



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MORELOS



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS  
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS  
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

**Sobre la importancia de las fases de Fourier en el análisis no  
lineal de series de tiempo**

# TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**DOCTOR EN CIENCIAS**

PRESENTA:

M. EN CIENCIAS COGNITIVAS ANTONIETA MARTÍNEZ GUERRERO

Director de la Tesis:  
Dr. Markus Franziskus Müller  
Centro de Investigación en Ciencias, UAEM

Cuernavaca, Morelos

Junio 2023

## RESUMEN

La dinámica de muchos fenómenos naturales se caracteriza por ser no lineal, sin embargo, esta complejidad a menudo se ve enmascarada por la presencia de componentes estocásticos pronunciados que se superponen.

En esta investigación, se exploraron algunas de las características de esta superposición y se demostró la problemática del uso de ciertos datos sustitutos durante el análisis no lineal. Para abordar este problema, se desarrolló un método simple de preprocesamiento capaz de separar las características lineales y no lineales de las series de tiempo univariantes.

Este método de preprocesamiento se probó en diferentes tipos de datos, incluyendo modelos numéricos, electroencefalogramas (EEG) de pacientes con epilepsia y registros de sueño de tres sujetos. Además, se analizaron series de tiempo de caminatas de personas con Huntington y Parkinson y se evaluó el ritmo cardíaco de personas sanas antes y durante una sesión de meditación.

Los resultados de la investigación demuestran la importancia de separar las características lineales y no lineales en el análisis de series de tiempo. Al hacerlo, se aumenta significativamente la capacidad de detectar rasgos no lineales en las series de tiempo, lo que puede tener importantes implicaciones en la comprensión de fenómenos naturales complejos

# ÍNDICE

1.	INTRODUCCIÓN .....	3
1.1	ANTECEDENTES .....	5
1.2	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	11
2.	HIPÓTESIS .....	16
3.	MARCO TEÓRICO .....	17
2.1	¿POR QUÉ SON RELEVANTES LAS FASES DE FOURIER?.....	17
2.2	LAS FASES DE FOURIER Y LA AUTOCORRELACIÓN NO LINEAL.....	21
4.	MARCO METODOLÓGICO .....	23
4.1	MEDIDAS .....	23
	<i>Escaneo probabilístico multi-resolución de diferencias entre dos muestras (P-MRS) .....</i>	23
	<i>Detrended Fluctuation Analysis (DFA).....</i>	25
	<i>Magnitude Detrended Fluctuation Analysis (magDFA).....</i>	28
	<i>Información Mutua Univariante .....</i>	30
4.2	MODELOS NUMÉRICOS.....	31
	<i>Series de Ruidos.....</i>	31
	<i>Modelo AB.....</i>	32
4.3	PROPUESTA METODOLÓGICA. UN SIMPLE PROCESO DE PREPROCESAMIENTO. ....	35
4.4	DESCRIPCIÓN DE DATOS EMPÍRICOS .....	36
	<i>Epilepsia .....</i>	36
	<i>Sueño .....</i>	38
	<i>Caminata.....</i>	39
	<i>Ritmo Cardíaco.....</i>	41
5.	ANÁLISIS Y RESULTADOS.....	42
5.1	DATOS SINTÉTICOS.....	42
	<i>Relación entre fases y amplitudes de Fourier.....</i>	42
	<i>Calidad del Ajuste <math>r^2</math>.....</i>	47
	<i>Autocorrelación no lineal en series de ruido coloreado.....</i>	50
	<i>Autocorrelación no lineal en series del Modelo AB.....</i>	52
5.2	DATOS EMPÍRICOS .....	55
	<i>Epilepsia .....</i>	55
	<i>Sueño .....</i>	58
	<i>Caminatas.....</i>	62
	<i>Ritmo Cardíaco.....</i>	64
6.	DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES .....	70
7.	COMENTARIOS SOBRE LA INVESTIGACIÓN ORIGINAL.....	74
	ANEXO.....	81
	BIBLIOGRAFÍA .....	84

# 1. INTRODUCCIÓN

Frecuentemente, las características no lineales son de especial interés en los registros empíricos, dado que diversos sistemas biológicos se basan en dinámicas no lineales e incluso caóticas como el ritmo cardiaco, los ritmos circadianos y la actividad eléctrica cerebral (Zou, Marwan, & Donges, 2019; Degen, Olsen, & Holden, 1987; Carballido-Landeira & Escribano, 2016). No obstante, extraer estas características no lineales de series de tiempo no es una tarea sencilla. Además del problema de la estacionariedad, las señales reales suelen estar contaminadas por ruido intrínseco y de medición, de modo que cualquier dinámica no lineal aparentemente irregular queda oculta en un fondo estocástico igualmente irregular y posiblemente isoespectral. Asimismo, muchas medidas numéricas que supuestamente detectan características no lineales también son sensibles a interdependencias lineales (Kreuz, y otros, 2007; Rummel, y otros, 2011). Por tanto, a menudo no resulta claro si las dinámicas lineales o no lineales generan los resultados numéricos. Dado que es esencial identificar dichos mecanismos fundamentales, es deseable separar las correlaciones lineales de las no lineales.

En el presente estudio, se investigó un método de preprocesamiento que trabaja con los componentes de Fourier y logra separar con éxito las características lineales y no lineales en series de tiempo. En el proceso se descubrió que las amplitudes de Fourier, además de contener las características lineales de las series de tiempo, están estrechamente relacionadas con las fases de Fourier y pueden enmascarar las características no lineales de las series. Asimismo, se confirmó el peligro de trabajar con datos sustitutos que normalmente se utilizan para analizar la no linealidad en series de tiempo univariantes, bajo el supuesto de que representan una hipótesis nula adecuada.

El método de preprocesamiento propuesto se puso a prueba en datos sintéticos y series de tiempo fisiológicas. Cada uno de los casos de series de tiempo fisiológicas proporcionó resultados interesantes que vale la pena investigar en muestras de mayor tamaño y en un mayor número de condiciones fisiológicas.

Este manuscrito comienza con una introducción histórica que relata el camino teórico que se recorrió para llegar a la investigación cuantitativa de la dinámica no lineal y su relevancia en el estudio de sistemas complejos. Seguido, se presenta el planteamiento del problema y el marco teórico, donde se detallan las ideas y la evidencia que respaldan la hipótesis de este estudio.

En la sección siguiente se desarrolla el marco metodológico, donde se proporcionan los detalles de los modelos numéricos utilizados, las medidas no lineales implementadas para el análisis de los datos, la propuesta de preprocesamiento para separar las características lineales y no lineales, así como los detalles de las bases de datos fisiológicas utilizadas.

Luego, se describe en detalle los resultados obtenidos en los análisis realizados, para finalizar con las secciones de discusión y conclusiones.

Al final se incluye una sección donde se relata cómo esta investigación surgió como consecuencia de la pandemia de COVID-19 y se comentan los objetivos y algunos resultados preliminares del proyecto doctoral original.

## 1.1 Antecedentes

Al momento de introducir el tema de dinámica no-lineal a un público no especializado, surge confusión y un número importante de interpretaciones equivocadas. Lo mismo sucede con el concepto de caos. Es interesante notar que ambos conceptos se relacionan en la historia de la Física y que su comprensión es necesaria para entender la idea de “complejidad”.

Con el fin de establecer un marco conceptual y esbozar la definición de no linealidad, vale la pena comenzar con un breve recorrido histórico.

En la segunda parte del Discurso del Método (1637), en la obra Principios de Filosofía (1644) y la tercera de sus Meditaciones (1641), Descartes expuso su método, formuló el principio de conservación y las bases del principio de causalidad. En el paradigma cartesiano, intrínsecamente reduccionista, el método para indagar y describir los fenómenos era el siguiente:

“Cuando tenemos un problema difícil de resolver, lo primero que hay que hacer es descomponerlo [...] Si la solución de esas [...] partes es demasiado complicada, dividimos el problema en nuevas partes una y otra vez hasta que cada una de ellas pueda ser resuelta. Desde esta perspectiva, estudiar el todo o las partes constituyentes de un fenómeno natural es exactamente lo mismo. Tal simplicidad asume la inmutabilidad de las partes aun cuando hay una interacción recíproca. Por lo tanto, sin importar cómo interactúen o se combinen las partes, éstas permanecerán intactas y conservará su identidad [...] Desde este principio lineal de perfecta independencia y permanencia de los sistemas físicos resulta el principio de acción y reacción. Este principio establece que cuando se ejerce una acción sobre un cuerpo, éste responde con una acción equivalente en la dirección opuesta, con el fin de preservar su propia identidad” (Croca, 2020).

Más adelante, en el periodo de 1667 a 1689, Isaac Newton tomó a la causalidad como la base de sus leyes del movimiento, escribió un manuscrito sobre cálculo diferencial y subrayó el problema de los tres cuerpos. Esto sentaría los fundamentos de la Física Clásica y el pensamiento determinista.

El determinismo se puede definir como predictibilidad basada en causalidad científica y se divide en dos tipos: el determinismo local y el universal. El determinismo local considera a una cantidad finita de elementos como actores en un fenómeno específico, por ejemplo, la trayectoria de una pelota. El determinismo universal por su parte esgrime la idea de que el universo en su totalidad es un sistema determinista (Oestreicher, 2007).

El determinismo universal, también conocido como determinismo laplaciano, surge del texto titulado *Essai philosophique sur les probabilités*, escrito por el matemático y astrónomo Pierre-Simon Laplace en 1814. La cita más conocida y que daría pie a la interpretación determinista de la realidad, es la siguiente:

“Una inteligencia que, durante un instante dado, conociera todas las fuerzas por las que está animada la naturaleza y la situación respectiva de los entes que la componen, si además fuera lo suficientemente vasta como para someter todos estos datos al análisis matemático, englobaría en una misma fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes del universo y los del átomo más ligero; para ella, nada sería incierto y el futuro, como el pasado, estaría presente a sus ojos” (Laplace, 1814).

A partir de este fragmento se interpretó que todo está fijado según leyes físicas y por lo tanto, todo se puede explicar y predecir mediante el análisis matemático. Aunque Laplace nunca usó la palabra “determinismo” de manera explícita en su texto, sus ideas dieron forma a la corriente de pensamiento que estipuló que, si conocemos las posiciones y velocidades de todas las partículas en un instante dado, así como las fuerzas presentes, podríamos conocer todos los estados pasados y futuros de un sistema (Strien, 2014).

Uno de los grandes aportes de Laplace, fue el haber demostrado que el movimiento del Sol y los planetas podía ser explicado en su totalidad por las leyes de Newton. Y cuando Neptuno fue descubierto en 1846 solamente mediante cálculos y sin necesidad de observación astronómica (Danjon, 1946), el determinismo parecía no sólo tener sentido, sino que funcionaba como la base de una metodología analítica que podría funcionar independiente de la observación empírica.

Sin embargo, años más tarde James Clerk Maxwell y Ludwig Boltzmann se percataron de que el movimiento de los gases era más complicado de calcular que el movimiento de los planetas y así, dieron luz a la física estadística. Boltzmann, quien al considerar que la materia está formada por partículas, propuso que éstas se hallan en un perpetuo movimiento aleatorio. De este modo, generó una expresión matemática para la entropía y con ello, la posibilidad de cuantificar la aleatoriedad de un sistema.

Otro de los retos por resolver, era el de extender los métodos analíticos de Newton al problema de los tres cuerpos, es decir, el de hallar la solución general al movimiento de tres cuerpos que orbitan en el Sistema Solar.

A finales del siglo XIX, Henri Poincaré se percató de que la búsqueda de la solución al problema de los tres cuerpos partía de preguntas equivocadas. Así en lugar de preguntarse por la posición exacta de algunos planetas, optó por preguntarse si el Sistema Solar es eternamente estable o si eventualmente algunos planetas saldrían volando al infinito. Desde esta perspectiva, desarrolló una aproximación geométrica con la que cimentó las bases del estudio moderno de la dinámica. Retomó el concepto de espacio fase, que se define como un espacio abstracto en el cual se representa a todos los posibles estados de un sistema, donde cada posible estado es representado por un único punto y “...fue la primera persona en vislumbrar la posibilidad del caos, en el cual un sistema determinista exhibe comportamiento aperiódico que depende sensiblemente de las condiciones iniciales, haciendo de las predicciones a largo plazo, algo imposible” (Strogatz, 2019).

Aunque ya estaban sentadas algunas de las bases para la teoría del caos y físicos y matemáticos como Van der Pol y Kolmogorov brindaron aportes importantes para el estudio de la dinámica no lineal, el gran paso se dio hasta 1963 de la mano de Edward Lorenz.

La anécdota cuenta que mientras hacía cálculos con el fin de predecir el clima, Lorenz se percató de que el mismo cálculo le daba resultados diferentes si redondeaba los números con 3 o con 6 dígitos. Estas diferencias se presentaron debido a que en los sistemas no lineales, las diferencias se amplifican de distintas maneras al realizar multiplicaciones en procesos iterativos. Esta

sencilla pero importante observación, le hizo reflexionar sobre la relevancia de las condiciones iniciales en sistemas no lineales y como éstas pueden afectar la evolución de su dinámica.

De tal modo, Lorenz redescubrió el caos al demostrar la impredecibilidad de los sistemas con dinámica no lineal y alta sensibilidad a las condiciones iniciales, las cuales son características de los sistemas caóticos. Igualmente, mostró que el caos tiene estructura y aún cuando el concepto de “atractor” ya era conocido desde Poincaré, al graficar sus descubrimientos, Lorenz lo hizo visible.

No obstante, fue hasta la década de los 70's que se extendió el interés por la teoría del caos y la dinámica no lineal. En esos años el físico belga David Ruelle propuso al atractor extraño<sup>1</sup> como la representación de un sistema caótico en el espacio fase. Años más tarde, el físico Feigenbaum “...descubrió que hay ciertas leyes universales que gobiernan la transición de un comportamiento regular hacia uno caótico [...] Su trabajo estableció un enlace entre el caos y las transiciones de fase y atrajo a una generación de físicos al estudio de los sistemas dinámicos.” (Strogatz, 2019)

En esa misma década, se produjeron y popularizaron otros avances en el estudio de la dinámica como los fractales de Mandelbrot y la aplicación de métodos geométricos a la dinámica de osciladores biológicos por parte de Alfred T. Winfree (Winfree, 1967). Así, el interés por la investigación de la dinámica de sistemas no lineales y complejos permeó a científicos de múltiples áreas del conocimiento.

Antes de la llegada de las computadoras, resultaba sumamente difícil acceder e identificar las características no lineales de un sistema. Gracias a esta tecnología se logró formular algoritmos capaces de generar representaciones cuantitativas de la información no lineal, lo cual representó un gran avance en el estudio de sistemas complejos.

---

<sup>1</sup> Un atractor extraño es aquel en el que dos puntos en el atractor que están próximos uno del otro, posteriormente pueden distanciarse de manera arbitraria, pero manteniéndose dentro del atractor. Otra característica que lo define es que su movimiento nunca se repite y por lo tanto es no periódico.

Entonces ¿qué es un sistema lineal y uno no lineal? Por un lado, un sistema lineal se define como aquel en el que “... es suficiente sumar el comportamiento de cada componente para deducir el comportamiento del sistema en su totalidad” (Oestreicher, 2007). Por otra parte, las ecuaciones no lineales describen “fenómenos [...] como explosiones, la ruptura súbita de materiales o los tornados. A pesar de que comparten ciertas características universales, las soluciones no lineales tienden a ser individuales y peculiares [...] -Asimismo- al utilizar modelos no lineales uno puede identificar puntos críticos en el sistema en el cual una mínima modificación, puede tener un efecto desproporcionado...” (Oestreicher, 2007).

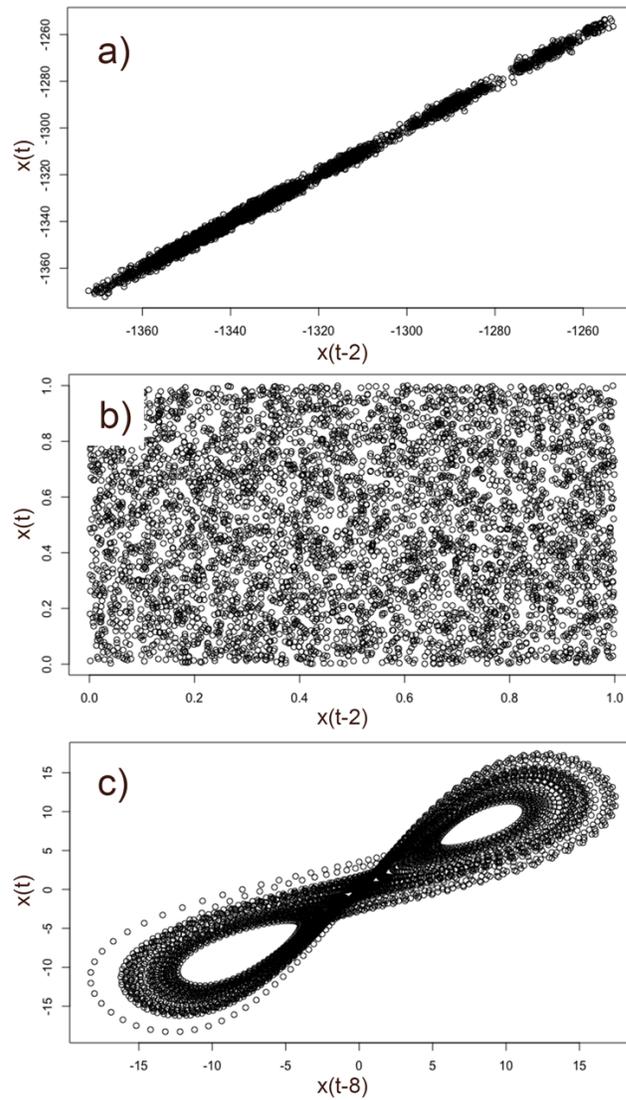
Una representación gráfica de la correlación lineal de un sistema se muestra en la Figura 1a. Al graficar una serie de tiempo altamente autocorrelacionada de manera que  $y(t) = x(t-2)$ , es posible representar con precisión el comportamiento de estos datos mediante una línea recta, la cual puede expresarse mediante la ecuación:

$$y = a + bx \quad (1)$$

Donde  $a$  representa el valor de intersección de la pendiente de la línea recta,  $b$  es el valor de la pendiente.

En la Figura 1b, por otro lado, se muestra un ejemplo del comportamiento de un sistema no correlacionado. Este sistema corresponde a una serie de números aleatorios independientes uniformemente distribuidos entre 0 y 1, por lo que carece de autocorrelación de todo tipo.

Sin embargo, al graficar una serie de tiempo de un sistema Lorenz de manera que  $y(t) = x(t-8)$ , como se muestra en la Figura 1c, es posible observar interrelaciones que no son adecuadamente representadas mediante una línea recta. Este último caso corresponde a autocorrelación no lineal, lo que nos lleva a preguntarnos: ¿Cómo podemos hallar el modelo adecuado que ajuste a este tipo de comportamiento? ¿Cómo se puede medir e interpretar esta información?



**Figura 1.** Ejemplos gráficos del comportamiento lineal de un sistema altamente autocorrelacionado (a) del comportamiento aleatorio de ruido no correlacionado (b) y del comportamiento no lineal de una serie de tiempo de un sistema Lorenz.

## 1.2 Planteamiento del problema

El análisis tradicional de series de tiempo no lineales implica el uso de múltiples de técnicas para obtener información dinámica a partir de la secuencia de valores en un conjunto de datos. La mayoría de las herramientas son esencialmente dependientes del concepto de reconstrucción del espacio fase<sup>2</sup>.

