UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

Instituto de Investigación en Ciencias Básicas y Aplicadas

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

Coordinación de Programas Educativos

Posgrado en Ciencias

DR. VICTOR BARBA LÓPEZ
COORDINADOR DEL POSGRADO EN CIENCIAS
PRESENTE

Atendiendo a la solicitud para emitir DICTAMEN sobre la revisión de la TESIS titulada **"Problema de frontera de Haseman con datos discontinuos"** que presenta la alumna **Jennyffer Rosales Méndez (10009567)** para obtener el título de **Maestro en Ciencias.**

Nos permitimos informarle que nuestro voto es:

NOMBRE	DICTAMEN	FIRMA
Dr. Salvador Pérez Esteva IM-UNAM	Aprobado	
Dra. Masuma Atakishiyeva CINC-UAEM	Aprobado	
Dr. Gennadiy Burlak CIICAP-UAEM	Aprobado	
Dr. Yuri Karlovich CINC-UAEM	Aprobado	
Dr. Antonio Daniel Rivera López CINC-UAEM	Aprobado	

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

"PROBLEMA DE FRONTERA DE HASEMAN CON DATOS DISCONTINUOS"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA

JENNYFFER ROSALES MÉNDEZ

DIRECTOR DE TESIS
Dr. YURI KARLOVICH

CUERNAVACA, MORELOS NOVIEMBRE, 2019

Agradecimientos

Doy mi más sincero agradecimiento a mis padres Candido Rosales Barrera y Maria Juana Méndez Tapia, por haberme apoyado, pero sobre todo por la confianza que me han brindado a lo largo de mis estudios y por siempre motivarme a superarme cada día. Quiero también agradecer a mis hermanos: Laura Berenice, Ramsés y Ramiro Miguel, por estar siempre a mi lado apoyándome incondicionalmente. Ustedes saben que también tendrán siempre mi apoyo.

Agradezco a mi asesor de tesis, el Dr. Yuri Karlovich por darme la oportunidad de trabajar con usted, por todo lo que he aprendido en sus clases y asesorías. Es una experiencia que me han servido mucho en mi formación y que siempre me será de utilidad. A mis sinodales Dr. Gennadiy Burlak, Dr. Salvador Pérez y a la Dra. Masuma Atakishiyeva les agradezco las aportaciones que hicieron a este trabajo. Así como a CONACyT por el apoyo para poder realizar mis estudios de posgrado.

También agradezco a todas aquellas personas que formaron parte de mi educación a lo largo de mis estudios, especialmente al Dr. Federico Vázquez Hurtado y a la Dra. Larissa Sbitneva que fueron de las figuras más importantes a lo largo de estos años y por todo el conocimiento que me transmitieron.

A mis amigos que sin duda fueron una parte importante de esta aventura ya que siempre estuvieron a mi lado para compartir tanto buenos como malos momentos, dentro y fuera de clases. En especial a Benita Turija, Jessica Morales, Erik Dominguez, Mazatl Alberto Dominguez, Daniela Cortés, Levent Arturo, Alexis Cruz y Alejandro.

Por último quiero agradecer especialmente y con tanto cariño a las siguientes personas: Enrique Montes Arellano por su apoyo, paciencia y compresión durante el tiempo que me llevó realizar este trabajo, mil gracias por siempre motivarme a superar todos los obstáculos que se me han presentado, y por la gran confianza que tienes en mí y mis capacidades; a Jimena Montes y Huitzin Montes por todo el apoyo emocional que me han dado a lo largo de este tiempo, pues ustedes me han regalado siempre una sonrisa en mis ratos más dificiles ♡.

Introducción

El problema de valor en la frontera de Riemann lo llamaremos también como el problema de Riemann-Hilbert, el problema de Hilbert o como el problema de la conjugación de funciones analíticas. Esto consiste en encontrar una función $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\mathrm{d}\tau$ analítica en todo el plano complejo excepto en los puntos que están dados por la curva Γ, con $\varphi \in L^p(\Gamma)$ que satisfacen la condición de frontera

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \qquad \text{para} \quad t \in \Gamma \tag{1}$$

donde $\Phi^\pm(t)$ son los valores límite de la función desconocida $\Phi(z)$, definidas de la siguiente manera

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau = [P_+\varphi](t), \qquad \textit{con } P_+ = \frac{1}{2}(I + S_\Gamma)$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau = -[P_-\varphi](t), \qquad \textit{con } P_- = \frac{1}{2}(I - S_\Gamma)$$

y $G(t)$ continua en Γ, $g(t) \in L^p(\Gamma)$ son funciones dadas.

La formulación del problema es más general que el de problema (1), y pertenece a Riemann, así como la primer investigación del problema (1) se llevó a cabo por Hilbert en 1904. Usando ciertas restricciones adicionales el problema (1) fue reducido por D. Hilbert a una ecuación integral de Fredholm. Después de esto (aparentemente por iniciativa de Hilbert) en 1907 Haseman llevó a cabo una investigación análoga del problema donde la conjugación de los valores límites $\Phi^\pm(t)$ de la función analítica $\Phi(z)$ podemos reemplazarla por una más general,

$$\Phi^+(\alpha(t)) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \qquad t \in \Gamma, \tag{2}$$

donde $\alpha(t)$ es un difeomorfismo (corrimiento) que preserva la orientación en la curva cerrada Γ sobre si mismo. El problema de frontera de Haseman tiene aplicaciones en la teoría anisotrópica de elasticidad y en el pegamento de superficies de curvatura positiva (ver [18], donde también está presentada la historia de la investigación del problema).

Históricamente, el artículo de Haseman fue el primero del problema con valor en la frontera con un corrimiento (o desplazamiento) que es considerado para una función analítica. Sustituyendo en (2) los valores de $\Phi^{\pm}$ tenemos

$$\frac{1}{2}\varphi(\alpha(t)) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-\alpha(t)}\mathrm{d}\tau = G(t)(-\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau) + g(t),$$

así llegamos a

$$[(W_{\alpha}P_{+} + GP_{-})\varphi](t) = g(t),$$

donde W_{α} es el corrimiento aplicado a $P_{+}\varphi$.

El problema fue estudiado para las funciones continuas en [22] sobre la base del libro [18]. En este trabajo estudiaremos que pasa para coeficientes cuasi-continuos (QC "Quasicontinuous") y cuasi-continuos por trozos (PQC "Piecewise Quasicontinuous), para ello primero tenemos que estudiar el problema de frontera de Riemann y después intentar reducir el problema de frontera de Haseman al de Riemann. Gran parte de esta tesis está basada en [28] y [3]. El Capítulo 1 está destinado a introducir los conceptos de operadores de Fredholm y su índice, así como los mapeos conformes. En este Capítulo también presentamos afirmaciones relacionadas con la transformada de Gelfand, localización sobre álgebras C^* centrales y el Teorema sobre álgebras de Banach generadas por la identidad y dos idempotentes. El siguiente Capítulo 2 está dedicado al estudio de la invertibilidad lateral de operadores integrales singulares con coeficientes continuos a trozos. El Capítulo 3 está referido al estudio de los operadores de Toeplitz con símbolos QC y PQC en el espacio de Hardy H^2, donde básicamente nos dedicamos a estudiar los espacios de ideales maximales para álgebras conmutativas QC y PQC y propiedades de ellos.

En el Capítulo 4 nos dedicamos al estudio de la factorización de Wierner-Hopf y los operadores de Toeplitz que son Fredholm. En el Capítulo 5 y 6 básicamente damos una solución para nuestros problemas de frontera de Riemann y Haseman para coeficientes QC que tienen la factorización de Wierner-Hopf.

En el Capítulo 7 comenzamos con el estudio de las álgebras de operadores singulares integrales con coeficientes QC y PQC en los espacios de Lebesgue L^p. Donde parte principal es entender la estructura para dichas álgebras, así como el estudio de los Teoremas de dos idempotentes y finalmente el estudio de Fredholm para el álgebra de Banach $\mathfrak{A}_p$. Fue construido el cálculo simbólico de Fredholm para el álgebra de Banach $\mathfrak{A}_p$ de operadores integrales singulares con coeficientes cuasi-continuos a trozos en los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, y fue establecido un criterio de Fredholm para todos los operadores $A \in \mathfrak{A}_p$.

El estudio de todos estos temas es con el fin de llegar al Capítulo 8 y poder darle una solición a nuestros problemas de Riemann y Haseman para coeficientes PQC, en el caso de la existencia de las factorizaciones de Wierner-Hopf. Por otro lado el cálculo simbólico desarrollado en el Capítulo 7 implica en el Capítulo 8 un criterio de Fredholm efectivo para el operador integral singular $A = P_+ + GP_-$ con $G \in PQC$ en el espacio $L^p(\mathbb{T})$, que es asociado al problema de Riemann. Ya que la propiedad de Fredholm del operador A es equivalente a la existencia de la factorización de Wierner-Hopf de la función $G^{-1} \in PQC$, se puede aplicar aquí los resultados de los Capítulos 4- 6.

Índice general

Agradecimientos III

Introducción V

1. Preliminares 1

1.1. Operadores de Fredholm 1

1.2. Mapeos conformes 3

1.3. Transformada de Gelfand 5

1.4. Involución 8

1.5. Localización sobre álgebras C^* centrales 12

1.6. Álgebras generadas por idempotentes 15

2. Operadores integrales singulares con coeficientes continuos a trozos 17

2.1. Funciones no singulares y su índice 17

2.2. La invertibilidad de operadores integrales singulares en una curva cerrada. 20

3. Operadores de Toeplitz con símbolos cuasi-continuos a trozos 23

3.1. Funciones cuasi-continuas (QC) y sus propiedades 23

3.2. Espacio M(QC) de ideales maximales de QC 29

3.3. Funciones cuasi-continuas a trozos (PQC) 31

3.4. Espacio M(PQC) de ideales maximales de PQC 39

4. Factorización de Wiener-Hopf 41

4.1. Factorización de Wiener-Hopf 41

4.2. Teoremas básicos para operadores de Toeplitz 43

5. Problema de Riemann con coeficientes cuasi-continuos 47

5.1. Relación de operadores de Toeplitz con operadores integrales singulares . . 47

5.2. Teoría de Fredholm y de solubilidad del problema de Riemann 48

6. Problema de Haseman con coeficientes cuasi-continuos 53

6.1. Desplazamientos especiales 53

6.2. Teoría de Fredholm y teoría de solubilidad 54

7. Álgebras de operadores integrales singulares con coeficientes PQC en espacios de Lebesgue 57

7.1. Introducción 57

7.2. Las álgebras C^* QC y PQC 58

7.2.1. El álgebra C^* QC de funciones cuasi-continuas 58

7.2.2. El álgebra C^* PQC de funciones cuasi-continuas a trozos 60

7.3. Las álgebras de Banach $\mathcal{Z}_p$ y $\mathcal{Z}_p^\pi$ 61

7.4. Principio local de Allan-Douglas y sus aplicaciones 63

7.4.1. Principio local de Allan-Douglas 63

7.4.2. Representantes locales 64

7.4.3. Estructura de las álgebras locales $\mathcal{A}^{\pi}_{p,\xi}$ 67

7.5. Operadores de convolución de Mellin y sus aplicaciones 68

7.5.1. Operadores de convolución de Mellin 68

7.5.2. Multiplicadores continuos en la recta real 69

7.5.3. Álgebra generada por el operador integral singular de Cauchy . . . 69

7.6. Estudio local del álgebra de Banach $\mathfrak{A}_p$ 70

7.6.1. Álgebras cocientes de Banach necesarias 70

7.6.2. Reducción 72

7.7. El teorema de dos idempotentes y sus aplicaciones 74

7.7.1. El teorema de dos idempotentes 74

7.7.2. El espectro de las clases laterales $[X_t]^{\pi}_{p,\xi}$ para $\xi \in M^0_t(QC)$ y $t \in \mathbb{T}$. 75

7.7.3. Corolario del Teorema de dos idempotentes 77

7.8. El estudio de Fredholm del álgebra de Banach $\mathfrak{A}_p$ 78

8. Problemas de frontera de Riemann y Haseman con coeficientes PQC 81

8.1. Problema de frontera de Riemann 81

8.2. Problema de frontera de Haseman 83

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Operadores de Fredholm

Está sección está basada en el Capítulo 4 de [13]. Un operador $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ se llama operador de Fredholm (operador de Noether o ϕ-operador), si es normalmente soluble, i.e. la imagen de $\mathcal{A}$ es cerrada y

$$\dim \ker \mathcal{A} < \infty, \qquad \dim \operatorname{coker} \mathcal{A} < \infty.$$

El número

$$\operatorname{Ind} \mathcal{A} := \dim \ker \mathcal{A} - \dim \operatorname{coker} \mathcal{A}$$

se llama el índice del operador $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

De la teoría de Riesz-Schauder sabemos que cada operador en $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ es un operador de Fredholm con índice cero, es decir,

$$\operatorname{Ind}(I + \mathcal{K}) = 0.$$

Un operador $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ invertible por la izquierda (por la derecha) es de Fredholm si y sólo si

$$\dim \operatorname{coker} \mathcal{A} < \infty \qquad (\dim \ker \mathcal{A} < \infty).$$

En este caso

$$\operatorname{Ind} \mathcal{A} = -\dim \operatorname{coker} \mathcal{A} \qquad (\operatorname{Ind} \mathcal{A} = \dim \ker \mathcal{A}).$$

Sea $\mathcal{N}$ un subespacio de $\mathcal{B}_1$. De acuerdo con el teorema de Hanh-Banach, obtenemos que $(\mathcal{B}_1/\mathcal{N})^* = \mathcal{N}^{\perp}$, donde $\mathcal{N}^{\perp}$ es el subespacio de $\mathcal{B}_1^*$ compuesto por todos los funcionales $f \in \mathcal{B}_1^*$ tales que $f(\mathcal{N}) = \{0\}$. El Lema: Sean $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ y Z el subespacio de todos los vectores $y \in \mathcal{B}_2$ que satisfacen la condición $f(y) = 0$ para todos los funcionales $f \in \ker \mathcal{A}^*$. Entonces, el espacio lineal $\mathrm{im}\, \mathcal{A}$ es denso en Z. Implica que para cada operador $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$

$$\dim (\mathcal{B}_2/\overline{\mathrm{im}\, \mathcal{A}}) = \dim \, \ker \mathcal{A}^*.$$

Entonces

$$\mathrm{codim}\, \overline{\mathrm{im} \mathcal{A}} = \dim \, \ker \mathcal{A}^*$$

y por consiguiente,

$$\mathrm{Ind}\, \mathcal{A} = \dim \, \ker A - \dim \, \ker \mathcal{A}^*.$$

Denotamos al conjunto de todos los operadores de Fredholm el $\mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ por $\phi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

Teorema 1.1.1. *(Atkinson) Si $\mathcal{A} \in \phi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ y $\mathcal{B} \in \phi(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3)$, entonces $\mathcal{BA} \in \phi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$ y*

$$\mathit{Ind}\, (\mathcal{BA}) = \mathit{Ind}\, \mathcal{B} + \mathit{Ind}\, \mathcal{A}. \tag{1.1}$$

Consideremos un teorema sobre representaciones de operadores de Fredholm.

Teorema 1.1.2. *Para cada operador $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1- $\mathcal{A}$ es un operador de Fredholm.

2- El operador $\mathcal{A}$ se puede representar en la forma $\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{T}$, donde $\mathcal{D}$ es un operador de Fredholm en $\mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ invertible unilateral y $\mathcal{T}$ es un operador compacto.

3- $\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{K}$, donde $\mathcal{D}$ es un operador de Fredholm en $\mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ y $\mathcal{K}$ es un operador de rango finito.

Si en la condición 1- del teorema 1.1.2 $\mathcal{A}$ es un operador de Fredholm e $\mathrm{Ind}\, \mathcal{A} = 0$ entonces el Teorema 1.1.2 será correcto si $\mathcal{D}$ es un operador invertible en las afirmaciones 2- y 3-.

Sea $\mathcal{J}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ el conjunto de todos los operadores compactos en $\mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$. Consideremos la estabilidad del índice de operadores de Fredholm para perturbaciones pequeñas y compactas.

Teorema 1.1.3. *Si $\mathcal{A} \in \phi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ y $\mathcal{T} \in \mathcal{J}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, entonces $\mathcal{A} + \mathcal{T} \in \phi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ y*

$$\mathit{Ind}\, (\mathcal{A} + \mathcal{T}) = \mathit{Ind}\, \mathcal{A}.$$

Teorema 1.1.4. *Sea $\mathcal{A} \in \phi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$. Entonces existe un número $\rho > 0$ tal que para cada operador $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ que satisface la condición*

$$||X - \mathcal{A}|| < \rho$$

tenemos $X \in \phi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$. Además, las siguientes relaciones son correctas:

$$Ind\,\mathcal{A} = Ind\,X,$$

$$dim\ \ker X \leq dim\ \ker \mathcal{A}, \qquad dim\, coker\, X \leq dim\, coker\, \mathcal{A}. \tag{1.2}$$

Definición 1.1.1. *Decimos que los operadores de Fredholm $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son homotópicos si hay un mapeo continuo $\Theta : [0,1] \to \phi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ tal que $\Theta(0) = \mathcal{A}$ y $\Theta(1) = \mathcal{B}$.*

Teorema 1.1.5. *Si los operadores de Fredholm $\mathcal{A} : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ y $B : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ son homotópicos, entonces*

$$Ind\mathcal{A} = IndB.$$

Definición 1.1.2. *Sea $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ un subconjunto de $\mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ formado por todos los operadores compactos. El número*

$$|\mathcal{A}|_0 = \text{ínf}\{||\mathcal{A} + \mathcal{D}|| : \mathcal{D} \in \mathcal{J}\}$$

es llamado la norma esencial del operador $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

Observemos que $|\mathcal{A}| = 0$ si y sólo si $\mathcal{A} \in \mathcal{J}$.

Al operador $\mathcal{P} \in \mathcal{L}(X)$ lo llamaremos operador de proyección (u operador de proyección de X a cierto subespacio de X) si $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$. Un operador $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ se llama ϕ_+-operador, si es normalmente soluble, $\dim \ker \mathcal{A} < \infty$ y $\dim coker\mathcal{A} = \infty$ Un operador $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ se llama ϕ_--operador, si es normalmente soluble, $\dim ker\mathcal{A} = \infty$ y $\dim coker\mathcal{A} < \infty$.

Todas las demostraciones se pueden ver en [13] y [22].

1.2. Mapeos conformes

Usamos la información del libro [19] sobre mapeos conformes. La existencia de la derivada compleja f' da lugar a severas, pero muy útiles, restricciones sobre f. Se mostrará que infinitesimalmente cerca de un punto z_0 en el cual $f'(z_0) \neq 0$, f es una rotación por $arg\ f'(z_0)$ y una dilatación por $|f'(z_0)|$. El término infinitesimalmente se define más precisamente después, pero intuitivamente esto significa que localmente f es aproximadamente una rotación junto con una dilatación, si $f'(z_0) = 0$, la estructura de f es más complicada.

Definición 1.2.1. *Un mapeo $f: A \to \mathbb{C}$ es llamado conforme en z_0 si existe una $\theta \in [0, 2\pi]$ y una $r > 0$ tal que para cualquier curva $\gamma(t)$ que es diferenciable en $t = 0$, para la cual $\gamma(t) \in A$ y $\gamma(0) = z_0$, y que satisface $\gamma'(0) \neq 0$, la curva $\sigma(t) = f(\gamma(t))$ es diferenciable en $t = 0$, y haciendo $u = \sigma'(0)$ y $v = \gamma'(0)$, tenemos que $|u| = r|v|$ y $arg\ u = arg\ v + \theta (mod\ 2\pi)$*

Un mapeo será llamado conforme cuando es conforme en todo punto.

Así un mapeo conforme meramente rota y alarga vectores tangentes a curvas. Éste es el significado preciso de infinitesimal como se usó previamente. Debe notarse que un mapeo conforme preserva ángulos entre curvas que se intersectan. (Por definición, el ángulo entre dos curvas es el ángulo entre sus vectores tangentes.)

Teorema 1.2.1. *(Teorema del mapeo conforme) Si $f : A \to \mathbb{C}$ es analítica y si $f'(z_0) \neq 0$, entonces f es conforme en z_0 con $\theta = arg\ f'(z_0)$ y $r = |f'(z_0)|$, verificando la definición 1.2.1*

Demostración. Usando la notación precedente y la regla de la cadena, obtenemos $u = \sigma'(0) = f'(z_0) \cdot \gamma'(0) = f'(z_0) \cdot v$. Así, $arg\, u = arg\, f'(z_0) + arg\, v\ (mod\, 2\pi)$ y $|u| = |f'(z_0)| \cdot |v|$, como se pedía. □

El punto en está demostración es que el vector tangente v a cualquier curva se multiplica por un número complejo fijo, a saber, $f'(z_0)$ sin importar en qué dirección está apuntando v. Esto se debe a que, en la definición de $f'(z_0)$, $\lim_{z \to z_0}$ se toma en todas las posibles direcciones cuando $z \to z_0$.

De hecho, si f solamente preserva ángulos y si ciertas condiciones de regularidad se satisfacen, entonces f debe ser analítica y $f'(z_0) \neq 0$. Por lo tanto, podemos decir que conforme significa analítica con derivada distinta de cero. Encontraremos que es conveniente asumir este significado en el resto del texto.

Sea $A = \{z | Re\ z > 0$ e $Im\ z > 0\}$ y $B = \{z | Im\ z > 0\}$. Entonces el mapeo $f : A \to B$ definido por $z \to z^2$, es conforme. Si $f'(z_0) = 0$, los ángulos no necesariamente se preservan. Por ejemplo, para el mapeo $z \to z^2$, los ejes x y y se intersectan en un ángulo $\pi/2$, pero la imágenes se intersectan en un ángulo π. Un punto tal en donde $f'(z_0) = 0$ para una función analítica f, es llamado punto singular.

Proposición 1.2.1. (i) *Si $f : A \to B$ es conforme y biyectiva (esto es, uno a uno y sobre) entonces $f^{-1} : B \to A$ es también conforme.*

(ii) *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son conformes y biyectivas, entonces $g \circ f : A \to C$ es conforme y biyectiva.*

Proposición 1.2.2. *Sea u armónica en una región B y sea $f : A \to B$ analítica. Entonces $u \circ f$ es armónica en A.*

1.3. Transformada de Gelfand

Definición 1.3.1. *Sea Δ el conjunto de todos los homomorfismos complejos de un álgebra conmutativa de Banach A. La fórmula*

$$\widehat{x}(h) = h(x) \ (h \in \Delta) \tag{1.3}$$

asigna para cada $x \in A$ a una función $\widehat{x} : \Delta \to \mathbb{C}$; llamaremos a $\widehat{x}$ la transformada de Gelfand de x.

Sea $\widehat{A}$ el conjunto de todos los $\widehat{x}$, para $x \in A$. La topología de Gelfand de Δ es la topología débil inducida por $\widehat{A}$, i.e. la topología más débil que hace cada $\widehat{x}$ continua. Entonces, obviamente $\widehat{A} \subset C(\Delta)$, el álgebra de todas las funciones complejas en Δ.

Ya que hay correspondencia uno a uno entre los ideales máximales de A y los homomorfismos complejos en Δ por el Teorema 11.5 [23]; Δ, dotado por la topología de Gelfand es llamado usualmente el espacio de ideales maximales de A.

El término "transformada de Gelfand" es también aplicado al mapeo $x \to \widehat{x}$ de A sobre $\widehat{A}$. El radical de A, denotado por $radA$, es la intersección de todos los ideales maximales de A. Si $radA = \{0\}$, A es llamado semisimple.

Teorema 1.3.1. *Sea Δ el espacio de ideales maximales de un álgebra de Banach conmutativa A.*

(a) Δ es un espacio de Hausdorff compacto.

(b) La transformada de Gelfand es un homomorfismo de A sobre una subálgebra $\widehat{A}$ de $C(\Delta)$, cuyo núcleo es $radA$. La transformada de Gelfand es por lo tanto un isomorfismo sí y solo si A es semisimple.

(c) Para cada $x \in A$, el rango de $\widehat{x}$ es el espectro $\sigma(x)$. Por lo tanto

$$||\widehat{x}||_\infty = \rho(x) \leq ||x||,$$

donde $||\widehat{x}||_\infty$ es el máximo de $|\widehat{x}|$ en Δ, y $x \in radA$ sí y solo si $\rho(x) = 0$.

Demostración. Primero demostremos (b) y (c). Supongamos que $x \in A$, $y \in A$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $h \in \Delta$. Entonces

$$(\alpha x)^\wedge(h) = h(\alpha x) = \alpha h(x) = (\alpha\hat{x})(h),$$

$$(x+y)^\wedge(h) = h(x+y) = h(x) + h(y) = \hat{x}(h) + \hat{y}(h) = (\hat{x}+\hat{y})(h),$$

y

$$(xy)^\wedge(h) = h(xy) = h(x)h(y) = \hat{x}(h)\hat{y}(h) = (\hat{x}\hat{y})(h).$$

Entonces $x \to \hat{x}$ es un homomorfismo. Su núcleo consiste de aquellos $x \in A$ los cuales satisface $h(x) = 0$ para cada $h \in \Delta$; por el Teorema 11.5 [23] , esto es la intersección de todos los ideales maximales de A, es decir, $radA$. Al decir que λ está en el rango de $\hat{x}$ se piensa que $\lambda = \hat{x}(h) = h(x)$ para algún $h \in \Delta$. Por (e) del Teorema 11.5, esto pasa sí y solo si $\lambda \in \sigma(x)$. Esto prueba (b) y (c).

Para demostrar (a), sea a^* el espacio dual de A (considerado como un espacio de Banach), y sea K la bola unitaria cerrada en la norma de A^*. Por el teorema de Banach-Alaoglu, K es compacto en la topología *-débil. Por (c) del Teorema 10.7 [23] , $\Delta \subset K$. La topología de Gelfand de Δ es evidentemente la restricción a Δ de la topología *-débil de A^*. Por lo tanto esto es suficiente para mostrar que Δ es un subconjunto*-débil cerrado de A^*.

Sea Λ_0 en la clausura *-débil de Δ. Tenemos que demostrar que

$$\Lambda_0(xy) = \Lambda_0 x \Lambda_0 y \ (x \in A,\ y \in A) \tag{1.4}$$

y

$$\Lambda_0 e = 1. \tag{1.5}$$

[Notese que (1.5) es necesaria; de otra manera Δ_0 podría ser el homomorfismo cero, el cual no está en Δ].

Fijemos $x \in A$, $y \in A$, $\epsilon > 0$. Fijemos

$$W = \{\Lambda \in A^* :\ |\Lambda z_i - \Lambda_0 z_i| < \epsilon \ para\ 1 \leq i \leq 4\}, \tag{1.6}$$

donde $z_1 = e,\ z_2 = x,\ z_3 = y,\ z_4 = xy$. Entonces W es una vecindad *-débil de Λ_0. Por lo tanto el cual contiene un $h \in \Delta$. Para esto h,

$$|1 - \Lambda_0 e| = |h(e) - \Lambda_0 e| < \epsilon, \tag{1.7}$$

la cual nos da (1.5), y

$$\Lambda_0(xy) - \Lambda_0 x \Lambda_0 y = [\Lambda_0(xy) - h(xy)] + [h(x)h(y) - \Lambda_0 x \Lambda_0 y]$$

$$[\Lambda_0(xy) - h(xy)] + [h(y) - \Lambda_0 y]h(x) + [h(x) - \Lambda_0 x]\Lambda_0 y,$$

la cual nos da

$$|\Lambda_0(xy) - \Lambda_0 x \Lambda_0 y| < (1 + ||x|| - |\Lambda_0 y|)\epsilon. \tag{1.8}$$

Ya que (1.8) implica (1.4), la demostración está completa. □

Las álgebras semisimples tienen una propiedad importante que tiene lugar para el álgebra $\mathbb{C}$ también.

Teorema 1.3.2. *Si $\psi : A \to B$ es un homomorfismo de un álgebra de Banach A en un álgebra de Banach conmutativa semisimple B, entonces ψ es continua.*

Demostración. Supongamos que $x_n \to x$ en A y $\psi(x_n) \to y$ en B. Por el teorema de la gráfica cerrada, es suficiente probar que $y = \psi(x)$. Tomando algún homomorfismo $h : B \to \mathbb{C}$. Entonces $\varphi = h \circ \Psi$ es un homomorfismo de A en $\mathbb{C}$. El Teorema 10.7 [23] muestra que h y ψ son continuas. Por lo tanto

$$h(y) = \lim h(\psi(x_n)) = \lim \varphi(x_n) = \varphi(x) = h(\psi(x)),$$

para cada $h \in \Delta_B$. Así $y - \psi(x) \in radB$. Ya que $radB = \{0\}$, $y = \psi(x)$.

□

Corolario 1.3.1. *Cada isomorfismo entre dos álgebras de Banach conmutativas semisimples es un homeomorfismo.*

En particular esto es cierto para cada automorfismo de un álgebra de Banach conmutativa semisimple.

La topología de tal álgebra es por lo tanto determinada completamente por su estructura algebraica. En el Teorema 1.3.1, el álgebra $\hat{A}$ puede o no ser cerrada en $C(\Delta)$, con respecto a la norma del supremo. Cual de estos casos ocurren, pueden ser decidido por comparar $||x^2||$ con $||x||^2$ para todo $x \in A$. Recordemos que $||x^2|| \leq ||x||^2$ es siempre cierta.

Lema 1.3.1. *Si A es un álgebra de Banach conmutativa y*

$$r = \inf \frac{||x^2||}{||x||^2}, \qquad s = \inf \frac{||\hat{x}||_\infty}{||x||} \qquad (x \in A,\ x \neq 0), \tag{1.9}$$

entonces $s^2 \leq r \leq s$.

