_p$. Manipulando la expresión anterior tenemos

$$N_{kp} = \ln \left(\frac{a_p H_k}{a_k H_k} \right) = \ln \left(\frac{a_p H_k}{k_k} \right) = \ln \left(\frac{a_p H_k}{k_p} \right). \quad (5.16)$$

En este punto, tanto k_p como a_p son cantidades conocidas, por lo tanto, solo necesitamos encontrar una expresión para H_k , el parámetro de Hubble en la escala pivote. A primera vista, el valor del parámetro de Hubble en un momento determinado durante inflación depende del modelo y, por lo tanto, no se pueden encontrar límites universales. Sin embargo, recordando que, en la aproximación de rodamiento lento, tenemos una expresión para la amplitud de las perturbaciones escalares A_s junto con la relación tensor-escalar r dada por

$$A_s = \frac{1}{24\pi^2} \frac{V}{\epsilon}, \quad y \quad r = 16\epsilon. \quad (5.17)$$

En esta aproximación tenemos $3H^2 \approx V$. y por lo tanto

$$H_k = \pi \sqrt{\frac{A_s r}{2}}. \quad (5.18)$$

Finalmente, el número de e -folds es

$$N_{kp} = \ln \left(\frac{a_p \pi \sqrt{\frac{A_s r}{2}}}{k_p} \right), \quad (5.19)$$

que nos permite obtener el factor de escala en la escala pivote

$$a_k = \frac{k_p}{\pi} \sqrt{\frac{2}{A_s r}}. \quad (5.20)$$

La línea recta para la época inflacionaria es entonces

$$\ln k = \ln a + \pi \sqrt{\frac{A_s r}{2}}. \quad (5.21)$$

Ahora solo nos falta la línea recta de recalentamiento. Como la etapa de recalentamiento no tiene una ecuación de estado definida, necesitamos tomar una pendiente m arbitraria para que la línea recta de recalentamiento se escriba como

$$\ln k = m \ln a + b_{re}. \quad (5.22)$$

Resolviendo para b_{re}

$$b_{re} = \ln(a_{re}^{-m} k_{re}). \quad (5.23)$$

Podemos encontrar el factor de escala en la etapa de recalentamiento a partir del número de e -folds entre el final de recalentamiento y el momento en que los modos vuelven a entrar en el horizonte

$$N_{rp} = \ln\left(\frac{a_p}{a_r}\right) \rightarrow a_r = a_p e^{-N_{rp}}. \quad (5.24)$$

Considerando que la entropía se conserva

$$\frac{T_{re}}{T_0} = \left(\frac{43}{11g_{s,re}}\right)^{1/3} \frac{a_0}{a_{re}}. \quad (5.25)$$

En consecuencia, el número de e -folds esta dado por

$$N_{rp} = \ln\left(\frac{a_p T_{re}}{\left(\frac{43}{11g_{s,re}}\right)^{1/3} a_0 T_0}\right). \quad (5.26)$$

El factor de escala durante la etapa de recalentamiento es entonces

$$a_{re} = \frac{\left(\frac{43}{11g_{s,re}}\right)^{1/3} a_0 T_0}{T_{re}}, \quad (5.27)$$

que junto a (5.12) evaluada en la escala pivote nos da

$$b_{re} = H_0 \sqrt{\Omega_{r0}} \left(\frac{T_{re}}{\left(\frac{43}{11g_{re,s}}\right)^{1/3} a_0 T_0}\right)^{m+1}. \quad (5.28)$$

Observe que $g_{s,re}$ se deja sin determinar ya que no estamos seguros de a qué temperatura tiene lugar la época de recalentamiento ni qué partículas están presentes en esa época. A posteriori encontramos que la temperatura mínima para la época de recalentamiento es órdenes de

magnitud más alta que la masa del quark top, por lo tanto podemos tomar con seguridad $g_{s,re} = 106.75$, los grados de libertad del modelo estándar completo.

Ahora procedemos a hacer coincidir el final de la recta inflacionaria con el comienzo de la recta de recalentamiento

$$\ln a_e + \pi \sqrt{\frac{A_s r}{2}} = m \ln a_e + H_0 \sqrt{\Omega_{r0}} \left(\frac{T_{re}}{\left(\frac{43}{11g_{s,re}}\right)^{1/3} a_0 T_0} \right)^{m+1}. \quad (5.29)$$

Donde a_e es el factor de escala al final de inflación. Resolviendo para a_e tenemos

$$a_e = \left(\frac{H_0}{\pi} \sqrt{\frac{2\Omega_{r0}}{A_s r}} \left(\frac{T_r}{\left(\frac{43}{11g_{r,s}}\right)^{1/3} a_0 T_0} \right)^{m+1} \right)^{1/1-m}. \quad (5.30)$$

Con esto, ahora podemos calcular el número de e -folds entre el final de inflación y el final de recalentamiento como

$$N_{re} = \ln \left[\left(\frac{\pi a_0^2 T_0^2}{H_0 T_{re}^2 \left(\frac{11g_{s,re}}{43}\right)^{2/3}} \sqrt{\frac{A_s r}{2\Omega_{r0}}} \right)^{\frac{2}{3(1+\omega)}} \right]. \quad (5.31)$$

De manera similar a (5.26), tenemos una expresión para el número de e -folds durante radiación

$$N_{rd} = \ln \left(\frac{a_{eq} T_{re}}{\left(\frac{43}{11g_{s,re}}\right)^{1/3} a_0 T_0} \right) = N_{rp} + \ln \left(\frac{a_{eq}}{a_k} \right). \quad (5.32)$$

Cabe destacar que la escala k_p no coincide con el tiempo de igualdad entre radiación y materia. Por lo tanto, el número de e -folds durante inflación es

$$N_k = N_{kp} - N_{re} - N_{rp}. \quad (5.33)$$

$$N_k = \ln \left[\frac{\pi a_0 T_0}{\left(\frac{11g_{s,re}}{43}\right)^{1/3} k_p T_{re}} \sqrt{\frac{A_s r}{2}} \left(\frac{\left(\frac{11g_{s,re}}{43}\right)^{\frac{2}{3}} H_0 T_{re}^2 \sqrt{2\Omega_{r0}}}{\pi a_0^2 T_0^2 \sqrt{A_s r}} \right)^{\frac{2}{3(1+\omega)}} \right].$$

