



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS  
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS  
Área terminal en Matemáticas

**ECUACIONES DIFERENCIALES Y GRUPOS DE KLEIN  
(GRUPOS FUCHSIANOS)**

T E S I S  
QUE PRESENTA:

JUANA TORRES MICHUA

PARA OBTENER EL GRADO DE  
LICENCIADA EN CIENCIAS

Director de tesis:  
Dr. Carlos A. Cabrera Ocañas

Sinodales:  
Dra. Larissa Sbitneva  
Dra. Liudmila Sabinina  
Dr. Rogelio Valdez Delgado  
Dr. Angel Cano Cordero

CUERNAVACA, MORELOS

Diciembre 2019



Tesis  
Ecuaciones Diferenciales y Grupos de Klein  
(Grupos Fuchsianos)

Juana Torres Michua

29 de junio de 2023

# AGRADECIMIENTOS

*Dedicado a mi familia que siempre ha estado para mí,  
que ha sabido ser mi soporte en todo este tiempo.  
Agradezco principalmente a mi mamá Filiberta Michua Gonzalez  
por cada sacrificio que hizo, por ser mi guía y mi orgullo.  
A mi princesa Harley que siempre estuvo conmigo en cada desvelo  
y que ha sido mi motor de cada día.  
También agradezco a mi esposo Eduardo por estar conmigo  
incondicionalmente, por compartir conmigo este camino  
y por creer siempre en mí.  
Agradezco también a cada uno de mis hermanos;  
Maricela, Lupis, Ernes, Betty, Ibett, Lazaro y Migue  
que siempre confiaron y creyeron en mí.  
Agradezco a mi amiga Yetzeline por estar conmigo siempre,  
por compartir esta trayectoria juntas, por ser otra hermana.  
Agradezco a la Dr. Larissa por estar siempre al  
pendiente de mí y por cada apoyo que me ha dado.  
Finalmente, un especial agradecimiento al Dr. Carlos Cabrera  
que ha sido una parte fundamental en esta tesis,  
por cada conocimiento y por toda su paciencia.  
¡GRACIAS!*

# Resumen

Las ecuaciones fuchsianas fueron introducidas por H. Poincaré en el estudio de la ecuación hipergeométrica.

Los grupos fuchsianos resultaron ser subgrupos de isometrías del plano hiperbólico, mostrando que la ecuación hipergeométrica estaba relacionada a estructuras geométricas hiperbólicas, particularmente, las teselaciones hiperbólicas.

En esta tesis se presentarán las ecuaciones fuchsianas desde un punto de vista geométrico, para comenzar se anunciarán algunos preliminares que nos ayudarán a adentrarnos en esta tesis.

Uno de los objetivos de esta tesis es conocer más a fondo la ecuación fuchsiana, así como sus principales características que las representan. Para estudiar las ecuaciones fuchsianas, podemos recuperar propiedades de estas analizando su comportamiento en los puntos singulares.

Además de la ecuación fuchsiana construiremos teselaciones en el plano hiperbólico. De esta manera, desde un aspecto geométrico podremos distinguir entre distintas ecuaciones al comparar sus teselaciones.

Finalmente, usaremos el método de Frobenius para resolver algunos casos de la ecuación fuchsiana. Éste método también nos permite construir algunos ejemplos de las teselaciones hiperbólicas asociadas a la ecuación hipergeométrica.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>3</b>
2.1. Existencia de soluciones a ecuaciones diferenciales ordinarias .	4
2.2. Principio de reflexión de Schwarz . . . . .	5
2.3. Los discos son equivalentes al plano superior. . . . .	6
2.4. Teoremas de continuación analítica . . . . .	9
2.5. Teorema de Monodromía . . . . .	9
<b>3. Grupos de simetrías</b>	<b>11</b>
<b>4. Teselaciones</b>	<b>15</b>
4.1. Teselación regular . . . . .	17
<b>5. Ecuaciones fuchsianas</b>	<b>21</b>
5.1. ¿Qué son las funciones fuchsianas? . . . . .	23
5.2. Propiedades básicas . . . . .	24
<b>6. Método de Frobenius</b>	<b>26</b>
<b>7. Grupos triangulares</b>	<b>33</b>
7.1. ¿Qué son los grupos triangulares? . . . . .	34
7.2. El caso euclídeo. . . . .	35
7.3. El caso esférico. . . . .	37
7.4. El caso hiperbólico. . . . .	41

# Índice de figuras

4.1. Tabla de polígonos regulares . . . . .	18
4.2. Polígonos que concurren en cada vértice. . . . .	19
4.3. Diagrama de tipos de teselaciones. . . . .	19
7.1. Triángulo esférico. . . . .	33
7.2. Triángulo hiperbólico. . . . .	33
7.3. Teselado triangular (3, 3, 3). . . . .	36
7.4. Teselado tetraquis cuadrado (2, 4, 4). . . . .	36
7.5. Teselado hexagonal bisecado (2, 3, 6). . . . .	37
7.6. (2, 3, 3) . . . . .	39
7.7. (2, 3, 4) . . . . .	39
7.8. (2, 3, 5) . . . . .	40
7.9. (2, 2, 2) . . . . .	40
7.10. (2, 2, 3) . . . . .	40
7.11. (2, 2, 4) . . . . .	40
7.12. (2, 2, 5) . . . . .	40
7.13. (2, 2, 6) . . . . .	40
7.14. (2, 3, 7) . . . . .	42
7.15. (2, 3, 8) . . . . .	42
7.16. (2, 3, 9) . . . . .	42
7.17. (2, 3, $\infty$ ) . . . . .	42
7.18. (2, 4, 5) . . . . .	43
7.19. (2, 4, 6) . . . . .	43
7.20. (2, 4, 7) . . . . .	43
7.21. (2, 4, 8) . . . . .	43
7.22. (2, 4, $\infty$ ) . . . . .	43
7.23. (2, 5, 5) . . . . .	44
7.24. (2, 5, 6) . . . . .	44
7.25. (2, 5, 7) . . . . .	44
7.26. (2, 6, 6) . . . . .	44
7.27. (2, $\infty$ , $\infty$ ) . . . . .	44
7.28. (3, 3, 4) . . . . .	45

7.29. (3, 3, 5) . . . . .	45
7.30. (3, 3, 6) . . . . .	45
7.31. (3, 3, 7) . . . . .	45
7.32. (3, 3, $\infty$ ) . . . . .	45
7.33. (3, 4, 4) . . . . .	46
7.34. (3, 6, 6) . . . . .	46
7.35. (3, $\infty$ , $\infty$ ) . . . . .	46
7.36. (6, 6, 6) . . . . .	46
7.37. ( $\infty$ , $\infty$ , $\infty$ ) . . . . .	46

# Capítulo 1

## Introducción

Las ecuaciones diferenciales nos permiten modelar una gran variedad de fenómenos que ocurren en la naturaleza.

Dependiendo de la naturaleza de la ecuación, estas se puede clasificar en: ecuaciones diferenciales ordinarias (en una sola variable dependiente) y ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (en varias variables independientes).

Las ecuaciones diferenciales ordinarias a su vez se clasifican en: lineales (los coeficientes sólo dependen de la variable independiente) y no lineales (los coeficientes pueden depender de la variable dependiente).

Las ecuaciones lineales de segundo orden se utilizan para modelar fenómenos matemáticos.

En general, las ecuaciones diferenciales de orden arbitrario tienen más de dos soluciones linealmente independientes.

Pretendemos estudiar las ecuaciones fuchsianas desde un punto de vista geométrico. Además, estudiaremos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden que admitan puntos singulares, pero de singularidad regular. Estas ecuaciones diferenciales se denominan de tipo fuchsianas.

Las ecuaciones fuchsianas se caracterizan por ser invariantes por transformaciones de Möbius. Además se dice que una ecuación es fuchsiana si presenta un número finito de singularidades en la esfera de Riemann.

El estudio de las propiedades de las transformaciones de Möbius motiva, a su

vez, la definición de la razón doble de una terna de números complejos. Este planteamiento será el ideal para hablar de simetría en el plano ampliado y, posteriormente, para determinar las transformaciones de Möbius que dejan invariantes ciertos dominios del plano complejo, como por ejemplo el disco unitario.

En el segundo capítulo, hablaremos de algunos conceptos preliminares y así conocer algunas ideas y construcciones referentes a las ecuaciones diferenciales ordinarias.

En el capítulo 3 empezaremos a introducir los grupos de simetrías para ir adentrándonos al ámbito geométrico.

En el capítulo 4 hablaremos sobre las teselaciones, para conocer sus principales características y cómo funcionan, para esta tesis son de gran importancia ya que analizaremos nuestra ecuación fuchsiana.

En el capítulo 5, hablaremos del tema fundamental de nuestro proyecto; aquí explicaremos detalladamente las características de las ecuaciones fuchsianas.

En el capítulo 6, se analizan los fundamentos teóricos del método de Frobenius. Posteriormente, se resolverá nuestra ecuación fuchsiana con el método de Frobenius.

Finalmente en el capítulo 7 hablaremos de los grupos triangulares, los cuales revelan un aspecto algebraico de las ecuaciones fuchsianas. Más aún, dado que estos grupos son de naturaleza geométrica los usaremos para construir algunas teselaciones triangulares en el disco de Poincaré.

## Capítulo 2

### Preliminares

*"Nunca consideres al estudio como una obligación,  
sino como una oportunidad para penetrar  
en el bello y maravilloso mundo del saber."  
Albert Einstein.*

El objetivo de este capítulo es dar a conocer algunos de los conceptos referentes a las ecuaciones diferenciales ordinarias.

De la teoría de análisis de funciones, usaremos los conceptos de función analítica y singularidad <sup>1</sup>, los cuales se estudian usando conceptos de variable compleja.

En matemáticas las funciones analíticas son funciones infinito diferenciables de variable compleja, se pueden representar por medio de series de potencias uniformes y convergentes con un radio de convergencia determinado. La noción de función analítica puede definirse para funciones reales o complejas, aunque ambos conjuntos tienen propiedades distintas.

Las funciones complejas derivables en un abierto siempre son analíticas, y se denominan funciones holomorfas. Sin embargo, una función real infinitamente derivable no es necesariamente analítica.

**Teorema 1.** *Una función  $f(z)$ , es analítica en un punto  $z_0$  si es derivable en todos los puntos de algún entorno de  $z_0$ .*

Una función analítica en cada uno de los puntos de un conjunto abierto  $S$ , es analítica en  $S$ , por ello se les conoce también a las funciones analíticas como funciones holomorfas.

---

<sup>1</sup>Aquellos puntos donde una función no es analítica.

## 2.1. Existencia de soluciones a ecuaciones diferenciales ordinarias

La existencia de una solución se establece directamente resolviendo el problema y encontrando la función que verifica las condiciones pedidas.

Para que los métodos sean eficaces se debe de asegurar la existencia y unicidad de la solución, lo cuál se conoce como un problema de valor inicial o problema de Cauchy.

**Definición 1.** Sea  $f(x,y)$  una función continua, definida en  $[a,b] \times \mathbb{R}^n$  y con valores en  $\mathbb{R}^n$ .

Sea  $x_0$  un punto del intervalo  $[a,b]$ . Se considera la ecuación diferencial:  $y' = f(x,y)$  y el valor de la solución en el punto  $x_0$ ,  $y(x_0) = y_0$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ .

La existencia de una derivada compleja es una condición mucho más fuerte que la existencia de una derivada real, debido a que implica la presentación de una función en serie de potencias.

En esta sección veremos que la introducción de la derivada compleja nos permitirá estudiar de una manera correcta la teoría de ecuaciones diferenciales.

En el dominio real, una ecuación diferencial ordinaria lineal de orden  $n$  posee  $n$  soluciones linealmente independientes, por lo cuál en el dominio complejo puede ocurrir que dos soluciones locales sean elementos de la misma función analítica global. Así mismo, las soluciones de ecuaciones diferenciales definidas sobre el dominio complejo son funciones analíticas globales, cuyo dominio no necesariamente es el mismo en el cual los coeficientes están definidos.

Se entiende por solución local, aquella solución cuyo dominio está contenido en el de los coeficientes.

**Definición 2.** Una ecuación diferencial ordinaria lineal de orden  $n$  es de la forma:

$$p_0(z)w^{(n)}(z) + p_1(z)w^{(n-1)}(z) + \dots + p_n(z)w^0(z) = b(z) \quad (2.1)$$

donde  $p_i(z)$  y  $b(z)$  son funciones analíticas definidas sobre un dominio común. Si  $b(z) = 0$  llamamos a la ecuación homogénea, en caso contrario, no homogénea.

**Definición 3.** Una solución para la ecuación diferencial (2.1) es una función analítica global  $f$  que satisface la igualdad.

Una solución local de (2.1) es una función analítica  $f$  definida sobre  $\Omega$  (un abierto de  $\mathbb{C}$ ) que satisface la igualdad.

Aunque los coeficientes de una ecuación diferencial de la forma (2.1), son en general funciones analíticas, en esta tesis, consideraremos únicamente el caso cuando todos los coeficientes son polinomios y el interés principal será el estudio de las raíces del coeficiente principal  $p_0(z)$ . La importancia de estos puntos es que determinan si existe o no solución y, más aún, determinan la forma que deben tener estas soluciones.