Demostración. Ya que $||\hat{x}||_\infty \geq s||x||$,

$$||x^2|| \geq ||\hat{x^2}||_\infty = ||\hat{x}||_\infty^2 \geq s^2||x||^2 \tag{1.10}$$

para cada $x \in A$. Así $s^2 \leq r$. Ya que $||x^2|| \geq r||x||^2$ para cada $x \in A$, la inducción en n muestra que

$$||x^m|| \geq r^{m-1}||x||^m \ (m = 2^n,\ n = 1, 2, 3, ...). \tag{1.11}$$

Tomando la $m-$ésima raíz en (1.11) tenemos que $m \to \infty$. Por la fórmula de radio espectral y (c) de Teorema 1.3.1,

$$||\hat{x}||_\infty = \rho(x) \geq r||x|| \ (x \in A). \tag{1.12}$$

Por lo tanto $r \leq s$.

□

Teorema 1.3.3. *Supongamos que A es un álgebra de Banach conmutativa.*

(a) La transformada de Gelfand es una isometría (i.e. $||x|| = ||\widehat{x}||_\infty$ para cada $x \in A$) si y solo si $||x^2|| = ||x||^2$ para cada $x \in A$.

(b) A es semisimple y $\widehat{A}$ es cerrada en $C(\Delta)$ si y solo si existe $K < \infty$ tal que $||x||^2 \geq K||x^2||$ para cada $x \in A$.

Demostración. (a) En la terminología del Lema 1.3.1, la transformada de Gelfand es una isometría sí y sólo si $s = 1$, lo que ocurre (por el Lema) sí y sólo si $r = 1$.

(b) La existencia de K es equivalente a $r > 0$, por lo tanto a $s > 0$, por el Lema. Si $s > 0$ entonces el mapeo $x \to \hat{x}$ es uno a uno y tiene inverso continuo, así que $\hat{A}$ es completa (por lo tanto cerrada) en $C(\Delta)$. Recíprocamente, si $x \to \hat{x}$ es uno a uno y si $\hat{A}$ es cerrada en $C(\Delta)$, el teorema del mapeo abierto implica que $s > 0$.

□

1.4. Involución

Definición 1.4.1. *Sea $x \to x^*$ de un álgebra compleja (no necesariamente conmutativa) A dentro de A es llamada una involución en A si esta tiene las siguientes cuatro propiedades, para todo $x \in A$, $y \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$:*

(1) $(x + y)^* = x^* + y^*$

(2) $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$

(3) $(xy)^* = y^* x^*$

(4) $x^{**} = x$.

En otras palabras una involución es un automorfismo anti-lineal de periodo 2.

Cualquier $x \in A$ para el cual $x^* = x$ es llamado Hermitiano, o autoadjunto. Por ejemplo, $f \to \bar{f}$ es una involución en $C(X)$.

Teorema 1.4.1. *Si A es un álgebra de Banach con una involución, y si $x \in A$, entonces*

(a) *$x + x^*$, $i(x + x^*)$, y xx^* son hermitianos,*

(b) *x tiene una única representación $x = u + iv$, con $u \in A$, $v \in A$, u y v son hermitianos,*

(c) *la unidad e es hermitiana,*

(d) *x es invertible en A sí y sólo si x^* es invertible, en tal caso $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$, y*

(e) *$\lambda \in \sigma(x)$ sí y sólo si $\bar{\lambda} \in \sigma(x^*)$.*

Demostración. El inciso (a) es evidente. Sí $2u = x + x^*$ y $2v = i(x^* - x)$ entonces $x = u + iv$ es una representación como en (b). Supongamos $x = u' + iv'$ es también una representación. Pongamos $w = v' - v$, entonces w y iw son hermitianos, así que

$$iw = (iw)^* = -iw^* = -iw.$$

Por lo tanto $w = 0$, y la unicidad se sigue.

Ya que $e^* = ee^*$, (a) implica (c), (d) se sigue de (c) y $(xy)^* = y^* x^*$. Finalmente, (e) se sigue sí (d) es aplicado a $\lambda e - x$ en lugar de x.

$\square$

Teorema 1.4.2. *Sí el álgebra de Banach A es conmutativa y semisimple, entonces cualquier involución en A es continua.*

Demostración. Sea h un homomorfismo complejo de A, y definamos $\phi(x) = \overline{h(x^*)}$. Las propiedades (1)-(3) de la definición 1.4.1 muestran que ϕ es un homomorfismo complejo. Por lo tanto Φ es continua. Supongamos que $x_n \to x$ y $x_n^* \to y$ en A. Entonces

$$\overline{h(x^*)} = \phi(x) = \lim \phi(x_n) = \lim \overline{h(x_n^*)} = \overline{h(y)}.$$

Ya que A es semisimple, $y = x^*$. Por lo tanto $x \to x^*$ es continua, por el teorema de la gráfica cerrada.

□

Definición 1.4.2. *Un álgebra de Banach A con una involución $x \to x^*$ que satisface*

$$||xx^*|| = ||x||^2 \tag{1.13}$$

para cada $x \in A$ es llamada álgebra C^*.

Nótese que $||x||^2 = ||xx^*|| \leq ||x||\ ||x^*||$ implica $||x|| \leq ||x^*||$, por lo tanto también

$$||x^*|| \leq ||x^{**}|| = ||x||.$$

Así

$$||x^*|| = ||x|| \tag{1.14}$$

en cada álgebra C^*. De esto también se sigue que

$$||xx^*|| = ||x||\ ||x^*||. \tag{1.15}$$

Recíprocamente, (2) y (3) implican (1).

Teorema 1.4.3. *(Gelfand-Naimark)*

Supongamos que A es un álgebra C^* conmutativa, con el espacio de ideales maximales Δ. La transformada de Gelfand es entonces un isomorfismo isométrico de A sobre $C(\Delta)$, el cual tiene la propiedad adicional que

(1)

$$h(x^*) = \overline{h(x)} \qquad (x \in A,\ h \in \Delta),$$

o, equivalentemente, que

(2)

$$(x^*)^\wedge = \bar{\hat{x}} \qquad (x \in A).$$

En particular, x es hermitiana sí y sólo si $\hat{x}$ es una función de valor real.

La interpretación de (2) es que la transformada de Gelfand lleva la involución dada en A a la involución natural en $C(\Delta)$, la cual es la conjugación.

Isomorfismos que preservan involuciones en está manera son frecuentemente llamados $*$-isomorfismos.

Demostración. Primero supongamos que $u \in A$, $u = u^*$, $h \in \Delta$. Tenemos que demostrar que $h(u)$ es real. Pongamos $z = u + ite$, para el real t. Sí $h(u) = \alpha + i\beta$, con α y β reales, entonces

$$h(z) = \alpha + i(\beta + t), \qquad zz^* = u^2 + t^2 e,$$

así que

$$\alpha^2 + (\beta + t)^2 = |h(z)|^2 \leq ||z||^2 = ||zz^*|| \leq ||u||^2 + t^2,$$

o

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \leq ||u||^2 \qquad (-\infty < t < \infty). \tag{1.16}$$

Por (1.16), $\beta = 0$; por lo tanto $h(u)$ es real.

Sí $x \in A$, entonces $x = u + iv$, con $u = u^*$, $v = v^*$. Por lo tanto $x^* = u - iv$. Ya que $\hat{u}$ y $\hat{v}$ son reales, (2) está demostrado.

Así $\hat{A}$ es cerrado bajo conjugaciones complejas. Por el Teorema de Stone- Weierstrass, $\hat{A}$ es por lo tanto densa en $C(\Delta)$. Si $x \in A$ y $y = xx^*$, entonces $y = y^*$ así que $||y^2|| = ||y||^2$. Eso se sigue, por inducción en n, que $||y^m|| = ||y||^m$ para $m = 2^n$. Por lo tanto $||\hat{y}||_\infty = ||y||$, por la fórmula del radio espectral y (c) del Teorema 1.3.1. Ya que $y = xx^*$, (2) implica que $\hat{y} = |\hat{x}|^2$. Por lo tanto

$$||\hat{x}||_\infty^2 = ||\hat{y}||_\infty = ||y|| = ||xx^*|| = ||x||^2,$$

o $||\hat{x}||_\infty = ||x||$. Así $x \to \hat{x}$ es una isometría. Por lo tanto $\hat{A}$ es cerrado en $C(\Delta)$. Ya que $\hat{A}$ es también densa en $C(\Delta)$, concluimos que $\hat{A} = C(\Delta)$. Esto completa la demostración.

□

El siguiente teorema es un caso especial del que se acaba de demostrar. Vamos a establecer esto en una forma que involucra la inversa de la transformada de Gelfand.

Teorema 1.4.4. *Sí A es un álgebra C^* conmutativa la cual contiene un elemento x tal que los polinomios en x y x^* son densos en A, entonces la fórmula*

$$(\Psi f)^\wedge = f \circ \hat{x} \tag{1.17}$$

define un isomorfismo isométrico Ψ de $C(\sigma(x))$ sobre A la cual satisface

$$\Psi \bar{f} = (\Psi f)^* \tag{1.18}$$

para cada $f \in C(\sigma(x))$. Más aún, si $f(\lambda) = \lambda$ en $\sigma(x)$, entonces $\Psi f = x$.

1.5. Localización sobre álgebras C^* centrales

Los siguientes resultados están contenidos en [[21], Sección 2.2.4].

Definición 1.5.1. *Sea A el álgebra de Banach con identidad e. El centro $Cen\ A$ de A es el conjunto de todos los elementos $z \in A$ con la propiedad que $za = az$ para todo $a \in A$. Claramente $Cen\ A$ es una subálgebra conmutativa cerrada de A. Sea B una subálgebra cerrada de $Cen\ A$ que contiene a e. Así, B también es conmutativa. Si $N \subset B$ es un ideal maximal de B, entonces J_N el ideal bilateral cerrado más pequeño de A que contiene N, i.e.*

$$J_N = clos_A\Big\{ \sum_{k=1}^{m} x_k a_k : m \in \mathbb{Z}_+, x_k \in N, a_k \in A \Big\}.$$

Proposición 1.5.1. *Sea A un álgebra de Banach con unidad y sea B una subálgebra C^* central de A la cual contiene la identidad y sea M_B el espacio de ideales maximales de B. Entonces, para cada $a \in A$ y $x \in M_B$,*

$$||\Phi_x(a)|| = \inf_b ||ab||$$

donde el ínfimo es tomado sobre todos los $b \in B$ con $0 \leq b \leq 1$ la cual es idénticamente 1 en una vecindad de x.

Aquí están los resultados sobre la estructura de los elementos en los ideales locales.

Proposición 1.5.2. *Sea A un álgebra de Banach con identidad e, B un subálgebra C^* central de A la cual contiene e, y $x \in M_B$. Entonces*

$$\mathcal{J}_x = \{\ ca : a \in A \text{ y } c \in x\}. \tag{1.19}$$

Demostración. Por definición el ideal $\mathcal{J}_x$ es la clausura en A del conjunto de todos los sumandos finitos

$$\sum_{j=1}^{n} c_j a_j \ con \ c_j \in x \ y \ a_j \in A.$$

Pretenderemos que cada sumando de esta forma puede ser escrita como un producto único ca con $c_j \in x$ y $a_j \in A$. Claramente, esto es suficiente para probar este hecho para $n = 2$. Sean $c_1,\ c_2 \in x$ y $a_1,\ a_2 \in A$. Identificando los elementos de B con la correspondiente transformada de Gelfand. Definamos $c := \sqrt{|c_1| + |c_2|}$. Entonces $c \in x$, y el punto x pertenece a el conjunto $N_c := \{y \in M_B \ : \ c(y) = 0\}$. Para $j = 1, 2$, fijamos

$$g_j(y) := \begin{cases} c_j(y)/c(y) & \text{si} \quad y \notin N_c, \\ 0 & \text{si} \quad y \in N_c. \end{cases}$$

Para $y \notin N_c$, uno tiene

$$|g_j(y)| = \frac{|c_j(y)|}{|c(y)|} = \frac{|c_j(y)|}{|c_1(y)| + |c_2(y)|}|c(y)| \leq |c(y)|.$$

Ya que la estimación $|g_j(y)| \leq |c(y)|$ se satisface para $y \in N_c$ también, las funciones g_j son continuas. Así, pueden ser identificadas con elementos de B. Ya que $c_j = cg_j$, se sigue que $c_1a_1 + c_2a_2 = c(g_1a_1 + g_2a_2)$ como se desea. Por lo tanto el conjunto en el lado derecho de (1.19) forma un ideal de A. Podemos abreviar este ideal por $\mathcal{J}'_x$ por el momento.

Después vamos a probar que $\mathcal{J}'_x$ es un ideal cerrado. Sea d en la clausura de $\mathcal{J}'_x$. Dada alguna serie convergente $\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k$ de números positivos, hay elementos $a_k \in A$ y $c_k \in x$ tales que $||d - c_k a_k|| < \epsilon_k/2$ para cada k. Para cada k hay una vecindad abierta $U_k \subset M_B$ de x tal que $||a_k|||c_k(y)| < \epsilon_k/2$ para todo $y \in U_k$. Sin pérdida de generalidad, uno puede asumir que $\overline{U_{k+1}} \subset U_k$ para cada k. Además, sean f_k elementos de B con $0 \leq f_k \leq 1$ y tal que $f_{k|_{\overline{U_{k+1}}}} = 1$ y $f_{k|_{M_B \setminus U_k}} = 0$ para todo k. Entonces

$$||c_k f_k|| = ||c_k f_k||_\infty \leq \sup_{y \in U_k} |c_k(y)|,$$

Por lo cual

$$||f_k d|| \leq ||d - c_k a_k|| ||f_k|| + ||a_k|| ||c_k f_k|| < \epsilon_k.$$

Consecuentemente, la serie $d + \sum_{k=1}^{\infty} f_k d$ converge absolutamente. Sea $d_\infty \in A$ denota la suma de tal serie. La estimación

$$0 \leq \left(1 + \sum_{k=1}^{n} f_k(y)\right)^{-1} - \left(1 + \sum_{k=1}^{n+m} f_k(y)\right)^{-1}$$

$$\leq \begin{cases} (1+\sum_{k=1}^{n} f_k(y))^{-1} & \text{para} \quad y \in U_{n+1} \\ 0 & \text{para} \quad y \in M_B \setminus U_{n+1} \end{cases} \leq \frac{1}{n+1}$$

muestra que $(1+\sum_{k=1}^{n} f_k)^{-1}$ converge en B cuando $n \to \infty$ a algún elemento c. Claramente, $c(x) = 0$, por lo cual $c \in x$. Ya que $d = cd_\infty$ por construcción, $\mathcal{J}_x'$ es cerrado. Así, $\mathcal{J}_x'$ es un ideal cerrado de A lo cual contiene el ideal x en B. Ya que $\mathcal{J}_x$ es el más pequeño ideal de A con esas propiedades, se sigue la afirmación.

□

Finalmente, mostraremos que cada subálgebra C^* central de un álgebra de Banach es inversamente cerrado. Recordemos que el álgebra B es inversamente cerrado en A si cada elemento $b \in B$ el cual es invertible en A posee un inverso en B. Las siguiente definición tiene sentido en el contexto del principio local general (i.e. sin asumir la propiedad C^* de B). También el Lemma 2.2.6 [21] se satisface en un contexto general.

Escribiendo el espacio de ideales maximales M_B como $M_B^0 \cup M_B^+$, donde M_B^0 junta esos ideales máximales x de B para el cual $\mathcal{J}_x \equiv A$ y donde M_B^+ es el complemento de M_B^0 en M_B. El conjunto M_B^0 es abierto en M_B. En efecto, si $x \in M_B^0$, entonces $\Phi(0)$ es invertible por definición. Por la Proposición 2.2.3 [21], $\Phi(0)$ es invertible para todos los y en una cierta vecindad abierta U de x. Esto es posible sólo si $y \in M_B^0$.

Lema 1.5.1. *Si $M_B^0 = \emptyset$, entonces B es inversamente cerrada en A.*

Corolario 1.5.1. *Sea A un álgebra de Banach con identidad e y sea B una subálgebra C^* central de A la cual contiene a e. Entonces:*

(i) M_B^0 es vacio;

(ii) B es inversamente cerrada en A.

Teorema 1.5.1. *(Goldstein) Sea A un álgebra de Banach con unidad, y sea B una subálgebra C^* (no necesariamente cerrada) de A la cual contiene la identidad. Entonces B es inversamente cerrada en A.*

Es bien conocido que el espacio de ideales maximales de un álgebra de Banach B con unidad e generada por e y un elemento $b \neq e$ es homeomorfa al espectro $\sigma_B(b)$ de b.

Proposición 1.5.3. *Sea A un álgebra de Banach con unidad, y sea B una subálgebra cerrada central de A la cual contiene la identidad y la cual es generada por un elemento b y la identidad. Identificando el espacio de ideales maximales de B con $\sigma_B(b)$. Entonces $M_B^+ = \sigma_A(b)$.*

1.6. Álgebras generadas por idempotentes

Teorema 1.6.1. *[[3], Teorema 8.7] Sea B un álgebra de Banach con identidad e y sean r y s idempotentes en B. Coloquemos como A a la más pequeña subálgebra cerrada de B que contiene a e, r y s. Fijemos*

$$X := rsr + (e-r)(e-s)(e-r)$$

y supongamos que los puntos 0 y 1 son puntos de acumulación del espectro $sp_B X$. Definamos el mapeo $\sigma_x : \{e,\ r,\ s\} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ para $x \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ por

$$\sigma_x(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_x(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_x(s) = \begin{pmatrix} x & x-1 \\ -x & 1-x \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

y para $x \in \{0,1\}$ por

$$\sigma_x(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_x(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_x(s) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix}. \tag{1.21}$$

(a) Para cada $x \in sp_A X$ el mapeo σ_x se extiende al homomorfismo del álgebra de Banach σ_x de A en $\mathbb{C}^{2\times 2}$.

(b) Un elemento $a \in A$ es invertible en B sí y solo si $\sigma_x(a)$ es invertible en $\mathbb{C}^{2\times 2}$ para cada $x \in sp_B X$.

(c) Un elemento $a \in A$ es invertible en A sí y solo si $\sigma_x(a)$ es invertible en $\mathbb{C}^{2\times 2}$ para cada $x \in sp_A X$.

Teorema 1.6.2. *[2] Cada álgebra de Banach separable es isomorfa a una subálgebra de un álgebra generada por la identidad y tres idempotentes.*

Capítulo 2

Operadores integrales singulares con coeficientes continuos a trozos

2.1. Funciones no singulares y su índice

Sea Γ una curva cerrada sin intersecciones. Por $PC(\Gamma)$ denotamos a la clase de todas las funciones a en $L^\infty(\Gamma)$ con las siguientes propiedades:

(1) La función a es continua en Γ con la posible excepción de un conjunto de puntos finitos;

(2) los límites
$$a(t_0+0) = \lim_{\substack{t\to t_0 \\ t\succ t_0}} a(t) \qquad y \qquad a(t_0-0) = \lim_{\substack{t\to t_0 \\ t\prec t_0}} a(t)$$
existen en cada punto t_0 de discontinuidad de a y son finitos. Tengamos en cuenta que por $t \prec t_0$ se puede pensar que el punto t esta situado antes de t_0 con respecto a la orientación de Γ;

(3) en algún punto de la discontinuidad uno tiene $a(t_0-0) = a(t)$.

Ahora, dado un par (z_1, z_2) de puntos en el plano complejo $\mathbb{C}$ y un número δ en el intervalo $(0, \pi)$, asignamos por $l(z_1, z_2; \delta)$ el arco circular que une los puntos z_1 a z_2 y se distinguen por la siguiente propiedad:

De algún punto z $(z \neq z_1, z_2)$ del arco $l(z_1, z_2, \delta)$ uno ve la línea recta entre z_1 y z_2 bajo el ángulo δ, y que corre mediante el arco $l(z_1, z_2, \delta)$ de z_1 a z_2 esta línea recta es localizada en el lado izquierdo.

Además, para los números δ en el intervalo $\pi < \delta < 2\pi$ definimos $l(z_1, z_2; \delta) = l(z_2, z_1; 2\pi - \delta)$, y denotemos por $l(z_1, z_2; \pi)$ la linea recta entre z_1 y z_2. El arco $l(0, 1; \delta)$ $(0 < \delta < \pi)$ puede analíticamente ser representada en el parámetro formado

$$z = \frac{\sin(\theta\mu)}{\sin\theta} e^{i\theta(\mu-1)} \qquad (0 \leq \mu \leq 1), \tag{2.1}$$

donde $\theta = \pi - \delta$, y la representación paramétrica del arco $l(z_1, z_2; \delta)$ $(0 < \delta < \pi)$ es

$$z = z_1 + (z_2 - z_1) f_\delta(\mu),$$

donde $f_\delta(\mu)$ se refiere a la función del lado derecho de la igualdad (2.1). Como μ increce de cero a uno, entonces el valor de la función $1 - f_\delta(\mu)$ corre a través del arco $l(1, 0; 2\pi - \delta)$. Por lo tanto, si $\pi < \delta < 2\pi$ entonces la representación paramétrica de el arco $l(z_1, z_2; \delta)$ está dada por

$$z = z_2 + (z_1 - z_2)(1 - f_\delta(\mu)).$$

Resumiendo, tenemos la ecuación del arco $l(z_1, z_2; \delta)$ como $z = z_2 f_\delta(\mu) + z_1(1 - f_\delta(\mu))$ con

$$f_\delta(\mu) := \begin{cases} \frac{\sin(\theta\mu)}{\sin\theta} e^{i\theta(\mu-1)} \ (\theta = \pi - \delta) & \text{si} \quad 0 < \delta < 2\pi, \ \delta \neq \pi \\ \mu & \text{si} \quad \delta = \pi. \end{cases} \tag{2.2}$$

Sean p y $\beta_1 ..., \beta_r$ números reales que satisfacen $1 < p < \infty$ y $-1 < \beta_k < p - 1$ $(k = 1, ..., r)$. Consideremos la función

$$\rho(t) := \prod_{j=1}^{r} |t - t_j|^{\beta_j},$$

donde los t_j son ciertos puntos distintos en pares de la curva Γ. A cada función $a \in PC(\Gamma)$ se le asocia la función $a^{p,\rho} : \Gamma \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ la cual es definida por

$$a^{p,\rho}(t, \mu) := a(t + 0) f(t, \mu) + a(t)(1 - f(t, \mu))$$

$(t \in \Gamma, \ 0 \leq \mu \leq 1)$, donde el conjunto $f(t, \mu) := f_{\delta(t)}(\mu)$ y

$$\delta(t) := \begin{cases} \frac{2\pi}{p} & \text{si} \quad t \in \Gamma \setminus \{t_1, ..., t_r\} \\ \frac{2\pi(1+\beta_k)}{p} & \text{si} \quad t = t_k \ (k = 1, ..., r). \end{cases} \tag{2.3}$$

Si, la función a es continua en t_0 entonces $a^{p,\rho}\ (t_0,\mu) = a(t_0)$, pero si t_0 es un punto de discontinuidad de a entonces el rango de la función $a^{p,\rho}(t_0,\mu)$ $(0 \leq \mu \leq 1)$ coincide con el arco (o posiblemente linea recta) $l(a(t_0), a(t_0+0); \delta(t_0))$. Denotemos por $W_{p,\rho}(a)$ a la curva plana la cual resulta del rango de la función a añadiendo los arcos $l(a(\tau_k), a(\tau_k+0); \delta(\tau_k))$ para todos los puntos τ_k $(k = 1, ..., m)$ de discontinuidad de a. Claramente, la curva $W_{p,\rho}(a)$ coincide con el rango de la función $a^{p,\rho}$. En intervalos de continuidad de a, el movimiento a lo largo de $W_{p,\rho}(a)$ concuerda con el movimiento de t a lo largo de Γ en dirección positiva, y a lo largo de los arcos suplementarios la curva $W_{p,\rho}(a)$ está orientada de $a(\tau_k)$ a $a(\tau_k+0)$. Una función a $(\in PC(\Gamma))$ puede ser llamada $\{p,\rho\}$-no singular si la curva $W_{p,\rho}(a)$ no contiene el origen, i.e. si $a^{p,\rho} \neq 0$ $(t \in \Gamma, \mu \in [0,1])$. Sí la función a es $\{p,\rho\}$-no singular entonces el número de enrollamiento de la curva $W_{p,\rho}(a)$ alrededor del punto $z = 0$ es llamado su $\{p,\rho\}$-índice. Este índice puede ser abreviado por $ind\ a^{p,\rho}$. Sí a es una función continua en Γ y $a(t) \neq 0$ $(t \in \Gamma)$ entonces $ind\ a^{p,\rho} = ind\ a$, pero si la función a es discontinua entonces su $\{p,\rho\}$-índice dependen en ambos p y ρ.

Teorema 2.1.1. *Sí las dos funciones $\{p,\rho\}$-no singulares a y b no tienen puntos de discontinuidades en común entonces su producto $c = ab$ es támbien $\{p,\rho\}$-no singular, y*

$$ind\ c^{p,\rho} = ind\ a^{p,\rho} + ind\ b^{p,\rho}. \tag{2.4}$$

Demostración. Uno puede verificar fácilmente la validez de la igualdad

$$c^{p,\rho}(t,\mu) - a^{p,\rho}(t,\mu)b^{p,\rho}(t,\mu) = (a(t+0) - a(t))(b(t+0) - b(t))f(t,\mu)(1 - f(t,\mu)).$$

Así, si las funciones $\{p,\rho\}$-no singulares a y b no poseen discontinuidades en común entonces $c^{p,\rho} = a^{p,\rho}b^{p,\rho}$ para las cuales se sigue que $c^{p,\rho}(t,\mu) \neq 0$ $(t \in \Gamma, 0 \leq \mu \leq 1)$ y (2.4) se cumple.

□

Escribiremos "función $p-$ no singular" en lugar de "función $\{p,1\}-$ no singular" en el caso de $\rho(t) \equiv 1$. Ahora establecemos un criterio para la $\{p,\rho\}$- no singularidad de una función a.

Teorema 2.1.2. *Las siguientes dos condiciones son necesarias y suficientes para la $\{p,\rho\}$-no singularidad de la función a:*

(1) $a(t \pm 0) \neq 0$ *para todos los puntos* $t \in \Gamma$*;*

(2) en algún punto t_k de discontinuidad de a, el cociente $a(t_k)/a(t_k+0)$ puede ser escrita como $\exp(i\gamma_k)$ *donde $\delta(t_k) - 2\pi < Re\ \gamma_k < \delta(t_k)$ y la función $\delta(t)$ es definida por (2.3).*

Demostración. Claramente, la primera condición es necesaria. Así que se asume que esta condición se satisface. Entonces el cociente $a(t_k)/a(t_k+0)$ puede ser expresada en la forma $\exp(i\gamma_k)$ con $\delta(t_k)-2\pi < Re\ \gamma_k \leq \delta(t_k)$. Es fácil verificar que el arco $l(a(t_k), a(t_k+0); \delta(t_k))$ contiene el punto $z = 0$ sí y solo si $Re\gamma_k = \delta(t_k)$. Por lo tanto, una función a siendo sujeta de la condición $a(t \pm 0) \neq 0$ $(t \in \Gamma)$ es $\{p, \rho\}$- no singular sí y solo si $Re\ \gamma_k \neq \delta(t_k)$.

□

2.2. La invertibilidad de operadores integrales singulares en una curva cerrada.

En está sección se expondrán condiciones necesarias y suficientes para la invertibilidad unilateral de operadores integrales singulares con coeficientes continuos por tramos a lo largo de una curva cerrada Γ en el espacio $L_p(\Gamma, \rho)$ (ver [14], Capítulo 9).

Teorema 2.2.1. *Sea Γ una curva cerrada, $\rho(t) := \prod_{k=1}^{n} |t - t_k|^{\beta_k}$ $(-1 < \beta_k < p - 1, k = 1, ..., n)$, y $a, b \in PC(\Gamma)$. Entonces el operador $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ es al menos invertible de un lado en $L_p(\Gamma, \rho)$ sí y sólo si la condición*

$$a(t+0)b(t)f(t,\mu) + a(t)b(t+0)(1 - f(t,\mu)) \neq 0 \qquad (t \in \Gamma, 0 \leq \mu \leq 1) \tag{2.5}$$

se cumple. Sí esta condición se cumple y $c := a/b$, entonces el operador A es invertible, invertible sólo por la izquierda o invertible solo por la derecha dependiendo ya sea que el número $\kappa = ind\ c^{p,\rho}$ es igual a cero, positivo o negativo, respectivamente. Sí $\kappa > 0$, entonces $\dim\ coker\ A = \kappa$, y si $\kappa < 0$ entonces $\dim\ ker\ A = -\kappa$.

Demostración. Supongamos que la condición (2.5) se satisface. Ya que $f(t, 0) = 0$ y $f(t, 1) = 1$, esta condición inmediatamente implica que $a(t \pm 0)b(t \pm 0) \neq 0$ $(t \in \Gamma)$.

Estableciendo $c := ab^{-1}$, y sean $t_1, ..., t_n$ todos los puntos de discontinuidad de la función c. Entonces la condición (2.5) implica adicionalmente que $c^{p,\rho}(t, \mu) \neq 0$ $(t \in \Gamma, 0 \leq \mu \leq 1)$ y, por lo tanto, la función c es $\{p, \rho\}-$ no singular. Del Teorema 2.1.2 sabemos que el cociente $c(t_k)/c(t_k + 0)$ puede ser escrita en la forma $\exp(2\pi i\gamma_k)$ con

$$\delta(t_k)/(2\pi) - 1 < Re\gamma_k < \delta(t_k)/(2\pi).$$

Sea $\Gamma = \bigcup_k \Gamma_k$ la unión finita de curvas cerradas de Jordan. Estableciendo $\Psi = \Psi_{t_1,\gamma_1}...\Psi_{t_n,\gamma_n}$, donde $\Psi_{t,\gamma}$ es definida por

$$\Psi_{\tau_k,\gamma}(t) := \begin{cases} (t - z_k)^{\epsilon\gamma} & \text{si} \quad t \in \Gamma_k \\ 1 & \text{si} \quad t \in \Gamma \setminus \Gamma_k, \end{cases}$$

donde $\gamma \in \mathbb{C}$, z_k pertenece al dominio abierto acotado $\mathcal{D}_k^+$ con la frontera $\Gamma_k = \partial\mathcal{D}_k^+$ si $\epsilon = \emptyset$ y $z_k \in \mathcal{D}_k^-$ si $\epsilon = -1$, fijemos una rama de la función $(z - z_k)^\gamma$ en $\mathbb{C}$ obtenida por el corte que une z_k y ∞ e intersecta Γ_k en el punto τ_k, $\epsilon = 1$ si Γ_k es orientada en dirección positiva y $\epsilon = -1$ en otro caso. Ya que $c(t_k)/c(t_k + 0) = \Psi(t_k)/\Psi(t_k + 0)$ $(k = 1, ..., n)$, la función $d := c/\Psi$ es continua en Γ. Además, la igualdad $c = d\Psi$ implica que la función Ψ es $\{p, \rho\}$-no singular y que $ind\ c^{p,\rho} = ind\ d + ind\Psi^{p,\rho}$. Por el Teorema 3.4 del capítulo 8 [14] y el Teorema 2.4 del capítulo 9 [14] uno concluye ahora que la función c es factorizable en $L_p(\Gamma, \rho)$ y que $ind\ c|L_p(\Gamma, \rho) = ind\ d + ind\ \Psi^{p,\rho}$. Por el Teorema 3.1 del capítulo 8 [14], la suficiencia de la condición (2.5) se sigue. La necesidad será demostrada una vez que la siguiente proposición sea demostrada.