Ahora, los únicos dos parámetros que se desconocen son la relación tensor-escalar r y la temperatura de recalentamiento T_{re} , sin embargo, podemos establecer un límite superior para r y un límite superior e inferior para T_{re} . El límite superior de la relación tensor-escalar se ha medido como $r < 0.032$ [31] y, por lo tanto, el valor máximo de r viene dado por $r = 0.032$. Después, aunque es cierto que no tenemos una medida de la temperatura de recalentamiento, sabemos que la Nucleosíntesis del Big Bang [32] ocurrió durante la época dominada por radiación a una temperatura de alrededor de $T = 10 \text{ MeV}$ por lo que esta es la temperatura mínima a la que podría ocurrir la etapa de recalentamiento (el límite inferior). Por otro lado, la temperatura máxima de recalentamiento es aquella en la que la etapa de recalentamiento

es instantánea, es decir, no ocurre ningún recalentamiento (línea punteada en la Fig. 5.1). Por lo tanto estableciendo $N_{re} = 0$ podemos obtener una expresión para $T_{re} = T_{max}$

$$T_{max} = \left(\frac{\left(\frac{43}{11g_{s,re}} \right)^{1/3} A_s^{1/4} a_0 T_0}{2^{1/4} \Omega_{r0}^{1/4}} \sqrt{\frac{\pi}{H_0}} \right) r^{1/4}. \quad (5.34)$$

Estas cuatro ecuaciones están escritas en términos únicamente de observables o cantidades conocidas, son independientes del modelo. Por lo tanto, al imponer límites a las observables, imponemos cotas que no dependen del modelo en N_{re} , N_k , N_{rd} y T_{max} . Antes de mostrar algunas gráficas notemos que

$$N_{re} \propto \ln \left(\frac{\sqrt{r}}{T_{re}^2} \right),$$

y así, al tomar el valor máximo de r junto con el valor mínimo de T_{re} , conoceremos el máximo absoluto (límite superior) de N_{re} . El límite inferior siempre se encontrará tomando el máximo T_{re} con r arbitrario. Hay que tomar en cuenta que la temperatura máxima de recalentamiento $T_{re} = T_{max}$ implica inmediatamente que N_k es independiente de ω_{re} porque no hay recalentamiento y, por lo tanto, no hay ecuación de estado

$$N_k(max) = \ln \left[\frac{A_s^{1/4}}{2^{1/4} k_p} \sqrt{\pi H_0 \sqrt{\Omega_{r0}} r^{1/4}} \right]. \quad (5.35)$$

Nótese también que $N_k(T_{max}) = N_{kp}/2$ exactamente, como podría esperarse de la simetría de la Fig.5.1. Además, de la Eq. (5.34) vemos que, debido a que T_{max} no puede ser menor que T_{min} , debe haber un límite inferior absoluto para r que, sin embargo, es extremadamente pequeño $r_{min} 2.3 \times 10^{-74}$. Antes de pasar a mostrar algunas gráficas, tenemos varios valores numéricos que deben especificarse.

<i>Parámetro</i>	<i>Normalmente dado como</i>	<i>Adimensional, usado aquí</i>
H_0	$100 h \frac{km}{s} / Mpc$	$8.7581 \times 10^{-61} h$
T_0	$2.7255 K$	9.6423×10^{-32}
A_s	2.1×10^{-9}	2.1×10^{-9}
k_p	$0.05 / Mpc$	1.3128×10^{-58}
a_p	—	3.32×10^{-5} (MIB) or 3.65×10^{-5} (MDB)
$\Omega_{md,0}$	—	0.315
$\Omega_{rd,0}$	$2.47 \times 10^{-5} h^{-2}$	$2.47 \times 10^{-5} h^{-2}$
a_{eq}	2.94×10^{-4}	$1.33 \times 10^{-4} h^{-2}$
h	—	0.674
M_{Pl}	$2.44 \times 10^{18} GeV$	1

Cuadro 5.1: Para una fácil referencia, esta tabla recopila todos los valores numéricos de los parámetros utilizados. Las cantidades adimensionales se han obtenido escribiéndolas en términos de M_{pl} , por lo que tenemos una escala universal que luego se puede establecer a uno. Hay que notar que a_p tiene dos valores diferentes porque en el MDB partimos de la aproximación de un único fluido y, por lo tanto, a_p contiene radiación y materia, la energía oscura se desprecia.

5.3. Ejemplo: el modelo del tipo atractor α básico

En el interesante caso especial $w_{re} = 0$; que corresponde al comportamiento de un potencial cuadrático alrededor de su mínimo para este tipo de modelo, el enfoque MIB proporciona inmediatamente los límites amplios (independientes del modelo)

$$42.2 < N_k < 56.0, \quad 55.4 > N_{re} > 0, \quad 16.7 < N_{rd} < 58.2, \quad 10 MeV < T_{re} < 1.1 \times 10^{16} GeV, \quad (5.36)$$

con una expansión total $N_{keq} = 114.2$, desde el momento del cruce del horizonte hasta el momento de la igualdad radiación-materia. Los límites de la izquierda se obtienen considerando los grados de libertad de la entropía a la temperatura mínima donde solo quedan fotones, neutrinos, antineutrinos, electrones y positrones, esto corresponde a $g_{s,re} = 10.75$ con $r = 0.032$. Estos límites deben cumplirse con cualquier modelo de inflación de un solo campo en el que podamos aproximar la ecuación de estado durante recalentamiento por $w_{re} = 0$ y con la advertencia de que hay pequeños errores debido a la naturaleza de la aproximación MIB utilizada. Para tener una idea de la magnitud de estos errores, consideremos a continuación un ejemplo particular de interés actual. Los resultados se muestran en la Tabla 5.2 para los enfoques MIB y MDB.