**Definición 4.** Un punto  $z_0 \in \Omega$  es llamado un **punto ordinario** de la ecuación diferencial (2.1) si  $p_0(z_0) \neq 0$ . Si  $p_0(z_0) = 0$  entonces  $z_0$  es llamado un **punto singular**<sup>2</sup>.

## 2.2. Principio de reflexión de Schwarz

**Definición 5.** Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica excepto posiblemente en un segmento de línea, pero con  $f$  continua en todo  $\Omega$ . Entonces  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es analítica.

*Demostración.* Decimos que el segmento de línea  $L$  está en el eje real. Queremos probar que  $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$  para cualquier rectángulo  $R \subseteq \Omega$  con  $\gamma = \partial R$ . Entonces tenemos que:

Si

$$R \subset \Omega \setminus L \Rightarrow \int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

□

**Definición 6.** (Principio de reflexión de Schwarz):

Sea  $f$  una función analítica en  $D$ , el cual está contenido en un semiplano, tal que la frontera de  $D$  contiene un segmento  $\gamma$  dado por la frontera del semiplano, y  $f$  cumple que  $f(\gamma) \subseteq \gamma$  y es continua en  $D \cup \gamma$ . Entonces existe  $D^*$  (Reflejado de  $D$  con respecto al semiplano) tal  $f$  se puede extender a  $D \cup \gamma \cup D^*$  y resulta ser analítica, esta función cumple la siguiente propiedad:  $\hat{f}(z) = f^*(z^*) \forall z \in D^*$ .

**Ejemplo 1.** Sea  $f$  una función analítica en el semi-disco:  $|z| \leq 1, \text{Im}z > 0$  tal que es real sobre el semi-círculo  $|z| = 1, \text{Im}z > 0$ . Demostrar que si definimos

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } |z| \leq 1, \text{Im}z > 0 \\ f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) & \text{si } |z| > 1, \text{Im}z > 0 \end{cases}$$

<sup>2</sup>Un punto singular de una función es continua, pero la derivada en un entorno de dicho punto es discontinua.

entonces  $g$  es analítica en el semi-plano superior.

Entonces, el simétrico en un disco es de la forma  $z^* = \frac{R^2}{z - \alpha} + \alpha$ , con  $\alpha$  el centro del disco, y  $R$  el radio del disco. Que en este caso equivalen a:  $R = 1$ ,  $\alpha = 0$ , por lo tanto  $z^* = \frac{1}{\bar{z}}$ , y como en el espacio de llegada, el simétrico es simplemente el conjugado.

### 2.3. Los discos son equivalentes al plano superior.

Empezaremos definiendo el disco unitario  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ . Con esto podemos hacer una generalización al concepto de disco mediante la siguiente forma, decimos que  $D$  es un disco en la esfera de Riemann si  $D$  es la imagen de  $\Delta$  bajo una transformación del grupo de Möbius  $Mob(\overline{\mathbb{C}})$  que consiste en elementos de la forma:

$$v = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc = 1.$$

Se sigue que todas las transformaciones de Möbius pueden definirse por matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

A este grupo de matrices se le denota por  $SL(2, \mathbb{C})$ . El centro de este grupo consiste de las matrices  $\pm Id$ .

**Proposición 1.** *Dos transformaciones de Möbius*

$$\bar{T}(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad y \quad \bar{S}(z) = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$$

son iguales si y sólo si existe  $k \in \mathbb{C}$ , tal que

$$a = ka', \quad b = kb', \quad c = kc', \quad d = kd'.$$

*Demostración.* La condición de suficiencia es inmediata. Para probar la necesidad obsérvese primero que como  $\bar{T}$  y  $\bar{S}$  coinciden en 0 y  $\infty$ , se tiene que si  $a = 0$ , entonces  $a' = 0$ , y si  $b = 0$ , entonces  $b' = 0$ , etcétera. Probamos primero el caso  $a, b, c, d \neq 0$ , se tiene que

$$\bar{T}^{-1}(\infty) = -d/c = -d'/c', \quad y \quad \bar{T}^{-1}(0) = -b/a = -b'/a'.$$

Escribiendo tenemos:

$$d/d' = c/c' = \lambda, \quad b/b' = a/a' = \mu,$$

entonces tenemos que

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{\mu a'z + \mu b'}{\lambda c'z + \lambda d'} = \frac{\mu (a'z + b')}{\lambda (c'z + d')}.$$

En particular, al evaluar  $\bar{T}$  y  $\bar{S}$  en la preimagen de 1, se tiene  $\mu/\lambda = 1$ , por lo cual  $\mu = \lambda$ . Los casos en los que algún coeficiente es cero son más sencillos.

- (i) Si  $b, c = 0$ , evaluando en 1 se tiene  $a/d = a'/d'$  y  $a/a' = d/d'$ .
- (ii) Si  $c = 0$  y  $b \neq 0$ , como el primer caso,  $b/b' = a/a' = \mu$  y para alguna  $\lambda$ ,  $d = \lambda d'$ .

□

De la proposición anterior se sigue que hay exactamente dos matrices unimodulares<sup>3</sup> que determinan una transformación de Möbius dada. Esto es, ya que si  $\bar{T}$  es de Möbius y está definida por las matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}), \quad (2.3)$$

entonces

$$1 = (a'd' - b'c') = k^2(ad - bc) = k^2$$

y

$$k = \pm 1, \quad i.e. \quad \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Al cociente de  $SL(2, \mathbb{C})$  sobre su centro  $\pm Id$  se le llama su proyectivización, este grupo cociente, denotado por  $PSL(2, \mathbb{C})$ , es isomorfo al grupo de transformaciones de Möbius complejas. De ahora en adelante identificaremos al grupo de transformaciones de Möbius con  $PSL(2, \mathbb{C})$ .

Entre los posibles discos que ahora se discuten está el semiplano superior

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}.$$

---

<sup>3</sup>Es una matriz cuadrada de enteros con determinante +1 o -1.

Que es la imagen de  $\Delta$  bajo la transformación de Cayley  $\gamma(z) = \frac{z-i}{z+i}$  que manda la circunferencia unitaria a la recta real, mandando la terna  $(-1, i, 1)$  a la terna  $(\infty, 0, 1)$ . En general, podemos considerar a un semiplano en el plano como un disco cuya frontera contiene al infinito. Sin embargo, en la esfera unitaria es exactamente la intersección de un semiespacio con la esfera unitaria.

Nos interesa el subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{C})$  que deja el semiplano superior invariante este es  $PSL(2, \mathbb{R})$ , el cual coincide con el grupo de isometrías que preservan orientación del modelo del plano hiperbólico dado por el semiplano.

El semiplano es uno de los modelos más útiles del plano hiperbólico. Dado que en este modelo, es más simple calcular las geodesicas y diferentes objetos relacionados con la geometría hiperbólica. El disco unitario, llamado también de Poincaré, es un segundo modelo del plano hiperbólico, más homogéneo que el semiplano superior, ya que todos los puntos en la “recta” al infinito, es decir, en el círculo unitario, son similares.

**Definición 7.** *El plano superior  $\mathbb{H}^2$  provisto con la métrica definida por la densidad*

$$\lambda(z) = \frac{1}{Imz}$$

*se le llama el plano hiperbólico y a esta métrica se le llama la métrica hiperbólica.*

En este modelo, llamado del semiplano, es intuitivamente claro que si se tiene una curva  $C$  en  $\mathbb{H}^2$  y se traslada en dirección vertical, su longitud hiperbólica puede crecer tanto como se quiera (si se mueve hacia abajo), o puede decrecer tanto como se quiera (si se mueve hacia arriba); sin embargo la longitud euclideana siempre es la misma. Viceversa, existen curvas que euclideanamente miden cualquier valor que se quiera, pero que hiperbólicamente siempre miden lo mismo.

**Definición 8.** *El disco unitario  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  provisto con la métrica definida por la densidad*

$$\sigma(w) = \frac{2}{1 - |w|^2},$$

*se le conoce como el disco de Poincaré y a la métrica inducida se le llama hiperbólica.*

A ambos modelos, el disco de Poincaré y el semiplano  $\mathbb{H}^2$ , se les conoce como el plano hiperbólico.

## 2.4. Teoremas de continuación analítica

Si consideramos las siguientes funciones analíticas  $\sqrt{z}$  y  $\log z = \ln |z| + i \arg z$  donde  $-\pi < \arg z < \pi$ . Podemos observar que si no se restringe el dominio para el  $\arg z$ , entonces las expresiones  $\sqrt{z}$  y  $\log z$  no definen funciones en el sentido usual, ya que toman más de un valor para cada elemento de su dominio.

En el análisis complejo se estudia ampliamente esta clase especial de funciones y en un intento por extender el dominio para dichas funciones surgen las llamadas "funciones analíticas globales" que son más bien colecciones de funciones analíticas bien definidas (univaluadas). Así mismo la teoría que trata el problema de extender el dominio de las funciones analíticas es llamada Teoría de la continuación analítica.

El teorema de continuación analítica es desarrollado a partir de un resultado del análisis complejo.

**Principio de continuación analítica:** Este principio, garantiza la unicidad de las extensiones de las funciones reales a funciones complejas. Por ejemplo, la extensión de la exponencial real a la exponencial compleja.

**Teorema 2.** *Si dos funciones  $f$  y  $g$  son analíticas en una región  $\Omega$ , y si existe una sucesión  $\{z_n\}$  de puntos distintos de  $\Omega$  que convergen a  $z_0 \in \Omega$ , tal que  $f(z_n) = g(z_n)$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $f = g$  en todo  $\Omega$ .*

La conclusión es válida, en particular, si  $f = g$  en alguna vecindad de algún punto de  $\Omega$ . La idea de la continuación analítica es extender el dominio de una función analítica a un conjunto lo más grande posible. Si una función  $f$  es entera, entonces no existen problemas de continuación puesto que su dominio de analiticidad es todo el plano complejo. De esta manera, supongamos que tenemos definida una función  $f_1(z)$  que es analítica en la región  $\Omega_1$ ; y que podemos hallar una función  $f_2(z)$  que es analítica en una región  $\Omega_2$  donde  $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$  y es tal que  $f_2(z) = f_1(z)$  para todo  $z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ , entonces se dice que  $f_2(z)$  es una continuación analítica directa de  $f_1(z)$  a la región  $\Omega_2$ . Juntos  $f_1$  y  $f_2$  definen una función analítica  $f$  en  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  tal que  $f(z) = f_1(z)$  si  $z \in \Omega_1$  y  $f(z) = f_2(z)$  si  $z \in \Omega_2$ .

## 2.5. Teorema de Monodromía

La palabra monodromía proviene del griego, que significa recorrer una vez o recorrer uniformemente. Este término lo utilizó, probablemente por primera

vez, B. Riemann en 1857. De manera general, la monodromía describe fenómenos parametrizados por un espacio base de manera que al realizar caminos cerrados en dicho espacio base, los fenómenos sufren una cierta transformación.

**Teorema 3.** *Principio de Monodromía:* Sea  $(g_0; E_0); (g_1; E_1); \dots; (g_m; E_m)$  otra continuación analítica de  $(g_0; E_0)$  a lo largo de la sucesión conectada  $E_0; E_1; E_2; \dots; E_m$  con respecto a la partición de la ruta  $\gamma$ .

Si  $f_0 = g_0$  en una vecindad de  $z_0$ , entonces  $g_m = f_n$  en alguna vecindad de  $\gamma(b)$ , así  $(g_m; E_m)$  es una continuación analítica directa de  $f_n; D_n$ .

**Teorema 4.** *Teorema de Monodromía.*

Supongamos que  $\Omega$  es un abierto simplemente conexo,  $D = D(t_0, R) \subset \Omega$  un disco abierto y  $(f, D)$  un germen de función de  $\Omega$ , con  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa. Si  $f$  admite prolongación analítica a lo largo de cualquier camino en  $\Omega$ , entonces existe una función  $g$  holomorfa en  $\Omega$ , tal que  $g(z) = f(z) \forall t \in D(t_0, R)$ .

*Demostración.* Sean  $\Gamma_0$  y  $\Gamma_1$  dos curvas de  $\Omega$  desde el centro del disco  $D$  (sea por ejemplo  $t_0$  el centro de dicho disco). Las prolongaciones analíticas de  $(f, D)$  a lo largo de  $\Gamma_0$  y  $\Gamma_1$  conducen al mismo elemento  $(g_\beta, D_\beta)$ , donde  $D_\beta$  es un disco con centro en  $\beta \in C$ . Si  $D_\eta$  es un disco que corta a  $D_\beta$ , entonces  $(g_\eta, D_\eta)$  puede obtenerse prolongando en primer lugar  $(f, D)$  hasta  $\beta$ , y luego a lo largo de una línea recta que una  $\beta$  y  $\eta$ . Esto prueba que  $g_\beta = g_\eta$  en el conjunto  $D_\beta \cap D_\eta$ .

La definición de la función  $g$  como:

$$g(t) = g_\beta(t)$$

es en consecuencia consistente y proporciona la extensión holomorfa de  $f$  buscada.  $\square$

## Capítulo 3

# Grupos de simetrías

*"Quien ama la práctica sin teoría es  
como el marinero que se embarca sin  
timón ni brújula y no sabe a donde ir"  
Leonardo da Vinci.*

La profundización en el conocimiento de la naturaleza pone en evidencia la universalidad de la simetría y su relación con la complejidad de los objetos. La simetría inicialmente fue denotada como proporcionalidad y equilibrio.