Los cimientos para este enfoque se establecieron a principios de la década de 1980, cuando el caos determinístico se convirtió en un tema de investigación popular y los científicos buscaban pruebas de caos en sistemas naturales y sintéticos. Desde entonces, el análisis de series de tiempo no lineal ha sido adoptado en una amplia gama de disciplinas, incluyendo la ciencia y la ingeniería, las ciencias sociales, las humanidades y más (Bradley & Kantz, 2015).

Para el análisis de sistemas biológicos, las características no lineales cobran especial importancia al considerar la evidencia que sugiere que su dinámica es esencialmente no lineal (Zou, Marwan, & Donges, 2019; Degen, Olsen, & Holden, 1987; Carballido-Landeira & Escribano, 2016). Sin embargo, el análisis de series de tiempo no lineales a partir de la reconstrucción del espacio fase, tiene varias limitaciones prácticas.

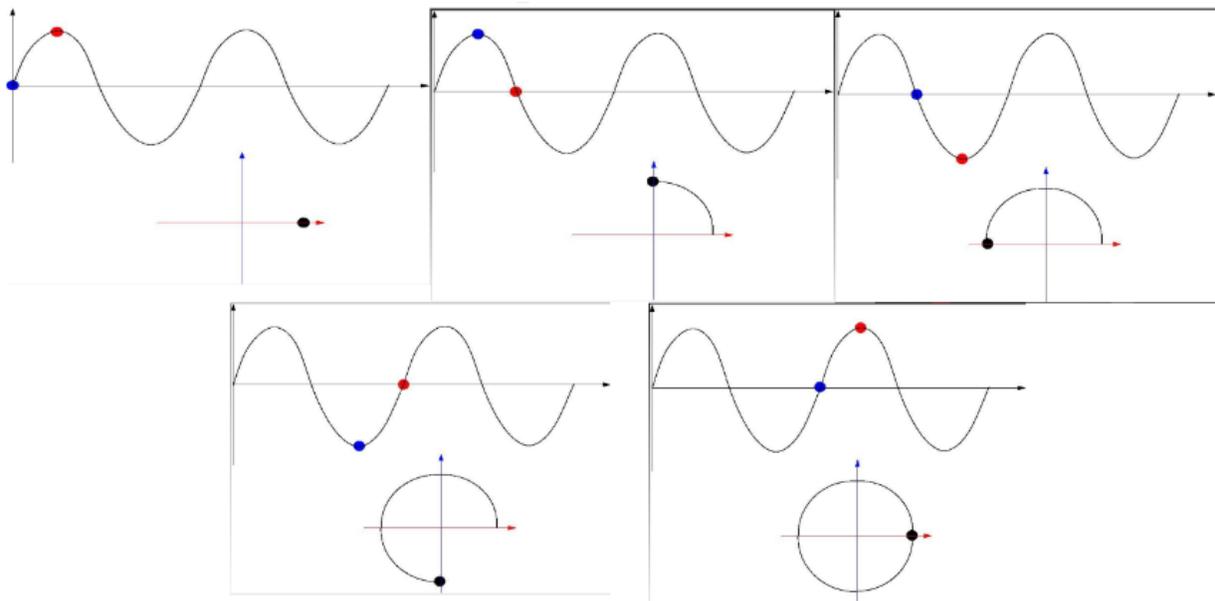
El procedimiento de *embedding* es una técnica matemática utilizada para analizar y entender sistemas complejos con dinámica caótica y cuyo objetivo es la reconstrucción del espacio fase. Este procedimiento fue propuesto inicialmente por Norman Packard en 1980 (Packard et al., 1980), y posteriormente formalizado por Floris Takens en 1981 (Takens, 1981).

El *embedding* consiste en tomar una serie temporal de datos de un sistema dinámico, y utilizarla para construir un espacio de mayor dimensión en el que el sistema pueda ser estudiado con mayor facilidad. Esto se logra mediante la construcción de un conjunto de vectores de retraso (*delay vectors*), que son vectores formados por los valores de la serie temporal en diferentes

---

<sup>2</sup> El espacio fase es una herramienta matemática fundamental en la física teórica que se utiliza para describir y entender el comportamiento dinámico de un sistema determinista. Este espacio está formado por todos los posibles estados dinámicos de un sistema. Cada punto en el espacio fase representa un estado único del sistema, y los puntos cercanos en el espacio fase corresponden a estados dinámicos similares del sistema.

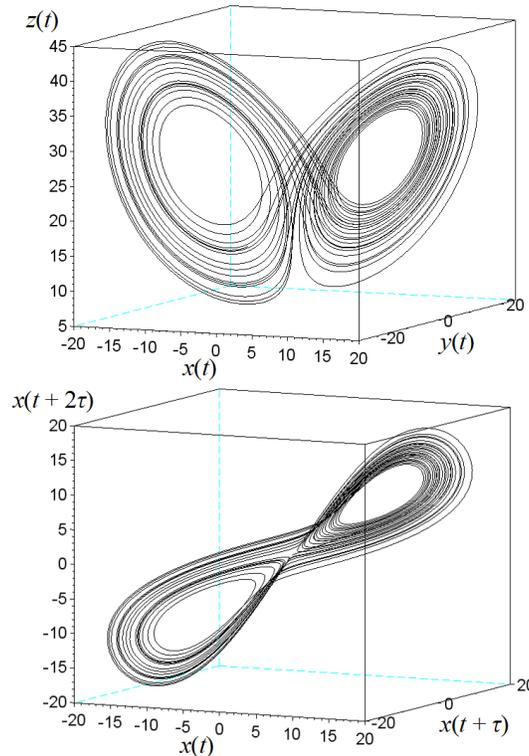
momentos de tiempo. Estos vectores de retraso se utilizan para construir un espacio de mayor dimensión llamado espacio de embedding, donde cada punto representa un estado del sistema en un momento determinado. Al construir este espacio de embedding, se conserva la información dinámica del sistema, lo que permite analizar su comportamiento a largo plazo. Un ejemplo esquemático puede observarse en la Figura 2.



**Figura 2.** Esquema explicativo del *embedding*. De arriba hacia abajo y de izquierda a derecha se presentan 5 paneles en los que se ilustra paso a paso la realización del embedding de un oscilador armónico. En la parte de arriba de cada panel se observa la señal del oscilador. Sobre ella se encuentran dos puntos, uno rojo (x) y uno azul (y) separados por un cierto valor de retraso. El valor de ambos puntos forma la coordenada del punto negro que se presenta en el espacio de *embedding* que está debajo. Podemos seguir panel por panel la trayectoria de los puntos de colores sobre la señal y cómo los valores que adquieren en el tiempo permiten formar las coordenadas que van dibujando la silueta del atractor sobre el espacio de *embedding*.

Aunque el *embedding* parece ser la opción más viable para el análisis no lineal, al tratar de realizar este procedimiento se deben tener en cuenta diversos parámetros y condiciones difíciles de identificar. En la Figura 3 se muestra el embedding aplicado a un sistema Lorenz, cuyo atractor puede representarse fielmente en un espacio tridimensional. Como se puede observar, el embedding logra proyectar una aproximación del atractor y aunque no es preciso, grafica de manera bastante similar la dinámica general del sistema. Asimismo, elegir la dimensión adecuada para el embedding es una tarea complicada, y la elección equivocada de dicha

dimensión puede resultar en una proyección distorsionada del atractor. En teoría, para garantizar los resultados de un embedding se necesita una muestra infinita y libre de ruido (Bradley & Kantz, 2015; Pereda, Gamundi, & Rial, 1998), condiciones que no se cumplen en el registro de la dinámica de sistemas complejos como lo son los sistemas biológicos.



**Figura 3.** Imagen ilustrativa del embedding para reconstruir el espacio fase de un sistema Lorenz. Arriba: Representación en 3D del atractor de un sistema Lorenz. Abajo: Reconstrucción del atractor del mismo sistema Lorenz a partir de la técnica de embedding. Imagen: Yapparina, CC0, vía Wikimedia Commons.

Aunque existen medidas diseñadas para detectar las características no lineales de las series de tiempo, algunas de ellas parecen ser sensibles también a las características lineales (Kreuz, y otros, 2007; Rummel, y otros, 2011). Al parecer, es bastante complicado separar los rasgos lineales de los no lineales en la dinámica de un sistema y es igualmente difícil distinguir si los resultados se definen por las interdependencias lineales o las no lineales.

Otro inconveniente al tratar de analizar las características no lineales en series univariantes radica en la construcción de datos sustitutos adecuados para este fin. Recientemente se ha publicado un enfoque basado en datos sustitutos para medidas bivariadas (Rummel, y otros, 2011).

Sin embargo, todavía falta un procedimiento equivalente para estimadores univariantes. Esto se debe a que en el caso univariante es mucho más difícil crear datos sustitutos que representen la estadística nula de manera adecuada, es decir, preservar todas las propiedades lineales de la señal empírica, pero eliminar todas las autocorrelaciones no lineales.

Con esta finalidad, es común el uso de datos sustitutos basados en la transformada de Fourier, pues se supone que representan el ruido que comparte las mismas autocorrelaciones lineales que las señales originales. Sin embargo, se ha demostrado que el algoritmo correspondiente también genera una cantidad considerable de autocorrelaciones no lineales de manera bastante descontrolada (Räth, Gliozzi, Papadakis, & Brinkmann, 2012). Esto es especialmente cierto para los datos sustitutos llamados Iterated Amplitude Adjusted Fourier Transform (IAAFT) (Schreiber, 1996), que están diseñados para mantener casi exactamente la distribución de amplitud en el dominio del tiempo y el espectro de potencia de las señales, mientras que las fases de Fourier se reemplazan por números aleatorios uniformemente distribuidos entre  $[0, 2\pi]$ .

En (Räth, Gliozzi, Papadakis, & Brinkmann, 2012; Martínez-Guerrero, 2022) se demostró explícitamente que se generaron autocorrelaciones no lineales durante las etapas de iteración en las que se ajustaron las amplitudes en el dominio del tiempo. Por lo tanto, si bien tales datos sustitutos funcionan muy bien para aplicaciones bivariantes (Rummel, y otros, 2011), no se recomiendan para un enfoque univariante. De hecho, aún si se evita el ajuste de amplitud en el dominio del tiempo y únicamente se aleatorizan las fases de Fourier (datos sustitutos a los que llamaremos FT en lo sucesivo), las series de tiempo resultantes presentan características no lineales (Martínez-Guerrero, 2022). Por lo tanto, se debe tener en cuenta que las medidas no lineales populares como la información mutua, que dependen tanto de las distribuciones de probabilidad marginales como conjuntas de amplitudes en el dominio del tiempo, se ven afectadas.

Con base en lo mencionado anteriormente, resulta poco atractivo realizar análisis no lineal en series de tiempo complejas. Existen notables limitaciones y el riesgo de cometer errores durante los cálculos es alto.

El objetivo del esfuerzo histórico por acceder a la información no lineal de sistemas complejos radica en encontrar métodos simples y efectivos que permitan investigar la totalidad de su dinámica. En este estudio, se presenta una propuesta efectiva para el caso univariantes.

## 2. HIPÓTESIS

Las características no lineales de una señal se encuentran en las fases de Fourier. En estas características hay información que puede ser esencial para conocer la dinámica de un sistema.

Para acceder a la información no lineal en series de tiempo, es deseable eliminar la influencia de la información lineal contenida en las amplitudes de Fourier. Esto se puede lograr igualando los valores de dichas amplitudes a 1 mediante un simple preprocesamiento de los datos. Gracias a este enfoque, es posible realizar análisis no lineales univariados a series de tiempo sin las restricciones que suelen presentar los métodos tradicionales. Esta técnica presenta la ventaja de evitar la mezcla de información lineal y no lineal, además de lograr esto sin la necesidad de generar datos sustitutos.

## 3. MARCO TEÓRICO

### 3.1 ¿Por qué son relevantes las fases de Fourier?

Como se mencionó con anterioridad, la aplicación de un *embedding* para llevar a cabo la reconstrucción del espacio fase es el camino más lógico y con mayor sustento teórico, sin embargo, los requisitos que exige dicho procedimiento para brindar resultados confiables son imposibles de satisfacer al utilizar datos empíricos. Otra opción es trabajar en el espacio de Fourier e indagar los distintos tipos de información a los que podemos acceder ahí, como, por ejemplo, las fases de Fourier.

El artículo de Oppenheim (1979) presenta una razón importante para prestar especial atención a las fases de Fourier. En dicho texto se demuestra que, al mantener las fases de Fourier intactas, es posible aleatorizar las amplitudes de Fourier y aun así conservar lo esencial y lo característico del sistema. Esto sugiere que las fases de Fourier tienen un papel crucial en la comprensión del sistema en cuestión y, por lo tanto, deben ser consideradas con detenimiento.

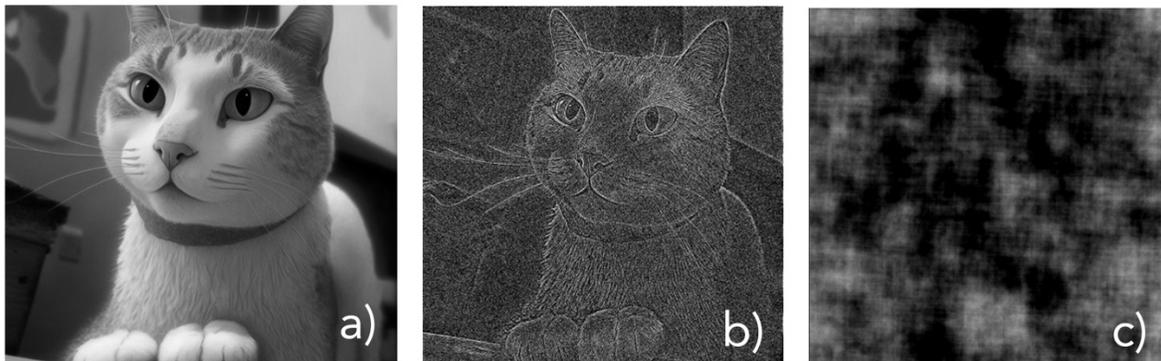
En la Figura 4 se realizó una versión del experimento de Oppenheim. Aquí se tomó una imagen en escala de grises y sus amplitudes de Fourier fueron igualadas a 1 sin alterar los valores de las fases de Fourier (panel b). Posteriormente se hizo otra imagen (panel c) donde se tomó la imagen del primer panel y se reemplazaron sus fases de Fourier por números aleatorios uniformemente distribuidos entre 0 y  $2\pi$ . En este último panel se observa el resultado de alterar los valores de las fases sin tocar aquellos de las amplitudes.

El estudio de Oppenheim se centró en el análisis de imágenes, pero ¿el procedimiento utilizado también es aplicable a otro tipo de señales? Para responder a esta pregunta se grabó un audio con la siguiente frase en inglés: “*Fourier phases are important quantities, although they are rarely considered in literature*”<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup> Audios disponibles en: [https://www.researchgate.net/publication/361757724\\_On\\_Fourier\\_phases\\_and\\_their\\_relevance\\_for\\_nonlinear\\_time\\_series\\_analysis](https://www.researchgate.net/publication/361757724_On_Fourier_phases_and_their_relevance_for_nonlinear_time_series_analysis)

La señal de audio fue transformada en una serie temporal mediante el uso del paquete `tuneR`<sup>4</sup>. Posteriormente, la serie se manipuló de dos maneras distintas. La primera consistió en fijar el valor de las amplitudes de Fourier a 1 y mantener inalterados los valores de las fases de Fourier. La segunda consistió en conservar las amplitudes de Fourier sin cambios y asignar valores aleatorios distribuidos uniformemente entre 0 y  $2\pi$  a las fases de Fourier. Las series resultantes se transformaron de nuevo al dominio del tiempo y se convirtieron a audio.



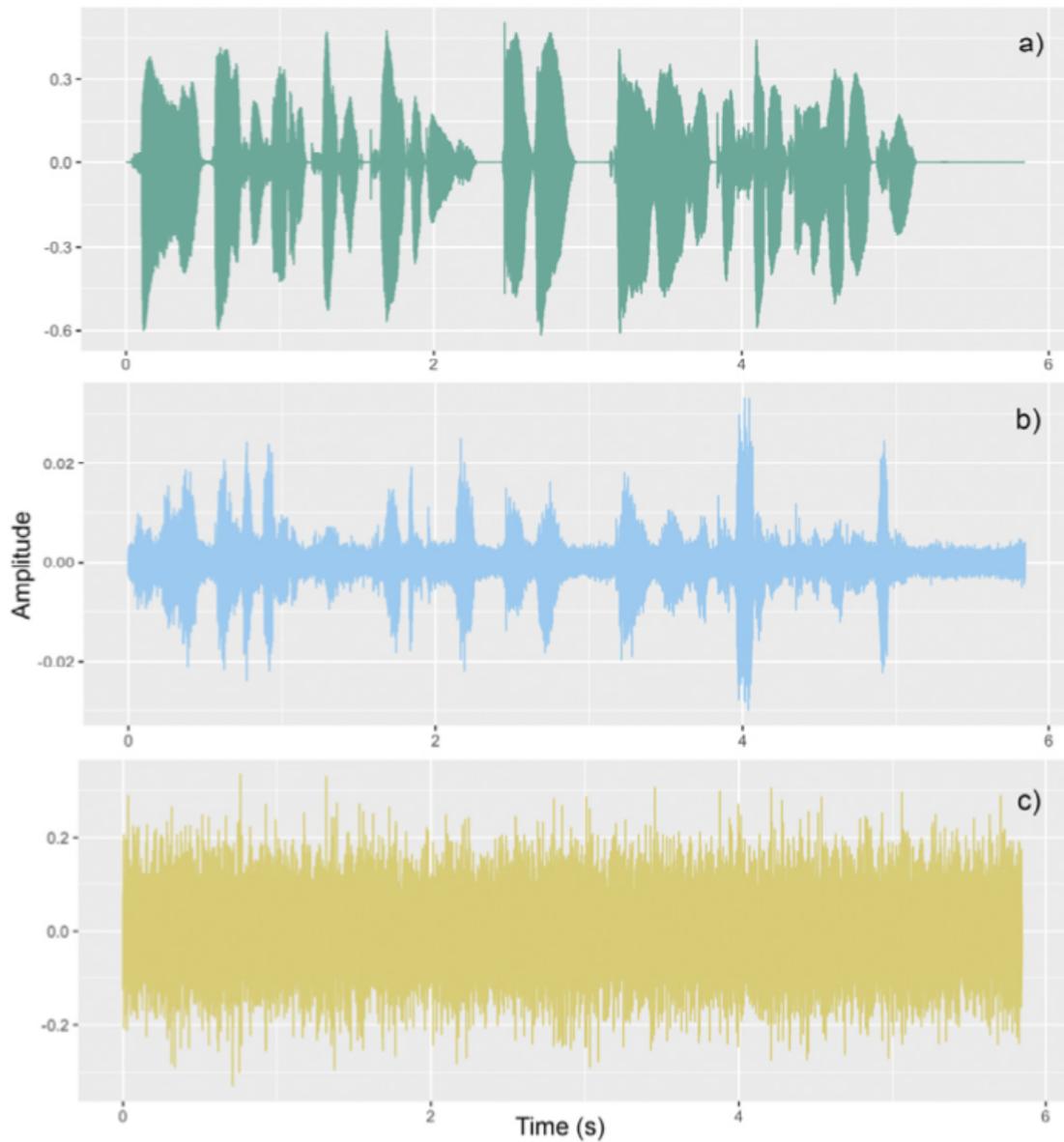
**Figura 4.** En a) se presenta la imagen original en escala de grises. El panel b) es el resultado de igualar las amplitudes de Fourier a 1. En c) se reemplazaron las fases de Fourier con números aleatorios uniformemente distribuidos entre 0 y  $2\pi$ .

La Figura 5 muestra la representación gráfica de las tres series de tiempo a) la original, b) en la que se conservaron las fases de Fourier y c) en la que se sustituyeron las fases de Fourier por valores aleatorios.