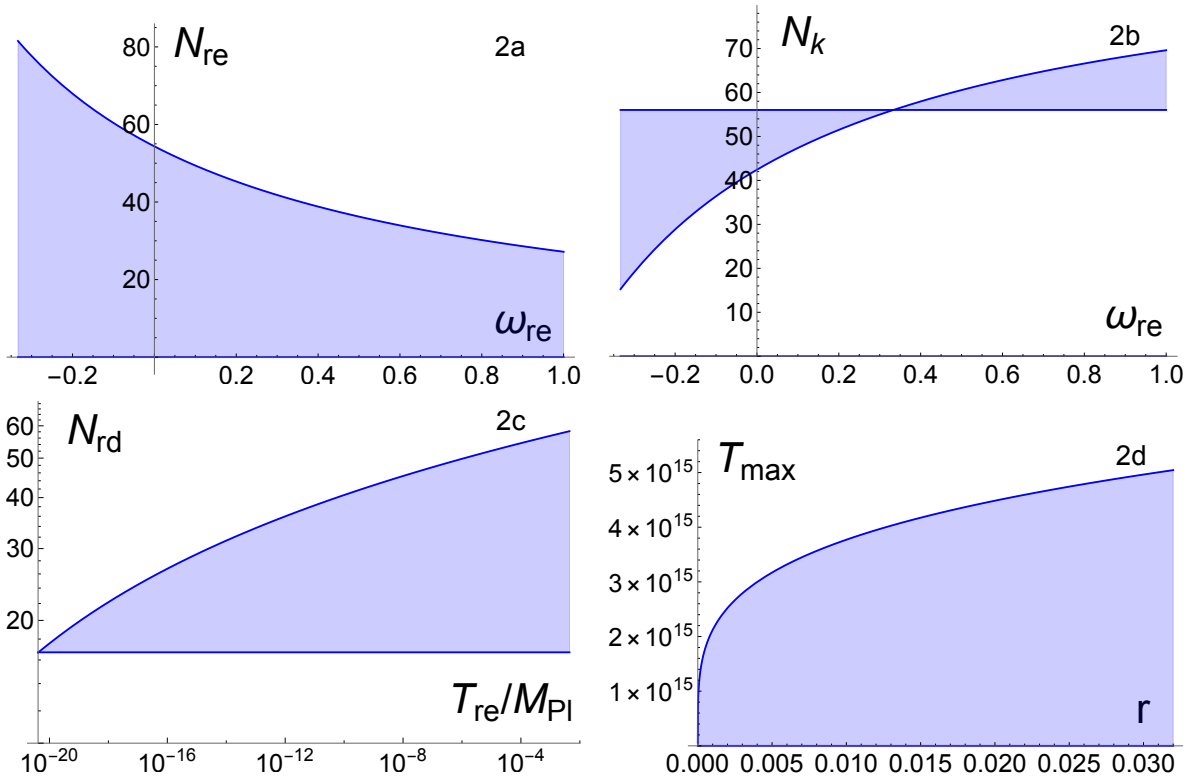


Figura 5.2: La Figura 2a muestra el número de e -folds durante recalentamiento Eq. (5.31) en función de la ecuación de estado ω_{re} , a partir de la temperatura máxima de recalentamiento T_{max} de Eq. 5.34, donde $N_{re} = 0$, al valor máximo de N_{re} que ocurre para la temperatura mínima de recalentamiento T_{min} , aquí elegida como $10 MeV$. No existe una fuerte dependencia de r para valores cercanos al límite superior $r = 0.032$. La Figura 2b es muy interesante, muestra el número de e -folds de inflación Eq. (5.33) en función de la ecuación de estado ω_{re} de T_{max} a T_{min} . Para comprender este diagrama, primero debemos observar la línea horizontal alrededor de $N_k = 56$, es muy interesante que este límite sea un límite superior para $\omega_{re} < 1/3$ y que se convierte en un límite inferior para $\omega_{re} > 1/3$. La razón por la que esto sucede es que el valor crítico $\omega_{re} = 1/3$ coincide con $N_{re} = 0$ ya que la pendiente correspondiente a esta ecuación de estado es exactamente la misma que en el caso de la radiación, por lo tanto para $\omega_{re} > 1/3$ la proyección en el eje $\ln a$ de la línea de recalentamiento se hace más pequeña y por lo tanto N_k crece, ocurre lo contrario cuando $\omega_{re} < 1/3$ (ver Fig.5.1 como referencia). La Figura 2c muestra la gráfica log – log del número de e -folds durante radiación Eq. (5.32) en función de la temperatura de recalentamiento adimensional T_{re} desde la temperatura mínima de recalentamiento hasta la temperatura máxima de recalentamiento y tomando $g_{s,re} = 10.75$ justo en esta gráfica. Tener en cuenta que el número mínimo de e -folds de radiación coincide con la temperatura mínima de recalentamiento como debería ser. Por último, la figura 2d muestra la temperatura máxima de recalentamiento Eq. (5.34) como una función de la relación tensor a escalar, este es el comportamiento esperado de $T_{max} \propto r^{1/4}$.

Característica	MIB	MDB	$ \delta $
n_s	$0.9607 < n_s < 0.9646$	$0.9607 < n_s < 0.9650$	$(0, 3.8 \times 10^{-4})$
r	$0 < r < 0.032$	$8.89 \times 10^{-11} < r < 0.032$	$(8.89 \times 10^{-11}, 0)$
α	$0 < \alpha < 11.0$	$1.9 \times 10^{-8} < \alpha < 11.3$	$(1.9 \times 10^{-8}, 0.3)$
N_{keq}	114.2	114.2	0
N_k	$50.4 < N_k < 56.0$	$50.4 < N_k < 56.6$	$(0, 0.6)$
N_{re}	$22.5 > N_{re} > 0$	$24.7 > N_{re} > 0$	$(2.2, 0)$
N_{rd}	$41.3 < N_{rd} < 58.2$	$39.1 < N_{rd} < 57.6$	$(2.2, 0.6)$
$T_{re}(GeV)$	$(2.4 \times 10^8, 5.0 \times 10^{15})$	$(2.5 \times 10^7, 2.7 \times 10^{15})$	$(9.6, 1.8)$

Cuadro 5.2: Comparación de los resultados de los enfoques MIB y MDB para el modelo atractor α de Eq. (5.37) para el caso especial de $\omega_{re} = 0$. En la primera columna escribimos las cantidades cosmológicas de interés, seguido de los límites obtenidos con el enfoque MIB y MDB en la segunda y tercera columna respectivamente. En la cuarta columna mostramos el valor absoluto de la diferencia entre los dos enfoques para los límites inferior y superior. Nótese que la diferencia en el número de e -folds durante inflación, recalentamiento y radiación se cancela, de modo que la diferencia total en la expansión total N_{keq} es cero.

Consideremos el potencial atractor α básico dado por

$$V = V_0 \tanh^2 \left(\frac{\phi}{\sqrt{6\alpha} M_{pl}} \right). \quad (5.37)$$

Como no conocemos el rango de valores que pueden tomar los parámetros V_0 y α , los eliminamos en términos de los observables n_s y r . Primero determinamos el valor de ϕ en el cruce del horizonte resolviendo ϕ_k de la ecuación para la amplitud de las perturbaciones escalares. Luego resolvemos $16\epsilon_k = r$ para el parámetro α y finalmente la expresión para el índice espectral escalar $n_s = 1 + 2\eta_k - 6\epsilon_k$ para la escala total V_0 . Los resultados son

$$\phi_k = \sqrt{\frac{8r}{\delta_{n_s}(4\delta_{n_s} - r)}} M_{pl} \operatorname{arcsech} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{\delta_{n_s}}} \right), \quad (5.38)$$

el parámetro α es

$$\alpha = \frac{4r}{3\delta_{n_s}(4\delta_{n_s} - r)}, \quad (5.39)$$

y

$$V_0 = \frac{6A_s \pi^2 r \delta_{n_s}}{4\delta_{n_s} - r} M_{pl}^4 \quad (5.40)$$

donde $\delta_{n_s} \equiv 1 - n_s$. El final de inflación ϕ_e esta dado por al condición $\epsilon = 1$, resolviendo para ϕ_e

$$\phi_e = \sqrt{\frac{8r}{\delta_{n_s}(4\delta_{n_s} - r)}} M_{pl} \operatorname{arcsech} \left(\frac{\sqrt{2} r^{1/4} \left(\sqrt{r + \delta_{n_s}(4\delta_{n_s} - r)} - \sqrt{r} \right)^{1/2}}{\sqrt{\delta_{n_s}(4\delta_{n_s} - r)}} \right). \quad (5.41)$$