Un objeto simétrico podemos someterlo a ciertas operaciones sin que el objeto cambie su estructura luego de efectuar cada una de las operaciones, en otras palabras, si al efectuar una operación sobre el objeto este permanece invariante<sup>1</sup>. En este caso a la operación se le llama simetría del objeto.

La simetría es un rasgo característico de formas geométricas, sistemas, ecuaciones y otros objetos materiales, o entidades abstractas, relacionada con su invariancia<sup>2</sup> bajo ciertas transformaciones geométricas como rotaciones, traslaciones y simetrías.

Existen cinco tipos de simetría:

1. De rotación.

Es el giro que experimenta todo objeto de manera repetitiva, hasta que finaliza consiguiendo la posición idéntica que tenía al principio.

---

<sup>1</sup>Un objeto se dice invariante respecto de o bajo una transformación si permanece inalterado tras la acción de una transformación.

<sup>2</sup>Una entidad se considera invariante bajo un conjunto de transformaciones si la imagen transformada de la entidad es indistinguible de la original. La propiedad de ser invariante se conoce como invarianza o invariancia.

## 2. De abatimiento.

En este caso lo que se logra, es tener dos partes iguales de un objeto concreto tras llevarse a cabo un giro de  $180^\circ$  de una con respecto a la otra.

## 3. De traslación.

Es un conjunto de repeticiones que lleva a cabo un objeto a una distancia siempre idéntica del eje y durante una línea que puede estar colocada en cualquier posición.

## 4. De ampliación.

Se emplea para dejar patente que dos partes de un todo son semejantes y es que tienen la misma forma pero no un tamaño igual.

## 5. Bilateral.

Es la que permite que se obtenga un retrato bilateral que tiene como espina dorsal un eje de simetría. A los lados de este aparecen formas iguales a la misma distancia de él que serán las que permitan crear ese citado retrato.

Un objeto es simétrico en lo que concierne a una operación matemática si el resultado de aplicar esa operación o transformación al objeto, el resultado es un objeto indistinguible en su aspecto del objeto original. Dos objetos son simétricos uno al otro en lo que concierne a un grupo dado de operaciones si uno es obtenido de otro por algunas operaciones (y viceversa).

Las simetrías son transformaciones que, entre otras cosas, deben dejar intacta dicha estructura geométrica.

**Definición 9.** *Dado un objeto  $\odot$  del plano  $\mathbb{R}^2$  una aplicación  $:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  se dirá una simetría de  $\odot$  siempre que:*

1. *La deja invariante (Aplica el objeto en sí mismo).*
2. *Preserva la estructura.*
3. *Es un difeomorfismo<sup>3</sup>.*

Existen 2 tipos de transformaciones; rígidas (isometrías lineales o transformaciones ortogonales) que dan como resultado una figura totalmente equivalente desde un punto de vista geométrico, es decir, puede ser la misma figura. Estas transformaciones consisten en rotar la figura en un ángulo  $z(\frac{2\pi}{n})$  radianes

---

<sup>3</sup>Es una función inversible diferenciable cuya inversa es también diferenciable.

( $z \in \mathbb{Z}$ ) o bien en voltearla en torno a alguno de sus ejes principales (los que pasan por el punto medio de un lado).

Si aplicamos sucesivamente dos transformaciones de simetrías, obtenemos la misma figura y también podemos ver el producto (la composición) de dos simetrías es una simetría.

Existe una simetría que no mueve ningún punto; la rotación del ángulo 0 que llamamos elemento neutro ó la identidad, y para cada simetría que no sea la identidad existe una inversa que vuelve los puntos a su lugar inicial.

**Ejemplo 2.** Si tenemos 3 simetrías  $T_1, T_2, T_3$  y aplicamos el producto a las simetrías:

$$\begin{array}{c} (T_1 * T_2) * T_3 \\ y \\ T_1 * (T_2 * T_3) \end{array}$$

son iguales, ya que el producto es la composición de funciones, que sabes es asociativa.

Esta estructura se llama grupo en álgebra, es decir, un conjunto entre cuyos elementos tiene un producto asociativo y tal que un elemento resulta neutro y cada elemento tiene asociado un inverso.

De manera más general, dado un cierto objeto geométrico en el plano, algunas veces viene asociada una cierta estructura, es decir, algo que nos dice como está conformado el objeto.

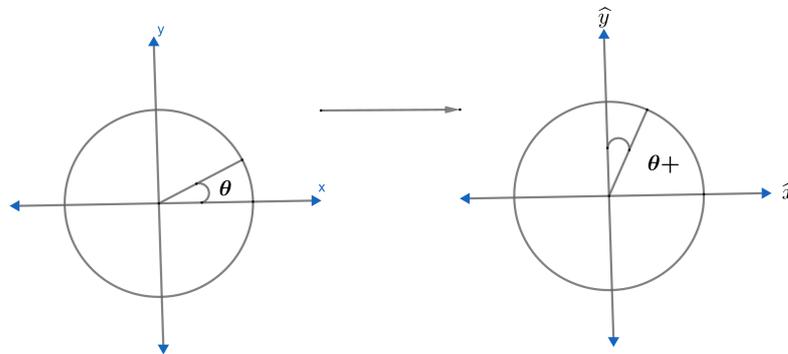
**Definición 10.** Un grupo es un conjunto no vacío  $G$  junto con una aplicación binaria  $\otimes : G \times G \rightarrow G$  (observamos que  $\otimes(g, h) = g \otimes h$  para cada  $(g, h) \in G \times G$  y llamamos a  $g \otimes h$  el producto de  $g$  con  $h$ ) tal que:

1. El producto es asociativo, es decir, para  $g, h, k \in G$  se tiene  $(g \otimes h) \otimes k = g \otimes (h \otimes k)$ .
2. Existe un elemento neutro en  $G$ , es decir existe  $u \in G$  tal que para cada  $g$  en  $G$  se cumple  $g \otimes u = u \otimes g = g$ .
3. Para cada  $g$  en  $G$ , existe un elemento inverso, es decir un  $h \in G$  tal que  $g \otimes h = h \otimes g = u$ . Que lo denotamos por  $g^{-1}$ .

Simetrías de otros objetos que no sean polígonos regulares dan lugar, por supuesto, a otros grupos, como por ejemplo; las simetrías de un triángulo isósceles (no equilátero) conforman el grupo  $\mathbb{Z}_2$ .

**Ejemplo 3.** Tomamos la circunferencia unitaria  $S^1 = \{x, y : x^2 + y^2 = 1\}$ , se definen las proyecciones estereográficas sobre  $\mathbb{R}^2$ ,  $x_1$  y  $x_2$  quitando respectivamente los puntos  $(0, 1)$  y  $(0, -1)$ .

Entonces se comprueba que se trata entonces de una variedad 1-dimensional. Las simetrías del círculo unitario  $S^1 = \{x, y : x^2 + y^2 = 1\}$ . Un tipo de simetría bastante evidente es la rotación del ángulo para cualquier real, que se obtiene en coordenadas cartesianas (y en base canónica) o en coordenadas polares.



La rotación, siendo una transformación ortogonal, preserva la estructura geométrica del objeto.

# Capítulo 4

## Teselaciones

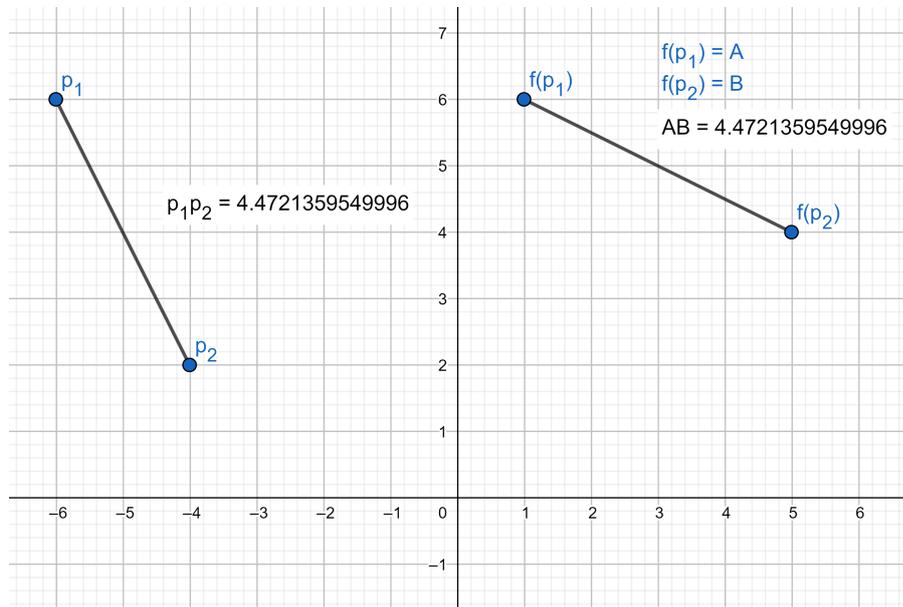
*Cuán audaz se vuelve uno  
cuando está seguro de ser amado  
Sigmund FREUD.*

Las teselaciones son un patrón de figuras, llamadas teselas o mosaicos, que recubren o pavimentan completamente una superficie plana  $S$  que cumple con dos requisitos:

1. Que no queden espacios vacíos, es decir, la superficie  $S$  es igual a la unión de las teselas.
2. Que las teselas se superpongan, esto es que la intersección de dos teselas dadas tenga interior vacío.

Una forma de crear teselaciones es usando copias isométricas de una figura inicial, es decir, copias idénticas de una o diversas piezas o teselas con las cuales se componen figuras para recubrir enteramente una superficie.

**Definición 11.** *Una Isometría preserva distancias,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Si*  
 $p_1 = (x, y) \rightarrow f(x, y)$   
 $p_2 = (a, b) \rightarrow f(a, b)$



Entonces tenemos

$$d(p_1, p_2) = d(f(p_1), f(p_2)).$$

Una teselación es una construcción de polígonos regulares o irregulares que al juntarlos sin superponerse no dejan huecos entre sí, además se combinan para cubrir el plano, son básicamente teselaciones no periódicas.

**Definición 12.** Una teselación se denomina “periódica” cuando podemos delimitar en la región que pavimenta el plano por traslación, desplazando la ubicación de la región sin someterla a giros ni simetrías. Se denomina regular, si está realizada por un tipo de polígonos regulares.

Todo polígono regular puede ensamblarse con otros de su misma especie o de distinta siempre que los ángulos de cada uno sumen cuatro rectos.

Una teselación semirregular consiste en una pavimentación del plano con un mosaico de polígonos regulares de vértices comunes y arbitrarios número de lados.

**Definición 13.** Una teselación es “aperiódica” o no periódica cuando no tiene traslaciones que hagan que coincida consigo misma. De la misma forma es sencillo convertir una teselación periódica en aperiódica seleccionando las teselas en dos y alternando la orientación con el fin de evitar la periodicidad.

## 4.1. Teselación regular

**Definición 14.** *Una teselación se denomina regular si se utiliza un único tipo de polígono (un solo tipo de baldosa) y en cada vértice el número de baldosas que lo rodean es el mismo. Tales polígonos pueden ser regulares (en cuyo caso se hablaría de teselación regular mediante polígonos regulares) o no (por ejemplo los rombos de cualquier retículo plano).*

Una teselación regular es un patrón que se consigue repitiendo un polígono regular y solo existen 3 teselaciones regulares.

1. Triángulo equilátero: Polígono regular de tres lados, podemos cubrir el plano utilizando solo triángulos equiláteros congruentes, sin dejar huecos y sin que haya traslapes.
2. Cuadrado: Polígono regular de cuatro lados, y también es claro que es posible cubrir el plano utilizando cuadrados congruentes.
3. Hexágono: Esto se lograría dividiendo el hexágono en seis triángulos, así la suma de los ángulos interiores de un hexágono es  $4 \times 180^\circ$ , de donde, si denotamos por  $\beta$  la medida de un ángulo interior del hexágono, tenemos:

$$\beta = \frac{\text{suma de los ángulos interiores}}{6} = \frac{4 \times 180^\circ}{6} = 120^\circ.$$

Si realizamos un análisis similar para polígonos de siete o más lados, podremos determinar la medida de los ángulos interiores de un polígono de  $n$  lados.

Primeramente, notamos que un polígono de  $n$  lados puede dividirse en  $n - 2$  triángulos, y como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a  $180^\circ$ , entonces la suma de los ángulos interiores de dicho polígono es  $(n - 2) \times 180^\circ$ . Como este polígono posee  $n$ -ángulos interiores, si  $\beta$  denota la medida de cada ángulo tenemos que:

$$\beta = \frac{\text{suma de los ángulos interiores}}{n} = \frac{(n - 2)(180^\circ)}{n}.$$

Entonces se puede construir la siguiente tabla:

Número de lados del polígono regular(n).	Polígono regular.	Suma de todos los ángulos interiores del polígono regular.	Medida de un ángulo interior del polígono regular.
3	Triángulo	180°	60°
4	Cuadrado	360°	90°
5	Pentágono	540°	108°
6	Hexágono	720°	120°
n		180°(n-2)	180°(n-2)/n

Figura 4.1: Tabla de polígonos regulares

Las únicas teselaciones regulares por polígonos regulares son las  $\{3, 6\}$ ,  $\{4, 4\}$  y  $\{6, 3\}$  (teselaciones con triángulos, cuadrados y hexágonos).