Los resultados obtenidos se alinean con los hallazgos previos de Oppenheim. Al aleatorizar las amplitudes de Fourier, es posible observar cambios significativos en las características de la señal, como una disminución en la intensidad de algunos segmentos y un aumento en la varianza en las partes donde antes había silencio. Sin embargo, a pesar de estos cambios, es posible percibir la presencia de ruido en el audio, pero es igualmente posible distinguir la frase original. Al observar la Figura 5, es posible notar similitudes entre la señal original (5a) y la señal con amplitudes de Fourier igualadas a 1 (5b). En cambio, la señal con las fases de Fourier suplantadas por

<sup>4</sup> <https://cran.r-project.org/web/packages/tuneR/tuneR.pdf>

números aleatorios pierde casi todas las características de la señal original y al escuchar el audio sólo se logra apreciar ruido, algo esperable al observar el panel 5c



**Figura 5.** a) Serie de tiempo correspondiente al audio original de una grabación en la que se escucha claramente una frase en inglés. b) Serie de tiempo de la misma grabación, pero con las amplitudes de Fourier ajustadas a 1. c) Gráfica de la misma serie de tiempo, pero con las fases de Fourier reemplazadas por números aleatorios en el rango de  $[0, 2\pi]$ .

De acuerdo con Ni y Huo (2006), "una distorsión aleatoria de las fases puede distorsionar drásticamente la señal reconstruida, mientras que una distorsión aleatoria de las magnitudes no lo hará, debido a que la secuencia de convolución en este último caso es, con una gran probabilidad,

cercana a una secuencia de Dirac." Lo que brinda una explicación estadística de este fenómeno y permite reforzar la idea de que la información de mayor relevancia se preserva en las fases.

Al considerar la importancia de las fases de Fourier y recordar el teorema de Wiener-Khinchin, se puede inferir que las características no lineales de una señal se encuentran en las fases de Fourier y, por lo tanto, ahí se concentra información que puede ser relevante para comprender la dinámica de un sistema. A continuación, se profundizará en esta idea.

### 3.2 Las Fases de Fourier y la autocorrelación no lineal.

La transformada de Fourier permite analizar una señal en el tiempo y representarla en el dominio de la frecuencia. Esto significa que, en lugar de ver cómo la señal cambia a lo largo del tiempo, podemos ver qué frecuencias componen la señal, cuál es su intensidad y fase. El resultado de la transformación se constituye por una serie de números complejos, cada uno de los cuales tiene una magnitud y una fase. La magnitud representa la magnitud del componente senoidal en cada frecuencia, mientras que la fase representa el ángulo de fase del componente, o la posición del componente en su ciclo con respecto a un punto de referencia en el tiempo.

Por lo tanto, en:

$$S(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} a(f) + ib(f) = A(f)e^{i\Phi(f)} \quad (2)$$

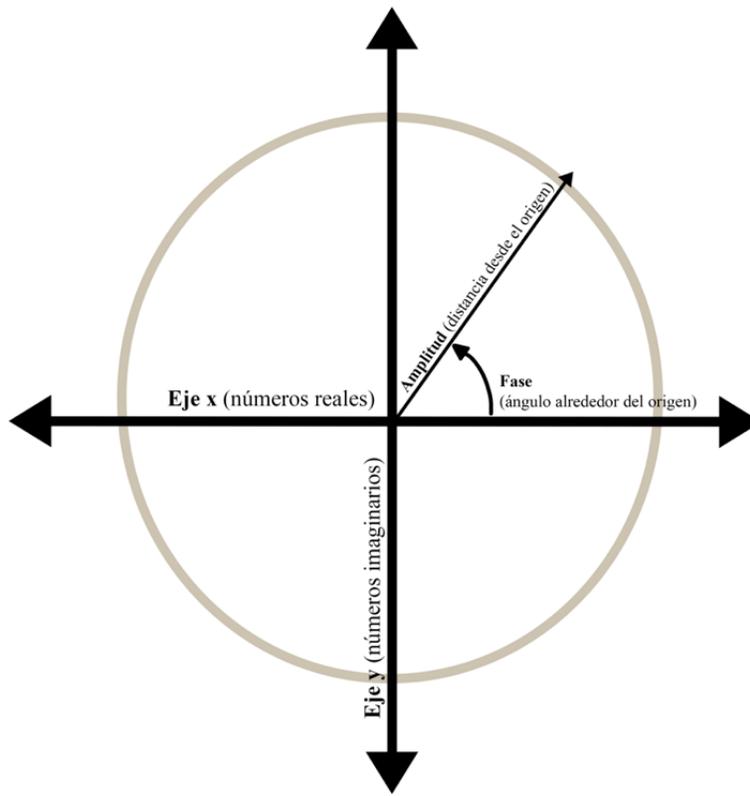
La  $\mathcal{F}$  denota a la transformada de Fourier,  $a(f)$  se refiere a las amplitudes de Fourier en coordenadas polares y  $\Phi(f)$  corresponde a las fases de Fourier. La figura 2 intenta retratar esto mediante un esquema.

La autocorrelación, por su parte, es una medida de cómo una señal se relaciona consigo misma en diferentes instantes de tiempo. Por otro lado, la densidad espectral de potencia es una medida de cómo la potencia de una señal está distribuida entre diferentes frecuencias.

El teorema de Wiener-Khinchin establece que la transformada de Fourier de la función de autocorrelación de una señal en el tiempo es igual a la densidad espectral de potencia de esa señal.

$$\mathcal{F}[C(\tau)] = |A(f)|^2 \quad (3)$$

Con base en esto se deduce que la secuencia de amplitudes de Fourier sólo contiene información sobre las autocorrelaciones lineales, pero no contiene ninguna información sobre relaciones no lineales. Incluso cuando se trata de correlaciones cruzadas, el espectro de potencia y por lo tanto las amplitudes de Fourier, influyen de forma dramática al inducir correlaciones cruzadas aleatorias como se muestra en Müller (2011).



**Figura 6.** Retrato de fase de un oscilador armónico.

Ahora surge la pregunta: ¿Dónde se pueden encontrar estas relaciones no lineales? Si consideramos que la información contenida en una señal en el tiempo es igual a la información contenida en esa misma señal en el dominio de las frecuencias, entonces es importante considerar dos posibilidades. La primera es que la información no lineal se encuentre exclusivamente en las fases de Fourier, mientras que la segunda sugiere que esta información podría ubicarse también en la correlación entre las fases y las amplitudes de Fourier. Determinar si ocurre una u otra no es una tarea sencilla, por lo que realizamos pruebas para investigar las posibles relaciones entre las fases y las amplitudes de Fourier.

## 4. MARCO METODOLÓGICO

### 4.1 Medidas

#### Escaneo probabilístico multi-resolución de diferencias entre dos muestras (P-MRS)

Con el fin de desentrañar posibles relaciones entre las amplitudes de Fourier y sus fases correspondientes, analizamos las series resultantes del Modelo AB (que se presenta en la sección 4.2) utilizando un método no paramétrico recientemente publicado para la comparación cuantitativa de muestras multivariantes (Soriano & Ma, 2017).

Este método, conocido como Escaneo Probabilístico Multi-Resolución de Diferencias en dos muestras (MRS en inglés), ha sido demostrado por sus autores como altamente efectivo para identificar diferencias locales entre dos muestras. Una tarea que otras pruebas estadísticas no son capaces de llevar a cabo de manera satisfactoria.

La peculiaridad de este método radica en la comparación de las muestras en una jerarquía de escalas espaciales, a través de una partición díada anidada<sup>5</sup> en el espacio de muestra. Esto se logra al escanear el espacio de muestra a través de ventanas de un tamaño determinado, que definen la resolución espacial en ese nivel jerárquico. Luego, para cada ventana, se prueba la hipótesis nula por separado, pero no completamente independiente de los niveles jerárquicos superiores.

“Aunque permitimos que la hipótesis sobre cada ventana sea verdadera o falsa por sí misma, hacemos hincapié en que no se tratan las ventanas o las hipótesis correspondientes de forma independiente. En lugar de ello, para lograr una inferencia eficaz se debe tomar prestada información entre ventanas. La razón es que las características de distribución interesantes, como las diferencias entre dos muestras, suelen agruparse espacialmente: si dos distribuciones difieren en un

---

<sup>5</sup> La partición díada anidada es un método utilizado en el análisis de datos que se utiliza para dividir una muestra en subconjuntos cada vez más pequeños a través de una jerarquía de escalas espaciales. Esta partición se logra mediante la división sucesiva de la muestra en dos subconjuntos a lo largo de cada dimensión, generando una estructura jerárquica en forma de árbol. Esta partición permite analizar los datos en diferentes niveles de detalle y realizar comparaciones entre ellos. En el caso específico del método P-MRS, la partición díada anidada se utiliza para comparar dos muestras a diferentes niveles de resolución espacial y así identificar diferencias locales entre ellas.

cierto lugar del espacio muestral, también tienden a diferir en los lugares cercanos a este.” (Soriano & Ma, 2017)

El intercambio de información entre los niveles jerárquicos se logra mediante la construcción de un modelo de Markov con estructura de árbol basado en los llamados "indicadores binarios latentes" que transportan información de rechazo o aceptación de la hipótesis nula en cada ventana. Las probabilidades de transición de este modelo de Markov generan las correlaciones entre las escalas espaciales y, por lo tanto, el intercambio de información entre ventanas. Con este procedimiento, no solo se proporciona información sobre si se rechaza (o no) la hipótesis nula a un determinado nivel de significancia, sino que además nos dice a qué escala espacial y en qué parte de las distribuciones ocurren tales diferencias. La corrección para pruebas múltiples se incluye monitoreando la tasa de falsos descubrimientos. Los detalles técnicos de este método se pueden encontrar en (Soriano & Ma, 2017)<sup>6</sup>.

---

<sup>6</sup> La paquetería de R se encuentra disponible en <https://cran.r-project.org/web/packages/MRS/index.html>

## Detrended Fluctuation Analysis (DFA)

Una discusión detallada de la técnica de análisis de fluctuación utilizada en este estudio se puede encontrar en las referencias (Kantelhardt, 2001; Ivanov P. C., 2003; Peng, 1994; Ashkenazy Y. I., 2001; Ashkenazy Y. H.-F., 2003). Aquí sólo se describirán los pasos básicos del *Detrended Fluctuation Analysis* (DFA) y una versión modificada, el *Magnitude Detrended Fluctuation Analysis* (MagDFA), que es capaz de detectar el escalamiento no lineal.

En el proceso del DFA, la serie temporal es considerada como una caminata aleatoria y mide las fluctuaciones alrededor de un polinomio ajustado en diferentes escalas de longitud a través del uso de la desviación estándar. Si la función de fluctuación resultante  $F(s)$  sigue una ley de potencia con un rango de valores, es decir,  $F(s) \sim s^\alpha$  un exponente de escala de  $\alpha < 0.5$  indica una serie temporal anti-correlacionada, uno con valor  $\alpha > 0.5$  indica una serie temporal correlacionada y uno con  $\alpha = 0.5$  equivale a una longitud de autocorrelación cero. Dentro de la región de escala, el exponente  $\alpha$  es directamente proporcional a la pendiente  $\beta$  del espectro de potencia ( $\alpha = (\beta + 1)/2$ ) y, por lo tanto, equivalente al exponente  $\gamma$  de la función de autocorrelación, en tanto que:

$$\gamma = \begin{cases} 1 - \beta & \text{if } \beta < 1 \\ 0 & \text{if } \beta \geq 1 \end{cases} \quad (4)$$

En Coronado y Carpena (2005) se mostró que "...la función de autocorrelación está fuertemente afectada por la longitud de la serie temporal, lo que se refleja en una sobreestimación sistemática del exponente de correlación  $\gamma$ . Aunque este efecto disminuye a medida que aumenta la longitud de la serie temporal, todavía persiste incluso para series temporales de longitud  $2^{20}$ , siendo más crítico en los valores intermedios de las correlaciones en la serie temporal." De modo en el que aun cuando existe una equivalencia numérica entre el exponente gamma, la pendiente  $\beta$  y el exponente  $\alpha$ , el exponente gamma es especialmente problemático de calcular.

Para ilustrar esto, se generó una señal de ruido con el valor de  $\beta$  ajustado a 0.5, 0.9 y 0.99. La señal se construyó con una longitud de  $2^{20}$  y se calculó la pendiente  $\beta$ , el exponente  $\gamma$  y el exponente .

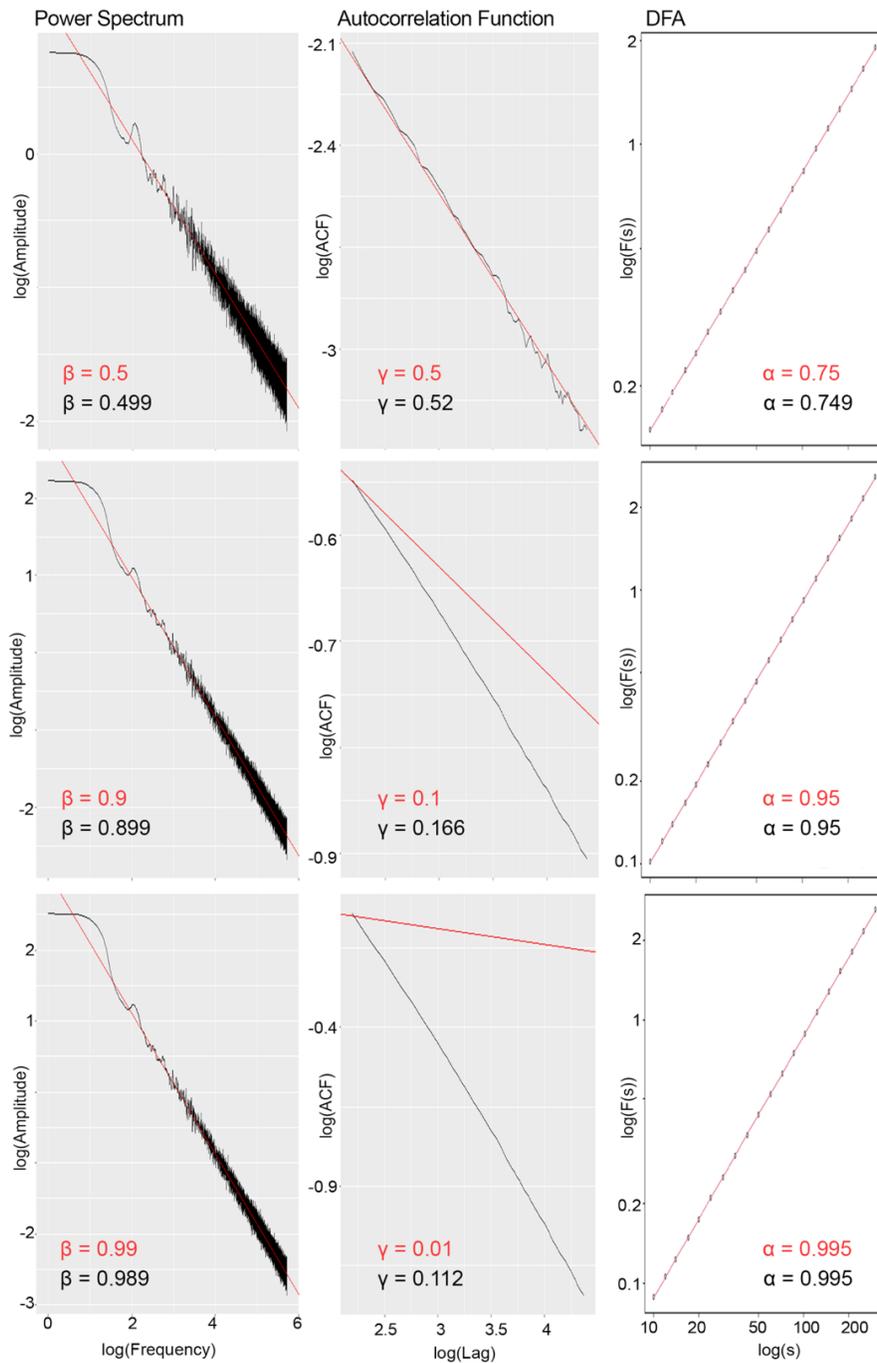
Como se puede apreciar, en la Figura 7, la precisión en el cálculo de  $\gamma$  disminuye a medida que se acerca a cero. Por su parte, el análisis de fluctuación (DFA) y el análisis de espectro de potencia proporcionan resultados prácticamente exactos. En el artículo de Penzel (2003) se demostró además la mayor eficiencia del DFA en comparación con el análisis de espectro de potencia en señales de ritmo cardíaco durante el sueño. No obstante, en otro artículo (Heneghan & McDarby, 2000) se presentó evidencia de que ambos métodos funcionan igualmente bien y que sus resultados son consistentemente equivalentes.

En este estudio, se eligió el Detrended Fluctuation Analysis (DFA) debido a su eficacia demostrada y con el objetivo de utilizar su variante, el MagDFA, que es capaz de identificar autocorrelación no lineal.

A continuación, se describirá detalladamente el procedimiento para realizar el cálculo del DFA, y posteriormente se profundizará en la variante mencionada.

Los pasos para calcular el DFA son los siguientes:

1. Determinar el perfil  $y(i) = \sum_{k=1}^i S(t_k) - \bar{S}$  de la serie original.
2. Dividir el perfil  $y(i)$  de longitud  $N$  en  $N_s = N/s$  segmentos no superpuestos, cada uno de ellos de longitud  $s$ . Debido a que en general  $N$  no es múltiplo de  $s$  es necesario hacer esta segmentación dos veces, una para cada extremo  $y(i)$ . Y se denota el perfil del segmento  $l$  con  $y_l(i)$ .
3. Ajustar al perfil  $y_l(i)$  de cada segmento  $l$  un polinomio  $p_l(i)$  y eliminar las tendencias del perfil para cada segmento de manera individual mediante la resta:  $y_l^d(i) = y_l(i) - p_l(i)$ .
4. Estimar la función de fluctuación para cada segmento:  $F_l^2(s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s [y_l^d((l-1)s + i)]^2$ .
5. Promediar sobre los  $2N_s$  segmentos:  $F(s) = [\frac{1}{2N_s} \sum_{l=1}^{2N_s} F_l^2(s)]^{1/2}$ .
6. Por último, se verifica si la función de fluctuación es invariante de escala, es decir, si  $F(s) \sim s^\alpha$  para algún valor de  $\alpha$ .



**Figura 7.** Demostración gráfica de la equivalencia entre la pendiente del espectro de potencia (izquierda), el exponente de correlación (centro) y el valor del DFA (derecha). Los valores en color rojo corresponden al valor esperado y los que se presentan en negro corresponden al valor obtenido. La equivalencia entre los tres coeficientes es precisa para cuando  $\beta < 1$  pero pierde precisión cuando  $\beta > 1$ . Sin embargo, la equivalencia entre la del espectro de potencia y el valor del DFA se mantiene para todos los casos.

## Magnitud Detrended Fluctuation Analysis (magDFA)

Para el cálculo de la Magnitud Detrended Fluctuation Analysis (en adelante magDFA), se sigue un proceso similar al del DFA (Ashkenazy Y. H.-F., 2003; Ashkenazy Y. I., 2001). La principal diferencia radica en que, en lugar de utilizar la serie temporal original  $S(t)$ , se utiliza la serie de incrementos:  $\Delta X(t_i) = S(t_i + 1) - S(t_i)$ .