El número de e -folds durante inflación esta dado por

$$N_k = \frac{8\delta_{n_s} - r - \sqrt{r^2 + r\delta_{n_s}(4\delta_{n_s} - r)}}{\delta_{n_s}(4\delta_{n_s} - r)}. \quad (5.42)$$

Para las observables, consideramos primero los límites $0.9607 < n_s < 0.9691$ y $r < 0.032$. Luego imponemos la restricción MIB $N_k < 56$ y como consecuencia encontramos que $n_s < 0.9646$. También encontramos un valor mínimo de $N_k = 50.4$ para el modelo (5.37). Con este valor de N_k , $\omega_{re} = 0$ y $r = 0.032$ encontramos que $T_{re} = 5.2 \times 10^8$ GeV que se convierte en el nuevo T_{min} y desde allí encontramos los otros límites en el lado izquierdo de N_k , N_{re} y N_{rd} dados en la segunda columna de la Tabla 5.2. Aunque dependen del modelo, estos límites se han obtenido con el enfoque MIB. Ahora usamos el procedimiento MDB para tener una idea de las discrepancias entre los dos enfoques. Primero, imponemos la condición general al número de e -folds durante recalentamiento $N_{re} \geq 0$; de esto se siguen nuevos límites para las observables $0.9607 < n_s < 0.9650$ y $8.89 \times 10^{-11} < r < 0.032$. Luego, a partir de estos nuevos valores de n_s y r , encontramos nuevos límites para N_k , N_{re} , N_{rd} y T_{re} dados en la tercera columna de la Tabla 5.2.

Cabe destacar que en la tercera columna de la Tabla 5.2 para el límite superior de N_k hay una pequeña diferencia con respecto al resultado de MIB de menos de un e -fold. Esperamos que este sea el caso para la mayoría de los modelos de inflación. El límite superior se obtiene cuando $N_{re} = 0$ y de las Ecs. (5.4) y (5.5) vemos que entonces

$$N_k = -\frac{1}{3} \ln \left[\frac{11g_{s,re}}{43} \right] - \frac{1}{4} \ln \left[\frac{30}{\pi^2 g_{re}} \right] - \ln \left[\frac{\rho_e^{1/4} k}{H_k a_0 T_0} \right], \quad (5.43)$$

y

$$N_{rp} = \frac{1}{4} \ln \left[\frac{30}{g_{re} \pi^2} \right] + \frac{1}{3} \left[\frac{11g_{s,re}}{43} \right] + \left[\frac{a_p \rho_e^{1/4}}{a_0 T_0} \right], \quad (5.44)$$

recordar que $N_{rp} = N_{rd} - \ln \frac{a_{eq}}{a_p}$ y $\rho_e = \frac{3}{2} V_e = \frac{9}{2} \frac{V_e}{V_k} H_k^2 M_{Pl}^2$. Entonces

$$N_k - N_{rp} = -\ln \left[\left(\frac{11g_{s,re}}{43} \right)^{2/3} \left(\frac{135}{g_{re} \pi^2} \right)^{1/2} \left(\frac{a_p k_p}{a_0^2 T_0^2} \right) \right] + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{V_k}{V_e} \right] \approx -0.5146 + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{V_k}{V_e} \right], \quad (5.45)$$

En el enfoque MIB, la diferencia $N_k - N_{rp}$ es exactamente cero y el límite $N_k = 56.0$ es un límite universal; sin embargo, en el MDB más realista, podemos ver que para $V_k/V_e < 153$ la mitad de la diferencia $\frac{N_k - N_{rp}}{2} < 1$. Tiene que ser la mitad de la diferencia porque la cantidad extra de e -folds para N_k tiene que ser compensada por la disminución correspondiente de N_{rp} de tal manera que N_{kp} permanece constante (ver Tabla 5.2). Para el modelo del ejemplo $V_k/V_e = 27.1$ y $\frac{N_k - N_{rp}}{2} = \frac{1.1347}{2} \approx 0.6$ como se muestra en la Tabla 5.2. Por lo tanto, esperamos que $N_k \approx 56$ para $-\frac{1}{3} < \omega_{re} < \frac{1}{3}$ sea muy robusto como límite superior y también como límite inferior cuando $\frac{1}{3} < \omega_{re}$ como se muestra en la Fig. 5.2, gráfica 2b.

Capítulo 6

Conclusiones

Aunque la época de recalentamiento es todavía un área de investigación activa, pudimos explorar una conexión entre esta etapa y la etapa de inflación que nos permitió encontrar nuevas cotas para las observables. A partir de estas cotas, también logramos encontrar nuevos límites para otras cantidades cosmológicas que nos interesan. La idea principal que nos permitió obtener todo esto se encontraba en escribir todos los parámetros presentes en el potencial y en las expresiones para las cantidades cosmológicas de las que hablamos en términos de las observables.

El punto clave en el procedimiento propuesto fue la imposición de una restricción general al número de e -folds durante recalentamiento; es decir, que $N_{re} \geq 0$. Al aplicar este procedimiento a los modelos del tipo atractores alfa que elegimos, se pudo encontrar una cota inferior para la relación tensor-escalar en los cuatro casos. Además, el número de e -folds que se encontró para la etapa de inflación sigue estando dentro de lo esperado.

Otro resultado importante al que se llegó fue que, al suponer que el universo está dominado por un solo fluido a la vez, pudimos restringir universalmente cualquier modelo de campo único para la inflación. Encontramos las regiones permitidas para N_{re} , N_k , N_{rd} y T_{max} que dependen de la ecuación de estado ω_{re} . Además, encontramos que el valor en N_{re} tiene una tendencia decreciente al aumentar ω_{re} porque un valor creciente para la ecuación de estado significa que la línea recta de recalentamiento está más pronunciada y, por lo tanto, tiene una proyección más pequeña en $\ln a$. De manera similar, el número de e -folds de radiación aumenta con la temperatura de recalentamiento porque un T_{re} más alto significa un N_{re} más pequeño. La conclusión más importante de esta parte del trabajo es que cualquier modelo de inflación de un solo campo debería satisfacer el límite superior $N_k = 56$ con bastante precisión siempre que $\omega_{re} < 1/3$ mientras que para $\omega_{re} > 1/3$, $N_k = 56$ se convierte en un límite inferior. Finalmente, encontramos que aunque los límites para el enfoque independiente del modelo (MIB) eran más amplios, cuando los aplicamos a un modelo específico (en este caso, el modelo atractor α), apenas difieren (como máximo 1 e -fold) a partir de los límites obtenidos con el enfoque habitual dependiente del modelo (MDB).