*Demostración.* Un polígono regular de  $n$  lados tiene ángulos de

$$\beta = \frac{(n-2)(180^\circ)}{n}.$$

Si en cada vértice se encuentran  $m$  polígonos debe tenerse:

$$\frac{180^\circ(n-2)m}{n} = 360,$$

es decir, la ecuación:

$$(n-2)(m-2) = 4.$$

Ecuación cuyas únicas soluciones son las del enunciado, dado que  $n$  y  $m$  son números naturales.  $\square$

A diferencia de lo que ocurre en el plano euclidiano, en el plano hiperbólico existen infinitas teselaciones regulares. Mientras que el primero puede cubrirse con polígonos regulares iguales de tres, cuatro o seis lados, el plano hiperbólico, puede ser cubierto por polígonos regulares iguales de cualquier número de lados y teniendo además la posibilidad de elegir la cantidad de polígonos que concurren a cada vértice.

Esta es una de las consecuencias de la no unicidad de la recta paralela a otra por un punto. En esta geometría, los ángulos interiores de los triángulos hiperbólicos no suman  $\pi$  y siempre es posible elegir un triángulo cuyos ángulos tengan cualquier medida, siempre que sumen menos que  $\pi$ . Una vez elegidos los ángulos, nuestro triángulo queda determinado, porque todos los triángulos que tienen ángulos iguales son isométricos.

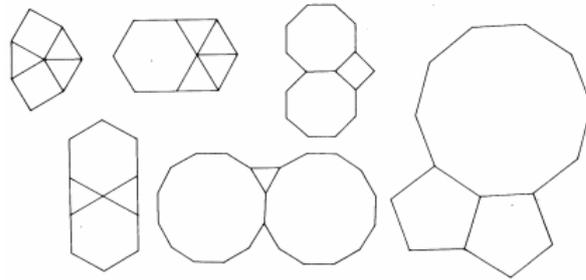


Figura 4.2: Polígonos que concurren en cada vértice.

Esta particularidad hace que sea posible encontrar polígonos regulares cuyos ángulos interiores no tengan una medida predeterminada, como ocurre en el plano euclidiano.

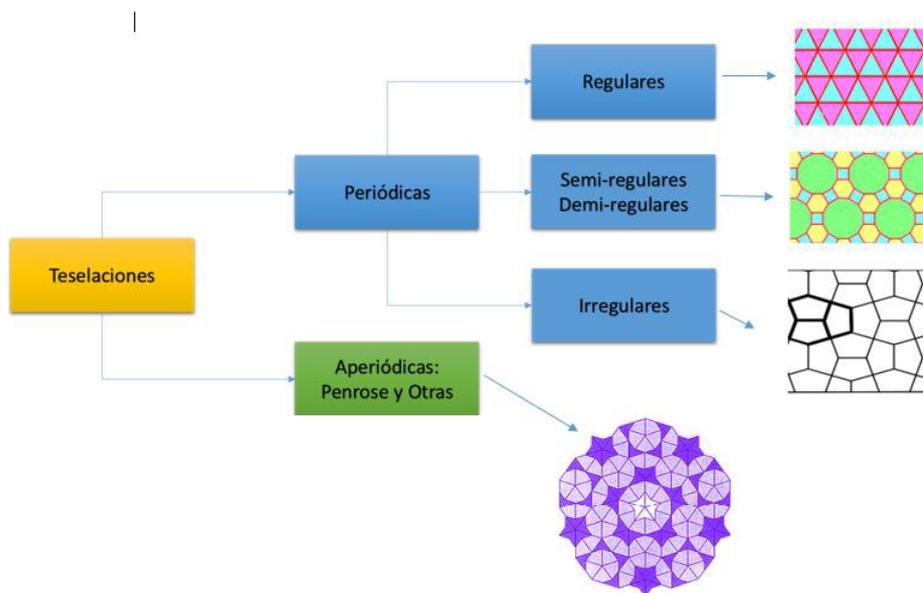


Figura 4.3: Diagrama de tipos de teselaciones.

En la geometría hiperbólica existen polígonos regulares con la misma cantidad de lados y distintas medidas de sus ángulos. Pero lo que no se puede elegir es la medida de sus lados, ya que la misma queda determinada por los otros parámetros elegidos.

El punto clave en todo esto es el concepto de medida, es decir todo depende de la métrica que estemos considerando. La métrica hiperbólica no es la misma que la euclidiana y además depende del modelo que se utilice.

## Capítulo 5

### Ecuaciones fuchsianas

*"Los encantos de esta ciencia sublime,  
las matemáticas, sólo se le revelan  
a aquellos que tienen el valor  
de profundizar en ella"  
Carl Friedrich Gauss.*

En la literatura existe un método para resolver ecuaciones fuchsianas y es conocido como método de **Frobenius** el cual analizaremos en el siguiente capítulo, el método de Frobenius fue desarrollado en 1873 por Lázaro Fuchs y George Frobenius. El método consiste en proponer la solución de la forma:

$$\psi''(z) + p(z)\psi'(z) + q(z)\psi(z) = F(z) \quad (5.1)$$

donde  $p(z)$ ,  $q(z)$  y  $F(z)$  están definidas sobre algún dominio del plano complejo.

**Teorema 5.** *Suponga que las funciones  $p$  y  $q$  son analíticas en el disco abierto  $|z| < R$  contenido en  $\Omega$  y sean  $a_0$  y  $a_1$  dos números complejos arbitrarios. Entonces existe una y solo una solución local  $f$  con las siguientes propiedades:*

1.  $f$  satisface las condiciones iniciales  $f(0) = a_0$ ,  $f'(0) = a_1$ .
2.  $f$  es analítica en  $|z| < R$ .

Sin embargo, si  $p(z)$  y  $q(z)$  tienen por ejemplo un polo simple, entonces no necesariamente la solución tiene un polo simple<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Un polo de orden 1 es llamado polo simple.

**Definición 15.** *Un polo de una función holomorfa es un cierto tipo de singularidad  $\frac{1}{z^n}$  en  $z = 0$ . Un polo de la función  $f(z)$  es un punto  $z = a$  tal que  $f(z)$  tiende a infinito a medida que  $z$  tiende a  $a$ .*

Una singularidad regular también es llamada singularidad fuchsiana y en este caso la ecuación diferencial es referida como ecuación diferencial fuchsiana en honor al matemático Lázaro Fuchs el primero en estudiarlas.

La importancia de las ecuaciones fuchsianas es que no se ven afectadas por transformaciones isomorfas o transformaciones de Möbius; que son del tipo:

$$v = \frac{az + b}{cz + d}, ab - cd = 1.$$

Finalmente, si se aplica una transformación de Möbius a una ecuación diferencial fuchsiana, esta conduce a otra del mismo tipo.

De esta manera, si una ecuación posee una singularidad en un punto diferente del origen, esta puede ser trasladada al origen mediante una transformación.

**Ejemplo 4.** *Si  $z = a$  es una singularidad regular, entonces el cambio de variable  $v = z - a$  traslada la singularidad al origen.*

También de interés es el análisis de una singularidad en el infinito. Para analizar el comportamiento en el punto  $z = \infty$ , basta con hacer la transformación  $u = \frac{1}{z}$  y analizar el comportamiento de las funciones resultantes en  $u = 0$ .

Haciendo el cambio de variable  $u = \frac{1}{z}$ , obtenemos que:

$$\begin{aligned} dz &= -\frac{1}{u^2} du \Rightarrow \frac{df}{dz} = -u^2 \frac{df}{du} \\ \Rightarrow \frac{d^2 f}{dz^2} &= \frac{d}{dz} \left( -u^2 \frac{df}{du} \right) \\ &= -u^2 \frac{d}{du} \left( -u^2 \frac{df}{du} \right) \\ &= 2u^3 \frac{df}{du} + u^4 \frac{d^2 f}{d^2 u}. \end{aligned}$$

Al sustituirla en una ecuación diferencial de segundo orden

$$\omega''(z) + p(z)\omega'(z) + q(z)\omega(z) = 0.$$

Nos queda de la siguiente manera:

$$g''(u) + P(u)g'(u) + Q(u)g(u) = 0. \quad (5.2)$$

Donde  $g(u) = f\left(\frac{1}{u}\right)$ ,  $P(u) = \frac{2}{u} - \frac{1}{u^2}p\left(\frac{1}{u}\right)$  y  $Q(u) = \frac{1}{u^4}q\left(\frac{1}{u}\right)$ .

**Definición 16.** *El punto  $z = \infty$  es llamado un punto ordinario o un punto singular regular de la ecuación diferencial de segundo orden, si el punto  $u = 0$  es un punto ordinario, o singular regular de la ecuación diferencial (5.2), respectivamente.*

Para ecuaciones diferenciales fuchsianas existe un método para resolverlas, el cual se discute en la siguiente sección.

## 5.1. ¿Qué son las funciones fuchsianas?

Las funciones automorfas o fuchsianas; son funciones periódicas donde la variable dependiente toma el mismo valor al incrementarse la variable independiente, un ejemplo serían las funciones trigonométricas circulares. De otra forma: una función automorfa de una variable compleja es una función analítica en un dominio determinado que es invariante bajo un grupo numerable de transformaciones fraccionales lineales.

**Definición 17.** *Una ecuación fuchsiana es diferencial sobre el campo de los números complejos  $\mathbb{C}$  ó un sistema de ordenamientos de primer orden sobre  $\mathbb{C}$ . Además es fuchsiana si todos los puntos en  $\mathbb{P}^1$  son regulares ó con singularidad regular.*

Las ecuaciones ordinarias de segundo orden que admiten puntos singulares, pero sólo regulares, se denominan de tipo fuchsianas. Este tipo de ecuaciones se caracterizan por ser invariantes por transformaciones de Möbius, también denominadas bilineales.

En esta sección nuestro trabajo será en el campo  $\mathbb{C}$  de los números complejos. Si consideramos la ecuación diferencial lineal:

$$y^{(n)} + p_1(z)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(z)y' + p_n(z)y = 0, \quad p_i(z) \in \mathbb{C}. \quad (5.3)$$

Para estudiar esta ecuación diferencial cerca de cualquier punto  $P \in \mathbb{P}^1$  elegimos un parámetro local  $t \in \mathbb{C}$  en este punto (generalmente  $t = z - P$  si

$P \in \mathbb{C}$  y  $t = \frac{1}{z}$  si  $P = \infty$ ), entonces reescribimos la ecuación con respecto a nuestra nueva variable  $t$ .

Llamemos al punto  $P$  un punto regular o una singularidad regular para la ecuación  $t$  en  $t = 0$ . No es difícil verificar que un punto  $P \in \mathbb{C}$  es regular si y sólo si el  $p_i$  no tiene polo en  $P$ .

## 5.2. Propiedades básicas

Las ecuaciones (y sistemas) fuchsianas también se denominan ecuaciones (sistemas) regulares. Esta clase de ecuaciones y sistemas fue introducida por J.L. Fuchs.

Supongamos que una ecuación diferencial de segundo orden lineal y homogénea presenta únicamente singularidades de primer tipo. Veamos como se clasifican estas ecuaciones en función del número de singularidades.

- (i) Un único punto singular.

Si el único punto singular está en el infinito, se obtiene entonces:

$$y''(t) = 0; \quad y(t) = \alpha + \beta t \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Para hallar todas las ecuaciones de segundo orden con una única singularidad, y por consiguiente reducibles al caso anterior, haremos el cambio de variable  $t = \frac{1}{x - x_0}$ . (La singularidad se sitúa en el punto  $x_0$ ).

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{(x - x_0)^2} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{dy}{dx} \cdot (x - x_0)^2; \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2t}{dx^2} = -\frac{dy}{dx} \cdot \frac{2}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Entonces, obtenemos la siguiente ecuación:

$$(x - x_0)y''(x) + 2y'(x) = 0; \quad y(x) = \alpha + \frac{\beta}{x - x_0} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Estas ecuaciones se pueden resolver como EDOs de primer orden si hacemos  $w = y'$ .

- (ii) Dos puntos singulares.

Si los dos puntos singulares están en el 0 y en el infinito, entonces se obtiene una familia de ecuaciones conocidas como ecuaciones de Euler.

$$t^2 y''(t) + \alpha t y'(t) + \beta y(t) = 0 \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Algunas de las propiedades más importantes de las ecuaciones Fuchsianas son las siguientes:

1. Una singularidad regular también es llamada singularidad Fuchsiana.
2. Fuch supone que las singularidades de la ecuación diferencial son regulares y que las soluciones en ella no tiene términos logarítmicos.
3. Fuch admite que la existencia de la solución local del problema de inversión lleva consigo la existencia de solución global.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales tienen como principal dificultad para resolverse por sus coeficientes arbitrarios  $p(z)$  y  $q(z)$  de la ecuación (5.1), ya que no siempre sus soluciones se comportan de igual manera que los coeficientes en las vecindades de ciertos puntos.

Por ejemplo, sabemos que tanto  $p(z)$  como  $q(z)$  son funciones analíticas, entonces la solución es analítica. Sin embargo, si  $p(z)$  y  $q(z)$  tienen un polo simple, entonces no necesariamente la solución tiene un polo simple; un ejemplo es la ecuación diferencial hipergeométrica.

Una clase especial de ecuaciones diferenciales de la forma (5.1) la constituyen aquellas en la cuales los coeficientes  $p(z)$  y  $q(z)$  tiene a lo más un polo simple y doble respectivamente.