El proceso para calcular el magDFA es el siguiente:

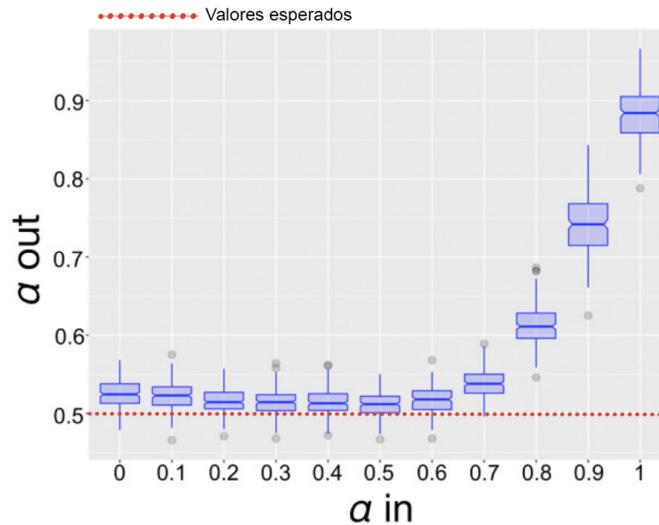
1. A partir de una serie temporal dada, se crea la serie de incrementos:  $\Delta X(t_i) = S(t_{i+1}) - S(t_i)$ , que se descompone en la serie de signo y magnitud  $\Delta X_i = \text{sgn}(\Delta X_i)|\Delta(X_i)|$ .
2. A cada serie se le resta su respectiva media.
3. Se ha demostrado que el método DFA tiene una precisión deficiente al estimar el exponente de escala en el caso de series temporales anticorrelacionadas. Por lo tanto, es necesario integrar tanto la serie de signo como la de magnitud. Si todavía son anticorrelacionadas, se deben repetir los dos primeros pasos hasta que sean correlacionadas.
4. Aplicar el método DFA tal como se describió anteriormente.
5. Estimar la pendiente de  $F(s)/s$  en lugar de  $F(s)$  en una gráfica log-log con el fin de compensar la integración adicional del paso anterior y verificar si  $F(s)/s \sim s^{\alpha-1}$ .

Cabe destacar que, si en lugar de la serie de incrementos se considera la serie temporal original y con ella se generan una serie de signo y otra magnitud,  $S(t_i) = \text{sgn}(S(t_i))|S(t_i)|$ , este procedimiento da lugar a resultados diferentes (Gómez-Extremera, Carpena, Ivanov, & Bernaola-Galván, 2016; Carpena, Gómez-Extremera, Carretero-Campos, Bernaola-Galván, & Coronado, 2017), que no corresponden con la noción de ruido correlacionado linealmente.

En la Figura 8 se presenta una réplica de los resultados obtenidos en Gómez-Extremera (2016) y Carpena (2017) al aplicar el magDFA a las series originales en vez de aplicarlo a las series de incrementos. Para ello se generaron 200 series de ruido de colores (se detallará el proceso de generación más adelante) con una longitud de  $N = 2^{15}$  para cada in. La línea roja punteada indica el resultado esperado de los valores para todos los conjuntos de series y como se puede apreciar en

la imagen, las series a las que se les asignó un valor  $\alpha_{in}$  mayor a 0.6, presentaron una alta autocorrelación no lineal positiva. Sin embargo, estos resultados no indican necesariamente la presencia de autocorrelación no lineal en las series de ruido, sino que únicamente demuestran que, al omitir el paso de calcular las series de incremento, el magDFA no cumple su función y devuelve resultados erróneos. Las señales de ruido no contienen ninguna característica no lineal y por lo tanto, no muestran ninguna estructura en el espacio de fase reconstruido de cualquier dimensión (Kantz & Schreiber, 2004) por lo que tampoco deben mostrar escalamiento no lineal. Independientemente del espectro de potencia de una señal de ruido, sus fases de Fourier son números aleatorios independientes uniformemente distribuidos entre el rango de  $[0, 2\pi]$ . Este hecho también constituye la base teórica de los datos sustitutos generados a partir de la transformada de Fourier (Schreiber, 1996; Kantz & Schreiber, 2004)

Como última observación sobre el método de magDFA, es importante destacar que para detectar de manera confiable la escala no lineal, es necesario que el exponente de escala  $\alpha$  se mantenga constante durante un período de tiempo considerable que cubra al menos un orden de magnitud. Es decir, procesos no lineales que solo ocurren en escalas de tiempo cortas, como la divergencia caótica, por lo general no se pueden detectar mediante este método.



**Figura 8.** Réplica de los resultados obtenidos por Gómez-Extremera (2016) y Carpena (2017) donde muestran que al aplicar el magDFA obtienen escalamiento no lineal en señales de ruido. La línea roja punteada indica el valor real esperado al analizar señales de ruido, pues dichas señales se caracterizan por carecer de estructura en el espacio fase. Estos resultados se obtienen al omitir el paso de las series de incremento.

## Información Mutua Univariante

Como una segunda medida no lineal y complementaria al magDFA, se estimó la Información Mutua de forma univariante (Von Wegner, Laufs, & E., 2018).

El método de Información Mutua Univariante es una técnica para evaluar la autocorrelación en series de tiempo. Se enfoca en calcular la dependencia entre dos puntos diferentes en la serie temporal, mediante el uso del parámetro "tau" ( $\tau$ ) que representa el desfase temporal entre ellos. La autocorrelación mide la dependencia en el tiempo de una serie temporal y el método de Información Mutua Univariante permite evaluar esta dependencia a diferentes escalas de tiempo (representadas por diferentes valores de  $\tau$ ).

$$I(X, Y) = - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} P_{X,Y}(x, y) \log \left( \frac{P_{X,Y}(x, y)}{P_X(x)P_Y(y)} \right) \quad (5)$$

Donde  $X(t)$  y  $Y(t)$  representan la misma serie temporal desplazada por un lapso  $\tau$ , es decir,  $Y(t) = X(t + \tau)$ ,  $P_{X,Y}(x, y)$  denota la distribución de probabilidad conjunta de las señales  $X(t)$  y  $Y(y)$ .  $P_X(x)$  y  $P_Y(y)$  por su parte, son las respectivas densidades de probabilidad marginales. De esta manera, se estima la función de auto información  $I(\tau)$  de una señal  $X(t)$ .

## 4.2 Modelos Numéricos

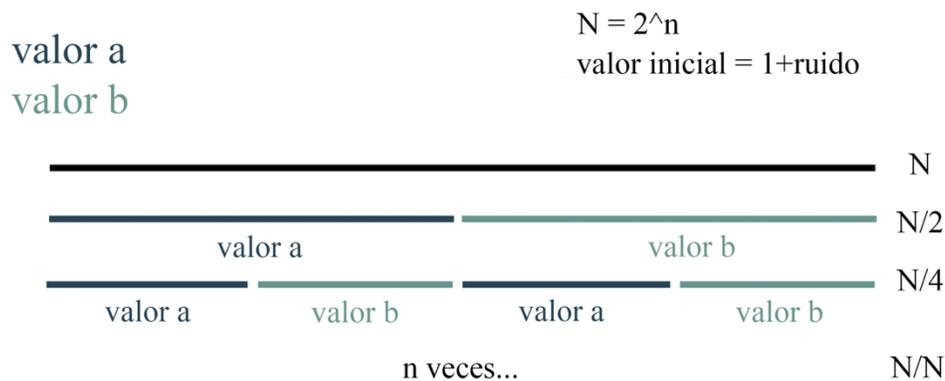
### Series de Ruidos

Como series de tiempo sintéticas y bien controladas, consideramos inicialmente el ruido coloreado, que se genera mediante ruido blanco gaussiano ajustando adecuadamente sus amplitudes de Fourier a un espectro de potencia de  $1/f^\beta$  y luego transformándolo de vuelta al dominio del tiempo. Los exponentes de escalamiento ajustados de DFA se denotan como  $\alpha_{in}$ . Se supone que estas series de tiempo contienen exclusivamente autocorrelaciones lineales, de modo que el exponente derivado de esas señales utilizando magDFA debería indicar una escala no lineal de cero para todos los casos ( $\alpha \approx 0.5$  dentro de la precisión numérica) (Kantelhardt, 2001; C.-K. Peng, 1999). Para cada parámetro  $\alpha_{in}$  generamos 200 series de tiempo de ruido coloreado con  $N = 2^{15}$  puntos de datos cada una.

## Modelo AB

Para trabajar con señales que presentaran escalamiento no lineal, se desarrolló una versión modificada del modelo binomial (Feder, 1988) donde las series temporales  $S(t)$  de longitud  $2^n$  se generan de forma iterativa. Esta versión permite generar ensambles de series de tiempo con las mismas propiedades no lineales pero expresadas con distinta intensidad. Asimismo, permite verificar la robustez ante ruido de los estimadores aplicados a estas series.

En un primer paso, todos los valores de  $S(t)$  se establecen como números aleatorios distribuidos uniformemente dentro de un pequeño intervalo alrededor de 1 con una desviación estándar de 0.1. Seguido, se eligen dos constantes positivas  $a < b$  tales que  $a + b \leq 1$ . A continuación, la primera mitad de  $S(t)$  se multiplica por  $a$  y la segunda mitad por  $b$ . Posteriormente, cada uno de los dos segmentos se divide de nuevo en mitades, multiplicando las primeras mitades por  $a$  y las segundas mitades por  $b$ . Este procedimiento se repite hasta obtener segmentos de longitud 1, lo que significa que para una señal de  $N = 2^n$  puntos se necesita realizar  $N$  iteraciones. A continuación, se muestra la Figura 3 que ilustra este procedimiento.



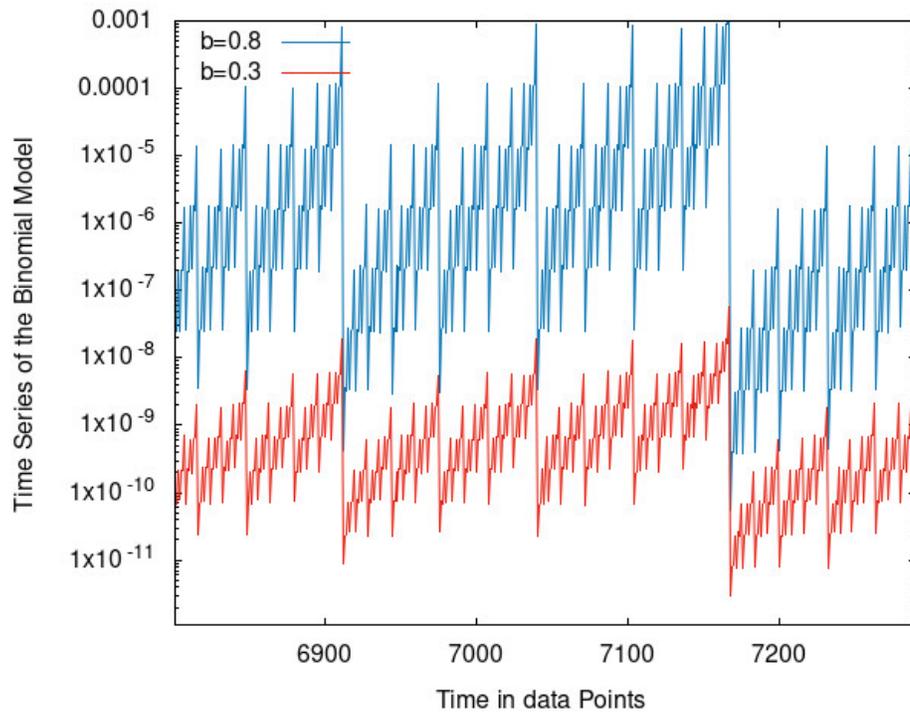
**Figura 9.** Esquema explicativo del procedimiento del modelo binomial AB para generar conjuntos de series con características no lineales con ruido controlado.

Esta versión del modelo binomial permite la generación de ensambles de series de tiempo estadísticamente equivalentes (mismos valores para  $a$  y  $b$ ), lo cual es importante para el tratamiento estadístico de resultados numéricos y conveniente para la aplicación de pruebas de significancia. Además, se puede verificar la influencia del ruido intrínseco en los resultados numéricos (la

robustez del estimador en cuestión) variando la anchura de la distribución uniforme de los números aleatorios establecidos en el primer paso.

Cabe destacar que, en el caso de  $a = b$ , este modelo binomial aleatorio genera ruido, mientras que para un valor fijo de  $a$ , la misma estructura de autocorrelación no lineal se induce para cualquier valor de  $b > a$ . Solamente la magnitud con la que se expresa esta estructura aumenta con la distancia creciente entre  $a$  y  $b$ . A medida que  $b$  aumenta, tanto el valor medio a lo largo de la señal como la desviación estándar aumentan, pero la característica binomial se mantiene por la partición peculiar de la serie de tiempo. En el otro límite, para  $a \approx b$ , la señal es difícil de distinguir del ruido. De esta manera, se puede verificar la sensibilidad y la robustez ante el ruido dentro del mismo marco, aunque en el presente trabajo nos enfocamos esencialmente en el estudio de la sensibilidad. Para cada ajuste de parámetros (valor de  $b$ ) se generaron 50 series de tiempo de longitud  $N = 2^{13}$  puntos de datos.

En la Figura 10 se muestra un segmento de dos series de tiempo obtenidas a partir del modelo binomial modificado para diferentes valores de  $b$ . Se observa que en ambos casos la estructura temporal de las señales es idéntica. Sin embargo, a medida que el valor de  $b$  es mayor con respecto al valor de  $a$ , tanto el valor medio como la desviación estándar de la serie temporal aumentan. Por lo tanto, ambas señales contienen las mismas autocorrelaciones lineales y no lineales, y comparten el mismo escalamiento no lineal a larga escala, pero estas características se hacen más evidentes para diferencias mayores entre  $a$  y  $b$ . De esta forma, al variar  $b$ , se puede evaluar la sensibilidad de un método para la detección de características no lineales univariantes impresas en la serie temporal.



**Figura 10.** Gráfica de dos series de tiempo generadas con el modelo AB. Ambas con el valor  $a = 0.1$ , la línea azul con el valor  $b = 0.8$  y la roja con  $b = 0.3$ .

### 4.3 Propuesta metodológica. Un simple proceso de preprocesamiento.

Para el análisis no lineal de series de tiempo univariantes, existen notables dificultades. Las medidas univariantes diseñadas para detectar características no lineales también pueden ser sensibles a las autocorrelaciones lineales, lo que resulta en estimaciones numéricas que suelen ser una mezcla de ambas. Por lo tanto, en primera instancia, no está claro si los resultados numéricos se deben a la dinámica determinista no lineal o a un mecanismo lineal más trivial. En principio, la comparación cuantitativa de las series originales con series de datos sustitutos que representen adecuadamente la hipótesis nula debería ser suficiente para separar los componentes lineales y no lineales. Sin embargo, dado que los datos sustitutos IAAFT dan lugar a características no lineales (Räth, Gliozzi, Papadakis, & Brinkmann, 2012; Martínez-Guerrero, 2022), estos no representan adecuadamente la hipótesis nula. El magDFA y la versión univariante de la información mutua, así como otras medidas no lineales, están claramente afectadas por tales deficiencias.

Las características no lineales pueden ser codificadas de dos maneras en el espacio de Fourier. En primer lugar, a través de un posible acoplamiento entre las fases y las amplitudes de Fourier. Dicha relación se puede cuantificar mediante el método de MRS. En segundo lugar, pueden estar codificadas en la secuencia de fases de Fourier.

Para extraer dicha información mediante técnicas que actúan en el dominio temporal, se propone aquí eliminar las autocorrelaciones lineales en lugar de generar datos sustitutos con las deficiencias mencionadas anteriormente. De esta manera, los resultados numéricos derivados de medidas no lineales univariantes son exclusivamente provocados por características no lineales, evitando cualquier mezcla. Para ello, se establecen todas las amplitudes de Fourier (con una magnitud considerablemente grande) iguales a 1 y se conservan intactos los ángulos de fase.

Posteriormente, se realiza una transformación inversa al dominio temporal para obtener una señal que contenga exclusivamente autocorrelaciones no lineales. Las señales con amplitudes de Fourier normalizadas se denominarán señales A1 en adelante.

## 4.4 Descripción de datos empíricos

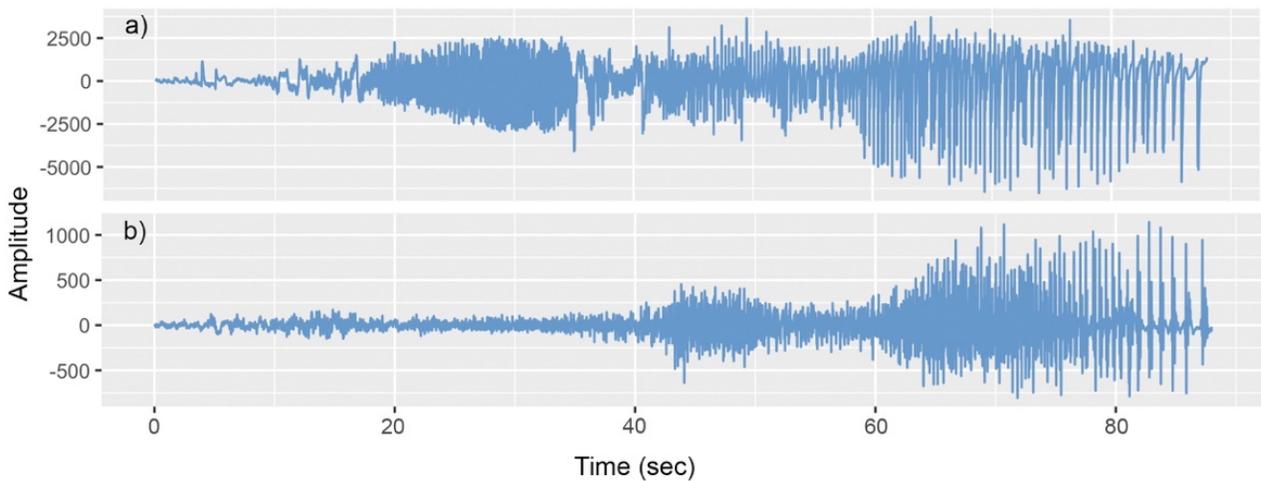
### Epilepsia

Consideramos dos registros de Estereo-electroencefalografía (SEEG) de una mujer diestra de 36 años diagnosticada con Epilepsia del Lóbulo Temporal Mesial, causada por esclerosis del hipocampo. Los registros SEEG se realizaron en el Instituto Neurológico de Colombia, utilizando 2 electrodos intracerebrales con 8 contactos de 2 mm de longitud y un diámetro de 0.8 mm cada uno. Los electrodos se insertaron desde la zona occipital hasta ambos hipocampos.

Los registros de EEG extracraneal se realizaron simultáneamente utilizando el sistema modificado Internacional 10-20 con el lóbulo de la oreja izquierda como electrodo de referencia. La impedancia se mantuvo por debajo de 5 k $\Omega$  durante toda la medición. La zona de inicio de las crisis (SOZ) de las dos crisis analizadas en este trabajo se encuentra dentro del hipocampo izquierdo y las zonas de propagación (P1, P2) corresponden a los electrodos intracerebrales en los cuerpos de ambos hipocampos. Los electrodos extracraneales utilizados aquí corresponden a la zona temporal, dos de ellos en el hemisferio izquierdo (T1 y T3), y el tercero en el hemisferio derecho (T4).

La duración de ambas crisis fue de aproximadamente 1 minuto. Las etapas pre y post crisis tuvieron una duración de 5 minutos cada una. Los datos se filtraron en banda pasante entre 0.5 y 25 Hz utilizando un filtro Butterworth de cuarto orden, utilizado en dirección hacia adelante y hacia atrás para evitar desplazamientos artificiales de fase. Para el análisis numérico, se tomaron 120 ventanas aleatorias con distribución uniforme para cada etapa (pre, durante y post crisis). Cada ventana contó con una duración de 7 segundos cada una.

En la Figura 11 mostramos dos registros de EEG del periodo ictal de la Crisis 1, registrados por un electrodo implantado justo dentro de la zona de inicio de la crisis y el electrodo extracraneal T1.