Apéndice A

Potencial específico

En la primera parte de este apéndice obtendremos una gráfica para el número de e -folds durante la etapa de recalentamiento y para la temperatura de recalentamiento para diferentes ecuaciones de estado y diferentes potenciales. En la segunda parte, hacemos el mismo procedimiento que se propuso en el capítulo 4 para este mismo potencial.

A.1. Parte 1

Consideremos un potencial del tipo

$$V(\phi) = \frac{1}{4}m^{4-\alpha}\phi^\alpha, \quad (\text{A.1})$$

como se muestra en [24].

Utilizando la aproximación de rodamiento lento $3H\dot{\phi} + V' \simeq 0$ podemos encontrar el número de e -folds desde que el campo tenía un valor ϕ_k hasta el final de inflación

$$N_k = \int_{\phi_k}^{\phi_e} \frac{Hd\phi}{\dot{\phi}} \simeq \frac{\phi_k^2 - \phi_e^2}{2\alpha M_{pl}^2} \simeq \frac{\phi_k^2}{2\alpha M_{pl}^2}, \quad (\text{A.2})$$

ya que podemos despreciar el valor del campo al final de inflación al ser muy pequeño en comparación con el valor durante el rodamiento lento. Los parámetros de rodamiento lento son entonces

$$\epsilon = \frac{M_{pl}^2}{2}\alpha^2\phi_k^{-2}, \quad \eta = M_{pl}^2\alpha(\alpha + 1)\phi_k^{-2}. \quad (\text{A.3})$$

Para este potencial podemos escribir a la densidad de energía como

$$\rho_e = (1 + \lambda)V_e = (1 + \lambda) \left(\frac{\phi_e}{\phi_k}\right)^\alpha, \quad V_k = 3M_{pl}^2(1 + \lambda)H_k^2 \left(\frac{\phi_e}{\phi_k}\right)^\alpha, \quad (\text{A.4})$$

en donde utilizamos la aproximación de rodamiento lento.

Entonces

$$\ln \frac{H_k}{\rho_e^{1/4}} = \ln \frac{H_k}{\left(3M_{pl}^2(1 + \lambda)H_k^2 \left(\frac{\phi_e}{\phi_k}\right)^\alpha\right)^{1/4}} = -\frac{1}{4} \ln(1 + \lambda) + \frac{1}{4} \ln \frac{H_k^2}{3M_{pl}^2 \left(\frac{\phi_e}{\phi_k}\right)^\alpha}. \quad (\text{A.5})$$

Sustituyendo $H_k = \pi M_{pl}(rA_s)^{1/2}/\sqrt{2}$, $\phi_e = \frac{M_{pl}^2 \alpha}{(2\epsilon_0)^{1/2}}$, $\epsilon = \frac{\alpha}{4N_k}$, $r = 16\epsilon$, tenemos

$$\ln \frac{H_k}{\rho_e^{1/4}} = \frac{1}{4} \ln \frac{\pi^2 r A_s}{6} - \frac{\alpha}{8} \ln \frac{r}{16\epsilon_0} - \frac{\ln(1+\lambda)}{4}.$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (4.7)

$$N_{re} = \frac{4}{1-3w_{re}} \left[-N_k - \ln \frac{k}{a_0 T_0} - \frac{1}{4} \ln \frac{30}{\pi^2 g_{re}} - \frac{1}{3} \ln \frac{11g_{s,re}}{43} + \frac{1}{4} \ln \frac{\pi^2 r A_s}{6} - \frac{\alpha}{8} \ln \frac{r}{16\epsilon_0} - \frac{\ln(1+\lambda)}{4} \right], \quad (\text{A.6})$$

obtenemos una expresión para el número de e -folds durante la etapa de recalentamiento para este potencial específico. Con esta expresión, podemos ahora saber también la temperatura durante recalentamiento utilizando la ecuación (4.9).

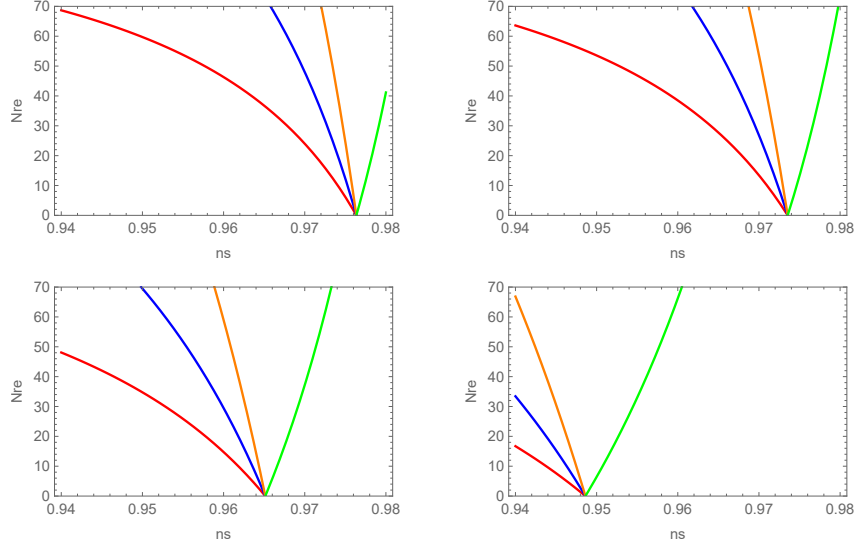


Figura A.1: Gráfica del número de e -folds según la ecuación (A.6). Cada gráfica muestra los resultados para un α diferente, el panel superior izquierdo es $\alpha = 2/3$, superior derecho $\alpha = 1$, inferior izquierdo $\alpha = 2$ e inferior derecho $\alpha = 4$. A su vez, cada gráfica muestra una ecuación de estado diferente: $w_{re} = -1/3$ (línea roja), $w_{re} = 0$ (línea azul), $w_{re} = 1/6$ (línea naranja) y $w_{re} = 2/3$ (línea verde).