La importancia de las ecuaciones fuchsianas es que la forma de las soluciones son conocidas y tienen la forma  $\psi(z) = z^\lambda f(z)$ , donde  $\lambda$  es un parámetro real o complejo por determinar y  $f(z)$  una función analítica.

Al ser  $f(z)$  una función analítica admite un desarrollo de Taylor con coeficientes por determinar, al sustituir en la ecuación los coeficientes quedan determinados mediante alguna relación de recurrencia al igual que el valor de  $\lambda$ .

## Capítulo 6

# Método de Frobenius

*Cuando las leyes de la matemática se refieren a la realidad, no son ciertas; cuando son ciertas, no se refieren a la realidad*  
*Albert Einstein.*

El método de Frobenius, es el más antiguo y hasta el día de hoy es uno de los más importantes para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales cuando los coeficientes no son analíticos.

Consideremos la ecuación diferencial homogénea de segundo orden:

$$p_0(z)w''(z) + p_1(z)w'(z) + p_2(z)w(z) = 0 \quad (6.1)$$

donde  $p_0$ ,  $p_1$  y  $p_2$  son funciones analíticas definidas sobre el dominio de los complejos y  $p_0(z) \neq 0$ .

Si  $z_0$  es un punto ordinario de (6.1), entonces  $p_0(z_0) \neq 0$ . Entonces podemos ver que cualquier singularidad puede ser trasladada al origen mediante algún adecuado cambio de variable. Por ello, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que  $z_0 = 0$ .

Reescribiendo nuestra ecuación (6.1) tenemos:

$$\omega''(z) + p(z)\omega'(z) + q(z)\omega(z) = 0 \quad (6.2)$$

donde:

$$p(z) = \frac{p_1(z)}{p_0(z)} \quad \text{tiene a lo más un polo simple en } z = 0,$$

$$q(z) = \frac{p_2(z)}{p_0(z)} \quad \text{tiene a lo más un polo de orden 2 en } z = 0.$$

**Teorema 6.** *El punto  $z = 0$  es llamado singular regular de la ecuación diferencial (6.2), si:*

$$p(z) = \frac{p_1(z)}{p_0(z)} \quad \text{tiene a lo más un polo simple en } 0$$

y

$$q(z) = \frac{p_2(z)}{p_0(z)} \quad \text{tiene a lo más un polo de orden 2 en } z = 0.$$

Entonces el teorema establece que al menos una solución de la ecuación diferencial fuchsiana es de la forma:

$$\omega(z) = z^\alpha f(z),$$

donde  $\alpha$  es un parámetro complejo y  $f(z)$  una función analítica.

Así mismo, con este teorema da origen al **Método de Frobenius** el cual consiste en proponer una solución de la siguiente forma:

Supongamos que  $z = 0$ , es un punto singular regular de la ecuación diferencial (6.2) y por nuestra definición, podemos obtener:

$$p(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} p_k z^k \quad y \quad q(z) = \sum_{k=-2}^{\infty} q_k z^k.$$

Entonces:

Si  $k = i - 1$

$$p(z) = \sum_{i-1=-1}^{\infty} p_{i-1} z^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} p_{i-1} z^{i-1} = z^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} p_{i-1} z^i.$$

Si  $k = i - 2$

$$q(z) = \sum_{i-2=-2}^{\infty} q_{i-2} z^{i-2} = \sum_{i=0}^{\infty} q_{i-2} z^{i-2} = z^{-2} \sum_{i=0}^{\infty} q_{i-2} z^i.$$

Entonces tenemos, las siguientes ecuaciones:

$$p(z) = z^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} p_{i-1} z^i \quad q(z) = z^{-2} \sum_{i=0}^{\infty} q_{i-2} z^i \quad (6.3)$$

Ahora sustituyendo nuestra ecuación (6.3) en la ecuación (6.2):

$$\omega''(z) + p(z)\omega'(z) + q(z)\omega(z) = 0$$

$$\omega''(z) + (z^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} p_{i-1}z^i)\omega'(z) + (z^{-2} \sum_{i=0}^{\infty} q_{i-2}z^i)\omega(z) = 0$$

$$f''(z) + (z^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} p_{i-1}z^i)f'(z) + (z^{-2} \sum_{i=0}^{\infty} q_{i-2}z^i)f(z) = 0.$$

Obtenemos la siguiente ecuación diferencial

$$z^2 f''(z) + z \left( \sum_{i=0}^{\infty} p_{i-1}z^i \right) f'(z) + \left( \sum_{i=0}^{\infty} q_{i-2}z^i \right) f(z) = 0. \quad (6.4)$$

Así, de nuestra ecuación(6.4), la forma mas general de una ecuación diferencial fuchsiana con una singularidad regular en el origen es:

$$z^2 f''(z) + zP(z)f'(z) + Q(z)f(z) = 0 \quad (6.5)$$

donde:

$$P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i z^i \quad y \quad Q(z) = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i z^i.$$

El método de Frobenius consiste en proponer una solución de la forma  $f(z) = z^\mu g(z)$ , donde  $g(z)$  es analítica y  $\mu$  es un parámetro real o complejo por determinar.

Así

$$f(z) = z^\mu g(z) = z^\mu \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{i+\mu}$$

y diferenciando tenemos:

$$f'(z) = \sum_{i=0}^{\infty} (i + \mu) a_i z^{i+\mu-1}$$

$$f''(z) = \sum_{i=0}^{\infty} (i + \mu)(i + \mu - 1) a_i z^{i+\mu-2}.$$

Sustituyendo las derivadas anteriores en nuestra ecuación (6.5), obtenemos:

$$z^2 f''(z) + zP(z)f'(z) + Q(z)f(z) = 0$$

$$\begin{aligned}
& z^2 \left[ \sum_{i=0}^{\infty} (i+\mu)(i+\mu-1)a_i z^{i+\mu-2} \right] + zP(z) \left[ \sum_{i=0}^{\infty} (i+\mu)a_i z^{i+\mu-1} \right] + Q(z) \left[ \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{i+\mu} \right] = 0 \\
& \Rightarrow z^2 \sum_{i=0}^{\infty} (i+\mu)(i+\mu-1)a_i z^{i+\mu-2} + z \left( \sum_{i=0}^{\infty} P_i z^i \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} (i+\mu)a_i z^{i+\mu-1} \right) \\
& \quad + \left( \sum_{i=0}^{\infty} Q_i z^i \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{i+\mu} \right) = 0 \\
& \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} (i+\mu)(i+\mu-1)a_i z^i + \left( \sum_{i=0}^{\infty} P_i z^i \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} (1+\mu)a_i z^i \right) + \left( \sum_{i=0}^{\infty} Q_i z^i \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \right) = 0.
\end{aligned}$$

Multiplicando las series obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+\mu)(n+\mu-1)a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^n ((1+\mu)P_{n-1} + Q_{n-1})a_i \right) z^n = 0$$

o bien,

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+\mu)(n+\mu-1)a_n + \sum_{i=0}^n ((i+\mu)P_{n-i} + Q_{n-i})a_i] z^n = 0.$$

La ultima igualdad se cumple si

$$(n+\mu)(n+\mu-1)a_n + \sum_{i=0}^n ((i+\mu)P_{n-1} + Q_{n-1})a_i = 0, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.6)$$

Si  $n = 0$  en la ecuación(6.6) y decimos que  $a_0 \neq 0$

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \mu(\mu-1)a_0 + \sum_{i=0}^0 ((0+\mu)P_0 + Q_0)a_0 = 0 \\
& \Rightarrow \mu(\mu-1) + \mu P_0 + Q_0 = 0. \quad (6.7)
\end{aligned}$$

La ecuación (6.7) es conocida como **Ecuación indicial**. La importancia de esta ecuación radica en que determina los únicos valores de  $\mu$  para que la forma de la solución propuesta de (6.5).

El desarrollo siguiente dependerá de sus dos raíces y el hecho fundamental va a recaer en que su diferencia  $\mu_1 - \mu_2$  sea o no un número entero.

Ahora, volvemos a tomar nuestra ecuación (6.6)

$$(n + \mu)(n + \mu - 1)a_n + \sum_{i=0}^n ((i + \mu)P_{n-1} + Q_{n-1})a_i = 0,$$

si  $i = n$

$$\Rightarrow [(n + \mu)(n + \mu - 1) + (n + \mu)P_0 + Q_0]a_n = - \sum_{i=0}^{n-1} ((i + \mu)P_{n-i} + Q_{n-i})a_i = 0. \quad (6.8)$$

Pero, por la ecuación (6.7), podemos escribir la ecuación (6.8) como:

$$[(n + \mu - \mu_1)(n + \mu - \mu_2)]a_n = - \sum_{i=0}^{n-1} ((i + \mu)P_{n-i} + Q_{n-i})a_i$$

donde  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son las raíces de la ecuación indicial.

Eligiendo  $\mu = \mu_1$  y  $\mu = \mu_2$ , ahora sustituyendo en esta última relación resulta respectivamente.

$$[n(n + \mu_1 - \mu_2)]a_n = - \sum_{i=0}^{n-1} ((i + \mu_1)P_{n-i} + Q_{n-i})a_i. \quad (6.9)$$

$$[n(n + \mu_2 - \mu_1)]a_n = - \sum_{i=0}^{n-1} ((i + \mu_2)P_{n-i} + Q_{n-i})a_i. \quad (6.10)$$

Las últimas relaciones determinan los coeficientes  $a_n$  siempre y cuando  $\mu_1 - \mu_2$  no sea un entero, ya que de lo contrario algunos coeficientes no estarán bien definidos.

Si suponemos que  $\mu_1 - \mu_2 \in \mathbb{Z}$ , decimos que  $\mu_1 - \mu_2 = M$  para algún  $M \in \mathbb{Z}$ . Consideremos los casos siguientes:

1.  $M > 0$ .
2.  $M < 0$ .
3.  $M = 0$ .

Supongamos que (1) ocurre, entonces  $\mu_1 - \mu_2 = M \in \mathbb{N}$  y el cociente  $a_M$  dado en (6.10) no está definido, obteniendo solamente una solución. Entonces si (2) ocurre, decimos que  $\mu_2 - \mu_1 = -M \in \mathbb{N}$  y el cociente  $a_{-M}$  dado en (6.9) no está definido, obteniendo nuevamente una solución.

Finalmente, si (3) ocurre, entonces (6.9) y (6.10) proporcionan la misma solución. Para obtener una segunda solución si  $\mu_1 - \mu_2 = M \in \mathbb{N}$ , aplicaremos el método de reducción de orden el cual consiste en proponer una solución de cierta forma, con la finalidad de reducir el orden de la ecuación resultante.

Sea  $f_2 = f_1 \int g$  donde  $f_1$  es la solución conocida y  $g$  es una función por determinar. Sustituyendo  $f_2$  en (6.5), se obtiene la ecuación:

$$z f_1 g' + (2z f_1' + P f_1) g = 0, \text{ o bien } \frac{g'}{g} = -2 \frac{f_1'}{f_1} - \frac{P(z)}{z}.$$

Integrando nuestra última ecuación obtenemos:

$$\begin{aligned} \log g &= -2 \log f_1 - \int \frac{P(\beta)}{\beta} d\beta + C \\ &= \log \frac{1}{f_1^2} - \int \frac{P(\beta)}{\beta} d\beta + C \\ &= \log \frac{1}{f_1^2} - P_0 \int \frac{1}{\beta} d\beta - \int \frac{P(\beta) - \beta}{\beta} d\beta + C \\ &= \log \frac{z^{-P_0}}{f_1^2} - \int \frac{P(\beta) - \beta}{\beta} d\beta + C. \end{aligned}$$

$$\text{Así } g = K \frac{z^{-P_0}}{f_1^2} \exp\left(-\int \frac{P(\beta) - \beta}{\beta} d\beta\right) = K z^{-P_0} h(z).$$

Después tenemos que  $g$  es una función de la forma  $g = z^{-P_0} h(z)$  donde  $h(z)$  es una función analítica en  $z = 0$ . Ahora bien, puesto que  $\mu_1 + \mu_2 = 1 - P_0$ , podemos reemplazar  $-P_0$  por  $\mu_1 + \mu_2 - 1$  así que  $g$  es de la forma  $g = \frac{h_2(z)}{z}$  donde  $h_2(z)$  es una función analítica en  $z = 0$ . Entonces, nuestra segunda solución nos da de la siguiente forma:

$$f_2(z) = f_1(z) \int g = f_1(z) \log(z) + f_1(z) h_3(z)$$

donde  $h_3(z)$  es una función analítica. De esta manera la segunda solución tiene la forma:

$$f_2 = f_1 \int g = c f_1 \log z + z^{\mu_1} \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n.$$

Por otro lado si  $\mu_1 - \mu_2 \notin \mathbb{Z}$ , entonces (6.9) y (6.10) proporcionan dos soluciones linealmente independientes. Lo cual tenemos:

1. Si las raíces de la ecuación indicial  $\mu_1, \mu_2$  satisfacen que  $\mu_1 - \mu_2 \notin \mathbb{Z}$ , el método de Frobenius proporciona dos soluciones linealmente independientes.

$$f_1(z) = z^{\mu_1} \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i.$$

$$f_2(z) = z^{\mu_2} \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i.$$

2. Si las raíces de la ecuación indicial  $\mu_1, \mu_2$  satisfacen que  $\mu_1 - \mu_2 \in \mathbb{Z}$ , el método de Frobenius permite obtener al menos una solución de la forma:

$$f_1(z) = z^{\mu_1} \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$$

mientras que una segunda solución es de la forma

$$f_2(z) = c f_1 \log z + z^{\mu_1} \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n.$$

## Capítulo 7

# Grupos triangulares

*"Ninguna investigación humana puede ser denominada ciencia si no pasa a través de pruebas matemáticas"*  
Leonardo Da Vinci.