Proposición 2.2.1. *Sean $a, b \in PC(\Gamma)$ con Γ una curva cerrada. Sí el operador $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ es un $\Phi-$ o $\Phi_\pm-$ operador, entonces las funciones a y b están sujetas a la condición (2.5).*

Demostración. Supongamos que A es o bien un $\Phi-$ o $\Phi_\pm-$ operador. Entonces por el Teorema 4.1 del capítulo 7 [14], $a(t \pm 0) \neq 0$ y $b(t \pm 0) \neq 0$ $(t \in \Gamma)$. La función $c = a/b$ puede ser representada en la forma $c = \Psi d$ con la función d siendo continua en Γ y $\Psi = \Psi_{t_1,\gamma_1}...\Psi_{t_n,\gamma_n}$. Con está representación podemos escribir el operador A como

$$A = b(\Psi P_\Gamma + Q_\Gamma)(dP_\Gamma + Q_\Gamma) + T \tag{2.6}$$

con cierto operador compacto T. Ya que la función d es continua y no desaparece en Γ, el operador $dP_\Gamma + Q_\Gamma$ es un $\Phi-$ operador. Esto implica que el operador $\Psi P_\Gamma + Q_\Gamma$ es un $\Phi-$ o $\Phi\pm-$operador (en concordancia con el operador A). Pero entonces, por el Teorema 2.5 del capítulo 9 [14], la función Ψ es $\{p, \rho\}$- no singular, y esto lleva a la $\{p, \rho\}$- no singularidad de la función c. Así, la condición (2.5) se satisface. □

Queda por recordar el Teorema 6.1. del Capitulo 7 [14] para finalizar la demostración del Teorema 2.2.1. □

Capítulo 3

Operadores de Toeplitz con símbolos cuasi-continuos a trozos

El capítulo 3 está basado en el artículo [28]

3.1. Funciones cuasi-continuas (QC) y sus propiedades

Notaciones: El disco unitario se denotará por $\mathbb{D}$ y el círculo unitario por $\partial\mathbb{D}$. Todos los espacios funcionales mencionados se entenderá que consisten en funciones de valor complejo. El espacio de funciones continuas en $\partial\mathbb{D}$ se denotará por C y el espacio de funciones medibles y acotadas con medida de Lebesgue en $\partial\mathbb{D}$ por L^∞.

Consideremos las funciones en L^∞ extendidas armónicamente en $\mathbb{D}$ por medio de la fórmula de Poisson

$$\hat{f}(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_r(\theta - t)f(e^{it})dt,$$

donde

$$k_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2rcos\theta + r^2}$$

es el núcleo de Poisson. Por H^∞ denotaremos el espacio de Hardy usual en $\partial\mathbb{D}$ de las funciones de frontera para las funciones holomorfas acotadas en $\mathbb{D}$.

El espacio QC, es definido por

$$QC = (H^\infty + C) \cap (\bar{H^\infty} + C).$$

En esta sección, ciertos hechos básicos sobre las funciones en QC se establecen.

Aunque nuestra principal preocupación es con QC y algunas clases de funciones estrechamente relacionadas con el círculo unitario, por conveniencia de notación, introduciremos ciertas clases análogas en la recta real y realizaremos la mayoría de las pruebas en ese contexto.

Por un intervalo en $\mathbb{R}$ siempre querremos decir un intervalo finito. La longitud del intervalo I se denota por $|I|$. Para f en $L^1(I)$, el promedio de f sobre I será denotada por $I(f)$:

$$I(f) = |I|^{-1} \int_I f(t)dt.$$

Para $a > 0$ dejamos que $M_a(f, I)$ denote el supremo sobre todos los intervalos de J de

$$|J|^{-1} \int_J |f(t) - J(f)|dt.$$

Como J se extiende sobre todos los subintervalos de I satisfaciendo $|J| \leqq a$, y establecemos

$$M_0(f, I) = \lim_{a \to 0} M_a(f, I).$$

El espacio $VMO(I)$ se define como la clase de funciones de f en $L^1(I)$ que satisfacen $M_0(f, I) = 0$.

Definiciones análogas a las anteriores pueden hacerse claramente si I, en lugar de ser un intervalo en $\mathbb{R}$, es un subarco de $\partial\mathbb{D}$. En particular, el espacio $VMO(\partial\mathbb{D})$ se puede escribir simplemente como VMO. La relevancia de estas definiciones se explica por la igualdad $QC = VMO \cap L^\infty$, la cual fue establecida en [27]. El siguiente resultado importante fue obtenido en ([28], Lema 1).

Lema 3.1.1. *Sea I un intervalo de los reales $\mathbb{R}$ (o un subarco de $\partial\mathbb{D}$) y f una función en $L^\infty(I)$. Entonces la siguiente condición es necesaria y suficiente para que f pertenezca a $VMO(I)$: para cualesquiera números positivos ϵ_1, ϵ_2, existe un número positivo δ tal que*

$$|\{|f - J(f)| > \epsilon_1\} \cap J| \leqslant \epsilon_2 |J|$$

siempre que J sea un subintervalo (o subarco) de I satisfaciendo $|J| < \delta$.

Así QC está caracterizada, vagamente hablando, como la clase de funciones en L^∞ que, sobre todos los arcos convenientemente pequeños, tienen pequeñas oscilaciones fuera de conjuntos de medida pequeña.

Para una función integrable f definida en un intervalo abierto que contiene el punto λ de $\mathbb{R}$, definimos la brecha integral de f en λ por

$$\gamma_\lambda(f) = \limsup_{\delta\to 0} |\delta^{-1}\int_\lambda^{\lambda+\delta} f(t)dt - \delta^{-1}\int_{\lambda-\delta}^{\lambda} f(t)dt|.$$

(En otras palabras $\gamma_\lambda(f)$ es el módulo de suavidad en λ de la integral indefinida de f). Una definición análoga puede obviamente ser hecha para funciones sobre el círculo.

Una estimación elemental muestra que si f está en $VMO(I)$ entonces $\gamma_\lambda(f) = 0$ para cada punto λ de I.

Lema 3.1.2. *Sea $I = (a,b)$ un intervalo abierto, λ un punto de I, y f una función sobre I que pertenece tanto a $VMO(a,\lambda)$ y $VMO(\lambda,b)$ y que satisface $\gamma_\lambda(f) = 0$. Entonces f está en $VMO(I)$.*

Demostración. Para establecer esto fíjese $\epsilon > 0$, y elijase $c > 0$ tal que

$$|J|^{-1}\int_J |f - J(f)|dt < \epsilon$$

siempre que J sea un subintervalo de (a,λ) o de (λ,b) satisfaciendo que $|J| < c$, y tal que

$$|\delta^{-1}\int_\lambda^{\lambda+\delta} fdt - \delta^{-1}\int_{\lambda-\delta}^{\lambda} fdt| < \epsilon$$

siempre que $\delta < c$. Mostramos ahora que si J es un subintervalo de I tal que $|J| < c$ entonces

$$|J|^{-1}\int_J |f - J(f)|dt < 6\epsilon$$

Por supuesto, podemos suponer que J contiene a λ, y consideremos primero el caso donde λ es el centro de J. Sea $J_+ = J\cap(\lambda,b)$ y $J_- = J\cap(a,\lambda)$. Entonces $|J_+(f) - J_-(f)| < \epsilon$ y $J(f) = \frac{1}{2}[J_+(f) + J_-(f)]$, tal que $|J_\pm(f) - J(f)| < \frac{\epsilon}{2}$. Consecuentemente

$$|J|^{-1}\int_J |f - J(f)|dt$$

$$= \frac{1}{2}|J_+|^{-1}\int_{J_+}|f - J(f)|dt + \frac{1}{2}|J_-|^{-1}\int_{J_-}|f - J(f)|dt$$
$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2}|J_+|^{-1}\int_{J_+}|f - J_+(f)|dt + \frac{1}{2}|J_-|^{-1}\int_{J_-}|f - J_-(f)|dt$$
$$< \frac{3\epsilon}{2}$$

para este caso. De hecho, para el caso en que λ es el centro de J, es suficiente asumir que $|J| < 2\epsilon$ para deducir la desigualdad anterior. Ahora supongase que J es cualquier subintervalo de I que contiene a λ y sea J_0 el intervalo más pequeño que contiene a J y cuyo centro es λ.

Entonces la estimación anterior aplica a J_0 (asumiendo que $J_0 \subset I$, lo cual podemos garantizar si escogemos un c suficientemente pequeño). Por lo tanto

$$|J|^{-1}\int_J |f - J_0(f)|dt \leq 2|J_0|^{-1}\int_{J_0}|f - J_0(f)|dt < 3\epsilon,$$

de tal manera que $|J(f) - J_0(f)| < 3\epsilon$. Las dos desigualdades anteriores se pueden combinar para darnos $|J|^{-1}\int_J |f - J(f)|dt < 6\epsilon$, que es la desigualdad deseada. La demostración del Lema 3.1.2 está completa. $\square$

Introducimos ahora ciertas clases de funciones continuas y acotadas sobre intervalos abiertos y semiabiertos las cuales son "lentamente oscilatorias" cerca de los extremos ausentes. Para una función f definida en un intervalo I denotese por $\omega(f, I)$ la oscilación de f sobre I:

$$\omega(f, I) = \sup\{|f(s) - f(t)| : s, t \in I\}.$$

Supongase que $I = (a, b]$ es un intervalo semiabierto. Decimos entonces que la función f sobre I pertenece a la clase $SO(I)$ si f es acotada y continua y si, para cada η en $(0, 1)$,

$$\lim_{\delta \to 0_+} \omega(f, [a + \eta\delta, a + \delta]) = 0.$$

Hacemos una definición análoga para un intervalo semiabierto que es abierto por la derecha, para un intervalo abierto, y para un subarco abierto en $\partial\mathbb{D}$ o para un subarco abierto propio de $\partial\mathbb{D}$.

Lema 3.1.3. *Si I es un intervalo abierto o semiabierto (o un arco abierto o semiabierto), entonces $SO(I)$ es un subconjunto de $VMO(I)$, i.e. $SO(I) \subset VMO(I)$.*

Como este resultado es una consecuencia del Lema 3.1.1, la demostración será omitida.

Lema 3.1.4. *Sea f una función en $VMO(I)$, donde $I = (a, b]$, y sea g la función sobre I definida como*

$$g(t) = (t-a)^{-1}\int_a^t f(s)ds.$$

Entonces g está en $SO(I)$.

Demostración. Sea $I_\delta = (a, a+\delta)$ para $0 < \delta < b-a$, tal que $g(t) = I_{t-a}(f)$. Entonces para $0 < \eta < 1$,

$$\begin{aligned}
|g(a+\delta) - g(a+\eta\delta)| &= |I_\delta(f) - I_{\eta\delta}(f)| \\
&\leqq |I_{\eta\delta}|^{-1}\int_{I_{\eta\delta}} |f - I_\delta(f)|dt \\
&\leqq \eta^{-1}|I_\delta|^{-1}\int_{I_\delta} |f - I_\delta(f)|dt.
\end{aligned}$$

De esta estimación es claro que

$$\omega(g, [a+\eta\delta, a+\delta]) \leqq \eta^{-1}M_\delta(f, I).$$

Ya que f está en $VMO(I)$, el lado derecho tiende a cero conforme $\delta \to 0^+$ (para η fijo), con lo cual el Lema 3.1.4 está demostrado.

□

Como se mencionó en la introducción, observaremos a las funciones en L^∞ como extendidas armónicamente en $\mathbb{D}$ por medio de la fórmula de Poisson. El kernel de Poisson para el punto z de $\mathbb{D}$ será denotado por P_z. También para $z \neq 0$ en $\mathbb{D}$, denotaremos por I_z el subarco cerrado de $\partial\mathbb{D}$ cuyo centro es $\frac{z}{|z|}$ y cuya longitud es $2\pi(1-|z|)$. Por completitud definimos $I_0 = \partial\mathbb{D}$.

Lema 3.1.5. *Para f en QC y para cualquier número positivo ϵ, existe un número positivo δ tal que $|f(z) - I_z(f)| < \epsilon$ siempre que $1 - |z| < \delta$.*

Demostración. Para demostrar esto, usamos el hecho de que la integral de Poisson es asintóticamente multiplicativa sobre QC, para lo cual vease [26].

Debido a esta propiedad, para una f dada en QC y un $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $|f|^2(z) - |f(z)|^2 < \frac{\epsilon^2}{9}$ siempre que $1 - |z| < \delta$. Debido a que

$$|f|^2(z) - |f(z)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it}) - f(z)|^2 P_z(t)dt,$$

obtenemos por la desigualdad de Schwarz la desigualdad siguiente

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{it})-f(z)|P_z(t)dt<\frac{\epsilon}{3}$$

para $1-|z|<\delta$. Una estimación elemental muestra que $(\frac{1}{2\pi})P_z(t)\geqq\frac{1}{3}|I_z|$ para e^{it} en I_z, y así

$$|I_z|^{-1}\int_{I_z}|f(e^{it})-f(z)|dt<\epsilon$$

para $1-|z|<\delta$. De esta se sigue inmediatamente que $|I_z(f)-f(z)|<\epsilon$ siempre que $1-|z|<\delta$, y el Lema está demostrado.

□

Corolario 3.1.1. *Sea f una función en QC y λ un punto de $\partial\mathbb{D}$. Entonces la función g en $[0,1)$ definida por $g(t)=f(t\lambda)$ pertenece a $SO[0,1)$.*

De hecho el Lema 3.1.4 implica que la función g_1 definida por $g_1(t)=I_{t\lambda}(f)$ pertenece a $SO[0,1)$ y el Lema 3.1.5 implica que $g-g_1$ tiende a cero en 1.

Para f en L^∞ y $0<r<1$, sea f_r la función en $\partial\mathbb{D}$ definida por $f_r(z)=f(rz)$. Un argumento relacionado al que se usó para demostrar el Lema 3.1.5 nos da el siguiente resultado.

Lema 3.1.6. *Para f en QC y g en L^∞,*

$$\lim_{r\to 1}||f_rg_r-(fg)_r||_\infty=0.$$

De hecho, como se muestra en la prueba del Lema 3.1.5, para cualquier $\epsilon>0$, $\exists\delta>0$ tal que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{it})-f(z)|P_z(t)dt<\epsilon$$

siempre que $1-|z|<\delta$. Entonces para tal z se tiene que

$$|(fg)(z)-f(z)g(z)|=|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(e^{it})-f(z)]g(e^{it})P_z(t)dt|$$

$$\leqq\frac{||g||_\infty}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{it})-f(z)|P_z(t)dt<\epsilon||g||_\infty.$$

3.2. Espacio M(QC) de ideales maximales de QC

Esta sección concierne con el espacio de Gelfand de QC.

En general para $\mathcal{B}$ siendo un álgebra conmutativa de Banach denotamos por $M(\mathcal{B})$ el espacio de los funcionales lineales multiplicativos sobre $\mathcal{B}$, con su topología de Gelfand. El mismo símbolo será usado para denotar un elemento de $\mathcal{B}$ y su transformación de Gelfand (transformada de Gelfand). Si $\mathcal{A}$ es un subálgebra cerrada de $\mathcal{B}$, cada funcional en $M(\mathcal{B})$ induce por restricción un funcional en $M(\mathcal{A})$. Para $x \in M(\mathcal{A})$ denotamos por $M_x(\mathcal{B})$ el conjunto de los funcionales en $M(\mathcal{B})$ cuyas restricciones en $\mathcal{A}$ son iguales a x.

Las álgebras de interes en este artículo contienen todas a C, el espacio de las funciones continuas en $\partial\mathbb{D}$. Identificamos a $M(C)$ con $\partial\mathbb{D}$ en la forma usual. Como se puede ver fácilmente, si $\mathcal{B}$ es una subálgebra de L^∞ que contiene a C, y si λ es un punto de $\partial\mathbb{D}$ entonces una función en $\mathcal{B}$ es continua en λ si y sólo si esta toma un valor constante sobre $M_\lambda(\mathcal{B})$. Denotamos por $M_\lambda^+(\mathcal{B})$ al conjunto de todos los x en $M_\lambda(\mathcal{B})$ con la propiedad de que $f(x) = 0$ siempre que f se encuentre en B y $lim_{z\to\lambda^+} f(z) = 0$.

El conjunto $M_\lambda^-(\mathcal{B})$ se define análogamente.

Por supuesto podemos interpretar a $M(QC)$, como un conjunto de QC^*, el dual de QC (con su topología *-débil). Observaremos a cada subarco de δ como un elemento de QC^* identificando el arco con el correspondiente funcional de promedio sobre QC. El conjunto de todos esos funcionales será denotado por G. Por el Lema 3.1.1 cualquier funcional en la clausura *-débil de G que no está en G mismo es un elemento $M(QC)$. También observaremos cada punto de $\mathbb{D}$ como un elemento QC^* identificando el punto con el funcional correspondiente de evaluación (aplicado a extensiones armónicas). Por la multiplicatividad asintótica de la integral de Poisson en QC, cualquier funcional en la clausura *-débil de $\mathbb{D}$ que no está en $\mathbb{D}$ mismo, es un elemento de $M(QC)$.

Lema 3.2.1. *La clausura *-débil de $\mathbb{D}$ contiene a $M(QC)$.*

Demostración. Para demostrar esto, sea x cualquier punto de $M(QC)$. Cualquier vecindad *-débil de x en QC^* contiene una vecindad de la forma

$$\{\phi \in QC^* : |\phi(f_i) - f_i(x)| < 1, j = 1, ...n\}$$

Donde $f_1, f_2, ..., f_n$ son funciones en QC. Para completar la demostración es suficiente mostrar que existe un z en $\mathbb{D}$ tal que $|f_j(z) - f_j(x)| < 1$ para cada j. Sea $f = |f_1 - f_1(x)| + ... + |f_n - f_n(x)|$. Entonces f está en QC (ya que QC es una C^*-álgebra) y $f(x) = 0$. Así

f no es invertible en QC, así el ínfimo esencial de f en $\partial\mathbb{D}$ debe ser cero. Esto implica que el ínfimo de la integral de Poisson de f en $\mathbb{D}$ es cero. Ya que $|f_j - f_j(x)| \leqq f$ en $\mathbb{D}$ para cada j, lo que demuestra el Lema.

$\square$

El Lema anterior en conjunto con el Lema 3.1.5 implica que $M(QC)$ es el conjunto de puntos límites *-débil de G que no pertenecen a G.

Para λ en $\partial\mathbb{D}$ y para $c > 0$, sea $G_{\lambda,c}$ el conjunto de arcos I en G tales que la distancia entre λ y el centro de I (medida a lo largo de $\partial\mathbb{D}$) no excede $c|I|$. En particular $G_{\lambda,0}$ es el conjunto de arcos con centro λ. Sea $M_\lambda^0(QC)$ el conjunto de funcionales en $M_\lambda(QC)$ que se encuentran en la clausura *-débil del radio de $\mathbb{D}$ terminando en λ. Un argumento directo (basado por el ejemplo del Lema 3.1.1) muestra que para cualquier $c > 0$, $M_\lambda^0(QC)$ es el conjunto de funcionales en $M_\lambda(QC)$ que se encuentran en la clausura *-débil de $G_{\lambda,c}$.

Lema 3.2.2. *$M_\lambda^+(QC) \cap M_\lambda^-(QC) = M_\lambda^0(QC)$ y $M_\lambda^+(QC) \cup M_\lambda^-(QC) = M_\lambda(QC)$.*

Demostración. Por el Lema 3.1.1 tenemos inmediatamente que $M_\lambda^0(QC) \subset M_\lambda^+(QC) \cap M_\lambda^-(QC)$.

Para establecer la inclusión inversa, supongamos que x pertenece a $M_\lambda(QC)$ pero no a $M_\lambda^0(QC)$. Entonces existe un f en QC tal que $f = 0$ en $M_\lambda^0(QC)$ pero que $f(x) \neq 0$.

Escojase una función u en $\partial\mathbb{D}$ que es continua excepto por una discontinuidad de salto en λ, con $u(\lambda_+) = 0$ y $u(\lambda_-) = 1$. La función uf está en $VMO(\partial\mathbb{D} \setminus \{\lambda\})$ y, ya que $f = 0$ sobre $M_\lambda^0(QC)$, se puede verificar facilmente que $\gamma_\lambda(uf) = 0$. Por el Lema 3.1.2 uf está en QC y por lo tanto también lo está $(1-u)f$. La función uf desaparece en $M_\lambda^+(QC)$ mientras que $(1-u)f$ desaparece en $M_\lambda^-(QC)$. Ya que $f = uf + (1-u)f$ y $f(x) \neq 0$, es imposible que x pertenezca a ambas $M_\lambda^+(QC)$ y $M_\lambda^-(QC)$. La primera igualdad del Lema 3.2.2 queda ahora establecida.

Para establecer la segunda igualdad, supongase que x pertenece a $M_\lambda(QC)$ pero no a $M_\lambda^+(QC)$. Entonces existe una f en QC tal que $f = 0$ en $M_\lambda^+(QC)$ y $f(x) \neq 0$. La primera condición implica que f tiene como límite superior en λ. Sea g cualquier función en QC cuyo límite inferior en λ es cero. Entonces fg tiene como límite 0 en λ y así $fg = 0$ en $M_\lambda(QC)$. En particular, $f(x)g(x) = 0$, de tal manera que $g(x) = 0$. Se sigue entonces que x está en $M_\lambda^-(QC)$ y la demostración del Lema 3.2.2 está completa.

$\square$

3.3. Funciones cuasi-continuas a trozos (PQC)

Sea PC el espacio de funciones en L^∞ que tiene límites unilaterales en todos los puntos de $\partial\mathbb{D}$, y sea PC_0 el espacio de funciones en PC con un número finito de discontinuidades. Sea PQC_0 la subálgebra y PQC la subálgebra cerrada en L^∞ generada por QC y PC_0. En está sección, establecemos criterios para el operador de Toeplitz inducido por una función en PQC ser de Fredholm en el espacio de Hardy H^2, y obtenemos una fórmula de su correspondiente índice.

Para f en PQC y $\lambda = e^{i\theta}$ en $\partial\mathbb{D}$, denotemos por $\beta_\lambda(f,\delta)$ $(\delta > 0)$ la distancia de 0 a el segmento con los puntos extremos

$$\delta^{-1}\int_\theta^{\theta+\delta} f(e^{it})dt \qquad y \qquad \delta^{-1}\int_{\theta-\delta}^{\theta} f(e^{it})dt,$$

y definase $\beta_\lambda(f)$ como

$$\beta_\lambda(f) = \liminf_{\delta\to 0} \beta_\lambda(f,\delta).$$

Sea P la proyección de $L^2(\mathbb{T})$ sobre $H^2 = L^2_+(\mathbb{T})$. Para f en L^∞, el operador de Toeplitz inducido por f está definido para $\varphi \in H^2$ por la fórmula $T_f\varphi = P(f\varphi)$ y será denotado por T_f [10].

Teorema 3.3.1. *Las siguientes condiciones son equivalentes para una función invertible f en PQC*

(i) T_f es un operador de Fredholm en el espacio H^2;

(ii) $\beta_\lambda(f) > 0$ para cada λ en $\partial\mathbb{D}$;

(ii) La extención armónica de f está acotada lejos de 0 en el anillo $1-\epsilon < |z| < 1$.

Demostración. La demostración puede ser basada en el siguiente criterio [11]: El operador de Toeplitz inducido por una función unimodular es Fredholm si y sólo si la distancia de la función de $H^\infty + C$ es menor que 1. El primer paso es obtener ciertas estimaciones de distancia. Para f y g en L^∞ y λ en $\partial\mathbb{D}$, definimos

$$\operatorname{dist}_\lambda(f,g) = ess\ \limsup_{z\to\lambda} |f(z)-g(z)|.$$

(Equivalentemente, $\mathrm{dist}_\lambda(f,g)$ es el máximo de $|f-g|$ en la fibra $M_\lambda(L^\infty)$.)

Para S un subespacio de L^∞, definimos

$$\operatorname*{dist}_\lambda(f,s) = \text{ínf}\{\operatorname*{dist}_\lambda(f,g) : g \in S\}.$$

Utilizaremos el siguiente principio de localización: Si el subespacio S en L^∞ es un módulo sobre C, entonces

$$\mathrm{dist}(f,S) = \text{máx}\{\operatorname*{dist}_\lambda(f,S) : \lambda \in \partial\mathbb{D}\}$$

para todo f en L^∞.

Una prueba, dada por el caso $S = H^\infty + C$ pero valida en general, se puede encontrar en [24]. El argumento es generado, en un contexto más general, con G. E. Shilov [29]. □

Lema 3.3.1. *Para f en PQC,*

$$\mathrm{dist}(f,QC) = \text{máx}\{\frac{1}{2}\gamma_\lambda(f) : \lambda \in \partial\mathbb{D}\}.$$

Demostración. Por el principio de localización, es suficiente probar que $\mathrm{dist}_\lambda(f,QC) = \frac{1}{2}\gamma_\lambda(f)$ para cada $\lambda \in \partial\mathbb{D}$. Por simplicidad, supongamos que $\lambda = 1$. Si g esta en QC entonces, si $\gamma_1(g) = 0$, tenemos que

$$\gamma_1(f) = \gamma_1(f-g) \leqq 2\operatorname*{dist}_1(f,g),$$

Por lo que la desigualdad $\mathrm{dist}_1(f,QC) \geqq \frac{1}{2}\gamma_1(f)$ se cumple.

Para obtener la desigualdad inversa, podemos asumir sin pérdida de generalidad que f está en PQC_0. Entonces, si multiplicamos a f por una función en C la cual es igual a 1 en una vecindad suficientemente pequeña de 1 e igual a cero fuera de una vecindad un poco más grande. Podemos suponer que f está ahora en $VMO(\partial\mathbb{D}\setminus\{1\})$.

Definamos las funciones g_1 y g_2 en $\partial\mathbb{D}$ por

$$g_1(e^{it}) = t^{-1}\int_0^t f(e^{is})ds, \qquad 0 < t < 2\pi,$$

$$g_2(e^{it}) = -t^{-1}\int_t^0 f(e^{is})ds, \qquad -2\pi < t < 0.$$

Las funciones g_1 y g_2 pertenecen a $SO(\partial\mathbb{D}\setminus\{1\})$ por el Lema 3.1.4, entonces estas pertenecen a $VMO(\partial\mathbb{D}\setminus\{1\})$ por el Lema 3.1.3. Por lo tanto, la función $h = f - (g_1 + g_2)$

pertenece a $VMO(\partial\mathbb{D} \setminus \{1\})$. Es fácil verificar que $\gamma_1(h) = 0$, entonces h está en QC por el Lema 3.1.2. Esto satisface que $\mathrm{dist}_1(f, QC) = \mathrm{dist}_1(g_1 + g_2, QC)$.

Sean g_3 y g_4 las reflexiones de g_1 y g_2 sobre el eje real. Las funciones $g_1 + g_3$ y $g_2 + g_4$ pertenecen a QC (por la misma razón de que h lo es), y por lo tanto la función

$$g = \frac{1}{2}(g_1 + g_2 + g_3 + g_4)$$

está también en QC. Se sigue que $\mathrm{dist}_1(f, QC) \leqq \mathrm{dist}_1(g_1 + g_2, g)$. Pero

$$g_1 + g_2 - g = \frac{1}{2}(g_1 - g_4) + \frac{1}{2}(g_2 - g_3),$$

a partir de esto, es evidente que

$$\lim_{z\to 1} \sup |g_1(z) + g_2(z) - g(z)| = \frac{1}{2}\gamma_1(f).$$

Así $\mathrm{dist}_1(f, QC) \leqq \frac{1}{2}\gamma_1(f)$, y la demostración del Lema 3.3.1 está completada. □

Lema 3.3.2. *Para f en PQC,*

$$\mathrm{dist}(f, H^\infty + C) = \max\{\frac{1}{2}\gamma_\lambda(f) : \lambda \in \partial\mathbb{D}\}.$$

Demostración. Por el principio de localización, es suficiente demostrar que $\mathrm{dist}_\lambda(f, H^\infty) = \frac{1}{2}\gamma_\lambda(f)$ para cada $\lambda \in \partial\mathbb{D}$. Por simplicidad, supongamos que $\lambda = 1$. La desigualdad $\mathrm{dist}_1(f, H^\infty) \leqq \frac{1}{2}\gamma_1(f)$ se establece por la prueba anterior. Para la desigualdad inversa, el argumento será por contradicción, supongamos que hay un h en H^∞ tal que $\mathrm{dist}_1(f, h) < \frac{1}{2}\gamma_1(f)$. Podemos claramente suponer sin pérdida de generalidad que f está en PQC_0. Entonces, modificando f como en la demostración del Lema anterior, podemos suponer que tiene la forma $f = \chi_+ g_+ + \chi_- g_-$, donde g_+ y g_- están en QC; χ_+ es la función característica de la mitad superior de $\partial\mathbb{D}$, y χ_- es la función característica de la mitad inferior de $\partial\mathbb{D}$. Elegimos una sucesión (δ_n) de números positivos que tienden a 0 de tal manera que los límites

$$a = \lim_{n\to\infty} \delta_n^{-1} \int_0^{\delta_n} f(e^{it})dt,$$

$$b = \lim_{n\to\infty} \delta_n^{-1} \int_{-\delta_n}^{0} f(e^{it})dt$$

existen y satisfacen $|a - b| = \gamma_1(f)$. Sea $x_n = (1 - \frac{\delta_n}{2\pi})$ y sea x un punto de acumulación en $M(H^\infty)$ de la sucesión (x_n). Sea S el soporte de la medida representativa en $M(L^\infty)$ para x y sea $S_+ = S \cap M_1^+(L^\infty)$ y $S_- = S \cap M_1^-(L^\infty)$. El conjunto S es la unión disjunta de S_+ y S_-, y S_+ y S_- ambos son no vacíos (por que, por ejemplo, χ_+ tiene la integral $1/2$ con respecto a la medida representativa para x).