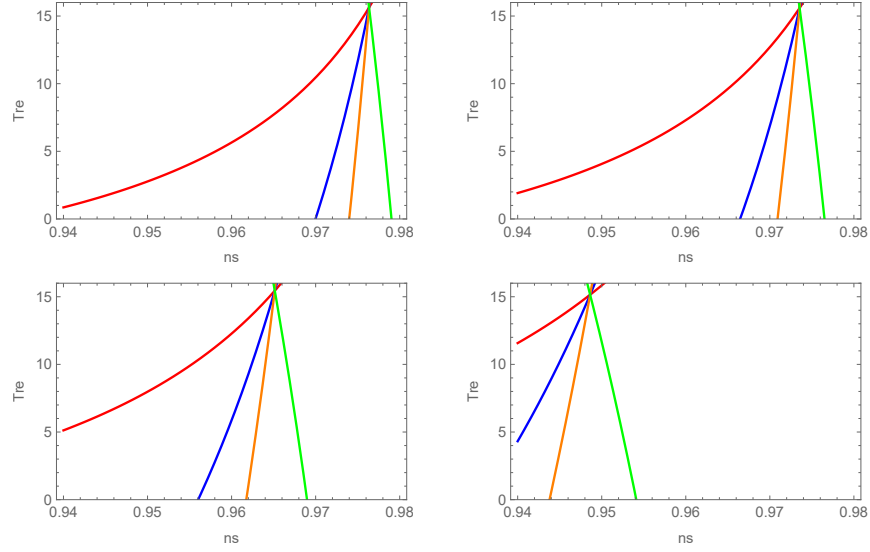


Figura A.2: Gráfica de la temperatura de recalentamiento según la ecuación (4.9). Cada gráfica muestra los resultados para una α diferente, el panel superior izquierdo es $\alpha = 2/3$, superior derecho $\alpha = 1$, inferior izquierdo $\alpha = 2$ e inferior derecho $\alpha = 4$. A su vez, cada gráfica muestra una ecuación de estado diferente: $w_{re} = -1/3$ (línea roja), $w_{re} = 0$ (línea azul), $w_{re} = 1/6$ (línea naranja) y $w_{re} = 2/3$ (línea verde).

A.2. Parte 2

Ahora, utilizaremos el mismo procedimiento que en el capítulo 4 para estudiar este potencial. Se puede escribir el potencial de la siguiente manera

$$V(\phi) = V_0 \left(\frac{\phi}{M_{pl}} \right)^\alpha,$$

en este caso los parámetros de rodamiento lento son

$$\epsilon = \frac{\alpha^2}{2\chi^2}, \quad \eta = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{\chi^2},$$

donde $\chi = \frac{\phi}{M_{pl}}$. Con esto, podemos escribir los parámetros α y V_0 en términos de las observables r y δ_{n_s}

$$\alpha = \frac{2r}{8\delta_{n_s} - r} \quad V_0 = 3A_s \pi^2 r M_{pl}^2 \times 2^{-1 - \frac{5r}{8\delta_{n_s} - r}} \left(\frac{\sqrt{r}}{8\delta_{n_s} - r} \right)^{-\frac{2r}{8\delta_{n_s} - r}}.$$

Con la expresión de α podemos obtener una expresión para N_{re} y T_{re} en términos de las observables.

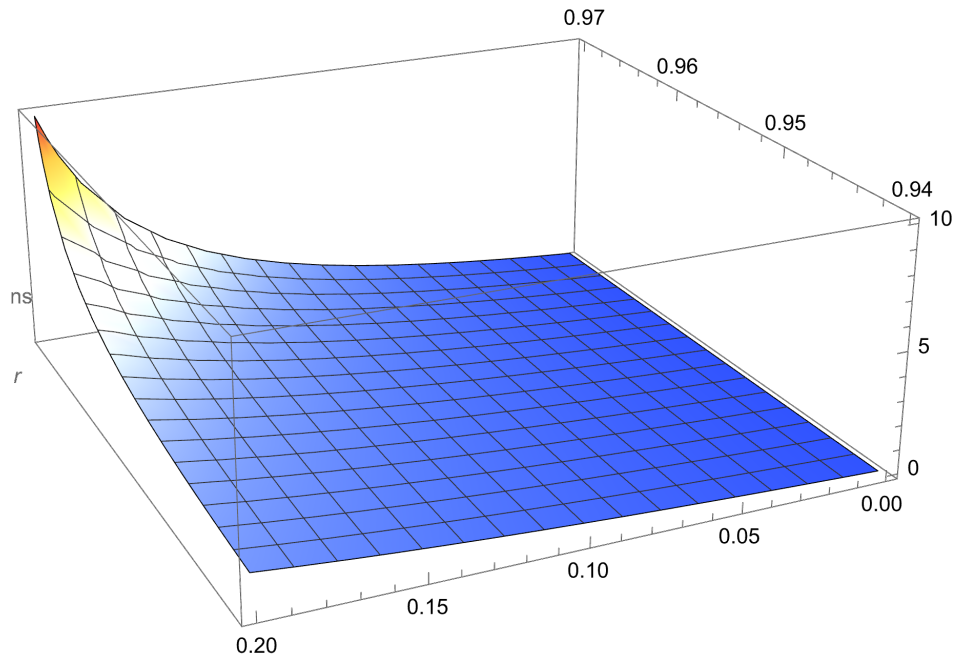


Figura A.3: Gráfica de α con los valores utilizados en [24] para las observables.

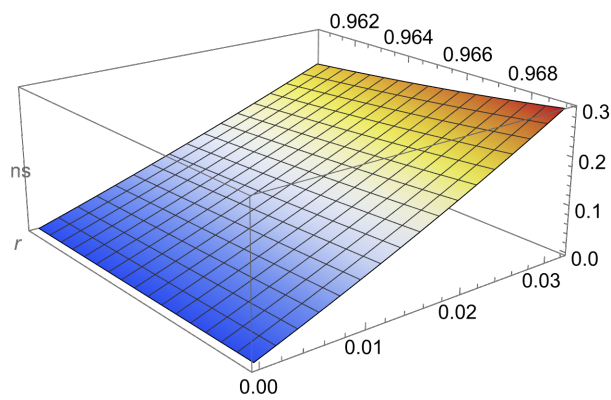


Figura A.4: Gráfica de α con los valores actuales de las observables. Se puede ver como los modelos estudiados en las gráficas A.1 y A.2 quedan fuera del límite para α .