Los grupos triangulares nacen, al menos, de la presentación del grupo icosaedral como el grupo triangular (rotacional)  $(2, 3, 5)$  por William Rowan Hamilton en 1856, en su artículo sobre cálculo icosiano. Los grupos triangulares aparecen en la geometría aritmética.

Un grupo triangular es un tipo de grupo que se puede caracterizar geoméricamente mediante secuencias de reflexiones respecto a los lados de un triángulo. El triángulo puede ser un triángulo euclídeo ordinario, un triángulo esférico o un triángulo hiperbólico. Cada grupo de triángulos es el grupo de simetrías de un teselado del espacio bidimensional, de una esfera, o del plano hiperbólico por congruencia de los llamados triángulos de Möbius, cada uno con un dominio fundamental para la operación.

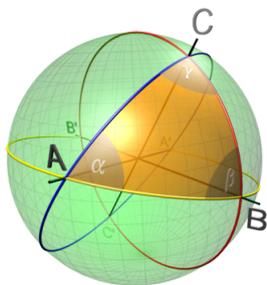


Figura 7.1: Triángulo esférico.

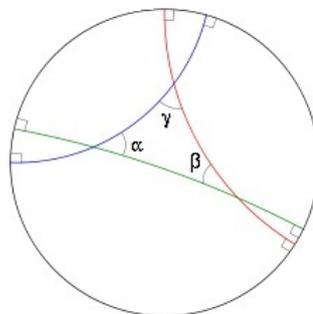


Figura 7.2: Triángulo hiperbólico.

Los grupos de triángulos hiperbólicos son ejemplos de un grupo cristalográfico no euclídeo, y se han generalizado en la teoría de Gromov sobre grupos hiperbólicos.

## 7.1. ¿Qué son los grupos triangulares?

Los grupos triangulares son grupos discretos, generados por reflexiones respecto a un triángulo.

Sean  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  números enteros mayores o iguales a 2.

**Definición 18.** *Un grupo triangular  $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$  es un grupo de los movimientos del plano euclídeo, la esfera bidimensional, el plano proyectivo real o el plano hiperbólico, generados por las reflexiones respecto a los lados del triángulo con ángulos  $\frac{\pi}{\alpha}$ ,  $\frac{\pi}{\beta}$  y  $\frac{\pi}{\gamma}$  (medidos en radianes).*

El producto de las reflexiones en dos lados adyacentes es una rotación según un ángulo que es el doble del ángulo entre esos dos lados,  $\frac{2\pi}{\alpha}$ ,  $\frac{2\pi}{\beta}$  y  $\frac{2\pi}{\gamma}$ .

Decimos que si, las reflexiones generadoras se etiquetan como  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y los ángulos entre ellos en el orden cíclico son los indicados anteriormente, entonces se mantienen las relaciones siguientes:

1.  $a^2 = b^2 = c^2 = 1$ .
2.  $(ab)^\alpha = (bc)^\beta = (ca)^\gamma = 1$ .

Todas las relaciones entre  $a, b, c$  son consecuencias de estas relaciones y que  $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$  es un grupo discreto de movimientos del espacio correspondiente. Entonces, un grupo de triángulos es un grupo de reflexión que admite una presentación del grupo

$$\Delta(\alpha, \beta, \gamma) = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^\alpha = (bc)^\beta = (ca)^\gamma = 1 \rangle.$$

Un grupo abstracto con esta presentación es un grupo de Coxeter con tres generadores.

Dado cualquier número natural  $\alpha, \beta, \gamma > 1$ , exactamente una de las geometrías bidimensionales clásicas (euclídea, esférica o hiperbólica) admite un triángulo con los ángulos  $(\frac{\pi}{\alpha}, \frac{\pi}{\beta}, \frac{\pi}{\gamma})$ , y el espacio está embaldosado por reflejos del triángulo. La suma de los ángulos del triángulo determina el tipo de geometría del teorema de Gauss- Bonnet: Es euclídea si la suma de los

ángulos es exactamente  $\pi$ , esférica si excede de  $\pi$ ; e hiperbólica si es estrictamente menor que  $\pi$ . Además, cualquiera de los dos triángulos con los ángulos dados son congruentes. Cada grupo de triángulos determina un mosaico, que se colorea convencionalmente en dos colores, de modo que cualquiera de los dos mosaicos adyacentes tenga colores opuestos.

En cuanto a los números  $\alpha, \beta, \gamma > 1$ , existen las siguientes posibilidades.

## 7.2. El caso euclídeo.

El grupo triangular es el grupo de simetría infinito de una determinada teselación (o mosaico) del plano euclídeo mediante triángulos cuyos ángulos suman  $\pi$  (o  $180^\circ$ ).

Ahora asumimos que  $X = E^2$ . Entonces tenemos

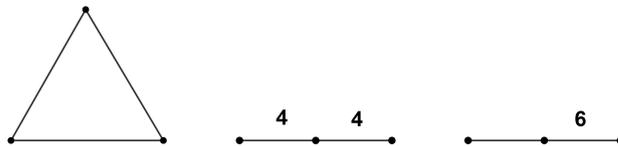
$$\frac{\pi}{\alpha} + \frac{\pi}{\beta} + \frac{\pi}{\gamma} = \pi.$$

Por lo tanto  $\alpha, \beta, \gamma$  satisfacen la desigualdad:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1.$$

Hay exactamente tres soluciones  $(\alpha, \beta, \gamma) = (3, 3, 3)$ ,  $(2, 4, 4)$  y  $(2, 3, 6)$ .

Tomando en cuenta que  $T(3, 3, 3)$  es un triángulo equilátero,  $T(2, 4, 4)$  es un triángulo rectángulo isósceles y  $T(2, 3, 6)$  es un triángulo rectángulo de  $30^\circ - 60^\circ$ . Los gráficos de Coxeter de los grupos  $G(3, 3, 3)$ ,  $G(2, 4, 4)$  y  $G(2, 3, 6)$  son los siguientes respectivamente.



La teselación de  $E^2$  generada al reflejar en los lados de  $T(\alpha, \beta, \gamma)$  en cada uno de los tres casos se ilustra a continuación.

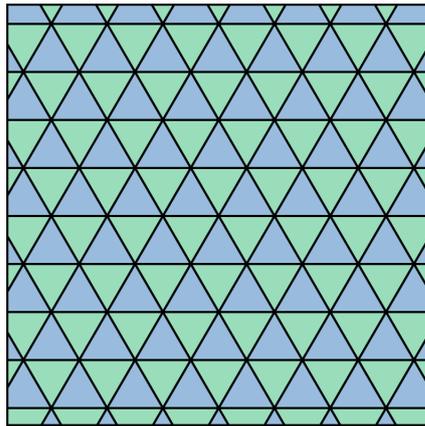


Figura 7.3: Teselado triangular (3,3,3).

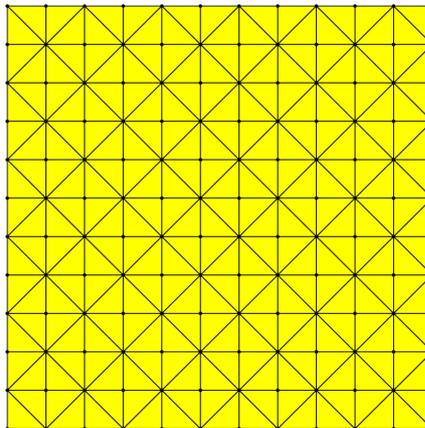


Figura 7.4: Teselado tetraquis cuadrado (2,4,4).

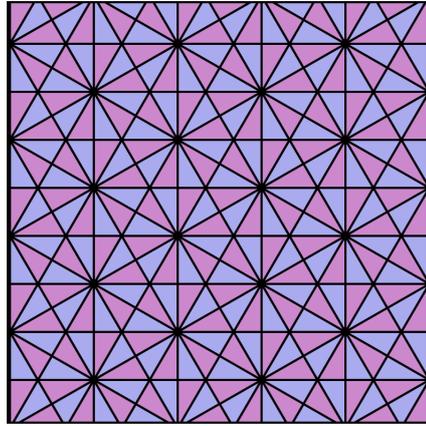


Figura 7.5: Teselado hexagonal bisecado  $(2, 3, 6)$ .

### 7.3. El caso esférico.

Asumimos que  $X = S^2$ , tenemos que:

$$\frac{\pi}{\alpha} + \frac{\pi}{\beta} + \frac{\pi}{\gamma} > \pi.$$

Por tanto, los enteros  $\alpha, \beta, \gamma$  satisfacen la desigualdad

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} > 1.$$

El grupo de triángulos es el grupo de simetría finita de un teselado de una esfera unitaria mediante triángulos esféricos, o triángulos de Möbius, cuyos ángulos suman un número mayor que  $\pi$ .

Hay una infinidad de soluciones  $(\alpha, \beta, \gamma)$  de la forma  $(2, 2, n)$ ,  $n > 1$  y solo 3 soluciones mas  $(2, 3, 3)$ ,  $(2, 3, 4)$  y  $(2, 3, 5)$ .

Los grupos de triángulos esféricos se pueden identificar con los grupos de simetría de los poliedros regulares en el espacio euclidiano tridimensional:  $\Delta(2, 3, 3)$  corresponde a un tetraedro;  $\Delta(2, 3, 4)$  tanto a un cubo como a un octaedro (que tienen el mismo grupo de simetría);  $\Delta(2, 3, 5)$  tanto a un dodecaedro como a un icosaedro.

La gráfica de Coxeter del grupo  $\Delta(2, 2, n)$ ,  $n > 1$  del grupo diedral se pueden interpretar como los grupos de simetría de la familia de diedros, que son los sólidos degenerados formados por dos  $n$ - ágonos regulares idénticos unidos entre sí, o sus hosoedros duales, que se forman al unir  $n$  digonos junto a dos vértices.

El teselado esférico correspondiente a un poliedro regular se obtiene formando la subdivisión baricéntrica del poliedro y proyectando los puntos y líneas resultantes sobre la esfera circunscrita. En el caso del tetraedro, hay cuatro caras, y cada cara es un triángulo equilátero que se subdivide en 6 trozos más pequeños por las medianas que se intersecan en el centro. La teselación resultante tiene  $4 * 6 = 24$  triángulos esféricos (es el tetraquishexaedro esférico).

Estos grupos son finitos, lo que corresponde a la compacidad de la esfera: las áreas de los discos en la esfera crecen inicialmente en términos de radio, pero finalmente cubren toda la esfera.

*Demostración.* El área de  $T(2, 3, 3)$  es:

$$\frac{\pi}{\alpha} + \frac{\pi}{\beta} + \frac{\pi}{\gamma} > \pi.$$

Entonces tenemos:

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} > \pi.$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{6}.$$

Como el área de  $S^2$  es  $4\pi$ , la teselación:

$$\{gT(2, 3, 3) : g \in G(2, 3, 3)\}$$

contiene 24 triángulos, por lo que  $G(2, 3, 3)$  tiene el orden 24. La teselación se puede dividir en 4 ciclos, cada uno de los cuales consta de 6 triángulos que giran alrededor de un vértice de  $60^\circ$ . La unión de cada uno de estos ciclos es un triángulo equilátero esférico.

Esto da una teselación regular de  $S^2$  por 4 triángulos equiláteros. De la geometría de estas dos teselaciones se desprende claramente que  $G(2, 3, 3)$  es el grupo de simetrías del tetraedro regular inscrito en  $S^2$  con sus vértices en las esquinas de los 4 triángulos equiláteros.

En consecuencia,  $G(2, 3, 3)$  es un grupo simétrico de cuatro letras. El grupo triangular  $G_0(2, 3, 3)$  es un grupo alterno de cuatro letras llamado grupo tetraédrico. La gráfica de Coxeter de  $G(2, 3, 3)$  es la siguiente.



□

Ahora seguimos con el área de  $T(2, 3, 4)$ .

*Demostración.*

$$\frac{\pi}{\alpha} + \frac{\pi}{\beta} + \frac{\pi}{\gamma} > \pi.$$

Entonces tenemos:

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} > \pi.$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} - \pi = \frac{\pi}{12}.$$

Entonces, nuestra teselación:

$$\{gT(2, 3, 4) : g \in G(2, 3, 4)\}$$

contiene 48 triángulos, por lo que  $G(2, 3, 4)$  tiene el orden 48. La teselación se puede dividir en 6 ciclos, cada uno de los cuales consta de 8 triángulos que giran alrededor de un vértice de  $45^\circ$ . La unión de cada uno de estos ciclos es un cuadrilátero regular esférico.

La gráfica de Coxeter de  $G(2, 3, 4)$  es la siguiente.



□

A continuación se representan los teselados triangulares.