El conjunto S es un conjunto antisimétrico para $H^\infty + C$, i,e, cada $g \in H^\infty + C$ que es real en S, es una constante en S (ver [5], Sección 1.21]), por lo que g_+ y g_- ambas son constantes en S. Por los Lemas 3.1.1 y 3.1.5 tenemos que $g_+(x) = a$ y $g_-(x) = b$, entonces $g_+ = a$ y $g_- = b$ en S. Por lo tanto $f = a$ en S_+ y $f = b$ en S_-. Ya que $|f - h| < \gamma_1(f)/2$, la imagen de $h|S_+$ está contenida en el disco $|z - a| < \gamma_1(f)/2$ y la imagen de $h|S_-$ está contenida en el disco $|z - b| < \gamma_1(f)/2$. Por que $|a - b| = \gamma_1(f)$, se sigue por el teorema de Runge que la función χ_{S_+} puede ser aproximada uniformemente en S por polinomios en h. Ahora el conjunto S es el conjunto de picos generalizados para H^∞ (ver [[5], pág. 20]). Entonces el álgebra de restricción $H^\infty|S$ es cerrada (ver [8, sección II.12]).

Por lo tanto χ_{S_+} está en $H^\infty|S$, en contradicción con el hecho de que S es un conjunto de antisimetría para H^∞. Esta contradicción completa la demostración del Lema 3.3.2.

□

Si f es una función unimodular en PQC, entonces podemos ver por el Lema 3.3.2 y el criterio establecido en el comienzo de esta sección que $T(f)$, es un operador de Fredholm si y sólo si $\gamma_\lambda(f) < 2$ para todo λ en $\partial\mathbb{D}$. Es bien conocido que, si f es cualquier función invertible en L^∞, entonces $T(f)$ es un operador de Fredholm si y sólo si $T(f/|f|)$ lo es. (La demostración: escribiendo $T(f/|f|) = T(h)^*T(f)T(h)$, donde h es la función exterior que satisface $|h| = |f|^{-1/2}$.) La equivalencia de las condiciones (i) y (ii) del Teorema 3.3.1 se establecerá así una vez que el siguiente Lema haya sido demostrado.

Lema 3.3.3. *Si f es una función invertible en PQC, entonces $\beta_\lambda(f) > 0$ si y sólo si $\gamma_\lambda(f/|f|) < 2$.*

Demostración. Tomemos $\lambda = 1$. Supongamos que (δ_n) es una sucesión de números positivos que tienden a cero tal que las sucesiones (a_n) y (b_n) definidas por

$$a_n = \delta^{-1} \int_0^{\delta_n} f(e^{it})dt,$$

$$b_n = \delta^{-1} \int_{-\delta_n}^{0} f(e^{it})dt,$$

convergen a a y b respectivamente. Para la invertibilidad de f junto con el Lema 3.1.1 y la aproximibilidad uniforme de f por funciones en PQC_o, uno fácilmente verifica que a y b no son cero, y que

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n^{-1} \int_0^{\delta_n} (f/|f|)dt = a/|a|,$$

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n^{-1} \int_{-\delta_n}^{0} (f/|f|)dt = b/|b|.$$

Ahora si $\beta_1(f) = 0$, uno puede elegir una sucesión (δ_n) así que la distancia de 0 a el segmento con puntos finales a_n y b_n tienden a 0. Entonces el segmento con puntos finales a y b debe pasar a través de 0. Eso significa que $|(a/|a|)-(b/|b|)| = 2$, así que $\gamma_1(f/|f|) = 2$. Recíprocamente, si $\gamma_1(f/|f|) = 2$, es posible elegir la sucesión (δ_n) tal que $|(a/|a|) - (b/|b|)| = 2$, lo que significa que el segmento con puntos finales a y b pasan a través de 0. Entonces la distancia entre 0 y el segmento con los extremos a_n y b_n tiende a cero, así que $\beta_1(f) = 0$. La demostración del Lema 3.3.3 está completa.

□

La demostración del Teorema 3.3.1 se concluye por el siguiente Lema, el cual establece la equivalencia de las condiciones (*ii*) y (*iii*). Para f una función en L^∞ y λ un punto en $\partial\mathbb{D}$, denotamos a $C_\lambda(f)$ como "cluster set" (todos los puntos límite) de la extensión armónica de f en λ.

Lema 3.3.4. *Si f es una función invertible en PQC, entonces $\beta_\lambda(f) > 0$ si y sólo si $C_\lambda(f)$ contiene a 0.*

Demostración. Supongamos que $\lambda = 1$. Las cantidades $\beta_1(f)$ y $dist(0, C_1(f))$ dependen continuamente de f. Esto se sigue por un argumento sencillo que si una de las cantidades desaparecen para f, entonces podemos aproximar uniformemente a f por funciones en PQC_0 para el cual las correspondientes cantidades desaparecen. Así, podemos suponer sin pérdida de generalidad que f está en PQC_0. Entonces, modificando f lejos del punto 1 (usando, por ejemplo, el Lema 3.1.2), podemos suponer que f tiene la forma $f = \chi_+ g_+ + \chi_- g_-$, donde g_+ y g_- son funciones invertibles en QC, y χ_+ y χ_- son como en la demostración del Lema 3.3.2.

Para $0 \leqq t \leqq 1$, sea Γ_t el arco circular de $\overline{\mathbb{D}}$ que pasa por 1 y -1 y forma el ángulo $\pi(t - \frac{1}{2})$ con el eje real, el ángulo es contado como positivo cuando Γ_t está en el semi plano superior y negativo cuando Γ_t está en el semi plano inferior. En Γ_t, las funciones χ_+ y χ_- toman valores contantes t y $1-t$, respectivamente.

Para $0 < t, \delta < 1$, denotemos como $z_{t,\delta}$ el punto en Γ_t, cuya distancia al 1 es δ, y sea $I_{t,\delta} = I_{st,\delta}$. Por el Lema 3.1.6,

$$\lim_{\delta\to 0}[f(z_{t,\delta}) - tg_+(z_{t,\delta}) - (1-t)g_-(z_{t,\delta})] = 0,$$

el límite es uniforme en t. Por el Lema 3.1.5,

$$\lim_{\delta\to 0}[g_+(z_{t,\delta}) - I_{t,\delta}(g_+)] = 0,$$

el límite es uniforme en t, y análogamente el resultado se cumple para g_-. Por el Lema 3.1.1,

$$\lim_{\delta\to 0}[I_{t,\delta}(g_+) - \delta^{-1}\int_0^\delta f(e^{is})ds] = 0,$$

$$\lim_{\delta\to 0}[I_{t,\delta}(g_-) - \delta^{-1}\int_{-\delta}^0 f(e^{is})ds] = 0,$$

los límites son uniformes para t en cualquier subintervalo cerrado de $(0,1)$. Combinando la observación anterior, podemos dibujar la siguiente conclusión.

$$\lim_{\delta\to 0}[f(z_{t,\delta}) - t\delta^{-1}\int_0^\delta f(e^{is})ds - (1-t)\delta^{-1}\int_{-\delta}^0 f(e^{is})ds] = 0 \tag{3.1}$$

uniformemente para t en cualquier subintervalo cerrado de $(0,1)$. Ahora supongamos que $\beta_1(f) = 0$. Entonces hay una sucesión (δ_n) de números positivos que tienden a 0 y a una sucesión (t_n) de números en $(0,1)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty}[t_n\delta_n^{-1}\int_0^{\delta_n} f(e^{is})ds + (1-t_n)\delta_n^{-1}\int_{-\delta_n}^0 f(e^{is})ds] = 0.$$

Sea $z_n = z_{t_n,\delta_n}$. Por el Lema 3.1.1 y la invertibilidad de las funciones g_+ y g_-,

$$\liminf_{\delta\to 0}|\delta^{-1}\int_0^\delta f(e^{is})ds| > 0,$$

$$\liminf_{\delta\to 0}|\delta^{-1}\int_{-\delta}^0 f(e^{is})ds| > 0.$$

Por lo tanto, la sucesión (t_n) puede agruparse ni en 0 ni en 1, así podemos concluir de (3.1) que $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0$, la cual podemos pensar que $C_1(f)$ contiene a 0. Supongamos, reciprocamente, que $C_1(f)$ contiene a 0. Entonces hay una sucesión (δ_n) de números positivos que tienden a 0 y a una sucesión (t_n) en $(0,1)$ tal que $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0$, donde z_n es definida como anteriormente se hizo. Ahora f pertenece a la subálgebra cerrada de L^∞ generada por H^∞ y las funciones en PC que son continuas en $\partial\mathbb{D}\setminus\{1,-1\}$. De hecho, f es invertible en tal álgebra, esto se sigue por un resultado en [25] (ver el Corolario 6) que hay números t' y t'' en $(0,1)$ tal que f es separada de 0 arriba de $\Gamma_{t'}$, y abajo de $\Gamma_{t''}$. Por lo tanto, la sucesión (t_n) está acumulada sólo en $[t'', t']$, y podemos concluir por (3.1) que

$$\lim_{n\to\infty}[t_n\delta_n^{-1}\int_0^{\delta_n} f(e^{is})ds + (1-t_n)\delta_n^{-1}\int_{-\delta_n}^0 f(e^{is})ds] = 0,$$

lo que significa que $\beta_1(f) = 0$. Esto completa la demostración del Lema 3.3.4 y, con esto la demostración del Teorema 3.3.1.

$\square$

Extensión armónica

Sea $\mathbb{D}$ el disco unitario abierto en el plano complejo. La extensión armónica de una función $f \in L^1$ es la función $\hat{f}$ definida en $\mathbb{D}$ por

$$\hat{f}(re^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n r^{|n|} e^{in\theta} \qquad (0 \leq r < 1,\ 0 \leq \theta < 2\pi).$$

Notese que $\hat{f}$ puede también ser definida vía la integral de Poisson,

$$\hat{f}(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_r(\theta - t) f(e^{it})dt,$$

donde

$$k_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2rcos\theta + r^2}$$

es el núcleo de Poisson. Algunas veces es conveniente denotar la extensión armónica $\hat{f}$ por hf. Para $r \in [0,1)$ fijo, la función $\hat{f}(re^{i\theta})$ puede ser vista como una función dada en el círculo unitario $\mathbb{T} = \{e^{i\theta} : 0 \leq \theta < 2\pi\}$, denotemos esta función por $h_r f$ de f_r, es decir,

$$f_r(e^{i\theta}) = (h_r f)(e^{i\theta}) = \hat{f}(re^{i\theta}) = (hf)(re^{i\theta}).$$

Pensaremos a las funciones en L^p como extendidas armónicamente en $\mathbb{D}$, esto es, como si fuera dado en el disco unitario cerrado $clos\mathbb{D}$.

Propiedades básicas de la extensión armónica. (a) La extensión armónica $\hat{f}$ de una función $f \in L^1$ es armónica en $\mathbb{D}$, i.e., $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{D})$ y $\Delta\hat{f} = 0$, donde Δ es el operador de Laplace.

(b) Sea $f \in L^p$. Si $1 \leq p \leq \infty$, entonces

$$\sup_{r\in[0,1)} ||h_r f||_p \leq ||f||_p$$

y si $1 \leq p < \infty$, entonces

$$||h_r f - f||_p \to 0 \qquad \textit{cuando} \qquad r \to 1^-.$$

Si $f \in C$, entonces

$$||h_r f - f||_\infty \to 0 \qquad \textit{cuando} \qquad r \to 1^-,$$

y si $f \in L^\infty$, entonces $h_r f$ converge a f en la topología *-débil de $L^\infty = (L^1)^*$, esto es,

$$\int_0^{2\pi} (h_r f)(e^{i\theta}) g(e^{i\theta}) d\theta \to \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) g(e^{i\theta}) d\theta \qquad (r \to 1^-)$$

para cada $g \in L^1$.

(c) (**Teorema de Fatou**). Sea F una función armónica en $\mathbb{D}$, fijamos

$$F_r(e^{i\theta}) = F(re^{i\theta}),$$

y supongamos $\sup_{r\in[0,1)} ||F_r||_p < \infty$, donde $1 \leq p \leq \infty$. Entonces el límite no tangencial

$$f(e^{i\theta}) := \lim_{z\to e^{i\theta}} F(z)$$

existe y es finito en casi todo $\mathbb{T}$, y la función de valor frontera f pertenece a L^p. Si $1 < p \leq \infty$, entonces la extensión armónica $\hat{f}$ de f coincide con F, pero si $p = 1$, entonces, todo lo que uno puede decir, es que existe una medida compleja $d\sigma$ en $\mathbb{T}$ la cual es singular con respecto a la medida de Lebesgue tal que

$$F(re^{i\theta}) = \hat{f}(re^{i\theta}) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_r(\theta - t)d\sigma(t),$$

donde k_r es el núcleo de Poisson.

Si f es una función en PQC para la cual la extensión armónica está separada de 0 en el anillo $1 - \epsilon < |z| < 1$, el índice Ind f está denotado como el número de rotaciones de la curva $f(z)$ cuando z corre la circunferencia $|z| = r$, donde $1 - \epsilon < r < 1$.

Teorema 3.3.2. *Si f está en PQC y $T(f)$ es Fredholm, entonces Ind $T(f) = -$Ind f.*

Demostración. Para el caso donde f está en QC este resultado ha sido establecido por R. G. Douglas [9], y podemos reducir el caso general a aquel. Supongamos primero que f es una función unimodular en PQC tal que $T(f)$ es Fredholm. Como en el desarrollo de la demostración del Teorema 3.3.1, entonces tenemos $\gamma_\lambda(f) < 2$ para todo $\lambda \in \partial\mathbb{D}$. Esto implica por el Lema 3.3.1 que $dist(f, QC) < 1$, así hay una función g en QC con $||f-g|| < 1$. La función g está entonces separada de 0 y así es invertible en QC. Por el resultado mencionado arriba de Douglas, el operador $T(g)$ es Fredholm y Ind $T(g) = -$Ind g. Ya que f es unimodular tenemos $||1 - \bar{f}g||_\infty < 1$, así $||1 - T(\bar{f}g)|| < 1$. Por lo que $T(\bar{f}g)$ es invertible. Ya que $T(\bar{f}g) - T(\bar{f})T(g)$ es compacto [[10],pág.184], podemos concluir que Ind $T(\bar{f})$+Ind $T(g) = 0$, así Ind $T(f) =$ Ind $T(g) = -$Ind g. La desigualdad $||1-\bar{f}g||_\infty < 1$ también implica que Ind $\bar{f}g = 0$. Por el Lema 3.1.6 se sigue que Ind $\bar{f}g =$ Ind $\bar{f}$ + Ind g, así Ind $f =$ Ind g, y el Teorema está establecido para el caso donde f es unimodular.

Consideremos ahora una función arbitraria f en PQC tal que $T(f)$ es Fredholm. Para $0 \leqq t \leqq 1$ sea $f_t = \frac{f}{|f|^t}$. Entonces f_t está en PQC y $T(f_t)$ es Fredholm en cualquier

t. El mapeo $t \to f_t$ es continuo en norma L^∞, y el mapeo $t \to T(f_t)$ es continuo en norma del operador. Por lo que Ind $f =$ Ind f_1 y Ind $T(f) =$ Ind $T(f_1)$. Como f_1 es unimodular, la igualdad Ind $T(f) = -$Ind f se sigue por el caso especial ya establecido, y la demostración del Teorema 3.3.2 está completa.

□

3.4. Espacio M(PQC) de ideales maximales de PQC

En esta sección obtendremos información sobre el espacio de Gelfand de PQC. Supongamos que x es un punto de $M_\lambda(QC)$ (donde λ pertenece a $\partial\mathbb{D}$) y y es un punto en $M_x(PQC)$. Sí una función en PQC es continua en λ, entonces su valor en y es igual a su valor en λ. Supongamos que u es una función en PC la cual no es continua en λ. Entonces la función

$$\Big[u - \frac{u(\lambda+) + u(\lambda-)}{2}\Big]^2 \Big/ \Big[\frac{u(\lambda+) - u(\lambda-)}{2}\Big]^2$$

es continua en λ y toma el valor 1 ahí, de esta manera es igual a 1 en y. Esto significa que $u(y)$ puede se igual o bien a $u(\lambda+)$ o a $u(\lambda-)$. Sí elegimos una función particular u, entonces alguna función en PC difiere de un múltiplo constante de ese por una función la cual es continua en λ, así que la acción de y en PC es determinada por su acción en tal función: tenemos o bien $u(y) = u(\lambda+)$ para toda u en PC o $u(y) = u(\lambda-)$ para toda u en PC. Así la acción de y en PQC es determinado por su acción en PC y su acción en QC, de esto se sigue que la fibra $M_x(PQC)$ contiene a lo mas dos puntos.

Lema 3.4.1. *Sí x está en $M_\lambda^+(QC)$, entonces hay un y en $M_x(PQC)$ tal que $u(y) = u(\lambda+)$ para todo u en PC. Sí x está en $M_\lambda^+(QC) \setminus M_\lambda^0(QC)$, entonces la fibra $M_x(PQC)$ es un "singleton".*

Demostración. Para probar esto, supongamos primero que x es algún funcional en $M_\lambda^+(QC)$. Definamos la función y en PQC_0 como sigue: para $f = \sum_1^n u_k g_k$ con $u_1, ..., u_n$ en PC_0 y $g_1, ..., g_n$ en QC, sea

$$y[f] = \sum u_k(\lambda+) g_k(x).$$

Para ver que la definición tiene sentido, basta con tener en cuenta que, si además $f = \sum_1^m u_i' g_i'$ con $u_1', ..., u_m'$ en PC_0 y $g_1', ..., g_m'$, en QC, entonces la función QC

$$\sum u_k(\lambda+) g_k - \sum u_i'(\lambda+) g_i'$$

tiene límite superior 0 en λ y que desaparece en $M_\lambda^+(QC)$. El funcional y es claramente multiplicativo en PQC_0 y se puede ver que es acotado, además se extiende por continuidad a un funcional lineal multiplicativo en PQC. Esto prueba la primera declaración del Lema. Para probar la segunda declaración, supongamos que x pertenece a $M_\lambda^+(QC) \setminus M_\lambda^0(QC)$, y sea y algún funcional en $M_x(PQC)$. Elegimos una función g en QC tal que $g(x) = 1$ y $g = 0$ en $M_\lambda^0(QC)$. Sea u alguna función en PC la cual es continua excepto en λ. Mostraremos que $u(y) = u(\lambda+)$, la cual, en vista de la observación hecha en el inicio de esta sección, podriámos completar la demostración. Por los Lemas 3.1.1 y 3.1.2, la funcion ug pertenece a QC. La función $[u - u(\lambda+)]g$ tiene límite superior 0 en λ y desaparece en x. Así $(ug)(x) = u(\lambda+)g(x) = u(\lambda+)$. Pero también $(ug)(x) = u(y)g(y)$, por lo que la igualdad deseada se sigue y el Lema está demostrado. $\square$

Es claro que el análogo del Lema 3.4.1 para $M_\lambda^-(QC)$ también se cumple. Así, por el Lema 3.2.2, la fibra $M_x(PQC)$ es un "dobletón" para x en $M_\lambda^0(QC)$ y un "singletón" para x en $M_\lambda(QC) \setminus M_\lambda^0(QC)$.

Para x en $M_\lambda^+(QC)$, denotamos por $(x, 1)$ a el único funcional en $M_x(PQC)$ tal que $u(x, 1) = u(\lambda+)$ para todo u en PC. Para x en $M_\lambda^-(QC)$, denotamos por $(x, 0)$ al único funcional en $M_x(PQC)$ tal que $u(x, 0) = u(\lambda-)$ para todo u en PC. Con está notación, podemos considerar $M(PQC)$ como un subconjuto de $M(QC) \times \{0, 1\}$ (a pesar de que $M(PQC)$ no tiene la topología del producto). Es fácil describir la topología en $M(PQC)$ en términos de eso en $M(QC)$, por que $M(PQC)$ lleva la topología mas gruesa que hace las funciones en PQC_0 continuas. La descripción se sigue.

Para x en $M(QC)$, sea $\mathfrak{N}(x)$ denota la familia de vecindades abiertas de x. Para x en $M_\lambda(QC)$, y N en $\mathfrak{N}(x)$, sea $N_\lambda = N \cap M_\lambda(QC)$, y sean $N_{\lambda+}$ y $N_{\lambda-}$ que denotan los conjuntos de puntos en N que yacen sobre los semicírculos $\{e^{it} : \arg\lambda < t < \pi + \arg\lambda\}$ y $\{e^{it} : -\pi + \arg\lambda < t < \arg\lambda\}$, respectivamente. Entonces, si x está en $M_\lambda^+(QC)$, los conjuntos

$$[(N_\lambda \times \{1\}) \cup (N_{\lambda+} \times \{0, 1\})] \cap M(PQC), \qquad N \in \mathfrak{N}(x),$$

de una base de vecindades para $(x, 1)$. Sí x está en $M_\lambda^-(QC)$, los conjuntos

$$[(N_\lambda \times \{0\}) \cup (N_{\lambda-} \times \{0, 1\})] \cap M(PQC), \qquad N \in \mathfrak{N}(x),$$

de una base de vecindades para $(x, 0)$.

Capítulo 4

Factorización de Wiener-Hopf

4.1. Factorización de Wiener-Hopf

Sea Γ una curva de Jordan en el plano complejo, i.e. Γ es homeomorfa a un círculo.

Definición 4.1.1. *Las curvas que satisfacen*

$$C_\Gamma := \sup_{t\in\Gamma}\sup_{\epsilon>0}\frac{|\Gamma(t,\epsilon)|}{\epsilon} < \infty$$

son llamadas comúnmente Curvas de Carleson, también se le suele llamar curva Ahlfors regular, curva David regular o curva Ahlfors-David.

Definición 4.1.2. *El conjunto de todos los pesos en Γ satisfaciendo*

$$\omega \in L^p(\Gamma),\ \omega^{-1} \in L^q(\Gamma)\ (1/p + 1/q = 1)$$

$$\sup_{t\in\Gamma}\sup_{\epsilon>0}(\frac{1}{\epsilon}\int_{\Gamma(t,\epsilon)}\omega^p(\tau)|d\tau|)^{1/p}(\frac{1}{\epsilon}\int_{\Gamma(t,\epsilon)}\omega^{-q}(\tau)|d\tau|)^{1/q} < \infty$$

es usualmente denotado por $A_p(\Gamma)$ conocido como el conjunto de pesos de Muckenhoupt.

Sean $p \in (1,\infty)$ y $\omega \in A_p(\Gamma)$.

Definición 4.1.3. *El operador de Toeplitz generado por una función $a \in L^\infty(\Gamma)$ es el operador*

$$T(a) = PaP : L^p_+(\Gamma,\omega) \to L^p_+(\Gamma,\omega)$$

donde $L^p(\Gamma,\omega) = L^p_+(\Gamma,\omega) \dot{+} \mathring{L}^p_-(\Gamma,\omega)$*, además* $L^p_+(\Gamma,\omega)$ *es la imagen del operador* P *y* $L^p_-(\Gamma,\omega)$ *es la imagen del operador* $Q = I - P$ *en* $L^p(\Gamma,\omega)$*.*

Denotaremos como $GL^\infty(\Gamma)$ al grupo de elementos invertibles en $L^\infty(\Gamma)$.

Definición 4.1.4. *Sea* Γ *una curva de Jordan-Carleson,* $1 < p < \infty$*,* $\omega \in A_p(\Gamma)$ *y* $a \in GL^\infty(\Gamma)$*. Se dice que* a *admite una factoriazación de Wiener-Hopf en* $L^p(\Gamma,\omega)$ *si* a *se puede escribir de la forma*

$$a(\tau) = a_-(\tau)\tau^{\varkappa}a_+(\tau),\ \forall \tau \in \Gamma \tag{4.1}$$

donde $\varkappa$ *es un entero y las funciones* $a_\pm$ *tienen las siguientes propiedades*

$$a_- \in L^p_-(\Gamma,\omega),\ a_-^{-1} \in L^q_-(\Gamma,\omega^{-1}),\ a_+ \in L^q_+(\Gamma,\omega^{-1}),\ a_+^{-1} \in L^p_+(\Gamma,\omega),$$
$$|a_+^{-1}|\omega \in A_p(\Gamma). \tag{4.2}$$

Sea

$$\chi_\varkappa(\tau) := \tau^\varkappa \qquad para\ \tau \in \Gamma.$$

Ya que $a_+^{-1} = a^{-1}a_-\chi_\varkappa$ y $a^{-1}\chi_\varkappa \in GL^\infty(\Gamma)$, la condición (4.2) es equivalente a $|a_-|\omega \in A_p(\Gamma)$.

Esto es, ya que $S_\Gamma \in \mathcal{B}(L^p(\Gamma, |a_-|\omega))$, tenemos entonces que $|a_-|\omega S_\Gamma |a_-|^{-1}\omega^{-1} I \in \mathcal{B}(L^p(\Gamma))$ por lo que

$$f \in L^p(\Gamma, |a_-|\omega) \Leftrightarrow |a_-|\omega f \in L^p(\Gamma).$$

Por otro lado

$$a_+^{-1}\omega S_\Gamma a_+ \omega^{-1} I \in \mathcal{B}(L^p(\Gamma)) \Leftrightarrow a_+^{-1} S_\Gamma a_+ I \in \mathcal{B}(L^p(\Gamma,\omega)),$$

$$a_- a_+ = a \Leftrightarrow a_+ = a_-^{-1} a$$

y $a_+^{-1} S_\Gamma a_-^{-1} a I \in \mathcal{B}(L^p(\Gamma,\omega))$, por lo que podemos tener el operador de la forma

$$(a_+^{-1} S_\Gamma a_-^{-1} I)(aI).$$

Para $a \in PC(\Gamma)$ y $\omega = \rho$ la existencia de la factorización de Wierner-Hopf sigue del siguiente resultado.

Del Teorema 2.2.1 y el Teorema 3.1 del Capítulo 8 [14] tenemos lo siguiente

Corolario 4.1.1. *Sea* $a \in PC(\Gamma)$*. Para la factorizabilidad en* $L_p(\Gamma,\rho)$ *de la función* a *es necesario y suficiente que* a *es* $\{p,\rho\}-$*no singular. Si la función* a *es* $\{p,\rho\}-$*no singular entonces ind* $a|L_p(\Gamma,\rho) =$ *ind* $a^{p,\rho}$*.*

4.2. Teoremas básicos para operadores de Toeplitz

Consideremos ciertos teoremas básicos (ver [[3],Capítulo 6]).

Teorema 4.2.1. *(Coburn- Simonenko) Sea* Γ *una curva de Carleson-Jordan y* $p \in (1, \infty)$, $\omega \in A_p(\Gamma)$. *Si* $a \in L^\infty(\Gamma) \setminus \{0\}$ *entonces el operador de Toeplitz* $T(a)$ *de* a *tiene kernel trivial en* $L^p_+(\Gamma, \omega)$ *o su imagen es densa en* $L^p_+(\Gamma, \omega)$.

Definamos a $R(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\{t \in \Gamma : |a(t) - \lambda| < \epsilon\}| > 0 \ \forall \epsilon > 0\}$ el cual es la imagen esencial de a y $sp_{ess}T(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T(a) - \lambda I$ no es Fredholm$\}$ es el espectro esencial del operador de Toeplitz $T(a)$.

Teorema 4.2.2. *(Hartman- Wintner- Simonenko) Sea* Γ *una curva de Carleson-Jordan,* $1 < p < \infty$, *y* $\omega \in A_p(\Gamma)$ *Si* $a \in L^\infty(\Gamma) \setminus \{0\}$ *y* $T(a)$ *es normalmente soluble, entonces* $a \in GL^\infty(\Gamma)$. *En particular,*

$$R(a) \subset sp_{ess}T(a).$$

Teorema 4.2.3. *Si* $b \in L^\infty(\Gamma) \setminus \{0\}$ *y tenemos un operador de Toeplitz* $T(b)$ *con Ind* $T(b) = 0$, *entonces su kernel es trivial y su cokernel es trivial. i.e.* $\ker\ T(b) = \{0\}$ *y coker* $T(b) = \ker\ (T(b))^* = \{0\}$.

El Teorema 4.2.3 se sigue inmediatamente del Teorema 4.2.1. Sean

$$E^1_+(\Gamma) := \{g \in L^1(\Gamma) : \int_\Gamma g(\tau)\tau^n d\tau = 0 \ para \ n = 0, 1, 2, ...\}$$

$$E^1_-(\Gamma) := \{g \in L^1(\Gamma) : \int_\Gamma g(\tau)\tau^{-n} d\tau = 0 \ para \ n = 2, 3, 4, ...\}$$

$$\mathring{E}^1_-(\Gamma) := \{g \in L^1(\Gamma) : \int_\Gamma g(\tau)\tau^{-n} d\tau = 0 \ para \ n = 1, 2, 3, ...\}$$

Teorema 4.2.4. *(Simonenko) Sea* Γ *una curva de Carleson-Jordan,* $1 < p < \infty$, $\omega \in A_p(\Gamma)$, *y* $a \in GL^\infty(\Gamma)$. *Entonces* $T(a)$ *es Fredholm en* $L^p_+(\Gamma, \omega)$ *si y sólo si* a *admite una factorización de Wiener-Hopf* $a = a_-\chi_\varkappa a_+$ *en* $L^p(\Gamma, \omega)$. *En tal caso el entero* $\varkappa$ *es determinado univocamente y Ind* $T(a) = -\varkappa$.