**Figura 11.** Señales de EEG correspondientes al momento exacto del ataque epiléptico. Estas señales pertenecen al registro “Crisis 1” (Seizure 1). En a) se presenta la señal obtenida por uno de los canales intracraneales localizados en la zona focal del ataque (SOZ). En b) se muestra la señal obtenida por un electrodo T1 extracraneal ubicado cerca de la región focal del ataque.

Se observa que la amplitud del registro intracraneal aumenta rápidamente después del inicio de la crisis. A continuación, la actividad se caracteriza por oscilaciones rápidas de gran amplitud que se ralentizan al acercarse al final de la crisis. El electrodo extracraneal muestra cualitativamente el mismo comportamiento, aunque el aumento de la amplitud se retrasa ligeramente y ocurre de forma algo más lenta. La finalización del comportamiento patológico se produce de forma sincrónica.

## Sueño

Estos datos se tomaron de los registros de EEG del sueño de 10 sujetos sanos clínicamente diestros realizados en el Laboratorio del Sueño de la Facultad de Psicología de la Universidad Nacional Autónoma de México. Cada sujeto durmió dos noches en el laboratorio, la primera para adaptarse a los procedimientos de registro y la segunda para el registro de EEG. Se obtuvo la aprobación del Comité de Ética de la Facultad de Medicina de la Universidad Nacional Autónoma de México, y se siguieron los estándares éticos de la Declaración de Helsinki. Se registró una polisomnografía (PSG) estándar y un EEG de cuero cabelludo estándar utilizando A1 como electrodo de referencia. Los filtros se establecieron en 0.1 y 70 Hz para EEG, 10 y 70 Hz para EMG, y 0.3 y 70 Hz para EOG. Todos los datos de PSG nocturnos se digitalizaron y almacenaron con una frecuencia de muestreo de 1024 Hz y se les aplicó un *downsampling* a 128 Hz. Se puede encontrar una descripción detallada de los datos de sueño en (Olguín-Rodríguez, y otros, 2018).

Para el presente estudio se utilizaron únicamente los registros de 3 sujetos y sólo se consideraron 3 canales centrales (C3, C4 y Cz).

Se recopilaron entre 64 y 79 ventanas de 30 segundos cada una para la fase 4, entre 48 y 74 ventanas para la fase REM y entre 73 y 74 ventanas para la fase 2.

## Caminata

Esta base de datos está disponible en el repositorio titulado *Gait in Neurodegenerative Disease Database* en Physionet (Goldberger, 2000) <sup>7</sup>.

En este estudio se analizó la actividad motora de un grupo de pacientes con enfermedad de Parkinson y enfermedad de Huntington en comparación con un grupo control. Los registros consisten en intervalos de las zancadas de 15 pacientes con Parkinson, 20 con Huntington y 16 individuos del grupo control. La media de edad de los sujetos en el grupo control fue de 39 años (con un rango de 20 a 74 años), en el grupo de pacientes con enfermedad de Huntington fue de 47 años (con un rango de 29 a 71 años) y en el grupo de pacientes con enfermedad de Parkinson fue de 67 años (con un rango de 44 a 80 años).

Se instruyó brevemente a los sujetos para caminar a su ritmo normal a lo largo de un pasillo de 77 m durante 5 minutos. Los participantes usaron plantillas sensibles a la fuerza en sus zapatos para medir el ritmo y el tiempo del ciclo de la marcha. Se afianzó un dispositivo de registro (5.5 x 3 x 2.9 cm; 0,1 kg) al tobillo de los participantes y se utilizó la información recopilada para determinar el tiempo de zancada o duración del ciclo de la marcha (tiempo desde el contacto inicial de un pie hasta el contacto posterior del mismo pie) para cada zancada.

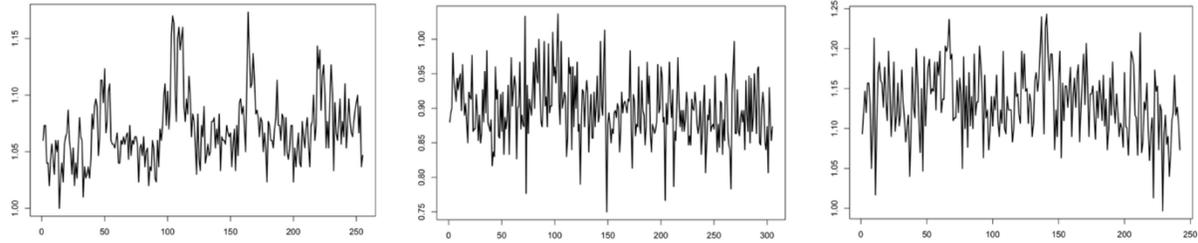
Para construir las series de tiempo de zancadas, se excluyeron los primeros 20 segundos de los registros para minimizar los efectos del inicio de las caminatas. Además, se aplicó un filtro de mediana para eliminar los puntos de datos que se encontraban a 3 desviaciones estándar por encima o por debajo del valor medio. Estos valores atípicos se debieron en gran parte a los giros al final del pasillo.

Para el análisis realizado en este trabajo se tomaron las series de zancadas únicamente del pie derecho.

---

<sup>7</sup> <https://physionet.org/content/gaitnidd/1.0.0/>

Control 1 Intervalo de zancada Pie derecho    Hungtinton 1 Intervalo de zancada Pie derecho    Parkinson 1 Intervalo de zancada Pie derecho



**Figura 12.** Gráficas de las series de tiempo de intervalos de zancadas. El eje x representa el número de zancadas y el eje y el tiempo de duración del intervalo de la zancada expresado en segundos. Cada gráfica corresponde a la serie de un solo participante. A simple vista son notorias las diferencias cualitativas de la dinámica de la serie de zancadas del Control 1 al compararse con las series de Hungtinton 1 y Parkinson 1.

## Ritmo Cardíaco

La base de datos se encuentra disponible en Physionet (Goldberger, 2000) en el repositorio titulado Heart Rate Oscillations during Meditation<sup>8</sup>.

Los ocho meditadores de Chi, 5 mujeres y 3 hombres (rango de edad de 26 a 35, media de 29 años), usaron un grabador Holter durante aproximadamente 10 horas mientras realizaban sus actividades diarias habituales. Aproximadamente 5 horas después de iniciar la grabación, cada uno de ellos realizó una hora de meditación. Se marcaron los tiempos de inicio y finalización de las sesiones de meditación.

Durante las sesiones, los meditadores de Chi se sentaron en silencio y escucharon la guía grabada del maestro. Se les indicó que respiraran espontáneamente mientras visualizaban la apertura y cierre de un loto perfecto en el estómago. La sesión de meditación duró alrededor de una hora.

Las cintas Holter fueron escaneadas y anotadas utilizando un escáner Holter Modelo 8000T de Marquette Electronics, y las anotaciones fueron verificadas manualmente. Los archivos de anotaciones resultantes fueron transferidos a una estación de trabajo Sparc para su análisis adicional. Se eliminó una pequeña fracción (menos del 1%) de la serie temporal de intervalos RR instantáneos de la frecuencia cardíaca para cada grabación que se identificó como valores atípicos. Las series temporales de frecuencia cardíaca instantánea se derivaron tomando el inverso de cada intervalo entre latidos sucesivos.

---

<sup>8</sup> <https://physionet.org/content/meditation/1.0.0/>

## 5. ANÁLISIS Y RESULTADOS

### 5.1 Datos Sintéticos

#### Relación entre fases y amplitudes de Fourier

Con la finalidad de investigar sobre las posibles relaciones entre las fases y las amplitudes de Fourier en series univariantes se aplicó el análisis P-MRS a las series resultantes del Modelo AB (antes descritos en la sección 4.2) pues dicho modelo permite controlar la intensidad de las estructuras no lineales a través de un solo parámetro. Se compararon las distribuciones correspondientes de los coeficientes de Fourier con datos que representan adecuadamente la hipótesis nula de la falta de correlaciones genuinas entre las amplitudes y las fases de Fourier. Estos conjuntos de datos se generaron mediante una mezcla aleatoria de las fases, es decir,  $\Phi(f) \rightarrow \Phi(\pi(f))$ , donde  $\pi(f)$  denota una permutación aleatoria de las frecuencias de Fourier.

Es importante tener en cuenta que si los ángulos de fase  $\Phi(f)$  no se distribuyen uniformemente dentro del rango de 0 a  $2\pi$ , la mezcla aleatoria de los ángulos de fase también puede llevar a la acumulación de coeficientes complejos en ciertas direcciones preferidas en el plano complejo. La aparición accidental de estas direcciones preferidas, después de la mezcla aleatoria de las fases de Fourier, genera correlaciones espurias entre las amplitudes y fases de Fourier. Estas correlaciones son generadas exclusivamente por las distribuciones marginales de  $A(f)$  y  $\Phi(f)$ , y no por alguna relación funcional genuina entre estas cantidades.

Para generar sustitutos adecuados, es necesario conservar las distribuciones marginales de las amplitudes y fases de Fourier, manteniendo así la cantidad de relaciones aleatorias. Sin embargo, cualquier correlación genuina entre estas cantidades debe ser destruida mediante la mezcla aleatoria.

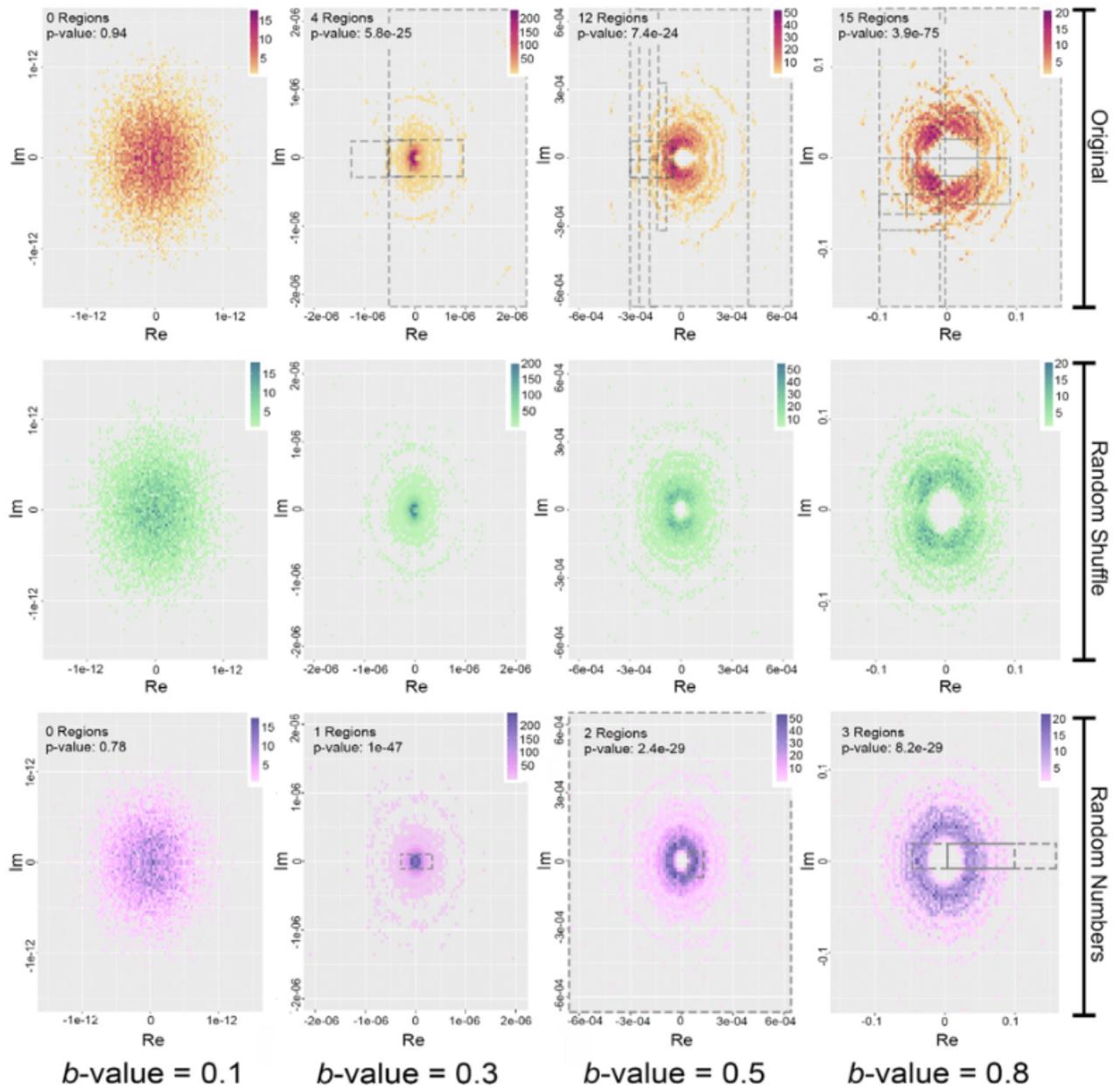
Cabe resaltar que el P-MRS no solo proporciona un valor  $p$  (es decir, la probabilidad de que dos muestras provienen de la misma distribución), sino que también marca las regiones donde se han detectado diferencias significativas. Para ello, se utilizan las señales derivadas del modelo

binomial modificado propuesto anteriormente. De esta manera, es posible simular situaciones con y sin autocorrelaciones no lineales dentro del mismo marco, variando el valor de  $b$  mientras el valor  $a$  se mantiene fijo en  $a = 0.1$ .

La distribución de los coeficientes de Fourier en el plano complejo se muestra la Figura 12. En la fila superior, en colores anaranjados/rojos se presentan los resultados de la serie original. Los resultados correspondientes para señales con fases de Fourier mezcladas de manera aleatoria, se muestran en colores verdes/azules en la segunda fila. La tercera fila muestra la distribución correspondiente cuando las fases de Fourier son reemplazadas por números aleatorios independientes y uniformemente distribuidos dentro de  $[0, 2\pi]$  (colores brillantes y oscuros de violeta). Las áreas donde se encuentran diferencias significativas con respecto a los sustitutos que resultan al mezclar aleatoriamente las fases de Fourier, se indican con rectángulos punteados.

En primer lugar, se debe destacar que la amplitud media de los coeficientes complejos depende crucialmente de la diferencia entre los parámetros  $a$  y  $b$ . Cuanto mayor sea el valor de  $b$ , mayor será la magnitud de los coeficientes de Fourier y, por lo tanto, mayor será la potencia absoluta de las señales. Una muestra de esto es la gran diferencia de las escalas para cada valor de  $b$ , es decir, para cada columna de la Figura 13. En segundo lugar, se nota una simetría pronunciada con respecto a una reflexión en el eje X. Esto se debe a que la parte real de la transformada de Fourier de una señal con valor real es una función par, mientras que la parte imaginaria correspondiente es una función impar.

En este contexto, es crucial destacar que los coeficientes de Fourier muestran una clara preferencia por ciertos ángulos de fase. En las columnas donde  $a < b$ , se puede apreciar una mayor densidad de puntos que se agrupan cerca de los  $100^\circ$  (y, por lo tanto, alrededor de los  $260^\circ$ ). Sin embargo, esto no ocurre en la primera columna, donde  $a = b$ , lo cual es de esperar, pues en ese caso la señal está compuesta por ruido no correlacionado y, por lo tanto, no se deben observar relaciones no lineales expresadas, por ejemplo, a través de las relaciones de fase-amplitud de Fourier.

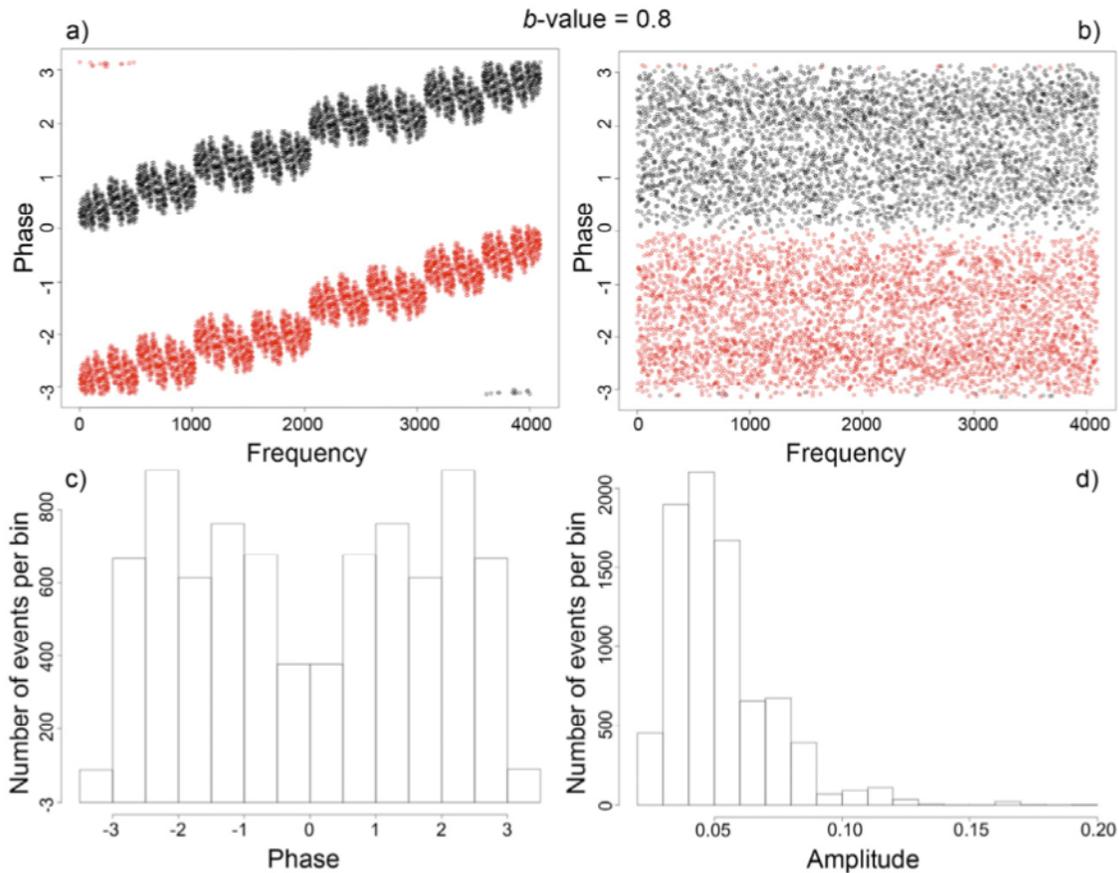


**Figura 13.** Distribución de los coeficientes complejos de Fourier derivados del modelo AB (fila superior, colores amarillo/rojo), y de los coeficientes derivados de los correspondientes sustitutos, es decir, señales con fases aleatorias mezcladas (fila media, colores verde claro y oscuro), donde se fijó  $a$  en 0.1 y  $b = 0.1, 0.3, 0.5$  y 0.8. Finalmente, en la tercera fila mostramos la distribución de los coeficientes de Fourier donde las fases se reemplazan por números aleatorios distribuidos uniformemente dentro de  $[0, 2\pi]$  (colores violeta claro y oscuro). Las pruebas de significancia se realizaron para comparar la primera fila (amarillo/rojo) y la tercera fila (violeta) versus la segunda fila (verde). Las regiones donde se encuentran diferencias significativas de la primera y tercera fila con los sustitutos de mezcla aleatoria (fila verde) se marcan con rectángulos punteados. El número de regiones significativas, así como los valores  $p$  para la comparación, se proporcionan para cada valor de  $b$  como una etiqueta insertada.

Sin embargo, al examinar la distribución de los coeficientes de Fourier de las señales para  $b = 0.8$  con fases de Fourier mezcladas al azar, también se pueden observar algunas preferencias direccionales en el plano complejo, que se hacen evidentes por la presencia de manchas azules. La razón detrás de este comportamiento se debe a la marcada distribución no uniforme de  $\Phi(f)$ , la cual causa correlaciones aleatorias entre las amplitudes y las fases de Fourier (ver Figura 14).