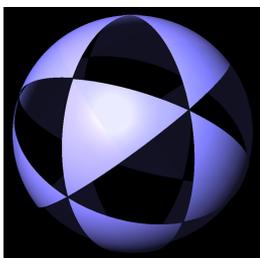
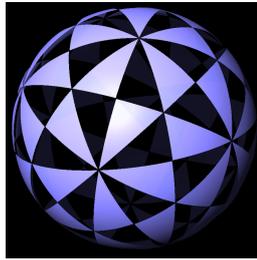
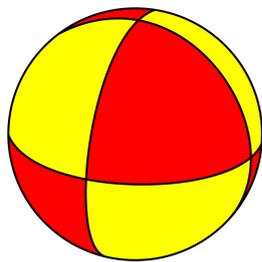
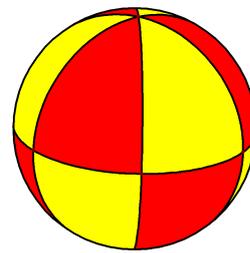
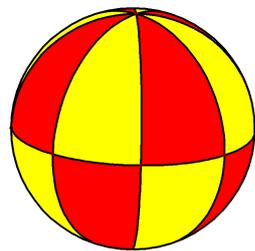
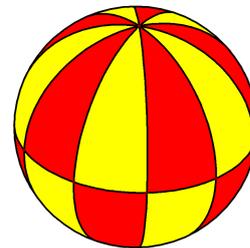


Figura 7.6: (2, 3, 3)



Figura 7.7: (2, 3, 4)

Figura 7.8:  $(2, 3, 5)$ Figura 7.9:  $(2, 2, 2)$ Figura 7.10:  $(2, 2, 3)$ Figura 7.11:  $(2, 2, 4)$ Figura 7.12:  $(2, 2, 5)$ Figura 7.13:  $(2, 2, 6)$ 

Entonces continua nuestro teselado triangular con  $(2, 2, n)$ . Las teselas esféricas correspondientes al octaedro y al icosaedro y a los teselados esféricos

diédricos con  $n$  par presentan simetría central. Por lo tanto, cada uno de ellos determina un mosaico del plano proyectivo real, un teselado elíptico.

## 7.4. El caso hiperbólico.

Ahora asumimos que  $X = H^2$ , tenemos que:

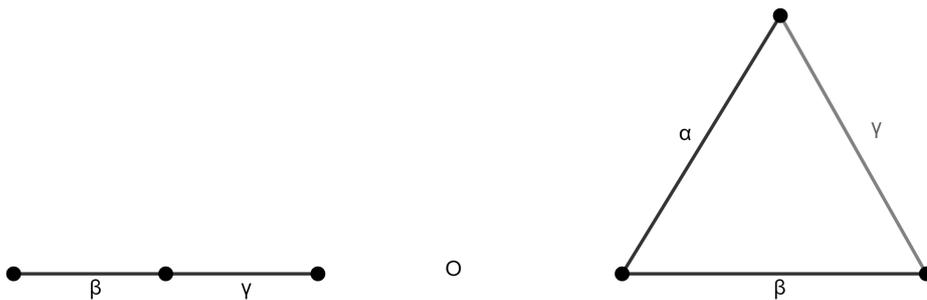
$$\frac{\pi}{\alpha} + \frac{\pi}{\beta} + \frac{\pi}{\gamma} < \pi.$$

Por tanto, los enteros  $\alpha, \beta, \gamma$  satisfacen la desigualdad

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} < 1.$$

Hay un número infinito de soluciones para esta desigualdad. Cada solución determina un triángulo hiperbólico  $T(\alpha, \beta, \gamma)$  y un grupo de reflexión correspondiente  $G(\alpha, \beta, \gamma)$ . De todos estos triángulos,  $T(2, 3, 7)$  tiene el área menor,  $\frac{\pi}{42}$ .

El gráfico de Coxeter de un grupo de reflexión hiperbólico  $G(\alpha, \beta, \gamma)$  es según  $a = 2$  o  $a > 2$ .



El grupo de triángulos es el grupo de simetría infinita de un teselado del plano hiperbólico por triángulos hiperbólicos cuyos ángulos suman un número

ro menor que  $\pi$ . Todos los tripletes que no figuran en la lista representan teselados del plano hiperbólico.

Por ejemplo, el triple  $(2, 3, 7)$  produce el grupo triangular  $(2, 3, 7)$ . Hay infinitos grupos de este tipo.

Los teselados asociados con algunos valores pequeños son:

En las siguientes páginas mostramos ejemplos con triángulos rectángulos del tipo  $(2, p, q)$  y ejemplos con triángulos generales  $(p, q, r)$ . Todas las imágenes están tomadas de Wikipedia.