Demostración. Primero supongamos que a admite una factorzación de Wiener-Hopf en $L^p(\Gamma, \omega)$ con $\varkappa = 0$, i.e. $a = a_-a_+$.

Probaremos que $\ker T(a) = \{0\}$. En efecto, si $T(a)g_+ = 0$ para $g_+ \in L^p_+(\Gamma, \omega)$, entonces $a_-a_+g_+ =: g_- \in \mathring{L}^p_-(\Gamma, \omega)$. Tenemos $a_+g_+ = a_-^{-1}g_-$. Ya que, por

$$a_- \in L^p_-(\Gamma, \omega),\ a_-^{-1} \in L^q_-(\Gamma, \omega^{-1}),\ a_+ \in L^q_+(\Gamma, \omega^{-1}),\ a_+^{-1} \in L^p_+(\Gamma, \omega) \tag{4.3}$$

y el Lema 6.11 en [3], $a_+g_+ \in E^1_+(\Gamma)$ y $a_-^{-1}g_- \in \mathring{E}^1_-(\Gamma)$, deducimos por el Teorema 6.4 en [3] que $a_+g_+ = 0$. Por que $a_+ \neq 0$ a.e. por (4.2) se sigue que $g_+ = 0$, es decir, $\ker T(a) = \{0\}$.

Ahora demostraremos que $T(a)$ es sobreyectivo. Por

$$||a_+^{-1}P(a_+g)||_{p,\omega} \leq C_{p,\omega}||g||_{p,\omega} \textit{ para todo } g \in R(\Gamma), \tag{4.4}$$

donde $R(\Gamma)$ denota el conjunto de todas las funciones racionales sin polos en Γ, el mapeo

$$R(\Gamma) \cap E^1_+(\Gamma) \to L^p_+(\Gamma, \omega),\ g_+ \to a_+^{-1}P(a_-^{-1}g_+) = a_+^{-1}P(a_+a^{-1}g_+) \tag{4.5}$$

se extiende a un operador lineal acotado A en $L^p_+(\Gamma, \omega)$ (también recordemos que

$$L^p_\pm(\Gamma, \omega) = E^1_\pm \cap L^p(\Gamma, \omega)). \tag{4.6}$$

Para g_+ en $R(\Gamma) \cap E^1_+(\Gamma)$ tenemos

$$T(a)Ag_+ = P(a_-a_+a_+^{-1}P(a_-^{-1}g_+))$$

$$= P(a_-P(a_-^{-1}g_+)) = Pg_+ - P(a_-Q(a_-^{-1}g_+)) = Pg_+ = g_+,$$

ya que tanto $T(a)$ y A son acotados, esto resulta que $T(a)A = I$ en $L^p_+(\Gamma, \omega)$. Esto prueba que $T(a)$ es suprayectivo.

Así, si $\varkappa = 0$, entonces $T(a)$ es invertible y su inverso está dado por la fórmula $(T(a))^{-1} = a_+^{-1}Pa_-^{-1}I$. Si a tiene la factorización de Wiener-Hopf $a = a_-\chi_\varkappa a_+$ entonces, por

$$T(a_-ba_+) = T(a_-)T(b)T(a_+) \textit{ para todo } a_\pm \in H^\infty_\pm(\Gamma),\ b \in L^\infty(\Gamma), \tag{4.7}$$

se tiene

$$T(a) = T(a_-a_+)T(\chi_\varkappa)\ (\varkappa > 0) \textit{ o } T(a) = T(\chi_\varkappa)T(a_-a_+)\ (\varkappa < 0).$$

Hasta aquí tenemos ya demostrado que $T(a_-a_+)$ es invertible, y el Teorema 6.24 en [3] implica que $T(\chi_\varkappa)$ es Fredholm de índice $-\varkappa$. Consecuentemente, $T(a)$ es Fredholm con índice $-\varkappa$ debido al Teorema 1.1.1. Adicionalmente obtenemos que $\varkappa$ es determinado de manera única.

Para demostrar el "sólo si". Supongamos que $T(a)$ es Fredholm de índice $-\varkappa$. Dejemos $b := a\chi_{-\varkappa}$. Entonces, de nuevo por (4.7),

$$T(b) = T(\chi_{-\varkappa})T(a)\ (\varkappa > 0) \textit{ o } T(b) = T(a)T(\chi_{-\varkappa})\ (\varkappa \leq 0).$$

Por lo tanto, por el Teorema 1.1.1 y el Teorema 6.4 en [3], $T(b)$ es Fredholm de índice cero. Ahora bien, el Corolario 6.19 [3] implica que $T(b)$ es invertible. Del Lema 6.14 [3] inferimos que $bP+Q$ es invertible en $L^p(\Gamma,\omega)$. El Lema 6.14 [3] también nos da la invertibilidad de $PbP+Q$ en $L^p(\Gamma,\omega)$. Como

$$PbI+Q=(I+PbQ)(PbP+Q)$$

y $(I+PbQ)^{-1}=I-PbQ$, esto sigue que $PbI+Q$ es invertible en $L^p(\Gamma,\omega)$. Usando la fórmula

$$(aP+Q)^*=P^*\bar{a}I+Q^*=H_\Gamma QH_\Gamma H_\Gamma aH_\Gamma+H_\Gamma PH_\Gamma=H_\Gamma(QaI)+PH_\Gamma \tag{4.8}$$

donde

$$H_\Gamma:L^r(\Gamma,\Psi)\to L^r(\Gamma,\Psi),\ (H_\Gamma g)(\tau):=e^{-i\theta_\Gamma(\tau)}\overline{g(\tau)}$$

y $\Psi:\Gamma\to[0,\infty]$, $r\in(1,\infty)$, $\theta_\Gamma(\tau)$ es el ángulo entre tangente orientado de Γ en el punto τ y el semieje real positivo, vemos que

$$b^{-1}P+Q=b^{-1}(P+bQ)=b^{-1}H_\Gamma(PbI+Q)^*H_\Gamma$$

es invertible en $L^q(\Gamma,\omega^{-1})$. Sean $\varphi\in L^p(\Gamma,\omega)$ y $\psi\in L^q(\Gamma,\omega^{-1})$ las soluciones de la ecuaciones

$$(bP+Q)\varphi=1,\ (b^{-1}P+Q)\psi=1$$

y dejemos $\varphi_+:=P\varphi$, $\psi_+:=P\psi$. Entonces $\varphi_+\in L^p_+(\Gamma,\omega)$, $\psi\in L^q_+(\Gamma,\omega^{-1})$, y

$$b\varphi_+=1+h_-,\ b^{-1}\psi_+=1+f_- \tag{4.9}$$

con $h_-\in \mathring{L}^p_-(\Gamma,\omega)$, $f_-\in \mathring{L}^q_-(\Gamma,\omega^{-1})$. De (4.9) obtenemos

$$\varphi_+\psi_+=b\varphi_+b^{-1}\psi_+=(1+h_-)(1+f_-) \tag{4.10}$$

y por lo tanto, por el Teorema 6.4 [3], $\varphi_+\psi_+$ es alguna constante c. La extensión analítica del lado derecho de (4.10) es 1 en infinito, lo cual implica que $c=1$. Así, $\varphi_+\psi_+=1=(1+h_-)(1+f_-)$. Dejando $a_+:=\varphi_+^{-1}$ y $a_-:=1+h_-$. Entonces $a=b\chi_\varkappa=a_-\chi_\varkappa a_+$ por (4.9) y tenemos

$$a_+=\varphi_+^{-1}=\psi_+\in L^q_+(\Gamma,\omega^{-1}),\ a_+^{-1}=\varphi\in L^p_+(\Gamma,\omega),$$

$$a_-=1+h_-\in L^p_-(\Gamma,\omega),\ a_-^{-1}=(1+h_-)^{-1}=1+f_-\in L^q_-(\Gamma,\omega^{-1}).$$

Esto demuestra que (4.1) y (4.3) se cumplen.

Queda por verificar (4.2). Sea $g\in R(\Gamma)$ y dejemos $g_+:=Pg,\ g_-:=Qg$. Como

$$T(b)(a_+^{-1}P(a_-^{-1}g_+))=P(ba_+^{-1}P(a_-^{-1}g_+))=P(a_-P(a_-^{-1}g_+))=Pg_+-P(a_-Q(a_-^{-1}g_+))=g_+$$

y $T(b)$ es invertible, obtenemos que

$$||a_+^{-1}P(a_-^{-1}g_+)||_{p,\omega} \leq ||(T(b))^{-1}||\ ||g_+||_{p,\omega}.$$

Ya que $P(a_-^{-1}g_-) = 0$, se sigue que

$$||a_+^{-1}P(a_-^{-1}g)||_{p,\omega} \leq ||(T(b))^{-1}||\ ||g_+||_{p,\omega} \leq ||(T(b))^{-1}||\ ||P||\ ||g||_{p,\omega}$$

para todo $g \in R(\Gamma)$. Como $a_+^{-1}Pa_+I = a_+^{-1}Pa_-^{-1}bI$, finalmente obtenemos

$$||a_+^{-1}P(a_+g)||_{p,\omega} = ||a_+^{-1}Pa_-^{-1}(bg)||_{p,\omega} \leq ||(T(b))^{-1}||\ ||P||\ ||b||_\infty ||g||_{p,\omega}$$

siempre que $bg \in R(\Gamma)$. Lo cual demuestra (4.4) y por lo tanto (4.2).

$\square$

Capítulo 5

Problema de Riemann con coeficientes cuasi-continuos

5.1. Relación de operadores de Toeplitz con operadores integrales singulares

Sean $1 < p < \infty$ y $\omega \in A_p(\Gamma)$. El problema de valor en la frontera de Riemann consiste en encontrar una función $\Phi(z)$ analítica en todo el plano complejo excepto en los puntos que están dados por la curva Γ, que está representada como la integral de tipo Cauchy

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma),$$

con una densidad $\varphi \in L^p(\Gamma, \omega)$, y que satisface la condición de frontera

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \qquad t \in \Gamma,$$

donde $\Phi^{\pm}(t)$ son los valores límite de la función desconocida $\Phi(z)$ y G es cuasi-continua en Γ, $g \in L^p(\Gamma, \omega)$ son funciones dadas. Además, G es invertible en QC.

Sea $\varphi \in L^p(\Gamma, \omega)$. Entonces consideremos el problema homogéneo de Riemann

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t)$$

despejando tenemos $\Phi^+(t) - G(t)\Phi^-(t) = 0$. Por las fórmulas de Sokhotski-Plemelj tenemos que

$$\Phi^+(t) = (P_+\varphi)(t) \qquad y \qquad \Phi^-(t) = -(P_-\varphi)(t)$$

entonces $P_+\varphi + GP_-\varphi = 0$, i.e. $(P_+ + GP_-)\varphi = 0$.

Como G es invertible, entonces

$$(G^{-1}P_+ + P_-)\varphi = 0.$$

Por lo que tenemos que el operador $G^{-1}P_+ + P_-$ es Fredholm si y solo si el operador $P_+ + GP_-$ es Fredholm.

Sea $A = G^{-1}P_+ + P_-$. La teoría de Fredholm del operador A en el espacio $L^p(\Gamma, \omega)$ es equivalente a la teoría de Fredholm del operador de Toeplitz P_+AP_+ en el espacio $L^p_+(\Gamma, \omega)$

$$P_+AP_+ = P_+G^{-1}P_+ = T(G^{-1}).$$

Para G^{-1} aplicamos, si existe, una factorización de Wiener-Hopf

$$G^{-1}(\tau) = a_-(\tau)\tau^{\varkappa}a_+(\tau), \ \tau \in \Gamma.$$

Por el Teorema de Simonenko 4.2.4 tenemos

$$\text{Ind } T(G^{-1}) = -\varkappa.$$

5.2. Teoría de Fredholm y de solubilidad del problema de Riemann

Sea $A = P + aQ = (aI)(a^{-1}P + Q) = (aI)(Pa^{-1}P + Q)(I + Qa^{-1}P)$ donde los operadores aI y $I + Qa^{-1}P$ son invertibles. Supongamos que existe la factorización de Wiener-Hopf de la función a^{-1} : $a^{-1} = a_-\chi_{\varkappa}a_+$. Entonces para calcular el ker A, consideremos $Af = 0$ usando la representación $A = (aI)(Pa^{-1}P + Q)(I + Qa^{-1}P)$. De la igualdad

$$(aI)(Pa^{-1}P + Q)(I + Qa^{-1}P)f = 0,$$

como a es invertible, tenemos

$$(Pa^{-1}P + Q)(I + Qa^{-1}P)f = 0,$$

$$(I + Qa^{-1}P)f \in \ker \ T(a^{-1}) \dot{+} \{0\},$$

donde $\ker T(a^{-1}) \subset L^p_+(\Gamma, \omega)$ y ya que

$$(I + Qa^{-1}P)^{-1} = I - Qa^{-1}P.$$

Entonces $f \in (I - Qa^{-1}P)(\ker\ T(a^{-1}) \dotplus \{0\})$. Como

$$(I - Qa^{-1}P) \sim \begin{pmatrix} P & 0 \\ -Qa^{-1}P & Q \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ -Qa^{-1}P & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ker\ T(a^{-1}) \\ 0 \end{pmatrix} = P\{\ker T(a^{-1})\} - Qa^{-1}P\{\ker\ T(a^{-1})\}$$

$$\ker A = \ker T(a^{-1}) \dotplus (-Qa^{-1}I)\ \ker\ T(a^{-1}).$$

Ahora bien

$$\mathrm{im}(Pa^{-1}P + Q) = \mathrm{im}T(a^{-1}) \dotplus \mathring{L}^p_-(\Gamma, \omega).$$

Por lo que tenemos que

$$\mathrm{im}A = a(\mathrm{im}\ T(a^{-1}) \dotplus \mathring{L}^p_-(\Gamma, \omega)).$$

Ahora buscaremos soluciones para el problema $Af = g$, recordemos que $A = (aI)(Pa^{-1}P + Q)(I + Qa^{-1}P)$, por lo que vamos a tener que

$$(aI)(Pa^{-1}P + Q)(I + Qa^{-1}P)f = g, \tag{5.1}$$

entonces

$$(Pa^{-1}P + Q)(I + Qa^{-1}P)f = a^{-1}g,$$

donde, si renombramos $(I + Qa^{-1}P)f = \varphi = \varphi_+ + \mathring{\varphi}_-$. Entonces tenemos

$$(Pa^{-1}P + Q)\varphi = a^{-1}g, \tag{5.2}$$

i.e.

$$Pa^{-1}P\varphi_+ + Q\mathring{\varphi}_- = a^{-1}g, \tag{5.3}$$

pero $P\varphi_+ = \varphi_+$, $Q\mathring{\varphi}_- = \mathring{\varphi}_-$, entonces

$$Pa^{-1}\varphi_+ + \mathring{\varphi}_- = Pa^{-1}g + Qa^{-1}g \tag{5.4}$$

Pero $Pa^{-1}\varphi_+ = Pa^{-1}g$, i.e. $T(a^{-1})\varphi_+ = Pa^{-1}g$ y $\mathring{\varphi}_- = Qa^{-1}g$.

Teorema 5.2.1. *Si $a^{-1} = a_-\chi_\varkappa a_+$ y $\varkappa = 0$, entonces la ecuación $(P + aQ)f = g$ tiene solución única*

$$f = (a_+^{-1}P + a_-Q)a_+g \in L^p(\Gamma, \omega)$$

para cada $g \in L^p(\Gamma, \omega)$.

Demostración. Sea $\varkappa = 0$. En este caso por el Teorema de Simonenko 4.2.4 el operador $T(a^{-1})$ es invertible en el espacio $L^p_+(\Gamma, \omega)$.

Tenemos que $a^{-1} \in L^\infty(\Gamma)$, $(T(a^{-1}))^{-1} = a_+^{-1} P a_-^{-1} I$, donde $P = I - Q$, entonces de (5.4) tenemos los siguiente

$$\begin{aligned}\varphi_+ = (T(a^{-1}))^{-1} P a^{-1} g = (a_+^{-1} P a_-^{-1}) P a^{-1} g = a_+^{-1} P a_-^{-1} P a^{-1} g = a_+^{-1} P a_-^{-1} (I - Q) a^{-1} g \\ = a_+^{-1} P a_-^{-1} a^{-1} g - a_+^{-1} P a_-^{-1} Q a^{-1} g = a_+^{-1} P a_-^{-1} a_- a_+ g = a_+^{-1} P a_+ g, \qquad (5.5)\end{aligned}$$

donde $P a_-^{-1} Q a^{-1} g = 0$ con $a_-^{-1} \in L^q_-(\Gamma, \omega^{-1})$ y $Q a^{-1} g \in \mathring{L}^p_-(\Gamma, \omega)$. Ya que $\varphi_+ = a_+^{-1} P a_+ g$ y $\mathring{\varphi}_- = Q a^{-1} g$, obtenemos que

$$f = (I - Q a^{-1} P)(a_+^{-1} P a_+ g + Q a^{-1} g),$$

esto es

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ -Q a^{-1} P & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+^{-1} P a_+ g \\ Q a^{-1} g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_+^{-1} P a_+ g \\ a_- Q a_+ g \end{pmatrix},$$

pues $P a_+^{-1} P a_+ g = a_+^{-1} P a_+ g$. Y

$$\begin{aligned}-Q a^{-1} P a_+^{-1} P a_+ g + Q^2 a^{-1} g = -Q a^{-1} P a_+^{-1} P a_+ g + Q a^{-1} g = -Q a_- a_+ a_+^{-1} P a_+ g + Q a^{-1} g \\ = -Q a_- P a_+ g + Q a^{-1} g = -Q a_- (I - Q) a_+ g + Q a^{-1} g = -Q a^{-1} g + Q a_- Q a_+ g + Q a^{-1} g \\ = a_- Q a_+ g.\end{aligned}$$

Entonces como resultado tenemos que la ecuación $Af = g$ tiene la solución única $f = (a_+^{-1} P + a_- Q) a_+ g$. Además, la ecuación $Af = g$ tiene esta solución para cada $g \in L^p(\Gamma, \omega)$. □

Teorema 5.2.2. *Si $\varkappa > 0$, entonces la ecuación $(P + aQ)f = g$ tiene solución única*

$$f = (I - Q a^{-1} P)(T(\chi_{-\varkappa}) a_+^{-1} P a_+ g + Q a^{-1} g)$$

para $g \in L^p(\Gamma, \omega)$ que satisface la condición

$$\int_{\mathbb{T}} (a_+^{-1} P a_+ g) \overline{P_{\varkappa - 1}(t)} |dt| = 0, \qquad (5.6)$$

donde $P_{\varkappa-1}$ es un polinomio de grado $\varkappa - 1$.

Demostración. Ya que $\varkappa > 0$, tenemos que

$$T(a^{-1}) = T(a_- a_+) T(\chi_\varkappa)$$

donde $T(a_-a_+)$ es invertible, por lo que $(T(a_-a_+))^{-1} = a_+^{-1}Pa_-^{-1}I$ y $T(\chi_\varkappa)$ es invertible por la izquierda. Por lo cual, de (5.4), obtenemos para $T(a_-a_+)T(\chi_\varkappa)\varphi_+ = Pa^{-1}g$ y $\mathring{\varphi}_- = Qa^{-1}g$ lo siguiente

$$T(\chi_\varkappa)\varphi_+ = a_+^{-1}Pa_-^{-1}Pa^{-1}g = T(\chi_{-\kappa})a_+^{-1}Pa_+g,$$

donde $a_+^{-1}Pa_-^{-1}Pa^{-1}g = a_+^{-1}Pa_+g$ por (5.5). Así que

$$T(\chi_{-\varkappa})T(\chi_\varkappa)\varphi_+ = T(\chi_{-\varkappa})a_+^{-1}Pa_-^{-1}Pa_+g,$$

$$\therefore \varphi_+ = T(\chi_{-\varkappa})a_+^{-1}Pa_+g,$$

para $T(\chi_\varkappa) = P\chi_\varkappa P$, $(T(\chi_\varkappa))^* = P\chi_{-\varkappa}P$, donde $P = P^*$, y $P^* \in \mathcal{B}(L^q(\Gamma, \omega^{-1}))$. Tenemos ahora que Ind $T(\chi_{-\varkappa}) = \varkappa$ y además, se tiene que $(T(\chi_\varkappa))^*\psi = 0$, donde $\psi \in L_+^q(\Gamma, \omega^{-1})$, y además $\psi = P_{\varkappa-1} = C_0 + C_1t + ... + C_{\varkappa-1}t^{\varkappa-1}$ es un elemento arbitrario del $\ker T(\chi_{-\varkappa}) \in L^q(\Gamma, \omega^{-1})$.

$$T(\chi_{-\varkappa})\Psi = Pt^{-\varkappa}P(C_0 + C_1t + ... + C_{\varkappa-1}t^{\varkappa-1}) = P(\frac{C_0}{t^\varkappa} + ... + \frac{C_{\varkappa-1}}{t}) = 0$$

entonces se tiene que $a_+^{-1}Pa_+g \perp \ker\ T(\chi_{-\varkappa})$ y

$$\int_{\mathbb{T}} (a_+^{-1}Pa_+g)\overline{P_{\varkappa-1}(t)}|dt| = 0.$$

Entonces la ecuación $(P + aQ)f = g$ tiene una solución si g satisface la condición (5.6). Por lo que obtenemos que

$$f = (I - Qa^{-1}P)(T(\chi_{-\varkappa})a_+^{-1}Pa_+g + Qa^{-1}g).$$

□

Teorema 5.2.3. *Si $\varkappa < 0$, entonces la ecuación $(P + aQ)f = g$ tiene la solución general*

$$f = (I - Qa^{-1}P)[(a_+^{-1}Pa_-^{-1})(\chi_{-\varkappa}Pa^{-1}g + P_{-\varkappa-1}) + Qa^{-1}g],$$

para cada parte derecha en $L^p(\Gamma, \omega)$, y $P_{-\varkappa-1}$ es un polinomio de grado $-\varkappa - 1$.

Demostración. Ya que $\varkappa < 0$, tenemos que $T(a^{-1}) = T(\chi_\varkappa)T(a_-a_+)$, donde $T(\chi_\varkappa)$ es invertible por la derecha, y $(T(a_-a_+))^{-1} = a_+^{-1}Pa_-^{-1}I$. De la ecuación (5.4) tenemos lo siguiente

$$T(\chi_\varkappa)T(a_-a_+)\varphi_+ = Pa^{-1}g, \tag{5.7}$$

y $\mathring{\varphi}_- = Qa^{-1}g$, por lo que si $T(a_-a_+)\varphi_+ = T(\chi_{-\varkappa})Pa^{-1}g$, entonces $T(\chi_\varkappa)T(\chi_{-\varkappa})Pa^{-1}g = Pa^{-1}g$, y así

$$\varphi_+ = a_+^{-1}Pa_-^{-1}T(\chi_{-\varkappa})Pa^{-1}g = a_+^{-1}Pa_-^{-1}P\chi_{-\varkappa}Pa^{-1}g = a_+^{-1}Pa_-^{-1}\chi_{-\varkappa}Pa^{-1}g.$$

Por lo que si $T(\chi_\varkappa)T(a_-a_+)\varphi_+ = 0$, se sigue que $T(a_-a_+)\varphi_+ = P_{-\varkappa-1}$, por lo tanto $\varphi_+ = a_+^{-1}Pa_-^{-1}P_{-\varkappa-1}$. Entonces la solución general de la ecuación no homogénea (5.7) es $a_+^{-1}Pa_-^{-1}\chi_{-\varkappa}Pa^{-1}g + a_+^{-1}Pa_-^{-1}P_{-\varkappa-1}$.

Ahora bien para

$$(I + Qa^{-1}P)f = (a_+^{-1}Pa_-^{-1})(\chi_{-\varkappa}Pa^{-1}g + P_{-\varkappa-1}) + Qa^{-1}g$$

obtenemos el siguiente resultado

$$f = (I - Qa^{-1}P)[(a_+^{-1}Pa_-^{-1})(\chi_{-\varkappa}Pa^{-1}g + P_{-\varkappa-1}) + Qa^{-1}g].$$

$\square$

Capítulo 6

Problema de Haseman con coeficientes cuasi-continuos

6.1. Desplazamientos especiales

Sea $\Phi^+(\alpha(t)) = G(t)\Phi^-(t) + g(t)$ con $\omega \in A_p(\mathbb{T})$, y además Φ^+, $\Phi^- \in L^p(\mathbb{T}, \omega)$, $G \in QC(\mathbb{T})$ y $g(t) \in L^p(\mathbb{T}, \omega)$. Además Φ^+ es analítica en D^+ con $0 \in D^+$ y Φ^- es analítica en D^- con $\infty \in D^-$, y $\Phi^-(\infty) = 0$. Donde

$$\Phi^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

con $\varphi \in L^p(\mathbb{T}, \omega)$ y $z \in D^\pm$ respectivamente. Por las fórmulas de Sokhotski-Plemelj tenemos

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = (P_+\varphi)(t),$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = -(P_-\varphi)(t),$$

donde $P_+ = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}S$ y $P_- = \frac{1}{2}I - \frac{1}{2}S$, donde $S = S_{\mathbb{T}}$ es un operador singular integral con núcleo de Cauchy. Por lo que ahora tenemos que

$$\frac{1}{2}\varphi(\alpha(t)) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - \alpha(t)} d\tau = G(t)[-\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau] + g(t)$$

$$(P_+\varphi)(\alpha(t)) + G(t)(P_-\varphi)(t) = g(t).$$

Sea $(W_\alpha\varphi)(t) = \varphi(\alpha(t))$, entonces vamos a tener lo siguiente

$$(W_\alpha P_+\varphi)(t) + (GP_-\varphi)(t) = g(t).$$

Sea α un homeomorfismo y un mapeo conforme que manda el dominio D^+ sobre si mismo, i.e. $\alpha : D^+ \to D^+$. Y además lo tenemos definido de la forma

$$\alpha(z) = e^{i\theta}\frac{a-z}{1-\bar{a}z},\ \textit{con}\ |a| < 1.$$

6.2. Teoría de Fredholm y teoría de solubilidad

Uno de los caminos de solubilidad del problema de Haseman es intentar hacer un cambio de variable para la función con el desplazamiento a una función que no dependa del desplazamiento pero que conserve las mismas propiedades de pertenecer al dominio D^+.

Ahora bien, tenemos que $\Phi^+(\alpha(t)) = G(t)\Phi^-(t) + g(t)$ para $t \in \mathbb{T}$, donde α tiene una extensión analítica y biyectiva en $\mathbb{D}$. Si hacemos el cambio $\Psi^+(t) = \Phi^+(\alpha(t))$ tenemos lo siguiente

$$\Psi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t),\ t \in \mathbb{T}, \tag{6.1}$$

donde

$$\Psi^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau,\ z \in D^+ \tag{6.2}$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau,\ z \in D^- \tag{6.3}$$

para el cual podemos resolver el problema como en el capítulo anterior y obtener los siguientes resultados bajo las condiciones del capítulo 4.2. Sea G invertible en $QC(\mathbb{T})$ y $G^{-1} = G_-\chi_\varkappa G_+$ la factorización de Wiener-Hopf de la función $G^{-1} \in QC(\mathbb{T})$.

Teorema 6.2.1. *Si $\varkappa = 0$, entonces la ecuación $(P + GQ)\varphi = g$ tiene solución única*

$$\varphi = (G_+^{-1}P + G_-Q)G_+g \in L^p(\mathbb{T}, \omega)$$

para cada $g \in L^p(\mathbb{T}, \omega)$.

Teorema 6.2.2. *Si $\varkappa > 0$, entonces la ecuación $(P + GQ)\varphi = g$ tiene solución única*

$$\varphi = (I - QG^{-1}P)(T(\chi_{-\varkappa})G_+^{-1}PG_+g + QG^{-1}g)$$

para $g \in L^p(\mathbb{T}, \omega)$ *que satisface la condición*

$$\int_{\mathbb{T}} (G_+^{-1} P G_+ g) \overline{P_{\varkappa-1}(t)} |dt| = 0, \tag{6.4}$$

donde $P_{\varkappa-1}$ *es un polinomio de grado* $\varkappa - 1$.

Teorema 6.2.3. *Si* $\varkappa < 0$, *entonces la ecuación* $(P + GQ)\varphi = g$ *tiene la solución general*

$$\varphi = (I - QG^{-1}P)[(G_+^{-1} P G_-^{-1})(\chi_{-\varkappa} P G^{-1} g + P_{-\varkappa-1}) + QG^{-1} g],$$

para cada parte derecha en $L^p(\mathbb{T}, \omega)$, *y* $P_{-\varkappa-1}$ *es un polinomio arbitrario de grado* $-\varkappa - 1$.

Sustituyendo la densidad encontrada $\varphi \in L^p(\mathbb{T}, \omega)$ en las fórmulas (6.2) y (6.3), obtenemos $\Psi^+(z)$ para $z \in D^+$ y $\Phi^-(z)$ para $z \in D^-$. Tomando $\Phi^+(z) = \Psi^+(\alpha^{-1}(z))$, tenemos la solución del problema de Haseman

$$\Phi^+(\alpha(t)) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \; t \in \mathbb{T}.$$

Capítulo 7

Álgebras de operadores integrales singulares con coeficientes PQC en espacios de Lebesgue

7.1. Introducción

Sea $B(X)$ el álgebra de Banach de todos los operadores lineales acotados que actúan en un espacio de Banach X, sea $K(X)$ el ideal bilateral cerrado de todos lo operadores compactos en $B(X)$, y sea $B^\pi(X) = B(X)/K(X)$ el álgebra de Calkin de las clases cocientes $A^\pi := A + K(X)$, donde $A \in B(X)$. Un operador $A \in B(X)$ se dice que es Fredholm si su imagén es cerrada y los espacios $ker\ A$ y $ker\ A^*$ son de dimensión finita (ver, [5], [13] y [14]). Equivalentemente, $A \in B(X)$ es Fredholm sí y sólo si la clase cociente A^π es invertible en el álgebra $B^\pi(X)$. A continuación asumiremos que $p \in (1, \infty)$, $1/p + 1/q = 1$, y consideremos el espacio de Lebesgue $L^p(\mathbb{T})$ dotado con la norma

$$||f||_{L^p(\mathbb{T})} := \Big(\int_{\mathbb{T}} |f(\tau)|^p |d\tau| \Big)^{1/p}.$$

Como es bien conocido (ver [12] y [3]), el operador integral singular de Cauchy $S_{\mathbb{T}}$ está dado por

$$(S_{\mathbb{T}} f)(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{T} \setminus (te^{-i\epsilon}, te^{i\epsilon})} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau, \ t \in \mathbb{T}, \tag{7.1}$$

es acotado en cada espacio $L^p(\mathbb{T})$ sí y sólo si $p \in (1, \infty)$.