El panel 14a muestra el espectro de fase de los datos originales, mientras que el panel 14b muestra el mismo para las  $\Phi(f)$  barajadas aleatoriamente para el caso  $b = 0.8$ . Aunque el espectro aleatorizado parece bastante irregular, aún se notan variaciones sistemáticas de las densidades de fase, visibles por rayas horizontales de densidades más bajas de puntos alrededor de  $\Phi \approx 0$  y  $\pm\pi$ . El histograma mostrado en el panel c proporciona una imagen más cuantitativa de esta situación. El bin justo encima de  $\Phi = 2$  y debajo de  $\Phi = -2$  es más de 8 veces mayor que aquellos alrededor de  $\Phi = \pm\pi$  y al menos 2 veces mayor que los bins alrededor de cero. Además, la distribución de probabilidad de las amplitudes de Fourier también se desvía conspicuamente de una distribución uniforme y muestra un pico pronunciado alrededor de 0.05.

Como ya se mencionó anteriormente, esto conduce a direcciones preferidas de la distribución de los coeficientes de Fourier en el plano complejo, aunque la secuencia de las fases de Fourier se haya barajado al azar. Si, como en el presente caso, una gran fracción de  $\Phi(f)$  y muchos  $A(f)$  tienen valores similares, existe una gran probabilidad de asignación aleatoria de esas parejas, lo que a su vez conduce a una distribución circular no uniforme de los coeficientes de Fourier en el plano complejo. Por otro lado, si se considera ruido puro (caso  $a = b = 0.1$  en la Figura 13),  $\Phi(f)$  se distribuyen uniformemente y, por lo tanto, la distribución de los coeficientes de Fourier en el plano complejo no muestra ninguna preferencia direccional. Por lo tanto, la cantidad de correlaciones aleatorias de fase-amplitud en el espacio de Fourier se determina por las distribuciones marginales de ambas cantidades.



**Figura 14.** El panel **a** muestra el espectro de las fases de Fourier para frecuencias positivas (negro) y negativas (rojo). El panel **b** muestra las fases de Fourier aleatoriamente mezcladas. Esto se realiza por separado para las frecuencias positivas y negativas para conservar las distribuciones marginales. Las distribuciones marginales de las fases de Fourier y de las amplitudes de Fourier se muestran en los paneles **c** y **d**, respectivamente.

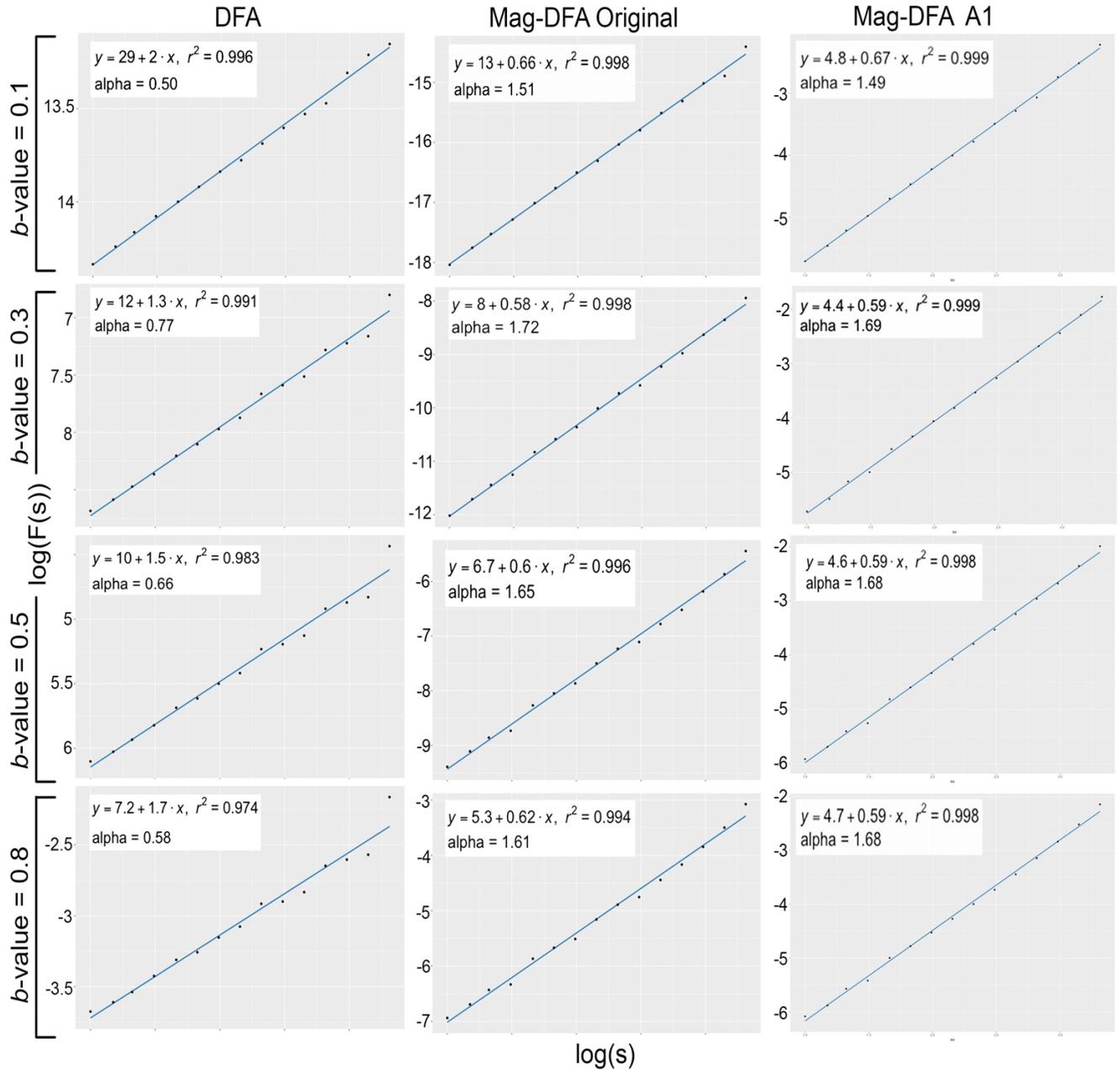
Al examinar los valores  $p$  para la comparación de las distribuciones obtenidas del modelo de datos con sus barajados al azar correspondientes, confirmamos cuantitativamente las conclusiones antes mencionadas. Para el caso de ruido, los valores  $p$  están lejos de ser significativos, como debería ser, mientras que para los casos  $a < b$ , estos valores son extremadamente pequeños, lo que indica diferencias altamente significativas entre ambas distribuciones. Además, el tamaño del efecto, medido en términos del número de regiones con diferencias significativas, aumenta con el aumento de los valores de  $b$ , como se debería esperar debido a que a medida que aumenta  $b$ , son más prominentes las estructuras no lineales en el modelo binomial AB.

## Calidad del Ajuste $r^2$

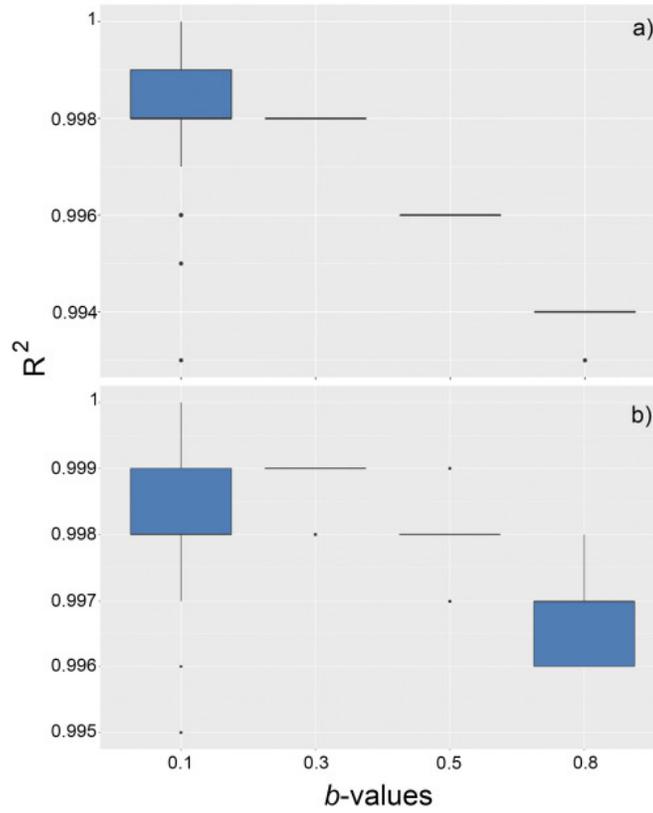
El DFA y el MagDFA requieren la detección confiable de una ley de escala, que generalmente se logra mediante el ajuste correcto de una línea recta a la función de fluctuación  $F(s)$  en un amplio rango de escalas de longitud  $s$ . Ajustar una función a conjuntos de datos empíricos siempre es un tema delicado, especialmente si, como en el caso presente, se tienen que hacer cientos de ajustes.

Para demostrar la efectividad de nuestros procedimientos de ajuste, presentamos algunos ejemplos de aplicación del método DFA y magDFA. Para visualizar los resultados, incluimos una figura en formato de gráfica de caja que resume los valores  $r^2$  obtenidos para los ajustes realizados tanto al ruido como a los datos del modelo AB (ver Figuras 15 y 16). Además, también mostramos los valores  $r^2$  correspondientes obtenidos a partir de los ajustes a las señales A1. Es importante destacar que en todos los casos los valores  $r^2$  son excepcionalmente altos, superando 0.9, lo que indica un ajuste de gran calidad.

Una vez que se verificó la calidad del ajuste de las pendientes, se continuó con el análisis de las series temporales de ruido de colores.



**Figura 15.** Ejemplos del ajuste  $r^2$  para series generadas con el Modelo AB. En la primera fila se muestran los resultados del DFA, magDFA y magDFA-A1 para una sola serie con  $a = b = 0.1$ , la cual corresponde con las características de ruido blanco. De arriba hacia abajo, las siguientes filas muestran los resultados para series con valor de  $a = 0.1$  y  $b = 0.3, 0.5$  y  $0.8$  respectivamente.



**Figura 16.** Distribuciones de los valores de ajuste  $r^2$  para las funciones de fluctuaciones de las series de tiempo derivadas del modelo AB, para todos los valores  $b$  considerados en el presente estudio. En el panel **a** se muestran las distribuciones para el magDFA de las series originales y en el panel **b** se observan las distribuciones del magDFA de las series A1.

## Autocorrelación no lineal en series de ruido coloreado

Los espectros de potencia se variaron desde ruido blanco  $\beta = 0$  hasta ruido Browniano  $\beta = 2$ , lo que a través de la relación  $\beta = 2\alpha - 1$  (Hennig, y otros, 2011), coincide con exponentes de escala  $\alpha_{in} = 0.5$  y  $\alpha_{in} = 1.5$ , respectivamente. Los resultados para DFA y magDFA se muestran en la Figura 16.

Para DFA se observan los resultados esperados para los datos de ruido originales, así como para sus datos sustitutos. Las estimaciones numéricas  $\alpha$  coinciden con  $\alpha_{in}$  dentro de la precisión estadística.

También los resultados de magDFA para los datos sustitutos FT así como para la serie temporal original coinciden con la expectativa teórica. Si las fases de Fourier son números aleatorios independientes y distribuidos uniformemente dentro de  $[0, 2\pi]$ , las correspondientes series temporales no contienen características no lineales. Por lo tanto, las estimaciones de  $\alpha$  deberían estar cerca del valor de ruido 0.5 para cualquier  $\alpha_{in}$ .

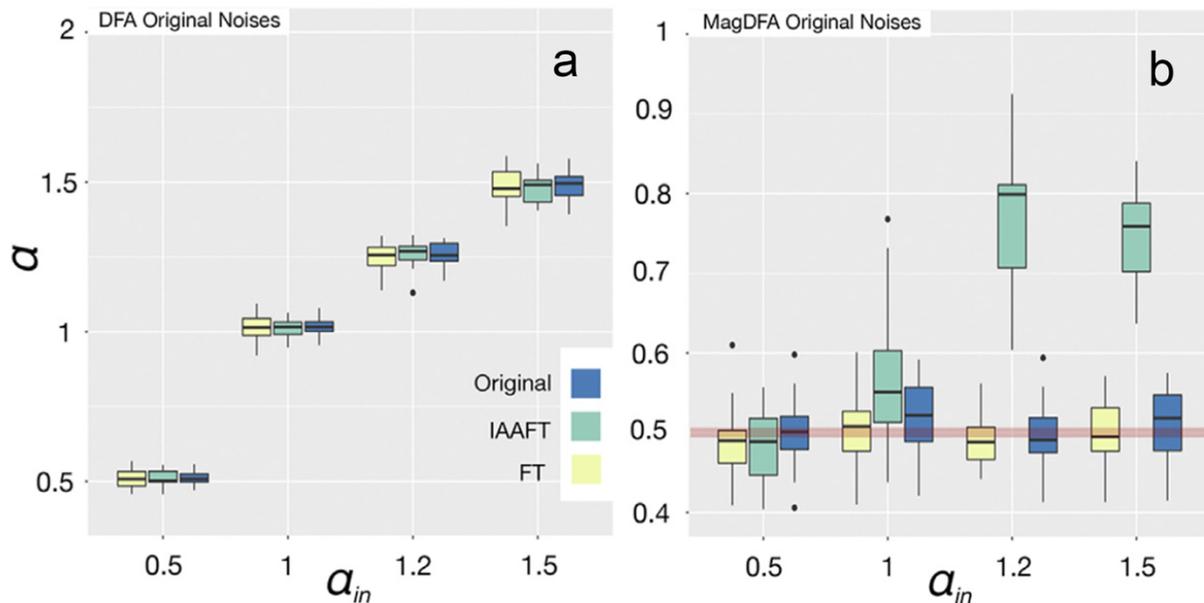
Sin embargo, para los datos sustitutos IAAFT, se observa la inducción artificial de características no lineales como se informó anteriormente en (Räth, Gliozzi, Papadakis, & Brinkmann, 2012). Para estos datos sustitutos, el espectro de potencia (es decir, la distribución de las amplitudes de Fourier) así como la distribución de amplitud en el dominio del tiempo se ajustan a los de los datos originales de manera iterativa, mientras que las fases de Fourier se reemplazan por números aleatorios independientes distribuidos uniformemente entre cero y  $2\pi$ .

En principio, las señales con fases aleatorizadas son señales de ruido que no presentan ninguna característica no lineal. Sin embargo, en (Räth, Gliozzi, Papadakis, & Brinkmann, 2012) se demostró explícitamente que se inducen autocorrelaciones no lineales durante los pasos de iteración en los que se ajustan las amplitudes en el dominio temporal. Por lo tanto, no es sorprendente que las desviaciones del valor de ruido de las estimaciones derivadas de los datos sustitutos IAAFT sean mayores.

Pero aquí observamos además que el efecto depende cuantitativamente de los espectros de potencia de las señales. Con un aumento de  $\alpha_{in}$ , es decir, con un aumento de las autocorrelaciones lineales, también aumentan las estimaciones MagDFA. Para datos reales, cuya composición espectral puede cambiar drásticamente con el tiempo, la magnitud de este efecto es impredecible.

En general, los datos sustitutos IAAFT no reflejan adecuadamente la hipótesis nula de ausencia de estructuras no lineales en el espacio fase, un hecho que excluye dichos datos sustitutos de cualquier análisis univariante de series temporales no lineales.

De acuerdo con estos resultados, parece que las estimaciones de magDFA reflejan exclusivamente el escalado no lineal y no se ven afectadas por las propiedades lineales y que, al parecer, los datos sustitutos FT pueden servir como una representación adecuada de la hipótesis nula de señales puramente lineales en este caso. Incluso para el caso no estacionario altamente autocorrelacionado del ruido browniano se obtiene un escalado no lineal de cero, si se sigue rigurosamente la receta descrita en (Ashkenazy Y. H.-F., 2003).



**Figura 17.** El panel **a** muestra el resultado DFA para diferentes valores de  $\alpha_{in} = (\beta - 1)/2$  desde ruido blanco ( $\alpha_{in} = 0.5$ ) hasta ruido browniano ( $\alpha_{in} = 1.5$ ). El panel **b** muestra los exponentes de escala derivados para el magDFA obtenidos para las mismas señales de ruido coloreado.

## Autocorrelación no lineal en series del Modelo AB

En el panel b de la Figura 18 se muestran los resultados de magDFA obtenidos para el modelo AB para  $a = 0.1$  y diferentes valores de  $b$ . Para  $a = b = 0.1$  obtenemos el exponente de ruido  $\alpha = 0.5$  para los datos originales y para sus datos sustitutos. Por otro lado, para  $b > a$ , los valores de  $\alpha$  están significativamente por encima de 0.5, pero no solo las estimaciones obtenidas para los datos originales, sino que ambos tipos de datos sustitutos se desvían considerablemente del valor esperado de ruido. Cabe destacar que los datos sustitutos IAAFT se desvían aún más de 0.5 que las estimaciones obtenidas directamente a partir de los datos del modelo.

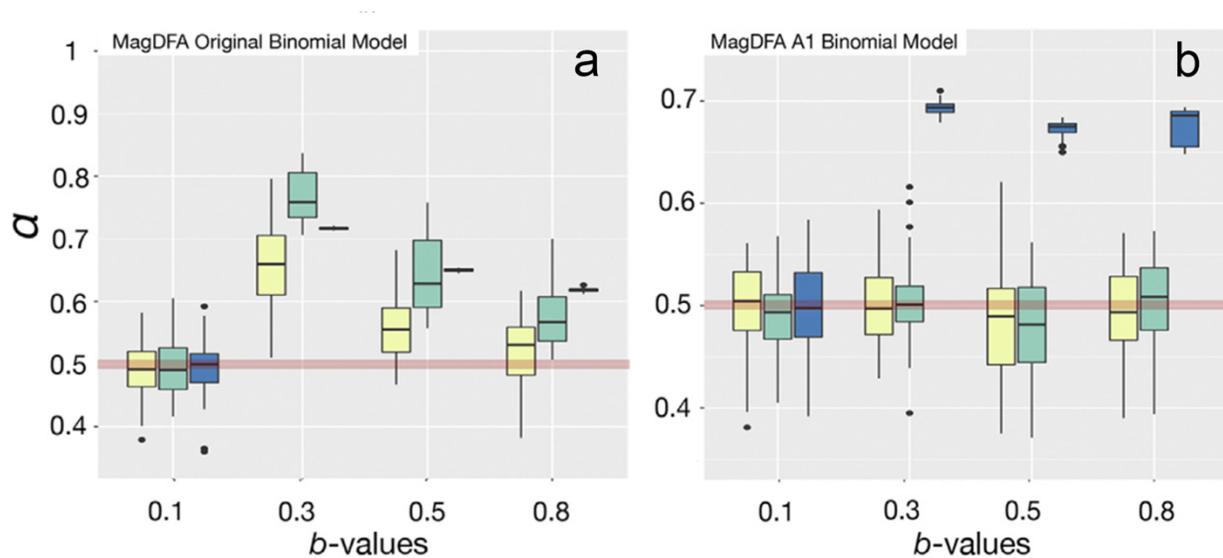
A pesar de que las desviaciones del valor de ruido para el IAAFT eran esperadas, el resultado es inquietante en vista de los hallazgos reportados en (Räth, Gliozzi, Papadakis, & Brinkmann, 2012), donde se demostró que el ajuste de amplitud en el dominio temporal induce características no lineales. Este paso se evita para los datos sustitutos FT, por lo que, si los FT no tienen propiedades no lineales, las claras desviaciones de 0.5 en el panel c sólo pueden ser causadas por características lineales, es decir, el espectro de potencia o la peculiar distribución de amplitud en el dominio temporal de estos datos del modelo. Aunque la generación de autocorrelaciones no lineales del IAAFT es indeseada, la observación de los sustitutos FT es aún más preocupante (y desconocida hasta ahora), ya que cuestiona la utilidad de los datos sustitutos basados en Fourier para cualquier análisis no lineal univariante en el dominio temporal.