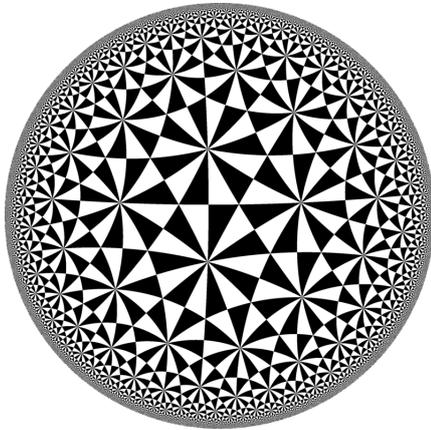


Figura 7.14:  $(2, 3, 7)$

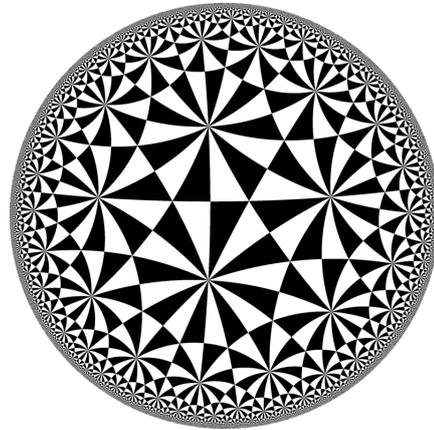


Figura 7.15:  $(2, 3, 8)$

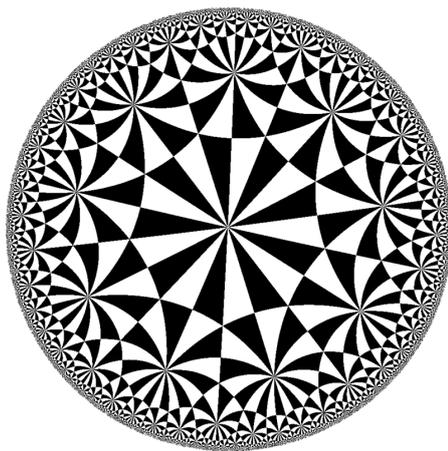


Figura 7.16:  $(2, 3, 9)$

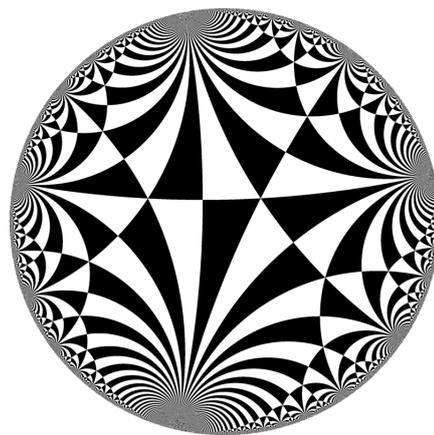


Figura 7.17:  $(2, 3, \infty)$

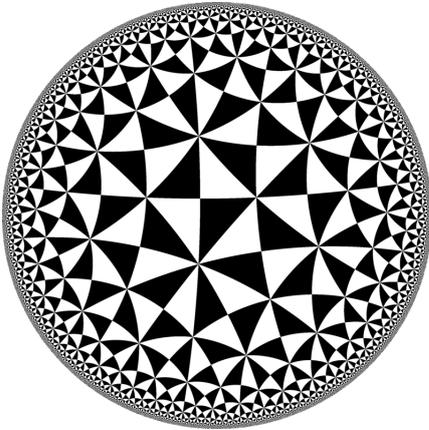


Figura 7.18:  $(2, 4, 5)$

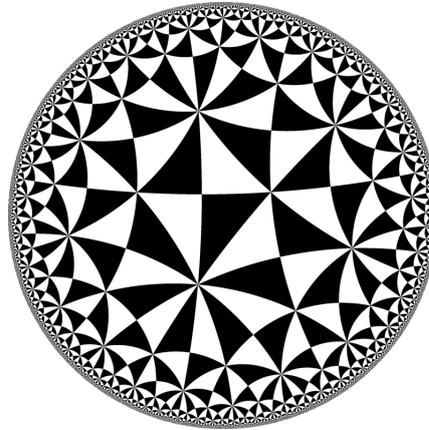


Figura 7.19:  $(2, 4, 6)$

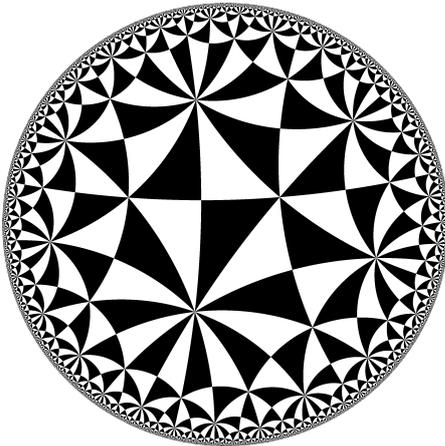


Figura 7.20:  $(2, 4, 7)$

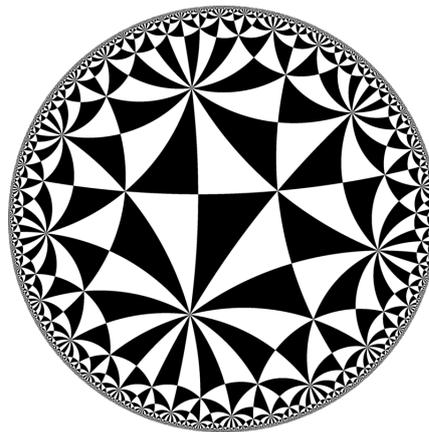


Figura 7.21:  $(2, 4, 8)$

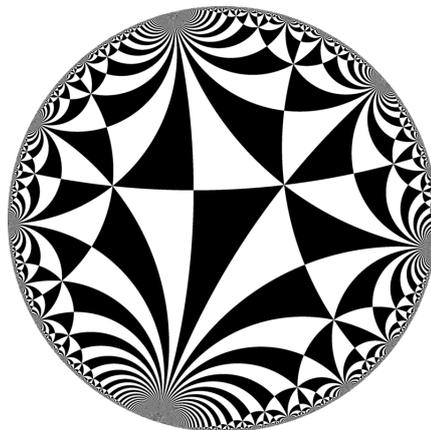


Figura 7.22:  $(2, 4, \infty)$

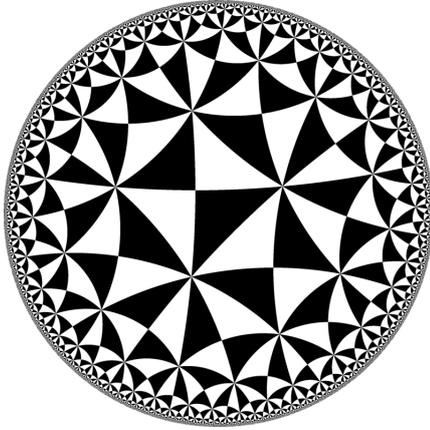


Figura 7.23:  $(2, 5, 5)$

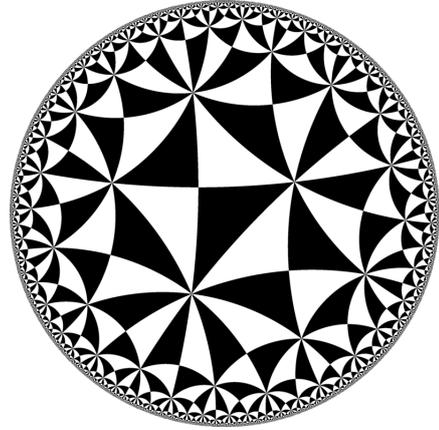


Figura 7.24:  $(2, 5, 6)$

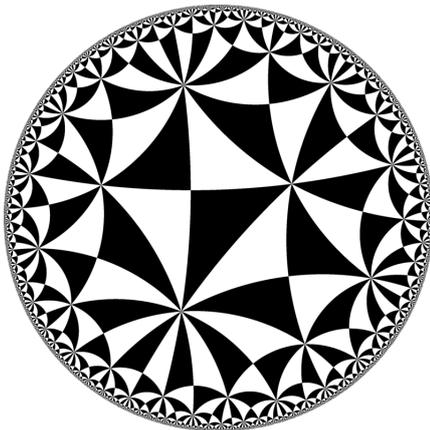


Figura 7.25:  $(2, 5, 7)$

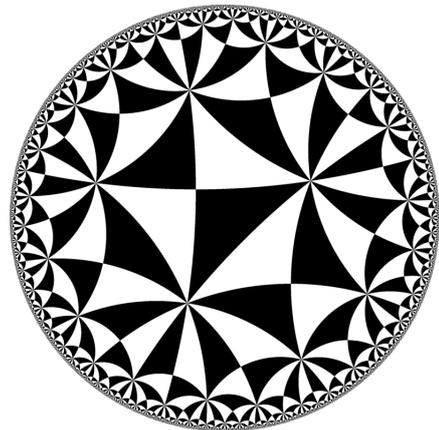


Figura 7.26:  $(2, 6, 6)$

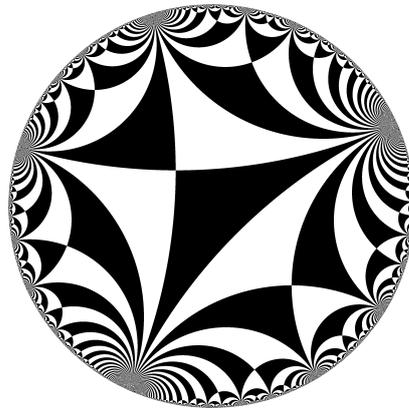


Figura 7.27:  $(2, \infty, \infty)$

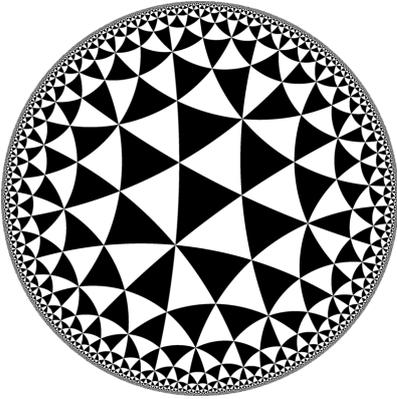


Figura 7.28:  $(3, 3, 4)$

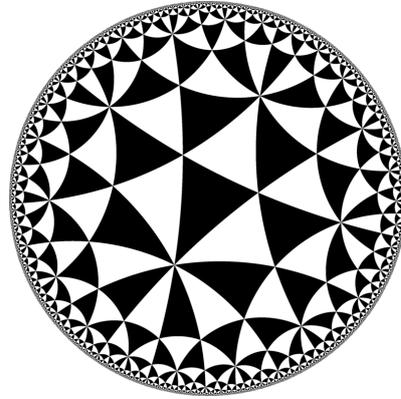


Figura 7.29:  $(3, 3, 5)$

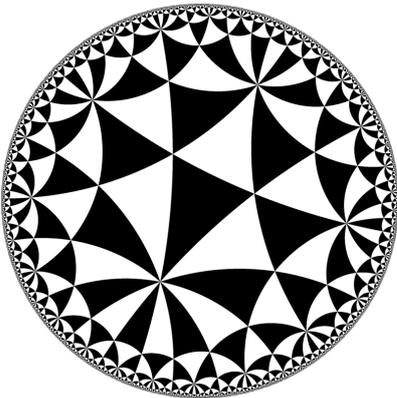


Figura 7.30:  $(3, 3, 6)$

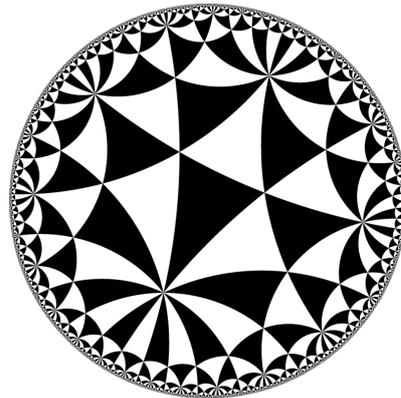


Figura 7.31:  $(3, 3, 7)$

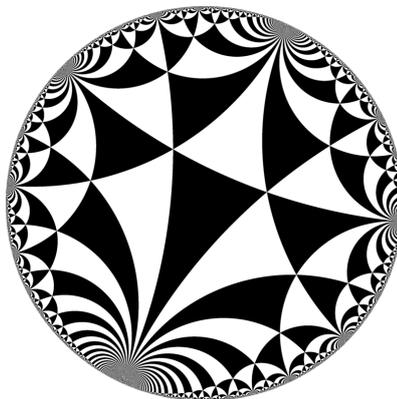


Figura 7.32:  $(3, 3, \infty)$

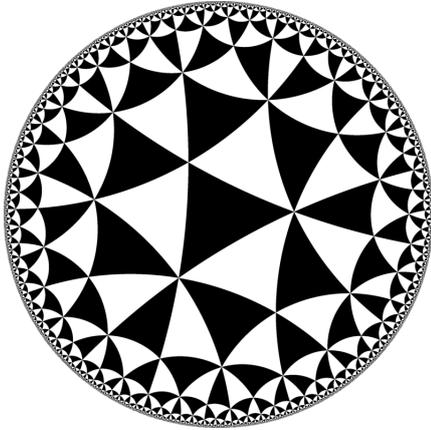


Figura 7.33:  $(3, 4, 4)$

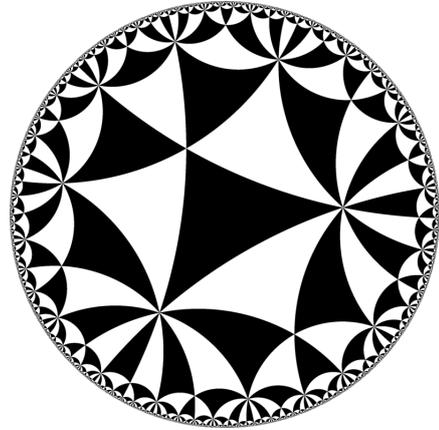


Figura 7.34:  $(3, 6, 6)$

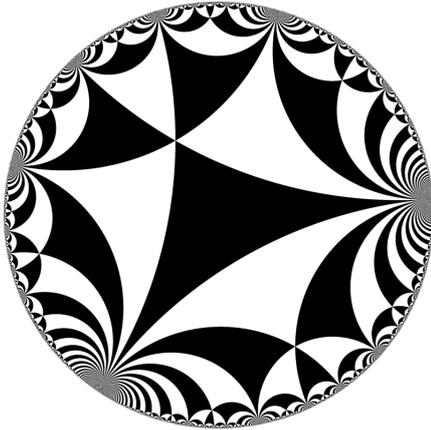


Figura 7.35:  $(3, \infty, \infty)$

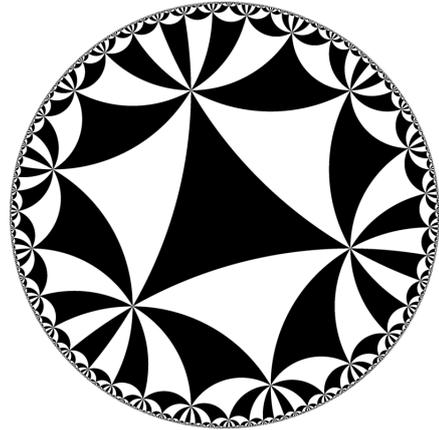


Figura 7.36:  $(6, 6, 6)$

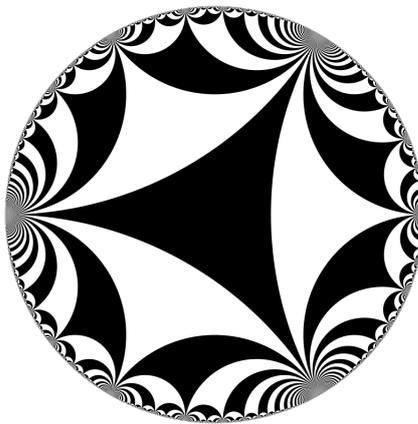


Figura 7.37:  $(\infty, \infty, \infty)$

# Bibliografía

- [1] **E. Hille.** Ecuaciones diferenciales ordinarias en el dominio complejo, Wiley (1976).
- [2] **Ahlfors, Lars.** Complex Analysis, an Introduction to the Theory of Analytic Functions of one Complex Variable. USA: McGraw-Hill, Third Edition, 1979.
- [3] **Hille, Einar.** Ordinary Differential Equations in the Complex Domain. USA: Dover Publications, 1997.
- [4] **Fedoryuk, M.V.** Ecuación fuchsiana, Enciclopedia de matemáticas , EMS Press, (2001)[1994].
- [5] **Ince, E.L.** Ordinary Differential Equations. Dover publications (1956).
- [6] **Gabriela Hinojosa Palafox, Rogelio Valdez Delgado.** Una introducción a la geometría hiperbólica y a los grupos fuchsianos, Cuernavaca, Mor. Universidad Autónoma del Estado de Morelos (2011).
- [7] **Gross, Jonathan L.; Tucker, Thomas W.** Triangle Groups, Topological graph theory, Courier Dover Publications (2001).
- [8] **John G. Ratcliffe.** Foundations of Hyperbolic Manifolds, Department of Mathematics Vanderbilt University Nashville USA.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MORELOS



## INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS



Control Escolar de Licenciatura

### VOTOS DE APROBATORIOS

Secretaria ejecutiva del Instituto de Investigación en Ciencias Básicas Aplicadas de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos.  
P r e s e n t e .

Por medio de la presente le informamos que después de revisar la versión escrita de la tesis que realizó la C. **TORRES MICHUA JUANA** con número de matrícula **20144011711** cuyo título es:

#### **“ECUACIONES DIFERENCIALES Y GRUPOS DE KLEIN (GRUPOS FUCHSIANOS)”**

Consideramos que **SI** reúne los méritos que son necesarios para continuar los trámites para obtener el título de **LICENCIADO EN CIENCIAS CON AREA TERMINAL EN MATEMATICAS**.

Cuernavaca, Mor a 21 de febrero del 2023

Atentamente  
Por una universidad culta

Se adiciona página con la e-firma UAEM de los siguientes:

<b>DRA LIUDMILA LVOVNE SABINA</b>	<b>(Presidente)</b>
<b>DR. ROGELIO VALDEZ DELGADO</b>	<b>(Secretario)</b>
<b>DR. CARLOS ALFONSO CABRERAS OCAÑAS</b>	<b>(Vocal)</b>
<b>DR. ANGEL CANO CORDERO</b>	<b>(Suplente)</b>
<b>DRA. LARISSA BITNEVA</b>	<b>(Suplente) no participa</b>



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

### Sello electrónico

**CARLOS ALFONSO CABRERA OCAÑAS** | Fecha:2023-06-28 12:43:28 | Firmante

ng2umZF12AWVP0g3GZJ65X1OUzrVSQemfiiHfuWlVezJMHuAvrWziSgvrzAzEyykWAAbcLpz81EkU3PP4rcKICAsolX2RpijPDP8/a6reuzF77eMQlMar1QLzgRZGBAZDVSCfGHnk  
yv7Zi9bL8mWwLlyHC13S5UWE+6x1BKGN4NSxpHICvY49TCOBpZLT3eXbLVivTD58C960roRngEnpouJyUdB4fJ1bK30xusxCUev+oBcjq+d3uaAqrmQAbA5FhboxGCe6kPvj3  
hUWYDYdVO4Nna9MvryS8kYP7Rmgn/Nrw4FSnXUAbEPVGEi905+YvdYUvqE/zi8aeK1d77JQ==

**ROGELIO VALDEZ DELGADO** | Fecha:2023-06-28 12:48:15 | Firmante

EctqHJQV/JpgN4ITxNxPMNc2H4dks06kT8SXGiS3VelwN2KPDthe0wafUcHGQ5LwbOPK+MeegD2dvBYdo+kLxC8swp8qXdycYjSpnEeixhcgJKfkWKDeNwez0OjTaEsJJQyf9x  
hmx8bBKtRdOcaUMm8oNXGAc0pbcFYn246ggZuE+jaTMiokEpPex0YJDQCnEzXJz9mU3hlnflw+F3Ermh63G18G3q2DWTi5rvaZqfVCrdrvDeaPPAoOlvsbszc/IO9r4a9b2aSPdR  
hyZXr1tW0E40DTn6S7oteKdDM5cHj7SyXzIM64c8vC1LoyFJVXKKdSd0trdgmGFthmo5Mw==

**LIUDMILA LVOVNA SABININA** | Fecha:2023-06-28 16:15:05 | Firmante

fA/FpBBhdwsSjIR8oMF7IDDAk2v6jGQOX8sdfEoRUBGiStS90sIDVcKwzuzzM+Fdx39g5KO+t7RPoXiHxRYIBt1ff1rLhAxucb32kxD9NdSL2KrcFxDJS9jViYvcqx/m/PT0eG/SM1w2  
JUckFY+wq5xu9oriL7O0f1mZ7TL13/wAirmZ3qr4UMuD5//eMoCHzMau/BOstGHHUfK8Z4UUkyGfhLWVktObPzcQ8JaaWxxflbazgVF1+9EzMVUUKyK9IHdyEC6qnGUMgT7bG6Vs  
A0uUE+GVnAnh0S7eqYm6S5lqZXNV4bLyOG/iCt46CR3xnRP7RnpX44Rnj3CDWsg==

**ANGEL CANO CORDERO** | Fecha:2023-06-28 23:00:40 | Firmante

KEs5ld/EaM+Bih+dcovcbKzP8MDWJXjQDYXRRonVWIW2CgU+NYqOmBuLONE3yccDQPSGqgSVXL053FJF+LDvmvEH7NbloHxLMQaBTuMt4iv9XH+jcHy0rYFD+35NTD4f  
GZAUghO/491TXfmhZrXMILbV14dPpwyR+kD+J/d0RerwoRbCHbCbX9+eyL4EsDfyo9p51G/ciXr38w8BNMNNoELH+bntcehXw5ptLZLlbQW6vErvMKM6t6lwaqVIHvraJ9NpFg84F  
jKlf0qzanRjla1hOjKJyh/NxV8+TwwB0lly9e3BVk0LhBQiwH/5fovUhsG7EHmeE9ot3seZQ==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o  
escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



CYSJPTgUy

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/M5pN0y6H7PIGuouy9GPpYnpguRx1O4KrH>