$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ denota la transformada de Fourier,

$$(\mathcal{F}f)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-itx}dt, \ x \in \mathbb{R}.$$

Una función $a \in L^\infty(\mathbb{R})$ es llamado un multiplicador de Fourier en $L^p(\mathbb{R})$ si el operador de convolución $W^0(a) := \mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}$ mapea el subconjunto denso $L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ de $L^p(\mathbb{R})$ en si mismo y se extiende a un operador lineal acotado en $L^p(\mathbb{R})$. M_p representa el álgebra de Banach con unidad de todos los multiplicadores de Fourier en $L^p(\mathbb{R})$ dotado con operaciones puntuales y la norma $||a||_{M_p} := ||W^0(a)||_{B(L^p(\mathbb{R}))}$(ver [1], Corolario 2.9).

Definiendo $\mathcal{B}_p := B(L^p(\mathbb{T}))$ y $\mathcal{K}_p := K(L^p(\mathbb{T}))$ para $p \in (1, \infty)$, consideremos el álgebra de Banach

$$\mathfrak{A}_p := alg\{aI, \ S_{\mathbb{T}} : \ a \in PQC\} \subset \mathcal{B}_p \tag{7.2}$$

generada por todos los operadores de multiplicación aI ($a \in PQC$) y por el operador integral singular $S_{\mathbb{T}}$, donde el álgebra C^* $PQC \subset L^\infty(\mathbb{T})$ de funciones cuasi-continuas por tramos es definida en la siguiente sección. Como es bien conocido(ver, la demostración [21], Teorema 4.1.5), el ideal K_p está contenido en el álgebra $\mathfrak{A}_p$ para todo $p \in (1, \infty)$. Junto con el álgebra de Banach $\mathfrak{A}_p$, consideremos su subálgebra de Banach

$$\mathcal{Z}_p := alg\{aI : a \in QC\} \subset \mathfrak{A}_p \tag{7.3}$$

generada por todos los operadores de multiplicación aI para todo $a \in QC$.

El objetivo es el estudio de las propiedades de Fredholm de operadores integrales singulares con coeficientes cuasi-continuos a trozos en el espacio de Lebesgue $L^p(\mathbb{T})$ con $p \in (1, \infty)$. Un símbolo de Fredholm calculado por el álgebra de Banach $\mathfrak{A}_p$ dado por (7.2) es planeada para ser construida y un criterio de Fredholm de los operadores $A \in \mathfrak{A}_p$ en términos de sus símbolos de Fredholm puede ser establecido por la aplicación del principio local de Allan-Douglas, el teorema de dos idempotentes y aplicando operadores tipo convolución de Mellin con símbolos continuos en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+)$.

7.2. Las álgebras C^* QC y PQC

7.2.1. El álgebra C^* QC de funciones cuasi-continuas

Sea $L^\infty(\mathbb{T})$ el álgebra C^* de todas las funciones medibles acotadas en el círculo unitario $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. $C := C(\mathbb{T})$ y $PC := PC(\mathbb{T})$ denotan las subálgebras C^*

de $L^\infty(\mathbb{T})$ que consiste, respectivamente, de todas las funciones continuas en $\mathbb{T}$ y todas las funciones continuas por trozos en $\mathbb{T}$, es decir, las funciones tienen límites unilaterales finitos en cada punto $t \in \mathbb{T}$. Para cada arco $I \subset \mathbb{T}$ y cada $f \in L^1(\mathbb{T})$, el promedio de f sobre I está dado por $I(f) := |I|^{-1} \int_I f(\tau)|d\tau|$, donde $|I| := \int_I |d\tau|$ es la medida de Lebesgue de I. Una función $f \in L^1(\mathbb{T})$ se dice que tiene oscilación media desaparecida ("Vanishing mean oscillation") en $\mathbb{T}$ sí

$$\lim_{\delta \to 0} \Big(\sup_{I \subset \mathbb{T},\ |I| \leq \delta} \frac{1}{|I|} \int_I |f(\tau) - I(f)||d\tau| \Big) = 0.$$

El conjunto de funciones de oscilación media desaparecida en $\mathbb{T}$ es denotado por VMO.

Sea H^∞ el subálgebra cerrada de $L^\infty(\mathbb{T})$ que consiste de todas las funciones que son límites no tangenciales en $\mathbb{T}$ de funciones analíticas acotadas en el disco unitario abierto $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. De acuerdo con [27], [28] el álgebra C^* QC de funciones cuasicontinuas en $\mathbb{T}$ es definida por

$$QC := (H^\infty + C) \cap (\overline{H^\infty}) + C) = VMO \cap L^\infty(\mathbb{T}). \tag{7.4}$$

Dada un álgebra C^* conmutativa con unidad A, denotamos por $M(A)$ el espacio de ideales maximales de A. Como es bien conocido, los espacios de ideales maximales de las álgebras C y PC pueden ser identificados, respectivamente, con $\mathbb{T}$ y $\mathbb{T} \times \{0, 1\}$: $M(QC) = \mathbb{T}$ y $M(PC) = \mathbb{T} \times \{0, 1\}$. Ya que $C \subset QC$, podemos concluir que

$$M(QC) = \bigcup_{t \in \mathbb{T}} M_t(QC), \qquad M_t(QC) := \{\xi \in M(QC) : \xi|_C = t\}, \tag{7.5}$$

donde $M_t(QC)$ son llamadas las fibras de $M(QC)$ sobre los puntos $t \in \mathbb{T}$. Para cada $(\lambda, t) \in (1, \infty) \times \mathbb{T}$, con $t = e^{i\theta}$, el mapeo

$$\delta_{\lambda,t} : QC \to \mathbb{C}, \qquad f \mapsto \delta_{\lambda,t}(f) := \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\theta - \frac{\pi}{\lambda}}^{\theta + \frac{\pi}{\lambda}} f(e^{ix}) dx,$$

define un funcional lineal en QC^*, la cual es identificado con el punto (λ, t). $M_t^0(QC) := M_t(QC) \cap clos_{QC^*}((1, \infty) \times \{t\})$ denota el conjunto de funcionales en $M_t(QC)$ que se encuentra en la clausura en la topología *-débil del conjunto $(1, \infty) \times \{t\}$. Para cada $t \in \mathbb{T}$, consideremos los conjuntos

$$M_t^+(QC) := \{\xi \in M_t(QC) :\ \xi(f) = 0 \ si\ f \in QC\ y\ \lim \sup_{z \to t^+} |f(z)| = 0\}$$

$$M_t^-(QC) := \{\xi \in M_t(QC) :\ \xi(f) = 0 \ si\ f \in QC\ y\ \lim \sup_{z \to t^-} |f(z)| = 0\}.$$

Para cada $t \in \mathbb{T}$, se sigue del Lema 3.2.2 que

$$M_t^+(QC) \cap M_t^-(C) = M_t^0(QC), \ M_t^+(QC) \cup M_t^-(QC) = M_t(QC). \tag{7.6}$$

Por lo tanto, la fibra $M_t(QC)$ se divide en los tres conjuntos disjuntos: $M_t^0(QC)$,

$$\widetilde{M}_t^+(QC) := M_t^+(QC) \setminus M_t^0(QC), \ y \ \ \widetilde{M}_t^-(QC) := M_t^-(QC) \setminus M_t^0(QC).$$

Fijando

$$M^\pm(QC) := \bigcup_{t\in\mathbb{T}} M_t^\pm(QC), \ M^0(QC) := \bigcup_{t\in\mathbb{T}} M_t^0(QC), \ \widetilde{M}^\pm(QC) := \bigcup_{t\in\mathbb{T}} \widetilde{M}_t^\pm(QC). \tag{7.7}$$

7.2.2. El álgebra C^* PQC de funciones cuasi-continuas a trozos

Sea $PQC := alg(QC, PC)$ el subálgebra C^* de $L^\infty(\mathbb{T})$ generada por las álgebras C^* QC y PC. Las funciones en PQC son referidas como las funciones cuasi-continuas a trozos. Ya que $QC \subset PQC$, tenemos

$$M(PQC) = \bigcup_{\xi\in M(QC)} M_\xi(PQC), \ M_\xi(PQC) := \{y \in M(PQC) : y|_{QC} = \xi\}.$$

Hay un mapeo natural w de $M(PQC)$ en $M(QC) \times \{0,1\}$, el cual es dado de la siguiente manera: definiendo $\xi = y|_{QC}, t = y|_C$ y $v = y|_{PC}$ para cada $y \in M(PQC)$, podemos concluir que $w(y) = (\xi, 0)$ si $v = (t, 0)$ y $w(y) = (\xi, 1)$ si $v = (t, 1)$. Tenemos la siguiente caracterización de fibras $M_\xi(PQC)$ para $\xi \in M(QC)$(ver [28], y también el Teorema 3.36 de [6]).

Lema 7.2.1. *Sean $t \in \mathbb{T}$ y $\xi \in M_t(QC)$. Entonces*

(i) $M_\xi(PQC) = \{(\xi, 1)\}$ *siempre que* $\xi \in \widetilde{M}_t^+(QC)$;

(ii) $M_\xi(PQC) = \{(\xi, 0)\}$ *siempre que* $\xi \in \widetilde{M}_t^-(QC)$;

(iii) $M_\xi(PQC) = \{(\xi, 0), (\xi, 1)\}$ *siempre que* $\xi \in M_t^0(QC)$. *En este caso, si* $t = e^{i\theta}$ *y* $\{\lambda_n\} \subset (1, \infty)$ *es tal que* $(\lambda_n, t) \to \xi$ *en la topología* $*-$*débil en* QC^*, *entonces para cada* $f \in PQC$,

$$(\xi, 1)f = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\pi} \int_\theta^{\theta+\frac{\pi}{\lambda_n}} f(e^{ix})dx, \ (\xi, 0)f = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\pi} \int_{\theta-\frac{\pi}{\lambda_n}}^{\theta} f(e^{ix})dx.$$

Para $a \in PQC$ y $\xi \in M(QC)$, denotamos

$$a(\xi^-) := a(\xi, 0) \; si \; \xi \in M^-(QC), \;\; a(\xi^+) := a(\xi, 1) \; si \; \xi \in M^+(QC). \tag{7.8}$$

La topología de Gelfand de $M(PQC)$ puede ser descrita como sigue: una base de vecindades de $(\xi, \mu) \in M(PQC)$ consiste de todos los conjuntos abiertos de la forma

$$W_{(\xi,\mu)} = \begin{cases} [(U_{\xi,t} \times \{0\}) \cup (U^-_{\xi,t} \times \{0,1\}] \cap M(PQC) & \text{si} \quad \mu = 0, \\ [(U_{\xi,t} \times \{1\}) \cup (U^+_{\xi,t} \times \{0,1\}] \cap M(PQC) & \text{si} \quad \mu = 1, \end{cases} \tag{7.9}$$

para $\xi \in M_t(QC)$ con $t \in \mathbb{T}$, donde $U_{\xi,t} = U_\xi \cap M(PQC)$, $U_\xi \subset M(QC)$ es una vecindad abierta de ξ, y $U^-_{\xi,t}$, $U^+_{\xi,t}$ consiste de todos los $\zeta \in U_\xi$ tal que $\tau = \zeta|_C$ pertenece respectivamente, a los arcos abiertos $(te^{-i\varepsilon}, t)$ y $(t, te^{i\varepsilon})$ de $\mathbb{T}$ para algún $\varepsilon \in (0, \pi)$.

7.3. Las álgebras de Banach $\mathcal{Z}_p$ y $\mathcal{Z}_p^\pi$

Dada $p \in (1, \infty)$, estudiemos el álgebra de Banach $\mathcal{Z}_p \subset \mathcal{B}_p$ dada por (7.3). Junto con $\mathcal{Z}_p$, consideremos el álgebra de Banach cociente

$$\mathcal{Z}_p^\pi := (\mathcal{Z}_p + \mathcal{K}_p)/\mathcal{K}_p \tag{7.10}$$

que consiste de todas las clases cocientes $[aI]^\pi := aI + \mathcal{K}_p$ para todo $a \in QC$.

Lema 7.3.1. *Si $p \in (1, \infty)$, entonces los espacios de ideales maximales $M(\mathcal{Z})$ y $M(QC)$ pueden ser identificados:*

$$M(\mathcal{Z}_p^\pi) = M(QC). \tag{7.11}$$

Demostración. Si $a \in QC$ es invertible en $L^\infty(\mathbb{T})$, entonces la función $1/a$ pertenece a el álgebra $C^*\, QC$. Por lo tanto, la clase lateral $[(1/a)I]^\pi$ es la inversa de la clase lateral $[aI]^\pi$ en el álgebra de Banach $\mathcal{Z}_p^\pi$, la cual implica que

$$sp[aI]^\pi \subset sp \; a \qquad para \; cada \; a \in QC, \tag{7.12}$$

donde $sp\; x$ denota el espectro de un elemento x en un álgebra de Banach con unidad.

Si la clase lateral $[aI]^\pi$ es invertible en el álgebra de Banach $\mathcal{Z}_p^\pi$, entonces existe una función $b \in QC$ y un operador compacto $K \in \mathcal{K}_p$ tal que $(ab-1)I = K$. Por lo tanto $ab = 1$ ya que $\mathcal{Z}_p \cap \mathcal{K}_p = \{0\}$, la cual implica la inclusión

$$sp \; a \subset sp[aI]^\pi \qquad para \; cada \qquad a \in QC. \tag{7.13}$$

Por (7.12) y (7.13),

$$sp\ a = sp[aI]^\pi \qquad para\ cada \qquad a \in QC. \tag{7.14}$$

Además, el mapeo $a \mapsto [aI]^\pi$ es una biyección de QC en $\mathcal{Z}_p^\pi$. Ya que

$$||[aI]^\pi|| := \inf_{K \in \mathcal{K}_p} ||aI + K||_{\mathcal{B}_p} \leq ||aI||_{\mathcal{B}_p} = ||a||_{L^\infty(\mathbb{T})}$$

y, en vista de (7.3),

$$||a||_{L^\infty(\mathbb{T})} = r(a) = r([aI]) \leq ||[aI]^\pi||,$$

donde $r(x)$ denota el radio espectral de un elemento x, concluimos que $||[aI]^\pi|| = ||a||_{L^\infty(\mathcal{T})}$, y por lo tanto el mapeo $a \mapsto [aI]^\pi$ es un isomorfismo isométrico de QC sobre $\mathcal{Z}_p^\pi$. Esto permite a uno identificar los espacios de ideales maximales de QC y $\mathcal{Z}_p^\pi$ por la fórmula $\widetilde{\mu}([aI]^\pi) = \mu(a)$, donde $a \in QC$, $\mu \in M(QC)$ y $\widetilde{\mu} \in M(\mathcal{Z}_p^\pi)$, la cual nos da (7.11).

□

El siguiente resultado sigue del Teorema 3.10, de [17] y del Teorema 3.2, de [16] .

Teorema 7.3.1. *Sea $1 < p_i < \infty$ y $T \in \mathcal{B}(L^{p_i}(\mathbb{T}))$ para $i = 1, 2$. Si el operador T es compacto en el espacio $L^{p_1}(\mathbb{T})$, entonces T es compacto en cada espacio $L^p(\mathbb{T})$ donde*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}, \qquad 0 < \theta < 1. \tag{7.15}$$

Teorema 7.3.2. *Sea $p \in (1, \infty)$ y $a \in L^\infty(\mathbb{T})$. El conmutador $[aI, S_\mathbb{T}] = aS_\mathbb{T} - S_\mathbb{T} aI$ es compacto en el espacio $L^p(\mathbb{T})$ sí y sólo si $a \in QC$.*

Demostración. Combinación del criterio de compacidad [15] y de la representación de Sarason de funciones cuasi-continuas (7.4) inmediatamente implica el criterio: para $a \in L^\infty(\mathbb{T})$, el conmutador $T_a := [aI, S_\mathbb{T}]$ es compacto en el espacio $L^2(\mathbb{T})$ sí y sólo si $a \in QC$ (ver también [20], Sección 2). Ya que cada conmutador T_a para $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ es acotado en todos los espacios $L^p(\mathbb{T})$ para $p \in (1, \infty)$, inferimos del Teorema 7.3.1, (o del resultado de compacidad de extrapolación compleja en [8], Teorema 2.1 o [7], Teorema 5.3) que la compacidad de T_a en cualquiera de los cuales a su vez es equivalente al hecho de que $a \in QC$.

□

Para el álgebra de Banach $\mathfrak{A}_p$ definida por (7.2), introducimos el álgebra de Banach cociente $\mathfrak{A}_p^\pi := \mathfrak{A}_p/\mathcal{K}_p$ (recordemos que $\mathcal{K}_p \subset \mathfrak{A}_p$). Por el Teorema 7.3.2, el álgebra de Banach $\mathcal{Z}_p^\pi$ es una subálgebra central de $\mathfrak{A}_p^\pi$. Esto significa que $za = az$ para todos $z \in \mathcal{Z}_p^\pi$ y todos $a \in \mathfrak{A}_p^\pi$.

7.4. Principio local de Allan-Douglas y sus aplicaciones

7.4.1. Principio local de Allan-Douglas

Ya que el Principio local de Allan-Douglas tiene un papel importante en el estudio de la propiedad de Fredholm en álgebra de operadores, recordamos la formulación (ver el Teorema 7.47] de [10] y el Teorema 1.35 de [5]).

Teorema 7.4.1. *(Principio local de Allan-Douglas) Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad e, $\mathcal{Z}$ una subálgebra cerrada del centro de $\mathcal{A}$ la cual contiene a e, $M(\mathcal{Z})$ el espacio de ideales maximales de $\mathcal{Z}$. Para cada ideal maximal $m \in M(\mathcal{Z})$, J_m denota el más pequeño ideal cerrado bilateral de $\mathcal{A}$ que contiene a m y $\mathcal{A}_m$ denota el álgebra cociente $\mathcal{A}/J_m$.*

(i) Un elemento $a \in \mathcal{A}$ es invertible por la izquierda (derecha o bilateral) en $\mathcal{A}$ sí y sólo si para cada $m \in M(\mathcal{Z})$ la clase lateral $a_m := a + J_m$ es invertible por la izquierda en $\mathcal{A}_m$.

(ii) Para todo $a \in \mathcal{A}$ el mapeo

$$M(\mathcal{Z}) \to [0, \infty), \qquad m \mapsto ||a_m||$$

es semicontinua superior. Si $a \in \mathcal{A}$ y existe $m_0 \in M(\mathcal{Z})$ tal que a_{m_0} es invertible en A_{m_0} para toda m en una vecindad de m_0.

(iii) Si $\mathcal{A}$ es semisimple, entonces $\bigcap_{m \in M(\mathcal{Z})} J_m = \{0\}$.

(iv) Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* entonces, para cada $a \in \mathcal{A}$,

$$||a|| = \max_{m \in M)(\mathcal{Z})} ||a_m||.$$

Λ_p denota el subálgebra de Banach de $\mathcal{B}_p$ que consiste en todos los operadores en $\mathcal{B}_p$ que conmutan módulo operadores compactos con cada operador $A \in \mathcal{Z}_p$. Claramente, Λ_p contiene a $\mathfrak{A}_p$ y por lo tanto, el álgebra de Banach cociente $\Lambda_p^\pi := \Lambda_p/\mathcal{K}_p$ contiene al álgebra de Banach $\mathfrak{A}_p^\pi = \mathfrak{A}_p/\mathcal{K}_p$. Además, Λ_p^π es el conmutador del álgebra cociente $\mathcal{Z}_p^\pi$, y por lo tanto el álgebra Λ_p^π es inversamente cerrada en el álgebra de Calkin $\mathcal{B}_p^\pi = \mathcal{B}_p/\mathcal{K}_p$

que consiste de las clases laterales $A^\pi := A + \mathcal{K}_p$ para todo $A \in \mathcal{B}_p$, es decir, el espectro de todos los operadores $A^\pi \in \Lambda_p^\pi$ en las álgebras Λ_p^π y $\mathcal{B}_p^\pi$ coinciden.

Por el Lema 7.3.1, $M(QC) = M(\mathcal{Z}_p^\pi)$. Para cada $\xi \in M(QC)$, sea $\mathcal{J}_{p,\xi}^\pi$ el más pequeño ideal cerrado bilateral del álgebra de Banach Λ_p^π que contiene el ideal maximal

$$\mathcal{I}_{p,\xi}^\pi := \{[aI]^\pi : \ a \in QC, \ a(\xi) = 0\}$$

del álgebra central $\mathcal{Z}_p^\pi$ de Λ_p^π. Consideremos el álgebra de Banach cociente $\Lambda_{p,\xi}^\pi := \Lambda_p^\pi / \mathcal{J}_{p,\xi}^\pi$. Por el Principio local de Allan-Douglas (ver [5], Teorema 1.35), tenemos inmediatamente los siguientes resultados.

Lema 7.4.1. *Una clase lateral $A^\pi \in \Lambda_p^\pi$ es invertible en el álgebra de Banach Λ_p^π sí y sólo si para cada $\xi \in M(QC)$ la clase lateral $A_{p,\xi}^\pi := A^\pi + \mathcal{J}_{p,\xi}^\pi$ es invertible en el álgebra de Banach $\Lambda_{p,\xi}^\pi$.*

Sea $\mathcal{A}_{p,\xi}^\pi$ la más pequeña subálgebra cerrada de $\Lambda_{p,\xi}^\pi$ que contiene las clase laterales $A_{p,\xi}^\pi$ para todo $A \in \mathfrak{A}_p$.

Corolario 7.4.1. *Dado $p \in (1, \infty)$, un operador $A \in \mathfrak{A}_p$ es Fredholm en el espacio de Lebesgue $L^p(\mathbb{T})$ (equivalentemente, la clase lateral $A^\pi \in \mathfrak{A}_p^\pi$ es invertible en el álgebra de Banach $\mathfrak{A}_p^\pi$) sí y sólo si para cada $\xi \in M(QC)$ la clase lateral $A_{p,\xi}^\pi \in \mathcal{A}_{p,1}^\pi$ es invertible en el álgebra de Banach $\Lambda_{p,\xi}^\pi$.*

7.4.2. Representantes locales

Identifiquemos las clases laterales $A_{p,\xi}^\pi$ para todo $A \in \mathfrak{A}_p$ y todo $\xi \in M(QC)$, donde $p \in (1, \infty)$. Para $t \in \mathbb{T}$, χ_t^- y χ_t^+ denotan las funciones características de los intervalos $(-t, t)$ y $(t, -t)$, respectivamente.

Lema 7.4.2. *Si $a \in PQC$, $t \in \mathbb{T}$, $\xi \in M_t(QC)$, y una de las siguientes condiciones se cumple:*

$$\begin{array}{lll} a(\xi^-) = 0 & si & \xi \in \widetilde{M}_t^-(QC), \\ a(\xi^\pm) = 0 & si & \xi \in M_t^0(QC), \\ a(\xi^+) = 0 & si & \xi \in \widetilde{M}_t^+(QC), \end{array} \tag{7.16}$$

entonces $[aI]_{p,\xi}^\pi = [0]_{p,\xi}^\pi = \mathcal{J}_{p,\xi}^\pi$.

Demostración. Es suficiente demostrar el Lema solo para funciones $a \in PQC$ que tienen conjuntos finitos de discontinuidades cuasicontinuas por trozos en $\mathbb{T}$. Si $t \in \mathbb{T}$ es un punto de tal discontinuidad para una función $a \in PQC$ de esa clase, entonces existen únicamente funciones $a_t^{\pm} \in QC$ tal que la función

$$\widetilde{a} := a - a_t^- \chi_t^- - a_t^+ \chi_t^+ \tag{7.17}$$

desaparece en una vecindad abierta $u_t \subset \mathbb{T}$ de t. Consideremos una pequeña vecindad abierta $\widetilde{u}_t$ de t tal que la clausura de $\widetilde{u}_t$ está contenida en u_t. Para cada $\xi \in M_t(QC)$, ahora tomemos una función $c_\xi \in QC$ tal que $c_\xi(\xi) = 0$ y $c_\xi(\eta) = 1$ para todo $\eta \in \bigcup_{\tau \in \mathbb{T} \setminus \widetilde{u}_t} M_\tau(QC)$. Entonces $\widetilde{a} = \widetilde{a} c_\xi$, lo cual implica que $[\widetilde{a}I]^\pi_{p,\xi} = \mathcal{J}^\pi_{p,\xi}$, y por tanto, por (7.17),

$$[aI]^\pi_{p,\xi} = [(a_t^- \chi_t^- + a_t^+ \chi_t^+)I]^\pi_{p,\xi} \qquad \textit{para cada} \qquad \xi \in M_t(QC). \tag{7.18}$$

Sí $\xi \in M_t^0(QC)$, entonces inferimos de (7.18) y (7.16) que

$$a_t^+(\xi) = a(\xi^+) = 0 \qquad y \qquad a_t^-(\xi) = a(\xi^-) = 0, \tag{7.19}$$

ya que $\chi_t^+(\xi^+) = \chi_t^-(\xi^-) = 1$ y $\chi_t^+(\xi^-) = \chi_t^-(\xi^+) = 0$ por ([28], Lema 13). Además, por (7.18) y (7.19), $[(a_t^- \chi_t^- + a_t^+ \chi_t^+)I]^\pi \in \mathcal{J}^\pi_{p,\xi}$, y entonces $[aI]^\pi_{p,\xi} = \mathcal{J}^\pi_{p,\xi}$ para todo $\xi \in M_t^0(QC)$.

Además, si $\xi \in \widetilde{M}_t^+(QC)$, entonces la clase lateral $[\chi_t^- I]^\pi \in \mathcal{J}^\pi_{p,\xi}$. En efecto, tomando una función $g \in QC$ tal que $g(\xi) = 1$ y $g = 0$ en $M_t^0(QC)$. Entonces por la demostración de ([28], Lema 13), $\chi_t^- g \in QC$ y $(\chi_t^- g)(\xi) = \chi_t^-(t^+) g(\xi) = 0$. Por lo tanto,

$$[\chi_t^- I]^\pi = [\chi_t^- gI]^\pi - [\chi_t^-(g - g(\xi))I]^\pi,$$

donde $[\chi_t^- gI]^\pi \in \mathcal{I}^\pi_{p,\xi}$ y $[\chi_t^-(g - g(\xi))I]^\pi \in \mathcal{J}^\pi_{p,\xi}$, lo cual significa que $[\chi_t^- I]^\pi \in \mathcal{J}^\pi_{p,\xi}$. Similarmente, $[\chi_t^+ I]^\pi \in \mathcal{J}^\pi_{p,\xi}$ si $\xi \in \widetilde{M}_t^-(QC)$. Así, por (7.18),

$$\begin{aligned} [(a - a_t^-)I]^\pi &= [(a_t^+ - a_t^-)\chi_t^+ I]^\pi \in \mathcal{J}^\pi_{p,\xi} \quad \text{si} \quad \xi \in \widetilde{M}_t^-(QC), \\ [(a - a_t^+)I]^\pi &= [(a_t^- - a_t^+)\chi_t^- I]^\pi \in \mathcal{J}^\pi_{p,\xi} \quad \text{si} \quad \xi \in \widetilde{M}_t^+(QC), \end{aligned} \tag{7.20}$$

lo cual implica junto con (7.16) que

$$a_t^-(\xi) = a(\xi^-) = 0 \ si \ \xi \in \widetilde{M}_t^-(QC), \qquad a_t^+(\xi) = a(\xi^+) = 0 \ si \ \xi \in \widetilde{M}_t^+(QC).$$

Por lo tanto, $[a_t^{\pm} I]^\pi \in \mathcal{I}^\pi_{p,\xi}$ si $\xi \in \widetilde{M}_t^{\pm}(QC)$, respectivamente y por lo tanto, por (7.20), $[aI]^\pi_{p,\xi} = \mathcal{J}^\pi_{p,\xi}$ para todo $\xi \in \widetilde{M}_t^{\pm}(QC)$ también.