En la Figura 18b se puede observar que todas las estimaciones disminuyen a medida que aumentan los valores de  $b$ . Este resultado es sorprendente pues la estructura no lineal no cambia al variar  $b$ , sino que se hace más pronunciada en valores mayores de  $b$ . Por lo tanto, se esperaba un escalado exponencial casi similar para diferentes valores de  $b > a$ . Este comportamiento podría deberse a cambios en la densidad espectral de potencia de las señales o a la distribución de amplitud en el dominio temporal, lo que es preocupante porque indica una falta de datos sustitutos adecuados y marca una debilidad previamente no observada en la técnica magDFA.

En particular, esta observación implica que la conclusión obtenida para el ruido coloreado, en la que el magDFA separa la escala no lineal de la lineal, fue demasiado optimista. También el

magDFA puede verse afectado por el espectro de potencia de las señales, o por ciertas características de la distribución de amplitud en el dominio temporal. En consecuencia, concluimos que las estimaciones numéricas no son fiables, pues parecen no reflejar únicamente las características no lineales de la serie temporal.

En este punto tiene sentido poner a prueba la propuesta de preprocesamiento que se fundamenta en la información codificada en el espacio de Fourier. Para eliminar la influencia de la densidad espectral de potencia (PSD) y de los cambios dinámicos de la PSD, consideramos ahora señales A1, es decir, señales en las que todas las amplitudes de Fourier se igualan a uno. De este modo, la longitud de autocorrelación lineal de la serie temporal resultante es precisamente cero. Al mismo tiempo, las características no lineales codificadas en la secuencia de fases de Fourier permanecen intactas porque se conserva la información de fase. Los resultados se muestran en el panel 18b.



**Figura 18.** El panel **a** ilustra los resultados para magDFA obtenidos para diferentes valores  $b$  del modelo binomial AB y el panel **b**, los resultados para los mismos datos, pero con las amplitudes de Fourier igualadas a 1 (magDFA-A1). En todos los casos también se proporcionan gráficos de caja de los sustitutos correspondientes (FT e IAAFT).

Observamos que ahora las estimaciones de FT e IAAFT se distribuyen de la manera esperada, es decir, con valores cercanos al valor del ruido  $\alpha = 0.5$ , mientras que los resultados obtenidos para los datos originales se desplazan claramente hacia valores mayores al aumentar  $b$ . Al eliminar las autocorrelaciones lineales, la sensibilidad del método mejora drásticamente, se evita la

incertidumbre de una posible influencia del espectro de potencia y, aparentemente, también se evita la generación de características no lineales en ambos tipos de datos sustitutos. Además, también se elimina (casi por completo) la tendencia de disminución de las estimaciones de  $\alpha$  con valores crecientes de  $b$ . Atribuimos la ligera tendencia hacia estimaciones más bajas de  $\alpha$  a la distribución distintiva de amplitud en el dominio del tiempo. Especialmente para valores de  $b$  mayores, esta distribución está lejos de ser gaussiana. Cuando las amplitudes de Fourier se normalizan, las estimaciones de los datos del modelo para  $b > a$  permanecen casi constantes.

**Tabla de significancias de la Figura 18**

Prueba	Condición 1	Condición 2	p-value	Significancia	Valor b
magDFA	FT	IAAFT	0.999	ns	b 0.1
magDFA	FT	Original	0.618	ns	b 0.1
magDFA	IAAFT	Original	1	ns	b 0.1
magDFA	FT	IAAFT	2.67E-13	****	b 0.3
magDFA	FT	Original	1.76E-09	****	b 0.3
magDFA	IAAFT	Original	7.44E-16	****	b 0.3
magDFA	FT	IAAFT	2.74E-10	****	b 0.5
magDFA	FT	Original	4.71E-15	****	b 0.5
magDFA	IAAFT	Original	1	ns	b 0.5
magDFA	FT	IAAFT	1.63E-05	****	b 0.8
magDFA	FT	Original	4.92E-17	****	b 0.8
magDFA	IAAFT	Original	2.21E-05	****	b 0.8
magDFA-A1	FT	IAAFT	1	ns	b 0.1
magDFA-A1	FT	Original	1	ns	b 0.1
magDFA-A1	IAAFT	Original	1	ns	b 0.1
magDFA-A1	FT	IAAFT	1	ns	b 0.3
magDFA-A1	FT	Original	2.09E-17	****	b 0.3
magDFA-A1	IAAFT	Original	2.09E-17	****	b 0.3
magDFA-A1	FT	IAAFT	1	ns	b 0.5
magDFA-A1	FT	Original	2.07E-17	****	b 0.5
magDFA-A1	IAAFT	Original	2.07E-17	****	b 0.5
magDFA-A1	FT	IAAFT	0.909	ns	b 0.8
magDFA-A1	FT	Original	2.08E-17	****	b 0.8
magDFA-A1	IAAFT	Original	2.08E-17	****	b 0.8

**Tabla 1.** Resultados de la prueba U de Mann-Whitney al comparar las distribuciones de los valores  $\alpha$  de las pruebas magDFA y magDFA-A1 aplicadas a las series de tiempo del modelo AB (ver Figura 18). Para el magDFA se puede ver que las series de tiempo del modelo AB con un valor  $b = 0.5$  presentan un valor  $p > 0.05$  cuando se compara la distribución de sus valores a con las de las series sustitutas IAAFT. Esto es debido a la generación de autocorrelaciones no lineales indeseadas durante el proceso de iteración para crear estos datos sustitutos. Por su parte, el preprocesamiento A1 (en amarillo) muestra la significancia esperada entre las series del modelo AB y los datos sustitutos, tanto FT como IAAFT. Los *p-values* están ajustados mediante un ajuste de Bonferroni.

## 5.2 Datos Empíricos

### Epilepsia

Los resultados para el periodo preictal, ictal y postictal<sup>9</sup> se resumen en la Figura 18, tanto para el análisis de las grabaciones originales como para sus correspondientes datos sustitutos. Aquí se muestran los resultados del magDFA para las señales EEG originales, así como para las señales A1 correspondientes.

Al calcular el magDFA original se observó una notable producción de escalado no lineal artificial para los datos sustitutos IAAFT, en particular durante el periodo postictal para ambos eventos epilépticos. También para los datos sustitutos FT observamos que las estimaciones medias de  $\alpha$  están sistemáticamente por encima del valor esperado de ruido de 0.5. Este desplazamiento hacia valores más altos es significativo con  $p < 0.01$  en casi todos los casos mostrados en la Figura 18. Por lo tanto, los datos sustitutos FT no solo se ven afectados negativamente al analizar datos sintéticos derivados de un modelo numérico peculiar, sino también para datos del mundo real como, por ejemplo, electroencefalogramas de sujetos humanos.

En particular, durante el periodo de convulsión del primer ataque (panel *Seizure 1*), encontramos estimaciones comparables o incluso más altas para los datos sustitutos FT que para los IAAFT y los datos originales. Para uno de los electrodos ubicados dentro de la zona de origen del ataque (SOZ) y sus vecinos, así como para el electrodo T3, las estimaciones para los datos originales encuentran incluso los valores más bajos de  $\alpha$  cerca de 0.5 durante el ataque.

Además, encontramos diferencias más notables entre los datos originales y los datos sustitutos FT para todos los electrodos durante el período postictal para ambas convulsiones, así como para algunas grabaciones intracraneales durante el período preictal de la convulsión 2 (panel *Seizure 2*). Sin embargo, en la mayoría de los casos magDFA Original mostrados en la Figura 18, las

---

<sup>9</sup> El periodo preictal es un intervalo de tiempo antes de la crisis convulsiva, para este estudio se tomó un intervalo de 5 minutos. El periodo ictal corresponde al momento exacto de la crisis que aquí dura aproximadamente 1 minuto. El periodo postictal sucede después de la crisis convulsiva y también se tomó una ventana de 5 minutos para estos análisis.

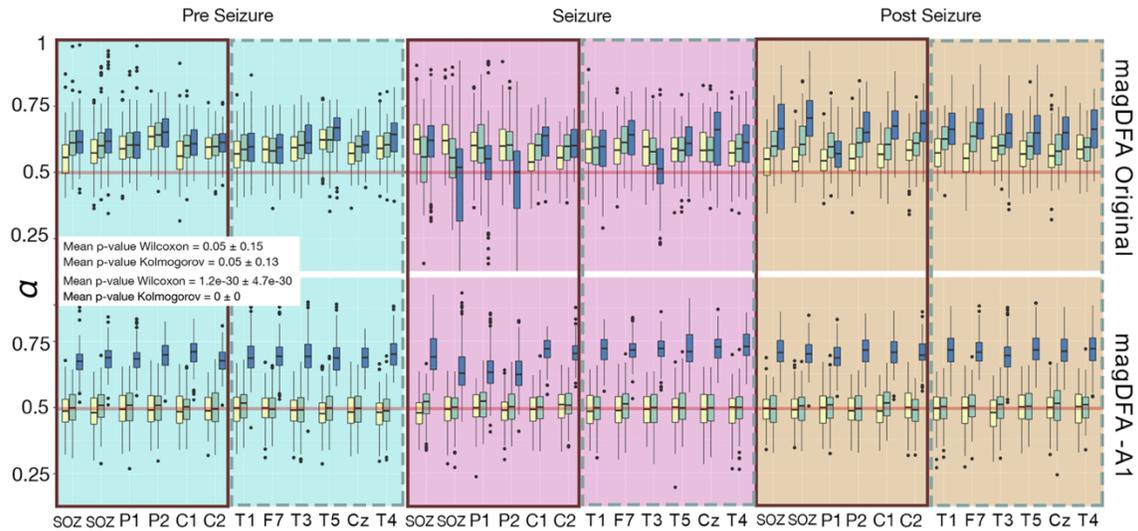
diferencias entre los datos originales y los datos sustitutos no son significativas a un nivel de significancia del 1%, lo que llevaría al rechazo de la hipótesis de escalado no lineal.

Por lo tanto, incluso para datos reales, encontramos no solo la generación artificial de escalado no lineal para ambos tipos de datos sustitutos, sino también una notable influencia del espectro de potencia en las estimaciones de  $\text{magDFA}$ . Además, la no estacionariedad intrínseca de las señales puede causar un sesgo en la estimación numérica (Höll, Kiyono, & Kantz., 2019). Las características lineales y no lineales pueden actuar en dirección opuesta y, ocasionalmente, cancelarse entre sí, de modo que las estimaciones numéricas para los EEG originales están cerca del nivel de ruido, mientras que el análisis de los datos sustitutos FT conduce a valores significativamente más altos.

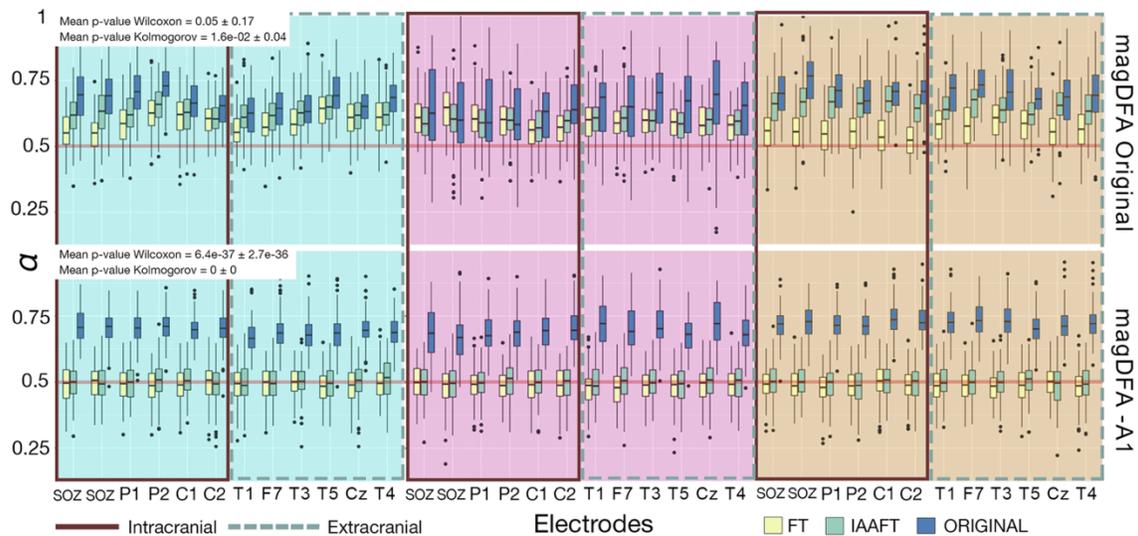
Esta imagen cambia drásticamente si establecemos todas las amplitudes de Fourier en uno de antemano (filas  $\text{magDFA-A1}$  de la Figura 19). Ahora observamos que todas las estimaciones para los datos sustitutos coinciden con el valor de ruido esperado dentro de la precisión estadística. Además, observamos que las estimaciones para las señales A1 derivadas de las grabaciones EEG son significativamente diferentes del ruido para todos los electrodos durante los tres períodos. El tamaño del efecto difiere entre los electrodos y puede alterarse notablemente durante la transición pre a postictal, pero sin duda detectamos y cuantificamos efectos no lineales con un valor  $p$  muy por debajo del nivel de significancia del 1%. Es notable que esto sea cierto incluso para las señales extracraneales altamente contaminadas por ruido.

En este caso, el objetivo principal fue presentar una demostración inicial del rendimiento del preprocesamiento A1 en el análisis de señales reales y que provienen de un sistema complejo como lo son las señales de EEG intra y extracraneales de eventos epilépticos. Por ello se utilizaron los registros de un solo paciente. Aunque los resultados obtenidos no permiten realizar generalizaciones clínicas, el hallazgo que demuestra la capacidad del preprocesamiento para identificar características no lineales es de gran relevancia y abre múltiples posibilidades para analizar datos de esta naturaleza.

## Seizure 1



## Seizure 2



**Figura 19.** Se muestran los resultados de los exponentes de escala del magDFA para dos grabaciones simultáneas intra y extracraneales de un paciente epiléptico. En el panel superior se muestran los resultados de la crisis 1 (*Seizure 1*) y en el inferior los de la crisis 2 (*Seizure 2*). Se muestran los resultados obtenidos para los datos originales (fila superior de cada panel indicada con la etiqueta magDFA Original) y los correspondientes a los datos A1, en los que las amplitudes de Fourier se han igualado previamente a 1 (magDFA-A1). Los recuadros en color cian, rosa y naranja muestran los resultados obtenidos para el periodo preictal, ictal y postictal, respectivamente. La línea roja horizontal continua indica el nivel de ruido. Para los registros intracraneales SOZ denota los electrodos situados dentro de la zona de inicio de la convulsión, P1 y P2 indican electrodos en la zona de propagación y C1 y C2 corresponden a electrodos situados en el hemisferio contrario a la zona focal. Los electrodos extracraneales corresponden a T1, F7, T3, T5 (electrodos ubicados en el hemisferio de la zona focal) y a Cz y T4 (electrodos ubicados en el hemisferio contrario a la zona focal) del sistema internacional 10-20. Los valores p para las pruebas de Wilcoxon y Kolmogorov-Smirnov corresponden a la comparación de los valores  $\alpha$  de las series originales versus los valores  $\alpha$  de las series de datos sustitutos FT.

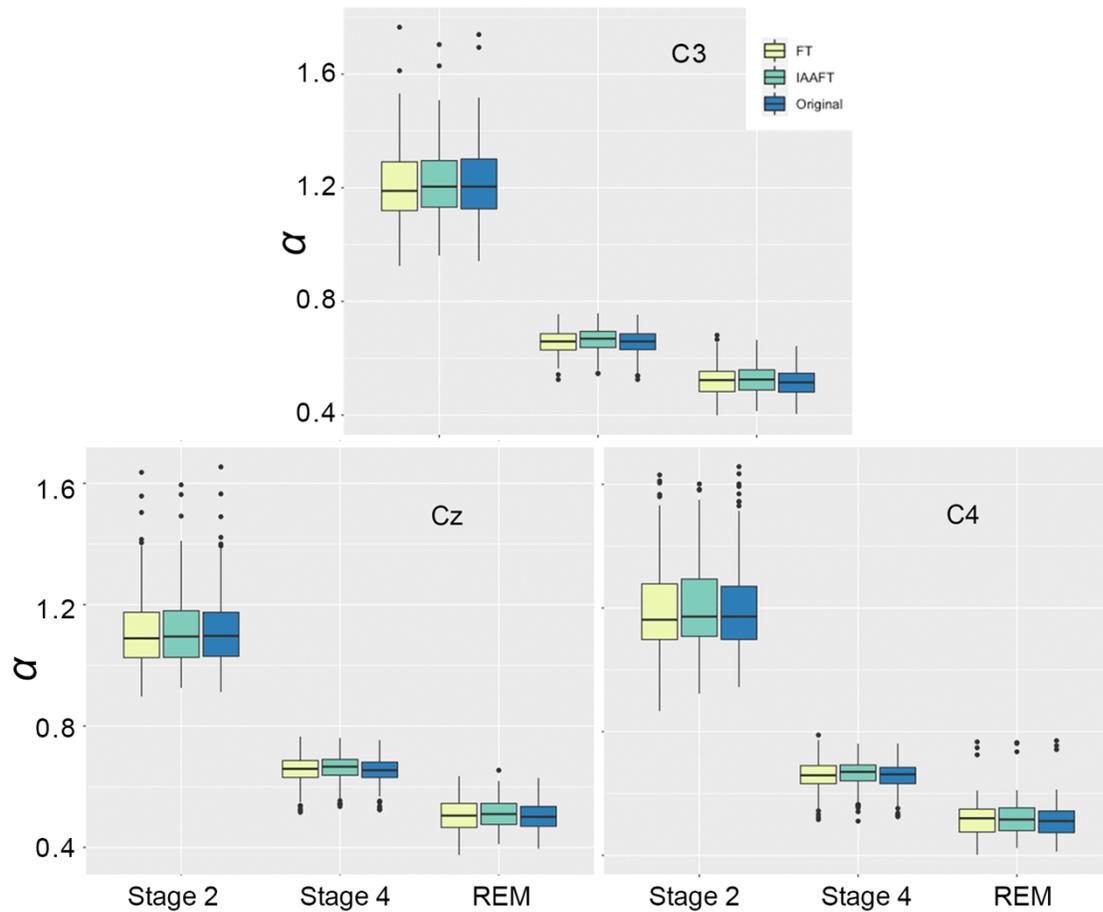
## Sueño

En este estudio, se analizaron los registros de EEG de tres sujetos durante el sueño de una noche con el objetivo de realizar una demostración inicial con datos de EEG en personas sanas en distintos estados fisiológicos.

Se eligieron tres etapas del sueño para el análisis, las cuales tienen una dinámica muy diferente y han sido objeto de estudio desde hace décadas. La etapa 2 se caracteriza por contener husos de sueño y complejos K, que son patrones particulares en los registros de EEG durante el sueño. Por su parte, la etapa 4 se distingue por presentar actividad de ondas lentas, mientras que la etapa de movimiento rápido de los ojos (REM) se caracteriza por tener actividad rápida, similar a la que se produce durante la vigilia (Rechtschaffen & Kales, 1968).