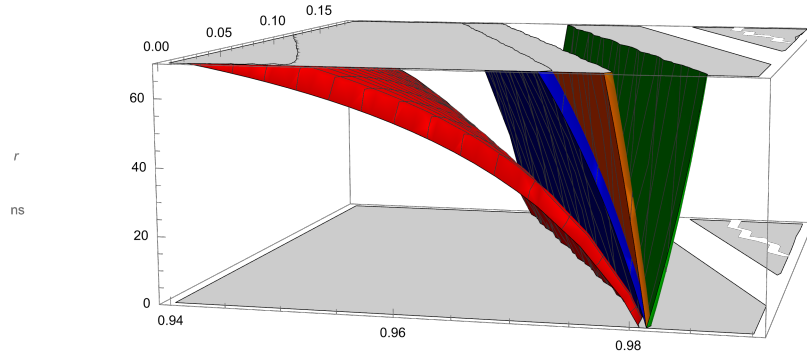


Figura A.5: Gráfica del número de e -folds durante la época de recalentamiento. Cada línea representa una ecuación de estado diferente: $w_{re} = -1/3$ (línea roja), $w_{re} = 0$ (línea azul), $w_{re} = 1/6$ (línea naranja) y $w_{re} = 2/3$ (línea verde).

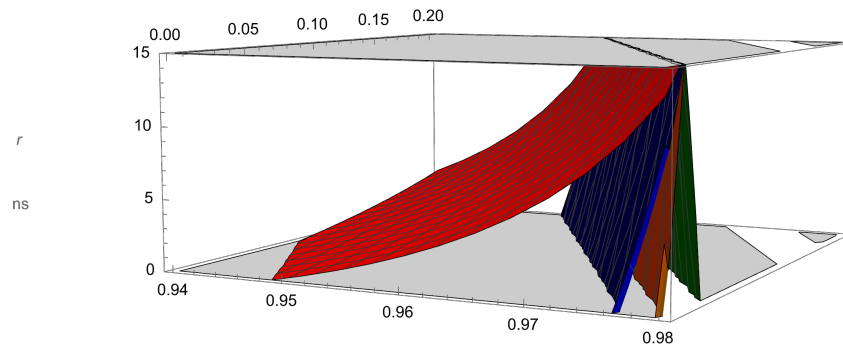


Figura A.6: Gráfica de la temperatura de recalentamiento. Cada línea representa una ecuación de estado diferente: $w_{re} = -1/3$ (línea roja), $w_{re} = 0$ (línea azul), $w_{re} = 1/6$ (línea naranja) y $w_{re} = 2/3$ (línea verde).

Bibliografía

- [1] Jerome Martin, Christophe Ringeval y Vincent Vennin. “Encyclopaedia Inflationaris”. En: (2013). DOI: 10.48550/ARXIV.1303.3787.
- [2] Adrew Liddle. *An introduction to modern cosmology*. Wiley, 2015.
- [3] *The Hubble constant, explained*. URL: <https://news.uchicago.edu/explainer/hubble-constant-explained>.
- [4] A. A. Penzias y R. W. Wilson. “A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s.” En: 142 (jul. de 1965), págs. 419-421. DOI: 10.1086/148307.
- [5] Wendy L. Freedman et al. “Final Results from the Hubble Space Telescope/ Key Project to Measure the Hubble Constant”. En: *The Astrophysical Journal* 553.1 (mayo de 2001), págs. 47-72. DOI: 10.1086/320638. URL: <https://doi.org/10.1086/320638>.
- [6] Barbara Ryden. *Introduction to cosmology*. Cambridge University Press, 2017.
- [7] *Planck CMB*. URL: https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2013/03/Planck_CMB.
- [8] Patrick Peter y Jean-Philippe Uzan. *Primordial cosmology*. Oxford University Press, 2013.
- [9] *Albert Einstein Biographical*. URL: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1921/einstein/biographical/>.
- [10] Bernard Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [11] Sean Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004.
- [12] Antonio Riotto. *Inflation and the Theory of Cosmological Perturbations*. 2002. DOI: 10.48550/ARXIV.HEP-PH/0210162.
- [13] Hannu kurki-Suonio. *Cosmology 1*. URL: <https://www.mv.helsinki.fi/home/hkurkisu/>.
- [14] R. L. Workman et al. “Review of Particle Physics”. En: *PTEP* 2022 (2022), pág. 083C01. DOI: 10.1093/ptep/ptac097.
- [15] Lars Husdal. “On Effective Degrees of Freedom in the Early Universe”. En: *Galaxies* 4.4 (dic. de 2016), pág. 78. DOI: 10.3390/galaxies4040078.
- [16] Alan H. Guth. “Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems”. En: *Phys. Rev. D* 23 (2 ene. de 1981), págs. 347-356. DOI: 10.1103/PhysRevD.23.347.

- [17] Edward Kolb y Michael Turner. *The Early Universe*. Addison-Wesley Publishing Company, 1990.
- [18] Andrew Liddle. *An introduction to cosmological inflation*. Ene. de 1999.
- [19] Ivan Debono y George Smoot. “General Relativity and Cosmology: Unsolved Questions and Future Directions”. En: *Universe* 2 (sep. de 2016). DOI: 10.3390/universe2040023.
- [20] Kai Schmitz y Gilles Vertongen. “Reheating and Preheating after Inflation : an Introduction”. En: 2010.
- [21] Daniel Baumann. *TASI Lectures on Primordial Cosmology*. 2018. arXiv: 1807.03098 [hep-th].
- [22] Gabriel German. *Constraining -attractor models from reheating*. 2020. DOI: 10.48550/ARXIV.2010.09795.
- [23] Andrew R. Liddle y Samuel M. Leach. “How long before the end of inflation were observable perturbations produced?” En: *Physical Review D* 68.10 (nov. de 2003). DOI: 10.1103/physrevd.68.103503.
- [24] Liang Dai, Marc Kamionkowski y Junpu Wang. “Reheating Constraints to Inflationary Models”. En: *Physical Review Letters* 113.4 (jul. de 2014). DOI: 10.1103/physrevlett.113.041302.
- [25] and P. A. R. Ade et al. “iPlanck/i2013 results. XXII. Constraints on inflation”. En: *Astronomy & Astrophysics* 571 (oct. de 2014), A22. DOI: 10.1051/0004-6361/201321569.
- [26] Michael S. Turner. “Coherent scalar-field oscillations in an expanding universe”. En: *Phys. Rev. D* 28 (6 sep. de 1983), págs. 1243-1247. DOI: 10.1103/PhysRevD.28.1243.
- [27] Andrew R. Liddle, Paul Parsons y John D. Barrow. “Formalizing the slow-roll approximation in inflation”. En: *Physical Review D* 50.12 (dic. de 1994), págs. 7222-7232. DOI: 10.1103/physrevd.50.7222.
- [28] Scott Dodelson y Lam Hui. “Horizon Ratio Bound for Inflationary Fluctuations”. En: *Physical Review Letters* 91.13 (sep. de 2003). DOI: 10.1103/physrevlett.91.131301.
- [29] Julian B. Muñoz y Marc Kamionkowski. “Equation-of-state parameter for reheating”. En: *Physical Review D* 91.4 (feb. de 2015). DOI: 10.1103/physrevd.91.043521.
- [30] Gabriel Germán. “Model independent results for the inflationary epoch and the breaking of the degeneracy of models of inflation”. En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2020.11 (nov. de 2020), págs. 006-006. DOI: 10.1088/1475-7516/2020/11/006.
- [31] M. Tristram et al. “Improved limits on the tensor-to-scalar ratio using BICEP and Planck”. En: *Physical Review D* 105.8 (abr. de 2022). DOI: 10.1103/physrevd.105.083524.
- [32] David Tytler et al. “Review of Big Bang Nucleosynthesis and Primordial Abundances”. En: *Physica Scripta* T85.1 (2000), pág. 12. DOI: 10.1238/physica.topical.085a00012.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS



VOTOS DE APROBATORIOS

**SECRETARIA EJECUTIVA DEL
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS
APLICADAS UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE
MORELOS**

P R E S E N T E

Por medio del presente le informamos que después de revisar la versión escrita de la tesis que realizó la **C. Abril Monserrat Moran Colorado** con número de matrícula **10018805** cuyo título es:

"Restricciones a modelos de inflación del tipo atractores alfa provenientes de recalentamiento"

Consideramos que **SI** reúne los méritos que son necesarios para continuar los trámites para obtener el título de **LICENCIADO EN CIENCIAS CON ÁREA TERMINAL EN FÍSICA.**

Cuernavaca, Mor a 08 de diciembre del 2023

Atentamente

Por una universidad culta
Una universidad de excelencia

Se adiciona página con la e-firma UAEM de los siguientes:

**DR. ALEJANDRO RAMÍREZ SOLÍS
DR. JOAQUÍN ESCALONA SEGURA
DR. GABRIEL GERMÁN VELARDE
DR. MARKUS FRANZISKUZ MULLER
DR. MARCO ANTONIO RIVERA ISLAS**

**(PRESIDENTE)
(SECRETARIO)
(VOCAL)
(SUPLENTE)
(SUPLENTE)**



Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

Sello electrónico

GABRIEL GERMÁN VELARDE | Fecha:2023-12-11 13:15:20 | Firmante

Cb0zSj/n5rR2k5YZ32v5tXiWYuy1YjmJsOvYzFe85kzAr4yEX7Lj3LeR0oS5dlikSRGPm5Fcsaj9aNWb0h8+JwJgnjhu/sT0whr0BWRkEUVXAHmnFttYO15eS7LQx8pjlMhVifFuUVQ926Pge5tMcF5YR5gQhgbXM9B2XFPid7XJuQA3+RHti+UBD2gFl3AkBZaUpYnf9zlvzrQeOCZ5GsXlJ+mUnQItloR+GUGcBERPeMrUousV8rFWrg8uYlDchUmH6QnqwrXbN5doQaQzwl2kyOdrJOYAAALjekgAld4tr/fqNJegGN+Afq3lg/cTxXm1UB9KntuQXHo8pjkQ==

MARKUS FRANZISKUS MULLER | Fecha:2023-12-11 13:18:48 | Firmante

NDJyCAwEtkpLeG10HeCnHTTG1na2a3WMRUyVgafB5NR3VX79t3m5rwS/x1wUuZ1CmGfaAqjPNm3ksHwf28sjdrIwtanOXT81I5n8kSTrh3DBZI++YnDqTkdONN815uU3tbCaLCX7RjMrIkB0PsOIxt/zk9TdtXVxhLXgswmmW0Q0gW7mJNbnw6OeH+G/zmBy3uXc2C789xeo1q6080/65Acomils7JZTWvu2vyfIGtWlJmqpvno7CQqdbyls5NO+OJ6DubgwjcvbvtSEAbpluCQzfbQF6sWgon3E4otzjOL49l1u6Bx6UVuBGLqfSU+6egM6wXzJ/zl/lBzcbFexRA==

JOAQUIN ESCALONA SEGURA | Fecha:2023-12-11 14:10:45 | Firmante

J8zOC6r1T6XL49PG4YAAEQhTYyVTCvHpb7DUcevkSf5YStuKqZLnGwfpUQFdleOkUclnoJRCToil/rbYBIYcR32KHwez/I068DIvBrQ2wgeA2SasYYaGrIZ01K/aC/8/kYnanxXoxSrBxVxmJ8XddcQEwLTzbRawWsZ9hCuK0xfNhcald4bnH8J+1K76LBv96MNBH68rinNwnzHjta71L4vAM8j1sAmlFbaBt27bFLxvEnwV7IK+4ce59G72IUsm4ITbO8P6QxpPXtW+nXLU56gXtg45lavkgRWIoCAzdmvvt6KONqfijH3vUlpkKf9o9L0UqYOyxBRl7jYQkgmA==

MARCO ANTONIO RIVERA ISLAS | Fecha:2023-12-11 16:42:48 | Firmante

q2P/+bDvN7NzfncKuJMOu9fOi6HDf0NMhKQCQ+PQNWiHGzEDMjdbIm4Qqa1vkAfF9He5eIVCnvMB+nlfyam4jcXF7pazq4KD6TksmL/AqQJ5BWRrsuUIDOP6KpD1YKVR2uaZl6k+pdHEiTPwsZUIiozhmUzv7BIKxCB1Ayz8eAuOHXDh0qhpG+5ai1o2x0XcJyMd/yudtOA4JRBIBmwak9n7oYdDSN3ecpujnu2Z8/dvYA7jel5Wj9irFY1LAeGR/OnpAigx9Rvh4F6iu6rRRTQ2qy6m83pp5HtcROWATA1ciEVFbmCB4eol18P9Dli8u9Klvrks0t8CZd0fSg==

ALEJANDRO RAMIREZ SOLIS | Fecha:2023-12-12 08:08:52 | Firmante

Cw5fr4wAvW1BZbypO2LooC28OCUYAmzTJFzHxFU1Bk7eTVIkqGgR9qfbvRfrfpUGpkK5Q4Fmwf/GpdKRS4vJ37Ilc0Dr5G9uXjsVIAQyiaYrZd21oykkis2bmk8IAmr4WXIF2NPNn5ZqUSbKZMKyKBRDGF9y1Si7RZkYUFndVGGcdatV9VE74qWvH8ML5jPlzGJsIXZimMHGlyvgtbk2z1PKL2Qxn+5fKsAw+4bt8bBzF18b5gGRRIOWCycHUOAF7ve4VXegPI44gFJMmplIC5CcsCvETd1QacYk0usrZ7scgHMURNvvtZYKXCIO7diiAdjwU5ov0Q3xnkvodXw==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



GN6oYbwMn

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/mO1yNzUXG9D2ybURRHkPomSnI0jiZxc>