$\square$

Teorema 7.4.2. *Para cada $t \in \mathbb{T}$ y cada $\xi \in M_t(QC)$, el mapeo $\delta_\xi : A \mapsto A^\pi_{p,\xi}$ definida para los generadores aI $(a \in PQC)$ y $S_\mathbb{T}$ del álgebra de Banach $\mathfrak{A}_p$ por*

$$\delta_\xi(aI) := \begin{cases} [a(\xi^-)I]^\pi_{p,\xi} & si \quad \xi \in \widetilde{M_t^-}(QC), \\ [(a(\xi^+)\chi_t^+ + a(\xi^-)\chi_t^-)I]^\pi_{p,\xi} & si \quad \xi \in M_t^0(QC), \\ [a(\xi^+)I]^\pi_{p,\xi} & si \quad \xi \in \widetilde{M_t^+}(QC) \end{cases} \tag{7.21}$$

$$\delta_\xi(S_\mathbb{T}) := [S_\mathbb{T}]^\pi_{p,\xi} \qquad si\ \xi \in M_t(QC), \tag{7.22}$$

se extiende al homomorfismo del álgebra de Banach $\delta_\xi : \mathfrak{A}_p \to \mathcal{A}^\pi_{p,\xi}$. Más aún,

$$\sup_{\xi \in M(QC)} ||\delta_\xi(A)||_{\mathcal{A}^\pi_{p,\xi}} \le ||A^\pi|| := \inf_{K \in \mathcal{K}_p} ||A+K|| \qquad para\ todo \qquad A \in \mathfrak{A}_p.$$

Demostración. Sea $\xi \in M(QC)$. Consideremos el homomorfismo del álgebra de Banach natural

$$\delta_\xi : \mathfrak{A}_p \to \mathfrak{A}_p^\pi \to \mathcal{A}^\pi_{p,\xi}, \qquad A \mapsto A^\pi \mapsto A^\pi_{p,\xi}.$$

Para cada $A \in \mathfrak{A}_p$, tenemos

$$\sup\{||\delta_\xi(A)||_{\mathcal{A}^\pi_{p,\xi}} : \xi \in M(QC)\} \le ||A^\pi||.$$

Queda por demostrar (7.21) para $a \in PQC$ ya que (7.22) para $S_\mathbb{T} \in \mathfrak{A}_p$ es evidente. Fijemos $t \in \mathbb{T}$ y $\xi \in M_t(QC)$. Para cada $a \in PQC$, la función

$$\widehat{a}_\xi := \begin{cases} a - a(\xi^-) & \text{si} \quad \xi \in \widetilde{M_t^-}(QC), \\ a - a(\xi^-)\chi_t^- - a(\xi^+)\chi_t^- & \text{si} \quad \xi \in M_t^0(QC), \\ a - a(\xi^+) & \text{si} \quad \xi \in \widetilde{M_t^+}(QC) \end{cases}$$

pertenece a PQC. Más aún, por el Lema 7.4.2, $[\widehat{a}_\xi I]^\pi \in \mathcal{J}^\pi_{p,\xi}$ para cada $\xi \in M(QC)$. Esto nos da (7.21) y completa la demostración. □

El Teorema 7.4.2 y el Lema 7.4.1 implican lo siguiente.

Corolario 7.4.2. *Un operador $A \in \mathfrak{A}_p$ es Fredholm en el espacio $L^p(\mathbb{T})$ sí y sólo si las clases laterales $A^\pi_{p,\xi} = \delta_\xi(A) \in \mathcal{A}^\pi_{p,\xi}$ son invertibles en las álgebras cocientes $\Lambda^\pi_{p,\xi}$ para todo $\xi \in M(QC)$.*

7.4.3. Estructura de las álgebras locales $\mathcal{A}^{\pi}_{p,\xi}$

Sea $P_{\pm} := (I \pm S_{\mathbb{T}})/2$ las proyecciones mutuas en el espacio $L^p(\mathbb{T})$, donde $p \in (1, \infty)$. El Teorema 7.4.2 implica el siguiente resultado en la construcción de las álgebras locales $\mathcal{A}^{\pi}_{p,\xi}$.

Lema 7.4.3. *Dadas $p \in (1, \infty)$ y $\xi \in M(QC)$, el álgebra local $\mathcal{A}^{\pi}_{p,\xi}$ generada por las clases laterales $[S_{\mathbb{T}}]^{\pi}_{p,\xi}$ y $[aI]^{\pi}_{p,\xi}$ para todas $a \in PQC$ tiene la siguiente estructura:*

(i) si $t \in \mathbb{T}$ y $\xi \in M^0_t(QC)$, entonces $\mathcal{A}^{\pi}_{p,\xi}$ es generada por la unidad $I^{\pi}_{p,\xi}$ y dos idempotentes

$$P^{\pi}_{p,\xi} := [P_+]^{\pi}_{p,\xi}, \qquad Q^{\pi}_{p,\xi} := [\chi^+_t I]^{\pi}_{p,\xi}; \tag{7.23}$$

(ii) si $t \in \mathbb{T}$ y $\xi \in \widetilde{M}^{\pm}_t(QC)$, entonces $\mathcal{A}^{\pi}_{p,\xi}$ es generada por la unidad $I^{\pi}_{p,\xi}$ y un idempotente

$$P^{\pi}_{p,\xi} := [P_+]^{\pi}_{p,\xi}; \tag{7.24}$$

Demostración. (i) Si $t \in \mathbb{T}$ y $\xi \in M^0_t(QC)$ y $a \in PQC$, entonces

$$[aI]^{\pi}_{p,\xi} = [(a(\xi^+)\chi^+_t + a(\xi^-)\chi^-_t)I]^{\pi}_{p,\xi} = a(\xi^-)I^{\pi}_{p,\xi} + \widehat{a}(\xi)[\chi^+_t I]^{\pi}_{p,\xi},$$

$$[S_{\mathbb{T}}]^{\pi}_{p,\xi} = [P_+ - P_-]^{\pi}_{p,\xi} = 2[P_+]^{\pi}_{p,\xi} - I^{\pi}_{p,\xi},$$

donde $\widehat{a}(\xi) := a(\xi^+) - a(\xi^-)$. Por lo tanto, el álgebra de Banach $\mathcal{A}^{\pi}_{p,\xi}$ es generada por la unidad $I^{\pi}_{p,\xi}$ y dos idempotentes (7.23).

(ii) Si $t \in \mathbb{T}$ y $\xi \in \widetilde{M}^{\pm}_t(QC)$, y $a \in PQC$ entonces, respectivamente,

$$[aI]^{\pi}_{p,\xi} = a(\xi^{\pm})I^{\pi}_{p,\xi}, \qquad [S_{\mathbb{T}}]^{\pi}_{p,\xi} = 2[P_+]^{\pi}_{p,\xi} - I^{\pi}_{p,\xi}.$$

Así, en el caso del álgebra de Banach $\mathcal{A}^{\pi}_{p,\xi}$, es generada por la unidad $I^{\pi}_{p,\xi}$ y el idempotente (7.24).

□

Si $\xi \in \widetilde{M}^{\pm}(QC)$, entonces de acuerdo con el Lema 7.4.3(*ii*) el álgebra de Banach $\mathcal{A}^{\pi}_{p,\xi}$ es conmutativa, y la clase lateral de está álgebra tiene la forma

$$[c_+P_+ + c_-P_-]^{\pi}_{p,\xi} \qquad (c_{\pm} \in \mathbb{C}),$$

donde $[P_+]^\pi_{p,\xi} = P^\pi_{p,\xi}$ y $[P_-]^\pi_{p,\xi} = I^\pi_{p,\xi} - P^\pi_{p,\xi}$, y el mapeo Θ_ξ definido por

$$\Theta_\xi(I^\pi_{p,\xi}) = diag\{1,1\}, \qquad \Theta_\xi(P^\pi_{p,\xi}) = diag\{1,0\}, \tag{7.25}$$

se extiende a un isomorfismo del álgebra de Banach $\Theta_\xi : \mathcal{A}^\pi_{p,\xi} \to diag\{\mathbb{C},\mathbb{C}\}$ del álgebra de Banach $\mathcal{A}^\pi_{p,\xi}$ en el álgebra C^* de las matrices diagonal complejas 2×2. Además, para funciones arbitrarias $a_\pm \in PQC$,

$$[a_+P_+ + a_-P_-]^\pi_{p,\xi} = [a_+(\xi^\pm)P_+ + a_-(\xi^\pm)P_-]^\pi_{p,\xi} \qquad si \qquad \xi \in \widetilde{M}^\pm(QC),$$

respectivamente, y por lo tanto, por (7.25),

$$\Theta_\xi([a_+P_+ + a_-P_-]^\pi_{p,\xi}) = diag\{a_+(\xi^\pm), a_-(\xi^\pm)\}, \tag{7.26}$$

obtenemos lo siguiente.

Teorema 7.4.3. *Dado $p \in (1,\infty)$ y $\xi \in \widetilde{M}^\pm(QC)$, el álgebra de Banach $\mathcal{A}^\pi_{p,\xi}$ es inversamente cerrada en el álgebra de Banach $\Lambda^\pi_{p,\xi}$, y una clase lateral $A^\pi_{p,\xi}$ es invertible en el álgebra de Banach $\mathcal{A}^\pi_{p,\xi}$ sí y sólo si $det\Theta_\xi(A^\pi_{p,\xi}) \neq 0$.*

7.5. Operadores de convolución de Mellin y sus aplicaciones

7.5.1. Operadores de convolución de Mellin

Sea $d\mu(t) = dt/t$ la medida invariante (normalizada) en $\mathbb{R}_+$. Consideremos la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$, la cual es llamada usualmente como la Transformada de Mellin y es definida por

$$M : L^2(\mathbb{R}_+, d\mu) \to L^2(\mathbb{R}), \qquad (Mf)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t)t^{-ix}\frac{dt}{t}.$$

Este es un operador invertible, con la inversa dada por

$$M^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}_+, d\mu), \qquad (M^{-1}g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} g(t)t^{ix}dx.$$

Sea E el isomorfismo isométrico

$$E : L^p(\mathbb{R}_+, d\mu) \to L^p(\mathbb{R}), \qquad (Ef)(x) := f(e^x) \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{7.27}$$

Entonces el mapeo $A \mapsto E^{-1}AE$ transforma el operador de convolución de Fourier dada por $W^0(a) = \mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}$ a el operador de convolución de Mellin

$$Co(a) := M^{-1}aM$$

con el mismo símbolo a. Por lo tanto, las clases M_p de multiplicadores de Fourier en $L^p(\mathbb{R})$ coincide con las clases de multiplicadores de Mellin en $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$. Así, el operador de convolución de Mellin $Co(a)$ es acotado en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$ sí y sólo si $a \in M_p$.

7.5.2. Multiplicadores continuos en la recta real

Si a es una función absolutamente continua de variación total finita $V(a)$ en $\mathbb{R}$, entonces $a' \in L^1(\mathbb{R})$ y $V(a) = \int_{\mathbb{R}} |a'(x)|dx$. El conjunto $V(\mathbb{R})$ de todas las funciones absolutamente continuas de variación total finita en $\mathbb{R}$ forman un álgebra de Banach cuando está dotado con la norma

$$||a||_V := ||a||_{L^\infty(\mathbb{R})} + V(a).$$

El siguiente Teorema da un subconjunto importante de M_p, (ver, por ej., el Teorema 17.1 de [4])

Teorema 7.5.1. *[Desigualdad de Stechkin] Si $a \in PC$ tiene variación total finita $V(a)$, entonces $a \in M_p$ y*

$$||a||_{M_p} \leq ||S_{\mathbb{R}}||_{\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}))}(||a||_{L^\infty(\mathbb{R})} + V(a)),$$

donde $S_{\mathbb{R}}$ es el operador integral singular de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Siendo $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$. Sea $C_p(\overline{\mathbb{R}})$ la clausura en M_p del conjunto de todas las funciones $a \in C(\overline{\mathbb{R}})$ con variación total finita en $\mathbb{R}$.

7.5.3. Álgebra generada por el operador integral singular de Cauchy

Supongamos que $\mathfrak{A}$ es un álgebra de Banach y $\mathfrak{G}$ es un subconjunto de $\mathfrak{A}$. $alg_{\mathfrak{A}}\mathfrak{G}$ denota la más pequeña álgebra cerrada de $\mathfrak{A}$ que contiene $\mathfrak{G}$ e $id_{\mathfrak{A}}\mathfrak{G}$ denota el más pequeño ideal cerrado bilateral de $\mathfrak{A}$ que contiene $\mathfrak{G}$. Sea $\mathcal{B} := \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+))$ y $\mathcal{K} := \mathcal{K}(L^p(\mathbb{R}_+))$. Consideramos los operadores $S_{\mathbb{R}_+}$, $R_{\mathbb{R}_+} \in \mathcal{B}$ dadas por funciones $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ por

$$\begin{aligned}(S_{\mathbb{R}_+} f)(x) &:= \tfrac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}_+} \tfrac{f(y)}{y-x} dy,\\ (R_{\mathbb{R}_+} f)(x) &:= \tfrac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}_+} \tfrac{f(y)}{y+x} dy\end{aligned} \tag{7.28}$$

para casi todos los $x \in \mathbb{R}_+$, donde las integrales son entendidas en sentido del valor principal. Esos operadores son acotados en el espacio $L^p(\mathbb{R}_+)$ para todo $p \in (1, \infty)$.

Consideremos el subálgebra de Banach $\mathcal{A} := alg_{\mathcal{B}}\{I, S_{\mathbb{R}_+}\}$ del álgebra de Banach $\mathcal{B}$ e introducimos el isomorfismo isométrico

$$\Phi := L^p(\mathbb{R}_+) \to L^p(\mathbb{R}_+, d\mu), \qquad (\Phi f)(t) := t^{1/p} f(t) \qquad (t \in \mathbb{R}_+). \tag{7.29}$$

El siguiente resultado sigue de las secciones 4.2.2- 4.2.3 de [21].

Teorema 7.5.2. *El álgebra $\mathcal{A}$ es la más pequeña subálgebra cerrada de $\mathcal{B}$ que contiene el operador $\Phi^{-1} Co(a) \Phi$ con $a \in C_p(\overline{\mathbb{R}})$. Las funciones*

$$s_p(x) := coth[\pi + i/p], \qquad r_p(x) := 1/sinh[\pi(x + i/p)] \qquad (x \in \mathbb{R}_+), \tag{7.30}$$

extendidas por continuidad a $\pm\infty$, pertenecen a $C_p(\overline{\mathbb{R}})$ y los operadores $S_{\mathbb{R}_+}$ y $R_{\mathbb{R}_+}$ son similares a los operadores de convolución de Mellin:

$$\Phi S_{\mathbb{R}_+} \Phi^{-1} = Co(s_p), \qquad \Phi R_{\mathbb{R}_+} \Phi^{-1} = Co(r_p). \tag{7.31}$$

7.6. Estudio local del álgebra de Banach $\mathfrak{A}_p$

7.6.1. Álgebras cocientes de Banach necesarias

Dado $p \in (1, \infty)$, continuemos estudiando el álgebra de Banach

$$\mathfrak{A}_p = alg\{aI, S_{\mathbb{T}} : \ a \in PQC\} \subset \mathcal{B}_p$$

de operadores integrales singulares con coeficientes PQC en el espacio $L^p(\mathbb{T})$.

Para cada $\xi \in M^0(QC)$, sea $\mathcal{J}^\pi_{p,\xi}$ el más pequeño ideal cerrado bilateral del álgebra de Banach Λ^π_p que contiene el ideal maximal

$$\mathcal{I}^\pi_{p,\xi} = \{[aI]^\pi : \ a \in QC, a(\xi) = 0\}$$

de la subálgebra central $\mathcal{Z}^\pi_p$ de Λ^π_p, y $\Lambda^\pi_{p,\xi} = \Lambda^\pi_p / \mathcal{J}^\pi_{p,\xi}$.

Estudiaremos la clase lateral $[S_\mathbb{T}]^\pi_{p,\xi} := [S_\mathbb{T}]^\pi + \mathcal{J}^\pi_{p,\xi}$.

Sea E uno de los conjuntos $U_t = [-\delta, \delta]$ y $E_\nu = [0, \nu] \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, donde $\delta > 0$, $0 \le \nu \le +\infty$, y $QC(E) := VMO(E) \cap L^\infty(E)$. Dado $p \in (1, \infty)$ y un conjunto E, sea $\Lambda_p(E)$ el álgebra de Banach de todos los operadores $A \in \mathcal{B}(L^p(E))$ para el cual los conmutadores $[aI, A]$ para todo $a \in QC(E)$ son operadores compactos en el espacio $L^P(E)$, y $\Lambda^\pi_p(E) := \Lambda_p(E)/\mathcal{K}_p(E)$, donde $\mathcal{K}_p(E)$ es el ideal de todos los operadores compactos en el espacio $L^p(E)$.

Relacionando los caracteres $\xi_t \in M^0_t(QC)$ y $\xi \in M^0_0(QC(U_t))$ por $\xi(a_t) = \xi_t(a)$, donde $a_t(x) = a(te^{ix})$ para $a \in QC$ y $x \in U_t$, e identificando los caracteres $\xi \in M^0_0(QC(E))$ para todo E, consideremos el ideal cerrado bilateral $\mathcal{J}^\pi_{p,\xi,E}$ del álgebra cociente de Banach $\Lambda^\pi_p(E)$, el cual es generado por el ideal maximal $\mathcal{I}^\pi_{p,\xi,E} := \{aI + \mathcal{K}_p(E) : a \in QC(E), a(\xi) = 0\}$ del subálgebra central $Z^\pi_p(E) = \{aI + \mathcal{K}_p(E) : a \in QC(E)\}$ de $\Lambda^\pi_p(E)$. Siendo $[A]^\pi_{p,\xi,E} := A^\pi + \mathcal{J}^\pi_{p,\xi,E}$. Siendo $\Lambda^\pi_{p,\xi}(E) := \Lambda^\pi_p(E)/\mathcal{J}^\pi_{p,\xi,E}$.

Respecto a las funciones en $L^\infty(\mathbb{T})$ como extensiones armónicas dentro del disco unitario abierto $\mathbb{D}$, deducimos de [[28], pág. 821] que la restricción g_t de una función $f \in QC$ a el radio $[0, t]$, donde $t \in \mathbb{T}$, pertenecen a $SO[0, t)$, es decir, es una función continua acotada en el radio $[0, t)$ que oscila lentamente en el punto t. Entonces la función f definida en $\mathbb{T}$, por $f(te^{ix}) = g_t[t(1-|x|/\pi)]$ $(0 < |x| < \pi)$ pertenece a $SO_t \subset SO^\diamondsuit \subset QC$, donde SO_t denota el conjunto de todas las funciones continuas y acotadas en $\mathbb{T} \setminus \{t\}$ que son lentamente oscilatorias en t, y $SO^\diamondsuit$ es el álgebra C^* generada por todos los SO_t $(t \in \mathbb{T})$, y $\text{lím}_{x \to 1}[g_t(tx) - f(tx)] = 0$. Por lo tanto, cada función en $SO[0, t)$ tiene la extensión continua al conjunto compacto $[0, t) \cup M^0_t(QC)$, lo cual puede ser identificado con $M(SO[0, t))$ (ver, [[28], pág. 823]).

Esto nos permite para cada $t \in \mathbb{T}$ y cada $a \in SO^\diamondsuit$ a relacionar los valores $a(\eta)$ para $\eta \in M^0_t(QC)$. Esto es, para algún $t \in \mathbb{T}$, definimos las fibras $M^0_\zeta(QC)$ de $M^0_t(QC)$ sobre los puntos $\zeta \in M_t(SO^\diamondsuit)$ por

$$M^0_\zeta(QC) = \{\eta \in M^0_t(QC) : \eta|_{SO^\diamondsuit} = \zeta\}.$$

Sí $a \in SO^\diamondsuit$ y $\zeta \in M_t(SO^\diamondsuit)$, entonces $a(\eta) = a(\zeta)$ para todo $\eta \in M^0_\zeta(QC)$.

7.6.2. Reducción

Sea $\gamma = [0, \delta]$, donde $U_t = [-\delta, \delta]$ y $0 < \delta < \pi/2$, y sea $\chi^+_{u_t}$ la función característica del arco $u_t^+ := \{te^{ix} : x \in U_t \cap \mathbb{R}_+\} \subset \mathbb{T}$. Consideremos el isomorfismo isométrico

$$\Upsilon_t : L^p(u_t^+) \to L^p(\gamma), \qquad (\Upsilon_t f)(x) = f(te^{ix}), \qquad x \in \gamma. \tag{7.32}$$

Entonces para funciones $\psi \in L^p(\gamma)$ y $x \in \gamma$,

$$[\Upsilon_t(\chi_{u_t^+} S_{\mathbb{T}} \chi_{u_t^+})\Upsilon_t^{-1}\psi](x) = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{ie^{iy}\psi(y)dy}{e^{iy} - e^{ix}}. \tag{7.33}$$

Para $0 \leq x < y \leq \pi/2$, uno puede probar que

$$\left| \frac{ie^{iy}}{e^{iy} - e^{ix}} - \frac{1}{y - x} \right| \leq M < \infty. \tag{7.34}$$

En vista de (7.34), podemos inferir que el operador dado para $x \in \gamma$ por

$$\psi \mapsto \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \Big[\frac{ie^{iy}}{e^{iy} - e^{ix}} - \frac{1}{y - x}\Big]\psi(y)dy$$

es compacto en el espacio $L^p(\gamma)$. Entonces, se sigue de (7.33) que

$$[\Upsilon_t(\chi_{u_t^+} S_{\mathbb{T}} \chi_{u_t^{-1}})\Upsilon_t^{-1}]^\pi = [S_\gamma]^\pi, \tag{7.35}$$

donde el operador S_γ esta dado por

$$(S_\gamma\psi)(\chi) = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{\psi(y)dy}{y - x} \qquad (x \in \gamma).$$

Consideremos el isomorfismo isométrico

$$\mathcal{T} : \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+)) \to \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)), \qquad A \mapsto \Phi A \Phi - 1, \tag{7.36}$$

donde Φ es el isomorfismo isométrico de $L^p(\mathbb{R}_+)$ sobre $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$ dado por (7.29).

Entonces se sigue del Teorema 7.5.2 que

$$\mathcal{T}(S_{\mathbb{R}_+}) = Co(s_p), \tag{7.37}$$

donde $\mathcal{T}$ está dada por (7.36) y (7.29), la función $s_p \in C(\overline{\mathbb{R}})$ está dada por (7.30).

Sea $\mathcal{T}_\gamma : L^p(\gamma) \to \chi_\gamma L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$ la restricción de $\mathcal{T}$. Por (7.37), obtenemos

$$[\mathcal{T}_\gamma(S_\gamma)]^\pi = [\chi_\gamma Co(s_p)\chi_\gamma I]^\pi. \tag{7.38}$$

Sea $QC(\gamma) = VMO(\gamma) \cap L^\infty(\gamma)$. Ya que las funciones $a \in QC(\gamma)$ conmutan con el operador S_γ módulo operadores compactos $K \in \mathcal{K}_p(\gamma)$, concluimos que el operador $[aI, \chi_\gamma Co(S_p)\chi_\gamma I]$ pertenece a $\mathcal{K}(\chi_\gamma L^p(\mathbb{R}_+, d\mu))$ para todo $a \in QC(\gamma)$.

Sea $\Lambda_p(\gamma)$ la subálgebra de Banach de $\mathcal{B}(L^p(\gamma))$ que consiste de todos los operadores $A \in \mathcal{B}(L^p(\gamma))$ tales que los conmutadores $[aI, A]$ son compactos para todo $a \in QC(\gamma)$. Sea $M_0(QC(\gamma))$ la fibra del espacio de ideales maximales de $QC(\gamma)$ sobre el punto $0 \in \gamma$. Consideremos el subconjunto cerrado $M_0^0(QC(\gamma)) \subset M_0(QC(\gamma))$. $\Lambda_p^\pi(\gamma) := \Lambda_p(\gamma)/\mathcal{K}(\gamma)$. Dado $\xi \in M_0^0(QC(\gamma))$, sea $\mathcal{J}_{p,\xi}^\pi(\gamma)$ el ideal bilateral cerrado del álgebra de Banach $\Lambda_p^\pi(\gamma)$ generado por el ideal maximal $\mathcal{I}_{p,\xi}^\pi(\gamma) := \{[aI]^\pi : a \in QC(\gamma), a(\xi) = 0\}$ del álgebra central $\mathcal{Z}_p^\pi(\gamma) := \{[aI]^\pi : a \in QC(\gamma)\}$ del álgebra de Banach $\Lambda_p^\pi(\gamma)$.

Dado $t \in \mathbb{T}$ y $\xi \in M_t^0(QC)$, donde $QC = QC(\mathbb{T})$, consideremos los ideales bilaterales cerrados $\mathcal{J}_{p,\xi}^\pi$ del álgebra cociente de Banach Λ_p^π. Junto con $\mathcal{J}_{p,\xi}^\pi$, consideremos el ideal $\mathcal{J}_{p,\widetilde{\xi}}^\pi(\gamma)$, donde $\widetilde{\xi} \in M_0^0(QC(\gamma))$ es asociado con $\xi \in M_t^0(QC)$ como sigue: $\widetilde{a} \in QC(\gamma)$ es definida por $\widetilde{a}(x) = a(te^{ix})$ para todo $x \in \gamma$ y cada $a \in QC(\mathbb{T})$. Entonces $\widetilde{\xi}(\widetilde{a}) = \xi(a)$ para cada $a \in QC(\mathbb{T})$ y cada $\xi \in M_t^0(QC(\mathbb{T}))$.

Análogamente, el álgebra de Banach $\Lambda_p(\mathbb{R}_+)$ es la subálgebra de Banach de $\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+))$ consiste de todos los operadores $A \in \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}_+))$ tales que los conmutadores $[aI, A]$ son compactos para todo $a \in QC(\mathbb{R}_+)$, donde $QC(\mathbb{R}_+) = VMO(\mathbb{R}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)$. Sea $M_0(QC(\mathbb{R}_+))$ la fibra del espacio de ideales maximales de $QC(\mathbb{R}_+)$ sobre el punto $0 \in \mathbb{R}_+$. Consideremos el subconjunto cerrado $M_0^0(QC(\mathbb{R}_+))$ de la fibra $M_0(QC(\mathbb{R}_+))$. Definiendo $\Lambda_p^\pi(\mathbb{R}_+) := \Lambda_p(\mathbb{R}_+)/\mathcal{K}_p(\mathbb{R}_+)$. Dado $\xi \in M_0^0(QC(\mathbb{R}_+))$, sea $\mathcal{J}_{p,\xi}^\pi(\mathbb{R}_+)$ el ideal bilateral cerrado del álgebra de Banach $\Lambda_p^\pi(\mathbb{R}_+)$ generada por el ideal maximal $\mathcal{I}_{p,\xi}^\pi(\mathbb{R}_+) := \{[aI]^\pi : a \in QC(\mathbb{R}_+), a(\xi) = 0\}$ del álgebra central $\mathcal{Z}_p^\pi(\mathbb{R}_+) := \{[aI]^\pi : a \in QC(\mathbb{R}_+)\}$ del álgebra de Banach $\Lambda_p^\pi(\mathbb{R}_+)$.

Junto con el ideal $\mathcal{J}_{p,\widetilde{\xi}}^\pi(\gamma)$, consideremos el ideal $\mathcal{J}_{p,\widetilde{\xi}}^\pi(\mathbb{R}_+)$, donde identificamos los puntos $\widetilde{\xi} \in M_0^0(QC(\gamma))$ y $\widetilde{\xi} \in M_0^0(QC(\mathbb{R}_+))$ asumiendo que la función $\widetilde{a} \in QC(\gamma)$ se extiende a una función $\widetilde{a} \in QC(\mathbb{R}_+)$ (dejaremos la notación de $\widetilde{a}$ para la extensión).

Se sigue de (7.35) que para cada $t \in \mathbb{T}$, cada $\xi \in M_t^0(QC(\mathbb{T}))$ y el correspondientemente $\widetilde{\xi} \in M_0^0(QC(\gamma))$,

$$sp[S_{\mathbb{T}}]_\xi^\pi = sp[\Upsilon_t(\chi_{u_t^+} S_{\mathbb{T}} \chi_{u_t^+})\Upsilon_t^{-1}]_{\widetilde{\xi}}^\pi, \tag{7.39}$$

donde $sp(x)$ es el espectro de un elemento x, y

$$[\Upsilon_t(\chi_{u_t^+} S_{\mathbb{T}} \chi_{u_t^+})\Upsilon_t^{-1}]_{\widetilde{\xi}}^\pi = [S_\gamma]_{\widetilde{\xi}}^\pi = [S_{\mathbb{R}_+}]_{\widetilde{\xi}}^\pi. \tag{7.40}$$

Aplicando (7.37), concluimos que

$$sp[S_{\mathbb{R}_+}]^\pi = sp[\mathcal{T}(S_{\mathbb{R}_+})]^\pi = sp[Co(s_p)]^\pi. \tag{7.41}$$

Es fácil ver que

$$sp[S_{\mathbb{R}_+}]^\pi = sp[Co(s_p)]^\pi = s_p(\overline{\mathbb{R}}). \tag{7.42}$$

Pero

$$s_p(\overline{\mathbb{R}}) = \{coth(\pi x + \pi i/p) : x \in \overline{\mathbb{R}}\}. \tag{7.43}$$

Entonces la invertibilidad de la clase lateral $[S_{\mathbb{R}_+}]^\pi$ en el álgebra de Banach $\Lambda^\pi(\mathbb{R}_+)$ implica la invertibilidad de la clase lateral $[S_{\mathbb{R}_+}]^\pi_{\widetilde{\xi}}$ en el álgebra de Banach $\Lambda^\pi_{\widetilde{\xi}}(\mathbb{R}_+)$ para cada $\widetilde{\xi} \in M_0^0(QC(\gamma))$. Se puede probar la afirmación inversa: Para cualquier $\widetilde{\xi} \in M_0^0(QC(\gamma))$, la invertibilidad de la clase lateral $[S_{\mathbb{R}_+}]^\pi_{\widetilde{\xi}}$ en el álgebra de Banach $\Lambda^\pi_{\widetilde{\xi}}(\mathbb{R}_+)$ implica, respectivamente, la invertibilidad de la clase lateral $[S_{\mathbb{R}_+}]^\pi$ en el álgebra de Banach $\Lambda^\pi(\mathbb{R}_+)$. Por lo tanto, inferimos de (7.42) que para cada $\widetilde{\xi} \in M_0^0(QC(\gamma))$,

$$[S_{\mathbb{R}_+}]^\pi_{\widetilde{\xi}} = sp[Co(s_p)]^\pi = s_p(\overline{\mathbb{R}}), \tag{7.44}$$

donde $s_p(\overline{\mathbb{R}})$ está dada por (7.43).

7.7. El teorema de dos idempotentes y sus aplicaciones

7.7.1. El teorema de dos idempotentes

Sí $\xi \in M^0(QC)$, donde $M^0(QC)$ está dado por (7.7), entonces por el Lema 7.4.3(i) se sigue que el cálculo de símbolos para el álgebra de Banach $\mathcal{A}^\pi_{p,\xi}$ puede ser obtenida aplicando el teorema de dos idempotentes (ver el Teorema 8.7 de [3]). Notemos que la formulación del Teorema 7.7.1 abajo difiere de la formulción del Teorema 1.6.1 equivalente.

Teorema 7.7.1. *Sea $\mathcal{B}$ un álgebra de Banach con identidad e y sean p y q idempotentes distintos de cero en $\mathcal{B}$. Sea $\mathcal{A}$ la subálgebra cerrada más pequeña de $\mathcal{B}$ que contiene a e, p y q. Fijando $X := e - (p-q)^2$ y supongamos que los puntos 0 y 1 no son puntos aislados en $sp_{\mathcal{B}}X$. Definiendo el mapeo $\omega_\mu : \{e,p,q\} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ para $\mu \in \mathbb{C}$ por*

$$\omega_\mu(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \omega_\mu(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \omega_\mu(q) = \begin{bmatrix} \mu & \sqrt{\mu(1-\mu)} \\ \sqrt{\mu(1-\mu)} & 1-\mu \end{bmatrix},$$

donde $\sqrt{\mu(1-\mu)}$ significa un valor arbitrario de la raíz cuadrada. Entonces

(a) *para cada $\mu \in sp_{\mathcal{A}}X$ el mapeo ω_μ se extiende a un homomorfismo del álgebra de Banach ω_μ de $\mathcal{A}$ en $\mathbb{C}^{2\times 2}$;*

(b) *un elemento $A \in \mathcal{A}$ es invertible en el álgebra $\mathcal{B}$ sí y sólo si $\det \omega_\mu(A) \neq 0$ para todo $\mu \in sp_{\mathcal{B}}X$;*

(c) *un elemento $A \in \mathcal{A}$ es invertible en el álgebra $\mathcal{A}$ sí y sólo si $\det \omega_\mu(A) \neq 0$ para todo $\mu \in sp_{\mathcal{A}}X$.*

Necesitamos aplicar el Teorema 7.7.1 para cada $\xi \in M^0(QC)$ y

$$\begin{gathered}\mathcal{B} = \Lambda^\pi_{p,\xi}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}^\pi_{p,\xi}, \quad e = I^\pi_{p,\xi}, \quad p = P^\pi_{p,\xi}, \quad q = Q^\pi_{p,\xi}, \\ X = [X_t]^\pi_{p,\xi} := I^\pi_{p,\xi} - (P^\pi_{p,\xi} - Q^\pi_{p,\xi})^2,\end{gathered} \tag{7.45}$$

donde $P^\pi_{p,\xi}$ y $Q^\pi_{p,\xi}$ son dados por (7.23), y el punto $t \in \mathbb{T}$ es asociado con el carácter, es decir, el funcional multiplicativo $t = \xi|_C$.

7.7.2. El espectro de las clases laterales $[X_t]^\pi_{p,\xi}$ para $\xi \in M^0_t(QC)$ y $t \in \mathbb{T}$

Dado $t \in \mathbb{T}$, consideremos las clases laterales $[X_t]^\pi$, donde

$$X_t := I - (\chi^+_t I - P_+)^2 \in \mathfrak{A}_p \subset \Lambda_p. \tag{7.46}$$

Para cada $t \in \mathbb{T}$ y cada $\xi \in M^0_t(QC)$, de acuerdo con (7.23), consideremos la clase lateral

$$[X_t]^\pi_{p,\xi} := [I - (\chi^+_t I - P_+)^2]^\pi + \mathcal{J}^\pi_{p,\xi}, \tag{7.47}$$

la cual pertenece al álgebra de Banach $\Lambda^\pi_{p,\xi}$. Por (7.46) y (7.47) vemos que $[X_t]^\pi_{p,\xi} = [X_t]^\pi + \mathcal{J}^\pi_{p,\xi}$ para todo $\xi \in M^0_t(QC)$ y todo $t \in \mathbb{T}$.

Sea $\gamma = [0, \delta]$, donde $U_t = [-\delta, \delta]$ y $0 < \delta < \pi/2$, y sea $u_t = \{te^{ix} : x \in U_t\} \subset \mathbb{T}$. Consideremos el isomorfismo isométrico

$$\widetilde{\Upsilon}_t : L^p(u_t) \to L^p_2(\gamma), \qquad (\widetilde{\Upsilon}_t f)(x) = \begin{Bmatrix} f(te^{ix}) \\ f(te^{-ix}) \end{Bmatrix} \tag{7.48}$$

donde la norma de funciones vectoriales $\varphi = \{\varphi_k\}^2_{k=1} \in L^p_2(\gamma)$ con entradas en $L^p(\gamma)$ esta dada por $||\varphi|| = (||\varphi_1||^p_{L^p(\gamma)} + ||\varphi_2||^p_{L^p(\gamma)})^{1/p}$. Se puede ver que

$$[\widetilde{\Upsilon}_t(\chi_{u_t} S_{\mathbb{T}} \chi_{u_t})\widetilde{\Upsilon}^{-1}_t]^\pi = \begin{bmatrix} [S_\gamma]^\pi & -[R_\gamma]^\pi \\ [R_\gamma]^\pi & -[S_\gamma]^\pi \end{bmatrix}, \tag{7.49}$$

donde los operadores S_γ y R_γ son dadas por

$$(S_\gamma\psi)(x) = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{\psi(y)dy}{y-x}, \qquad (R_\gamma\psi)(x) = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{\psi(y)dy}{y+x} \qquad (x\in\gamma).$$

Identificando los puntos $\xi \in M_t^0(QC)$ y $\widetilde{\xi} \in M_0^0(QC(\gamma))$ por la regla $\widetilde{\xi}(a\circ te^{i(\cdot)}) = \xi(a)$ para todo $a \in QC$, podemos concluir de (7.49) que

$$[\widetilde{\Upsilon}_t(\chi_{u_t}S_{\mathbb{T}}\chi_{u_t})\widetilde{\Upsilon}_t^{-1}]^\pi_{p,\widetilde{\xi}} = \begin{bmatrix} [S_\gamma]^\pi_{p,\widetilde{\xi},\gamma} & -[R_\gamma]^\pi_{p,\widetilde{\xi},\gamma} \\ [R_\gamma]^\pi_{p,\widetilde{\xi},\gamma} & -[S_\gamma]^\pi_{p,\widetilde{\xi},\gamma} \end{bmatrix}, \tag{7.50}$$

donde $A^\pi_{p,\widetilde{\xi},\gamma} = A^\pi + \mathcal{J}^\pi_{p,\widetilde{\xi},\gamma}$, para cada $t \in \mathbb{T}$ y cada $\xi \in M_t^0(QC)$.

Entonces se sigue del Teorema 7.5.2 que

$$\mathcal{T}(S_{\mathbb{R}_+}) = Co(s_p), \qquad \mathcal{T}(R_{\mathbb{R}_+}) = Co(r_p), \tag{7.51}$$

donde $\mathcal{T}$ está dado por (7.36) y (7.29), y las funciones $s_p,\ r_p \in C_p(\overline{\mathbb{R}})$ son dadas por (7.30). Sea $\mathcal{T}_\gamma : L^p(\gamma) \to \chi_\gamma L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$ la restricción de $\mathcal{T}$ a γ. Por (7.51), obtenemos

$$\begin{aligned} [\mathcal{T}_\gamma(S_\gamma)]^\pi = [\chi_\gamma \mathcal{T}(S_{\mathbb{R}_+})\chi_\gamma I]^\pi = [\chi_\gamma Co(s_p)\chi_\gamma I]^\pi, \\ [\mathcal{T}_\gamma(R_\gamma)]^\pi = [\chi_\gamma \mathcal{T}(R_{\mathbb{R}_+})\chi_\gamma I]^\pi = [\chi_\gamma Co(r_p)\chi_\gamma I]^\pi. \end{aligned} \tag{7.52}$$

Identificando los puntos $\widetilde{\xi} \in M_0^0(QC(\gamma))$ y $\widetilde{\xi} \in M_0^0(QC(\mathbb{R}_+))$, deducimos de (7.50) y (7.52) que

$$[\widetilde{\Upsilon}_t(\chi_{u_t}S_{\mathbb{T}}\chi_{u_t})\widetilde{\Upsilon}_t^{-1}]^\pi_{p,\widetilde{\xi}}$$

$$= \begin{bmatrix} [\chi_\gamma\mathcal{T}^{-1}(Co(s_p))\chi_\gamma I]^\pi_{p,\widetilde{\xi},\gamma} & -[\chi_\gamma\mathcal{T}^{-1}(Co(r_p))\chi_\gamma I]^\pi_{p,\widetilde{\xi},\gamma} \\ [\chi_\gamma\mathcal{T}^{-1}(Co(r_p))\chi_\gamma I]^\pi_{p,\widetilde{\xi},\gamma} & -[\chi_\gamma\mathcal{T}^{-1}(Co(s_p))\chi_\gamma I]^\pi_{p,\widetilde{\xi},\gamma} \end{bmatrix}. \tag{7.53}$$

Teorema 7.7.2. *Sea $p \in (1,\infty)$. Sí $t \in \mathbb{T}$ y $\xi \in M_t^0(QC)$, entonces*

$$sp_{\Lambda^\pi_{p,\xi}}[X_t]^\pi_{p,\xi} = sp_{\mathcal{A}^\pi_{p,\xi}}[X_t]^\pi_{p,\xi} = \mathcal{L}_p, \tag{7.54}$$

donde

$$\mathcal{L}_p := \{(1 + coth[\pi x + \pi i/p])/2 : x \in [-\infty,\infty]\}. \tag{7.55}$$

Demostración. Fijemos $t \in \mathbb{T}$ y $\xi \in M_t^0(QC)$, donde $M_t^0(QC)$ está dado por (7.6). Claramente,

$$sp_{\Lambda^\pi_{p,\xi}}[X_t]^\pi_{p,\xi} = sp_{\Lambda^\pi_{p,\xi}}[\chi_{u_t}X_t\chi_{u_t}I]^\pi_{p,\xi}, \tag{7.56}$$

donde $[(\chi_{u_t}-1)I]^\pi \in \mathcal{J}^\pi_{p,\xi}$. Sea $\gamma=[0,\delta]$, donde $U_t=[-\delta,\delta]$ y $0<\delta<\pi/2$. Consideremos el isomorfismo isométrico $\widetilde{\Upsilon}_t : L^p(u_t)\to L^p_2(\gamma)$ dado por (7.48). Se sigue de (7.49) que

$$[\widetilde{\Upsilon}_t[\chi_{u_t}(I-(\chi_t^+ I-P_+)^2)\chi_{u_t}I]\widetilde{\Upsilon}_t^{-1}]^\pi$$

$$= diag\{[\chi_\gamma 2^{-1}(I+S_{\mathbb{R}_+})\chi_\gamma I]^\pi, [\chi_\gamma 2^{-1}(I+S_{\mathbb{R}_+})\chi_\gamma I]^\pi\}. \tag{7.57}$$

Identificando los puntos $\xi\in M_0^0(QC(\gamma))$ y $M_0^0(QC(\mathbb{R}_+))$, concluimos que si $A^\pi\in\mathcal{J}^\pi_{p,\xi}$, entonces

$$\widetilde{\Upsilon}_t(\chi_{u_t}A^\pi\chi_{u_t}I)\widetilde{\Upsilon}_t^{-1}=[\chi_\gamma I]^\pi[A^\pi_{i,j}]^2_{i,j=1}[\chi_\gamma I]^\pi,$$

donde $A^\pi_{i,j}\in\mathcal{J}^\pi_{p,\widetilde{\xi},\gamma}$ para todo $i,\ j=1,2$. Por lo tanto, por (7.56), (7.57) y la propiedad $[(\chi_\gamma-1)I]^\pi\in\mathcal{J}^\pi_{p,\widetilde{\xi},\mathbb{R}_+}$, la clase lateral $[X_t]^\pi_{p,\xi}$ es invertible en el álgebra de Banach $\Lambda^\pi_{p,\xi}$ sí y sólo si la matriz diagonal

$$diag\Big\{[2^{-1}(I+S_{\mathbb{R}_+})]^\pi_{p,\widetilde{\xi},\mathbb{R}_+},\ [2^{-1}(I+\ S_{\mathbb{R}_+})]^\pi_{p,\widetilde{\xi},\mathbb{R}_+}\Big\}$$

con entradas en $\Lambda^\pi_{p,\widetilde{\xi}}(\mathbb{R}_+)$ es invertible en el álgebra de Banach $\Lambda^\pi_{p,\widetilde{\xi}}(\mathbb{R}_+)$. Consecuentemente, haciendo uso del teorema del mapeo espectral, obtenemos

$$sp_{\Lambda^\pi_{p,\xi}}[X_t]^\pi_{p,\xi}=sp_{\Lambda^\pi_{p,\widetilde{\xi}}(\mathbb{R}_+)}[2^{-1}(I+S_{\mathbb{R}_+})]^\pi_{p,\widetilde{\xi},\mathbb{R}_+}$$

$$=2^{-1}(1+\ sp_{\Lambda^\pi_{p,\widetilde{\xi}}(\mathbb{R}_+)}[S_{\mathbb{R}_+}]^\pi_{p,\widetilde{\xi},\mathbb{R}_+}),$$

lo cual implica en vista de (7.44) que

$$sp_{\Lambda^\pi_{p,\xi}}[X_t]^\pi_{p,\xi}=2^{-1}(1+s_p(\overline{\mathbb{R}})=\mathcal{L}_p,$$

donde $\mathcal{L}_p$ está dada por (7.55). Finalmente, puesto que el conjunto $\mathcal{L}_p$ no separa el plano complejo $\mathbb{C}$, la primer igualdad en (7.54) se sigue de los Corolarios del Teorema 10.18 de [23].

$\square$

7.7.3. Corolario del Teorema de dos idempotentes

Los Teoremas 7.7.1 y 7.7.2 implican lo siguiente.

Teorema 7.7.3. *Sea $p\in(1,\infty)$ y sea $\xi\in M_t^0(QC)$ para $t\in\mathbb{T}$. Entonces el álgebra de Banach $\mathcal{A}^\pi_{p,\xi}$ es inversamente cerrada en el álgebra de Banach $\Lambda^\pi_{p,\xi}$, y* *(i) para cada $\mu \in \mathcal{L}_p$, el mapeo $\pi_\mu : \{I^\pi_{p,\xi}, P^\pi_{p,\xi}, Q^\pi_{p,\xi}\} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ dada por*

$$\pi_\mu(I^\pi_{p,\xi}) = I_{2\times 2}, \qquad \pi_\mu(P^\pi_{p,\xi}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \pi_\mu(Q^\pi_{p,\xi}) = \begin{bmatrix} \mu & \sqrt{\mu(1-\mu)} \\ \sqrt{\mu(1-\mu)} & 1-\mu \end{bmatrix},$$

se extiende a un homomorfismo del álgebra de Banach $\pi_\mu : \mathcal{A}^\pi_{p,\xi} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$, donde $\sqrt{\mu(1-\mu)}$ un valor arbitrario de la raíz cuadrada;

(ii) una clase lateral $A^\pi_{p,\xi} \in \mathcal{A}^\pi_{p,\xi}$ es invertible en el álgebra de Banach $\Lambda^\pi_{p,\xi}$ (equivalentemente, en el álgebra $\mathcal{A}^\pi_{p,\xi}$) sí y sólo si $det[\pi_\mu(A^\pi_{p,\xi})] \neq 0$ para todo $\mu \in \mathcal{L}_p$.

7.8. El estudio de Fredholm del álgebra de Banach $\mathfrak{A}_p$

Con el álgebra de Banach $\mathfrak{A}_p$ asociamos el conjunto

$$\mathfrak{M} := \bigcup_{t\in\mathbb{T}} \mathfrak{M}_t, \tag{7.58}$$

donde, para cada $t \in \mathbb{T}$,

$$\mathfrak{M}_t := \widetilde{M}^-_t(QC) \cup \Big(\bigcup_{\xi \in M^0_t(QC)} \{\xi\} \times \mathcal{L}_p \Big) \cup \widetilde{M}^+_t(QC) \tag{7.59}$$

y $\mathcal{L}_p$ está dada por (7.55). Fijemos

$$\mathfrak{M}^\pm := \widetilde{M}^\pm(QC), \qquad \mathfrak{M}^0 := \bigcup_{\xi\in M^0(QC)} \{\xi\} \times \mathcal{L}_p, \tag{7.60}$$

donde los conjuntos $\widetilde{M}^\pm(QC)$ y $M^0(QC)$ son definidos por (7.7). $B(\mathfrak{M}, \mathbb{C}^{2\times 2})$ la C^*-álgebra de todas las funciones matriciales acotadas $f : \mathfrak{M} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$.

Teorema 7.8.1. *Sea $p \in (1, \infty)$. Entonces el mapeo $Sym : \{aI : a \in PQC\} \cup \{S_\mathbb{T}\} \to B(\mathfrak{M}, \mathbb{C}^{2\times 2})$ dado por las funciones matriciales*

$$(Sym\ S_\mathbb{T})(\zeta) := diag\{1, -1\} \quad para\ todo\ \zeta \in \mathfrak{M},$$

$$(Sym\ aI)(\zeta) := \begin{cases} diag\{a(\xi,0), a(\xi,0)\}\ para\ todo\ \zeta = \xi \in \widetilde{M}^-(QC), \\ \begin{bmatrix} a(\xi,1)\mu + a(\xi,0)(1-\mu) & [a(\xi,1) - a(\xi,0)]\varrho(\mu) \\ [a(\xi,1) - a(\xi,0)]\varrho(\mu) & a(\xi,1)(1-\mu) + a(\xi,0)\mu \end{bmatrix} \\ para\ todo\ \zeta = (\xi,\mu)\ con\ \xi \in M^0(QC)\ y\ \mu \in \mathcal{L}_p, \\ diag\{a(\xi,1), a(\xi,1)\}\ \ para\ todo\ \zeta = \xi \in \widetilde{M}^+(QC), \end{cases} \tag{7.61}$$

donde $a(\xi, \mu)$ *es la transformada de Gelfand de una función* $a \in PQC$ *para* $(\xi, \mu) \in M(PQC)$ *y* $\varrho(\mu) = \sqrt{\mu(1-\mu)}$ *para todo* $\mu \in \bigcup_{\xi \in M^0(QC)} \mathcal{L}_p$*, que se extiende a un homomorfismo del álgebra de Banach*

$$Sym : \mathfrak{A}_p \to B(\mathfrak{M}, \mathbb{C}^{2\times 2}) \tag{7.62}$$

cuyo kernel contiene a todos los operadores compactos en $L^p(\mathbb{T})$*. El álgebra de Banach* $\mathfrak{A}_p^\pi$ *es inversamente cerrado en el álgebra de Calkin* $\mathcal{B}_p^\pi$*, y un operador* $A \in \mathfrak{A}_p$ *es Fredholm en un espacio* $L^p(\mathbb{T})$ *sí y sólo si*

$$det((Sym\ A)(\zeta)) \neq 0 \qquad para\ todo\ \zeta \in \mathfrak{M}. \tag{7.63}$$

Demostración. Este Teorema se demuestra con la ayuda del Teorema 7.4.2, del Corolario 7.4.2, del Teorema 7.4.3 y el Teorema 7.7.3.

□

Capítulo 8

Problemas de frontera de Riemann y Haseman con coeficientes PQC

8.1. Problema de frontera de Riemann

Este problema consiste en encontrar una función $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\mathrm{d}\tau$ analítica en todo el plano complejo excepto en los puntos que están dados por la curva $\mathbb{T}$, con $\varphi \in L^p(\mathbb{T})$ que satisfacen la condición de frontera

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \qquad \text{para} \quad t \in \mathbb{T} \tag{8.1}$$

donde $\Phi^{\pm}(t)$ son los valores límite de la función desconocida $\Phi(z)$, definidas de la siguiente manera

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau = [P_+\varphi](t), \qquad \textit{con } P_+ = \frac{1}{2}(I + S_{\mathbb{T}})$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau = -[P_-\varphi](t), \qquad \textit{con } P_- = \frac{1}{2}(I - S_{\mathbb{T}})$$

y $G(t)$ es cuasi-continua por trozos en $\mathbb{T}$, $g(t) \in L^p(\mathbb{T})$ son funciones dadas.

Reescribiendo obtenemos lo siguiente:

$$(P_+ + GP_-)\varphi = g$$

i.e.

$$\Big(\frac{1}{2}(I + S_{\mathbb{T}}) + G\frac{1}{2}(I - S_{\mathbb{T}})\Big)\varphi = g.$$

Aplicando el Teorema 7.8.1 a la ecuación anterior con el operador $A = P_+ + GP_-$, calculamos $\det Sym\ A$, hagámoslo por casos

Caso 1: Sea $\xi \in \widetilde{M}^-(QC)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G(\xi,0) & 0 \\ 0 & G(\xi,0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G(\xi,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G(\xi,0) \end{bmatrix}.$$

Ahora calculemos su determinante

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G(\xi,0) \end{bmatrix} = G(\xi,0) \neq 0.$$

Caso 2: $\xi \in M^0(QC)$ y $\mu \in \mathcal{L}_p$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G(\xi,1)\mu + G(\xi,0)(1-\mu) & [G(\xi,1) - G(\xi,0)]\varrho(\mu) \\ [G(\xi,1) - G(\xi,0)]\varrho(\mu) & G(\xi,1)(1-\mu) + G(\xi,0)\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & [G(\xi,1) - G(\xi,0)]\varrho(\mu) \\ 0 & G(\xi,1)(1-\mu) + G(\xi,0)\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & [G(\xi,1) - G(\xi,0)]\varrho(\mu) \\ 0 & G(\xi,1)(1-\mu) + G(\xi,0)\mu \end{bmatrix}.$$

Ahora calculemos su determinante

$$\det \begin{bmatrix} 1 & [G(\xi,1) - G(\xi,0)]\varrho(\mu) \\ 0 & G(\xi,1)(1-\mu) + G(\xi,0)\mu \end{bmatrix} = G(\xi,1)(1-\mu + G(\xi,0)\mu \neq 0.$$

Caso 3: Sea $\xi \in \widetilde{M}^+(QC)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G(\xi,1) & 0 \\ 0 & G(\xi,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G(\xi,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G(\xi,1) \end{bmatrix}.$$

Ahora calculemos su determinante

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G(\xi,1) \end{bmatrix} = G(\xi,1) \neq 0.$$

Por lo que, para los tres casos obtenemos que el determinante de $Sym\ A$ es distinto de cero. Aplicando el Teorema 7.8.1 obtenemos que el operador $A = P_+ + GP_-$ es de Fredholm, por lo que el operador de Toeplitz $T(G^{-1}) = P_+G^{-1}P_+$ es también de Fredholm, y por el teorema de Simonenko 4.2.4 G^{-1} admite una factorización de Wiener-Hopf, por lo que podemos ver que nuestro problema se resuelve como en el Capítulo 5.

8.2. Problema de frontera de Haseman

Sea $\Phi^+(\alpha(t)) = G(t)\Phi^-(t) + g(t)$ con $\Phi^+, \Phi^- \in L^p(\mathbb{T})$, $G \in PQC(\mathbb{T})$ y $g(t) \in L^p(\mathbb{T})$. Además Φ^+ es analítica en D^+ con $0 \in D^+$ y Φ^- es analítica en D^- con $\infty \in D^-$, y $\Phi^-(\infty) = 0$. Donde

$$\Phi^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

con $\varphi \in L^p(\mathbb{T})$ y $z \in D^{\pm}$ respectivamente. Por las fórmulas de Sokhotski-Plemelj tenemos

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = (P_+\varphi)(t),$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = -(P_-\varphi)(t),$$

donde $P_+ = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}S$ y $P_- = \frac{1}{2}I - \frac{1}{2}S$, $S = S_{\mathbb{T}}$ es un operador singular integral con núcleo de Cauchy. Por lo que ahora tenemos que

$$\frac{1}{2}\varphi(\alpha(t)) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - \alpha(t)} d\tau = G(t)\left[-\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \right] + g(t),$$

$$(P_+\varphi)(\alpha(t)) + G(t)(P_-\varphi)(t) = g(t).$$

Sea $(W_\alpha\varphi)(t) = \varphi(\alpha(t))$, entonces vamos a tener lo siguiente

$$(W_\alpha P_+\varphi)(t) + (GP_-\varphi)(t) = g(t).$$

Sea α un homeomorfismo que manda el dominio D^+ en si mismo, i.e. $\alpha : D^+ \to D^+$. Y además lo tenemos definido de la forma

$$\alpha(z) = e^{i\theta}\frac{a - z}{1 - \bar{a}z}, \; con \; |a| < 1.$$

Entonces α es un mapeo conforme de D^+ sobre D^+ que tiene extensión continua a la cerradura $\overline{D}^+$ de D^+. Además, $\alpha|_{\mathbb{T}}$ conserva la orientación de la circunferencia unitaria $\mathbb{T} = \partial D^+$.

Uno de los caminos para estudiar la solubilidad del problema de Haseman es intentar hacer un cambio de variable para la función con el desplazamiento a una función que no dependa del desplazamiento pero que conserve las mismas propiedades de pertenecer al dominio D^+.

Ahora bien, tenemos que $\Phi^+(\alpha(t)) = G(t)\Phi^-(t) + g(t)$ para $t \in \mathbb{T}$, si hacemos el cambio $\Psi^+(t) = \Phi^+(\alpha(t))$ tenemos lo siguiente

$$\Psi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t),\ t \in \mathbb{T}, \tag{8.2}$$

donde

$$\Psi^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau,\ z \in D^+ \tag{8.3}$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau,\ z \in D^- \tag{8.4}$$

para el cual podemos resolver el problema como en el Capítulo 6.

Bibliografía

[1] E. Berkson and T.A. Gillespie, Multipliers for weighted L^p-spaces, transference, and the $q-$variation of functions. Bull. Sci. Math. 122 (1998), 427-454.

[2] A. Böttcher, I. Gohberg, Yu. Karlovich, N. Krupnik, S. Roch, B. Silbermann and I. Spitkovsky: Banach algebras generated by N indempotents and applications. In: Singular Integral Operators and Related Topics. Joint German-Israeli Workshop, Tel-aviv, March 1-10, 1995. Operator Theory: Advances and Applications, vol. 90, pp. 19-54. Birkhäuser, Basel 1996.

[3] A. Böttcher and Yu. I. Karlovich, Carleson Curves, Muckenhoupt Weights, and Toeplitz Operators. Progress in Mathematics 154: Birkhäuser, Basel, 1997.

[4] A. Böttcher, Yu.I. Karlovich, and I.M. Spitkovsky, Convolution Operators and Factorization of Almost Periodic Matrix Functions. Operator Theory: Advances and applications 131, Birkhäuser, Basel, 2002.

[5] A. Böttcher, B. Silbermann, Analysis of Toeplitz Operators. 2nd edition, Springer, Berlin, 2006.

[6] A. Böttcher and I.M. Spitkovsky, Toeplitz Operators with PQC Symbols on Weighted Hardy Spaces. J. Funct. Anal. 97 (1991), 194-214.

[7] F. Cobos, T. Kühn, and T. Schonbek, One-sided compactness results for Aronszajn-Gagliardo functors, J. Funct. Anal. 106 (1992), 274-313.

[8] M. Cwikel, Real and complex interpolation and extrapolation of compact operators, Duke Math. J. 65 (1992), no. 2, 333-343.

[9] R. G. Douglas, Toeplitz and Wiener-Hopf operators in $H^\infty + C$, Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), 895-899.

[10] R. G. Douglas, Banach Álgebra Techniques in Operator Theory, Academic Press, New York, 1972.

[11] R. G. Douglas & D. Sarason, Fredholm Toeplitz Operators, Proc. Amer. Math. Soc. 26 (1970), 117-120.

[12] J.B. Garnett, Bounded Analytic Functions. Academic Press, New York, 1981.

[13] I. Gohberg and N. Krupnik, One-Dimensional Linear Singular Integral Equations, I. Introduction, Birkhäuser, Basel, 1992.

[14] I. Gohberg and N. Krupnik, One-Diemnsional Linear Singular Integral Equations, Volume II General theory and applications, Birkhäuser, Basel, 1992.

[15] P. Hartman, On completely continuous Hankel matrices, Proc. Amer. Math. Soc., 9 (1958), 862-866.

[16] Yu.I. Karlovich and E. Ramírez de Arellano, Singular integral operators with fixed singularities on weighted Lebesgue spaces. Integr. Equ. and Oper. Theory 48 (2004), 331-363.

[17] M.A. Krasnoselskii, P.P. Zabreiko, E.I. Pustylnik and P.E. Sobolevskii, Integral Operators in Spaces of Summable Functions. Nauka, Moscow, 1966 (Russian); Eglish transl.: Noordhoff I.P., Leyden, 1976.

[18] G.S. Litvinchuk, Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift, Kluwer, Dordrecht, 2000.

[19] J. E. Marsden, M. J. Hoffman. Análisis Básico de Variable Compleja. Editorial Trillas, México, 1996.

[20] S. C. Power, Hankel Operators on Hilbert Space. In: Pitman Research Notes in Math., vol. 64. Pitman, Boston, 1982.

[21] S. Roch, P.A. Santos, and B. Silbermann: Non-commutative Gelfand Theories. A Tool-kit for Operator Theorists and Numerical Analysts. Springer, London, 2011.

[22] J. Rosales. Problema de Frontera de Haseman. tesis de Licenciatura. Febrero 2017.

[23] W. Rudin, Functional Analysis, 2dn edition, McGraw-Hill Inc., New York, 1991.

[24] D. Sarason, On products of Toeplitz operators, Acta Sci. Math. (Szeged) 35 (1973), 7-12.

[25] D. Sarason, Approximation of piecewise continuous functions by quotients of bounded analytic functions, Canadian J. Math. 24 (1972), 642-657.

[26] D. Sarason, Algebras of functions on the unit circle, Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973) 286-299.

[27] D. Sarason, Functions of vanishing mean oscillation, Trans. Amer. Math. Soc. 207 (1975), 391-405.

[28] D. Sarason, Toeplitz operators with piecewise quasicontinuous symbols. Indiana Univ. Math. J. 26 (1977), 817-838.

[29] G. E. Shilov, On rings of functions with uniform convergence, Ukarin. Mat. Zh. 3 (1951), 404-411.