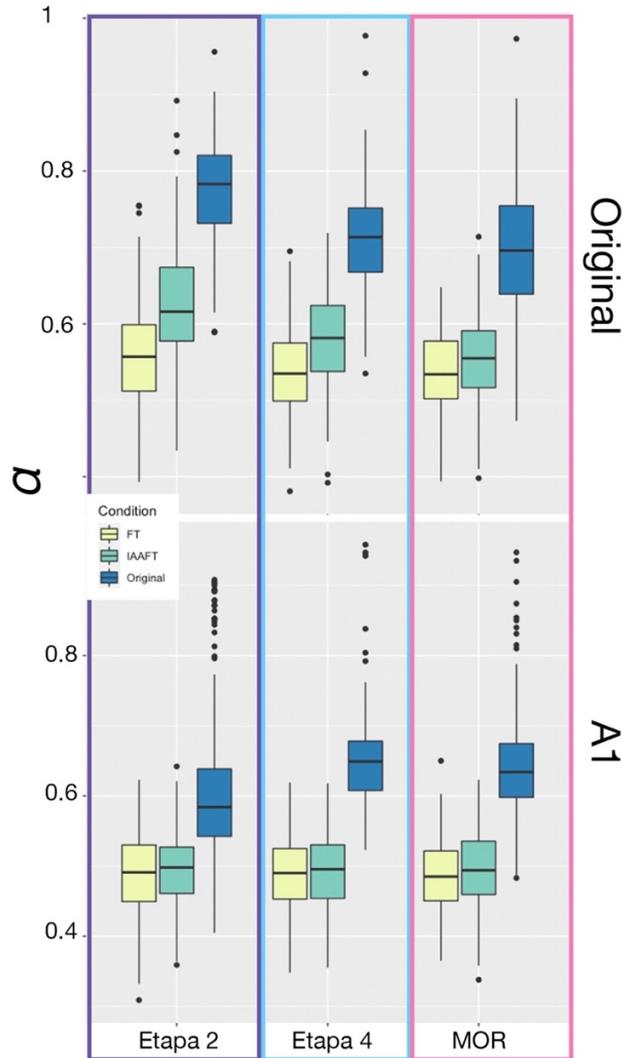
Se procedió inicialmente a llevar a cabo el análisis DFA, debido a que existe evidencia científica que indica que este método es capaz de distinguir las diferentes etapas de sueño en registros encefalográficos. Los resultados obtenidos de este análisis se ilustran en la Figura 20. En ella se puede observar que los valores de  $\alpha$  son similares para los electrodos C3 y C4 en la etapa 2 del sueño, mientras que el electrodo Cz presenta valores ligeramente inferiores para dicha etapa. La etapa 4 presenta valores cercanos a 0.7, mientras que REM tiene valores alrededor de 0.5. Es importante señalar que estos resultados difieren de los reportados en la literatura (Farag et al., 2013; Lee et al., 2004; Leistedt et al., 2007). Sin embargo, se debe tener en cuenta que la evidencia publicada y la presentada en este estudio difiere en cuanto a la selección de electrodos y/o el modelo de clasificación de las etapas de sueño. Por lo tanto, se considera necesario realizar un estudio más exhaustivo que incluya una mayor cantidad de electrodos y que permita la evaluación canal por canal de los resultados obtenidos.

A pesar de las discrepancias observadas en los resultados, tanto los informados en la literatura como los obtenidos en el presente análisis permiten una clara identificación de las tres etapas del sueño. En este caso, los tres electrodos presentan una tendencia similar, en la cual la etapa 2 del sueño muestra los valores más elevados de  $\alpha$ , seguida de la etapa 4 y, por último, REM.



**Figura 20.** Distribuciones de los valores  $\alpha$  obtenidos al aplicar el DFA a las series de tiempo de sueño y a sus respectivos datos sustitutos. *Stage 2* corresponde a los resultados de la etapa 2, *Stage 4* corresponde a la etapa 4 y REM corresponde a la etapa de movimientos rápidos oculares.

El análisis de autocorrelación no lineal ha proporcionado resultados inéditos hasta la fecha. Al examinar los datos de las diferentes etapas del sueño de tres sujetos utilizando los tres electrodos, la Figura 21 muestra que las distribuciones de las series de magnitudes originales (representadas por cajas azul oscuro) difieren significativamente de las distribuciones de los datos sustitutos FT e IAAFT, tanto para magDFA Original como para magDFA-A1. De acuerdo con las pruebas U de Mann-Whitney y Kolmogorov-Smirnov, estos resultados tienen un valor de  $p < 2.2e-16$ .



**Figura 21.** Distribuciones de los valores  $\alpha$  para las series de tiempo del electrodo Cz de los 3 sujetos en las distintas etapas de sueño. Los 3 paneles superiores corresponden a los resultados del magDFA de las series originales y los 3 paneles inferiores corresponden a los resultados del magDFA de las series con las amplitudes de Fourier igualadas a 1 (magDFA-A1).

En ambos enfoques metodológicos, la prueba U de Mann-Whitney demostró una significancia al comparar la etapa 2 con las otras etapas del sueño (ver Tabla 1). No obstante, el valor de p fue superior a 0.05 al comparar la etapa 4 con la etapa REM. Por otro lado, el Kolmogorov-Smirnov mostró que la etapa 2 se diferenciaba significativamente de las otras etapas, y presentó un valor de p igual a 0.01 al comparar la etapa 4 con MOR para el magDFA Original y un valor de p igual a 0.04 al hacer la misma comparación en magDFA-A1. Este descubrimiento se observó

solamente para el electrodo Cz, ya que en los electrodos C3 y C4 resultó imposible distinguir entre la etapa 4 y REM, sin importar el tipo de análisis que se aplicara.

ETAPAS Y CONDICIÓN (magDFA Original o A1)	P-value
Etapa 2 vs. Etapa 4 (Original)	< 2.2e-16
Etapa 2 vs. MOR (Original)	< 2.2e-16
Etapa 2 vs. Etapa 4 (A1)	2.68e-14
Etapa 2 vs. MOR (A1)	5.52e-10

**Tabla 2.** Valores de significancia (*p-value*) de la prueba U de Mann-Whitney al comparar los valores  $\alpha$  resultantes del análisis de magDFA original y magDFA-A1 de la etapa 2 *versus* la etapa 4 y la etapa MOR.

Aunque en principio los resultados del magDFA-A1 parecen reflejar menor sensibilidad a las propiedades no lineales que los del magDFA original, se observó que en la etapa 2, el magDFA mostró valores cercanos a 0.75, los cuales fueron significativamente más grandes que los de la etapa 4 y REM. Por otro lado, en magDFA-A1, los resultados de la etapa 2 fueron significativamente menores que los de la etapa 4 y MOR. Al comparar los resultados de la etapa 2 del magDFA con los de la etapa 2 del magDFA-A1, se obtuvo una diferencia significativa de  $p < 2.2e-16$ .

Esta discrepancia entre los dos resultados altera considerablemente la forma en que podemos interpretar la relación entre el escalado no lineal de estas señales. En realidad, el magDFA original parece ser engañoso, pues muestra exactamente lo contrario que el magDFA-A1 debido a la influencia de las propiedades lineales.

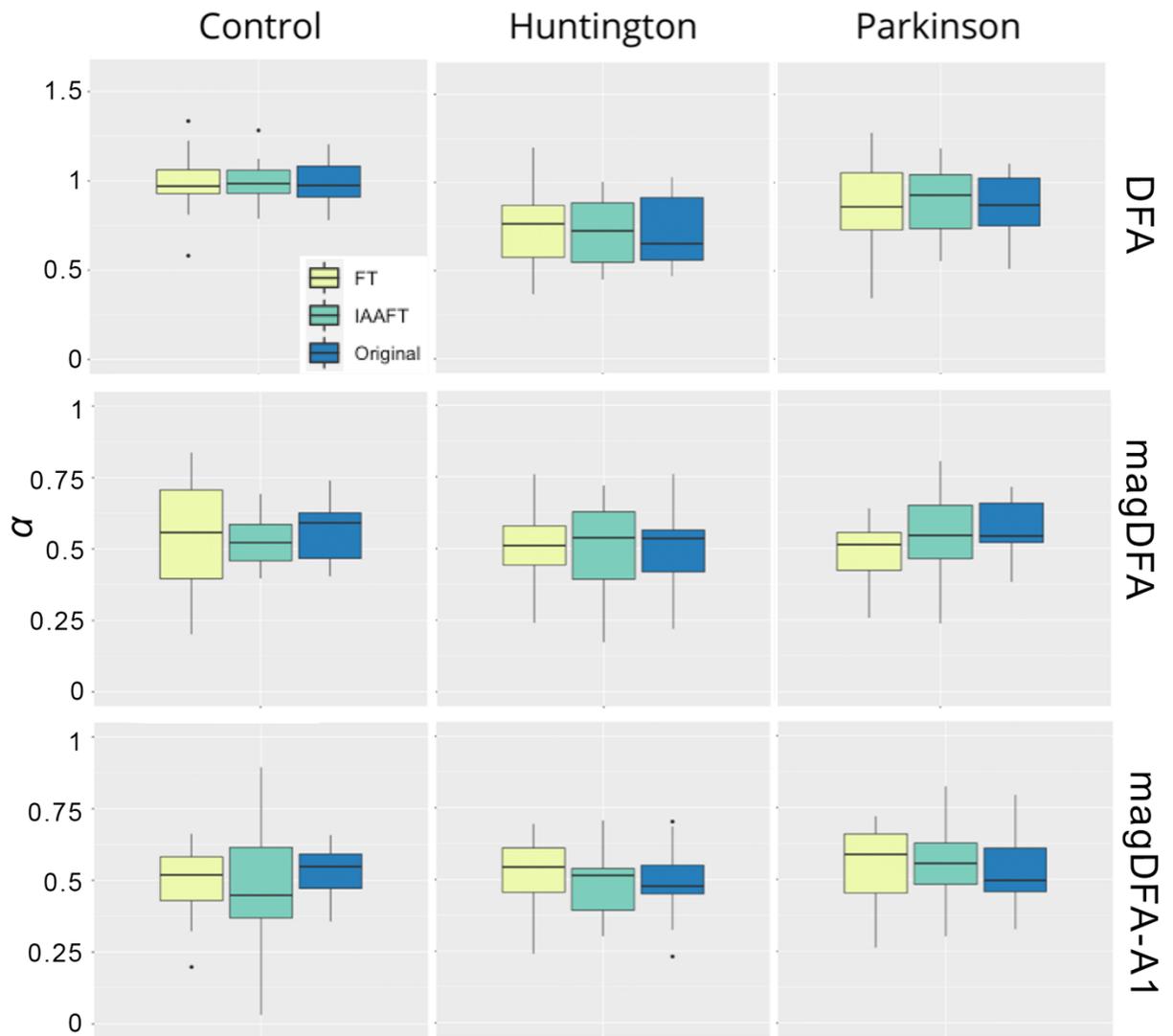
## Caminatas

En el presente estudio, se aplicaron los análisis de autocorrelación no lineal magDFA y magDFA-A1 a series de intervalos de zancadas de personas sanas (Control), personas con la enfermedad de Huntington y personas con Parkinson. El objetivo era utilizar series de tiempo de un sistema muy distinto a los estudiados con anterioridad y evaluar si estas series de tiempo presentan características no lineales que sean relevantes para el uso clínico. En un estudio previo (Hausdorff y otros, 2000), se evaluó la autocorrelación lineal a través del *Detrended Fluctuation Analysis* y se logró una distinción exitosa entre las tres condiciones, lo que sugiere que la información lineal puede servir como un biomarcador de enfermedades que afectan la actividad motora de los pacientes.

No obstante, aún se desconocía si estas series de tiempo poseen características no lineales o si la información relevante para el uso clínico radica sólo en las amplitudes de Fourier. En este contexto, se emplearon los análisis magDFA y magDFA-A1 para profundizar en el análisis de la autocorrelación no lineal a largo plazo de las series de intervalos de zancadas.

En la Figura 22 se muestran los resultados del análisis DFA, que permitió diferenciar las tres condiciones de estudio, obteniendo resultados muy similares a los previamente reportados en el estudio de Hausdorff (2000). Sin embargo, al utilizar el análisis magDFA, se observaron valores de  $\alpha$  cercanos a 0.5, especialmente en los casos de Huntington y Parkinson. El grupo de Control mostró resultados ligeramente más cercanos a 0.6, pero no presentó diferencias significativas respecto a los datos sustitutos.

Este resultado es interesante, pues estas series de tiempo de zancadas presentan una autocorrelación no lineal igual a la del ruido y, por lo tanto, no tienen escalamiento no lineal.



**Figura 22.** Filas de arriba hacia abajo, resultados del DFA (tres paneles superiores), magDFA (tres paneles intermedios) y magDFA-A1 (tres paneles inferiores) de las series de zancadas. Cada columna corresponde a una de las tres condiciones que se analizaron: control (derecha), Huntington (media) y Parkinson (izquierda).

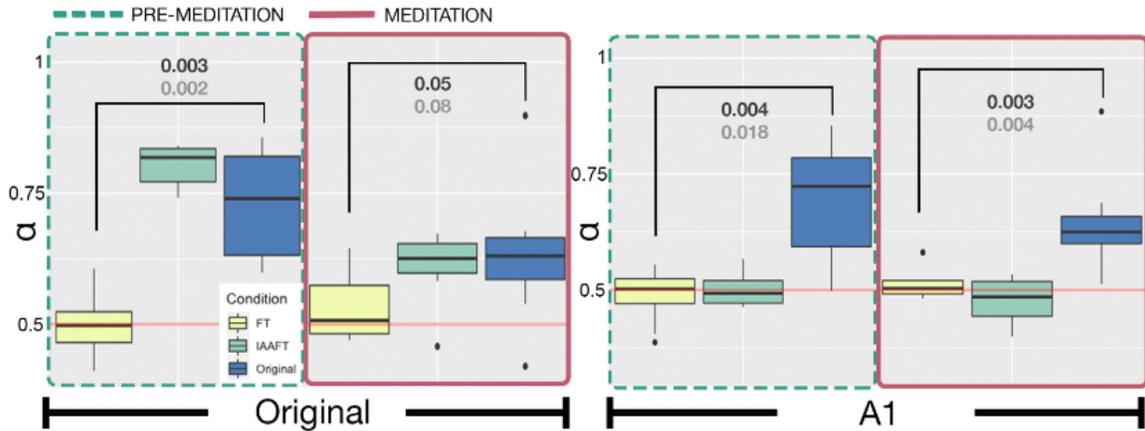
## Ritmo Cardíaco

Para continuar evaluando la eficacia del método magDFA-A1, se llevaron a cabo análisis con datos de frecuencia cardíaca de individuos sanos en dos condiciones diferentes: durante una sesión de meditación y durante sus actividades diarias normales. Estas series fueron seleccionadas debido a que se sabe que la frecuencia cardíaca presenta propiedades fractales y autocorrelaciones de largo alcance en individuos sanos (Ivanov et al., 1999; Peng et al., 1995).

Cabe destacar que mediante la aplicación del método DFA se ha logrado distinguir entre pacientes sanos y pacientes con enfermedades cardíacas. Con estos antecedentes en mente, se consideró apropiado utilizar el método magDFA-A1 para identificar la presencia de autocorrelaciones no lineales a largo plazo y evaluar su sensibilidad en condiciones no patológicas, en las cuales la aplicación de DFA para medir la autocorrelación lineal ya ha demostrado ser eficaz en la distinción entre grupos.

Como se presenta en la Figura 23, los valores de  $\alpha$  obtenidos para los sustitutos FT están distribuidos alrededor del valor de ruido, pero de nuevo se observaron estimaciones artificialmente aumentadas para los sustitutos IAAFT, de manera que sus valores de escalamiento son estadísticamente equivalentes a los obtenidos a partir de los datos originales. Sólo cuando se consideran las señales A1, las diferencias entre los registros empíricos y ambos tipos de sustitutos son altamente significativas. Sin embargo, en el presente caso no somos capaces de distinguir entre los dos estados fisiológicos, ni siquiera al analizar las señales A1. Encontramos valores de  $\alpha$  estadísticamente similares para los datos de la frecuencia cardíaca antes y durante la meditación.

Para demostrar la amplia utilidad del preprocesamiento A1, finalmente se puso a prueba otra medida no lineal en las señales de la frecuencia cardíaca, es decir, la versión univariante de la Información Mutua que también es sensible a los efectos no lineales que actúan en escalas de tiempo cortas (Figura 24).



**Figura 23.** Los resultados obtenidos mediante el método magDFA se muestran en esta figura para los datos de frecuencia cardíaca (secuencias de intervalos entre latidos) de 8 sujetos sanos antes (paneles a y c) y durante la meditación (paneles b y d). Los paneles izquierdos muestran los resultados obtenidos para los datos originales, mientras que los paneles derechos muestran los resultados después de fijar las amplitudes de Fourier en uno. Se presentan diagramas de caja de los resultados empíricos (azul), de los resultados de los datos sustitutos FT (amarillo) y de los datos sustitutos IAAFT (verde). Los valores  $p$  de las pruebas de Kolmogorov y Wilcoxon se muestran en números grises y negros, respectivamente.

La Figura 23a muestra una diferencia sorprendente entre la  $I(\tau)$  para el sujeto 4 antes y durante la meditación, lo que sugiere que distintos mecanismos no lineales están activos durante los diferentes estados fisiológicos. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, ninguno de los dos conjuntos de datos sustitutos basados en Fourier es útil para esta medida. Pueden sufrir de autocorrelaciones no lineales inducidas artificialmente y además, la transformada de Fourier podría verse afectada por distorsiones de la distribución de amplitud en el dominio del tiempo, que entra explícitamente en la ecuación (6). Por lo tanto, no hay una comparación objetiva con una estadística nula adecuada disponible para la aplicación univariada de  $I(\tau)$ , al estimar esta cantidad de la manera tradicional.

Al examinar las densidades espectrales de potencia (PSD) de ambas señales, encontramos diferencias notables entre los dos estados fisiológicos para el mismo sujeto. La PSD durante la meditación disminuye mucho más rápido para las frecuencias lentas y muestra un pico pronunciado de alrededor de  $8.5 \times 10^{-3} 1/s$ . La reducción de los componentes de baja frecuencia provoca una reducción de las autocorrelaciones lineales, mientras que el pico provoca el evidente comportamiento oscilatorio de  $I(\tau)$  durante la meditación. Por lo tanto, de acuerdo con estos resultados, sigue sin estar claro si la diferencia pronunciada entre los valores de  $I(\tau)$  se debe a características lineales o no lineales de los registros.

Con el fin de aclarar esta cuestión, se llevó a cabo un análisis de las señales A1 correspondientes al sujeto 3 y se comparó con los datos obtenidos a partir de la aleatorización de las fases de Fourier de estas. Los resultados se presentan en los paneles **c** y **d** de la Figura 23.

En comparación con los resultados mostrados en el panel **a**, se observó que los valores obtenidos para las series A1 disminuyen al nivel de los datos sustitutos para retrasos de tiempo cortos, lo que indica una cantidad relativamente pequeña de autocorrelaciones no lineales durante ambos estados fisiológicos. No obstante, una simple revisión visual confirma que, incluso con las series A1, la longitud de la autocorrelación (no lineal) está más suprimida durante la meditación.

Para capturar este resultado de manera más cuantitativa, calculamos a continuación el tamaño del efecto en función del retraso temporal:

$$E = \frac{(\bar{I} - \bar{I}_{shuffle})}{(\sigma + \sigma_{shuffle})/2}. \quad (6)$$

El valor **E** proporciona una estimación de la diferencia entre los valores medios de la serie A1 y sus correspondientes datos sustitutos en unidades de la desviación estándar promedio de ambas señales. Dado que en ambos casos las curvas ya caen al nivel de los datos sustitutos a muy corta escala temporal, se requiere una alta resolución temporal para el análisis cuantitativo. Por lo tanto, evaluamos el tamaño del efecto en la escala más corta posible, utilizando una ventana móvil de solo 3 puntos de datos. Luego definimos la longitud de la autocorrelación no lineal como el retraso en el que **E** cae por debajo de un umbral comúnmente utilizado de **E** = 0.5.

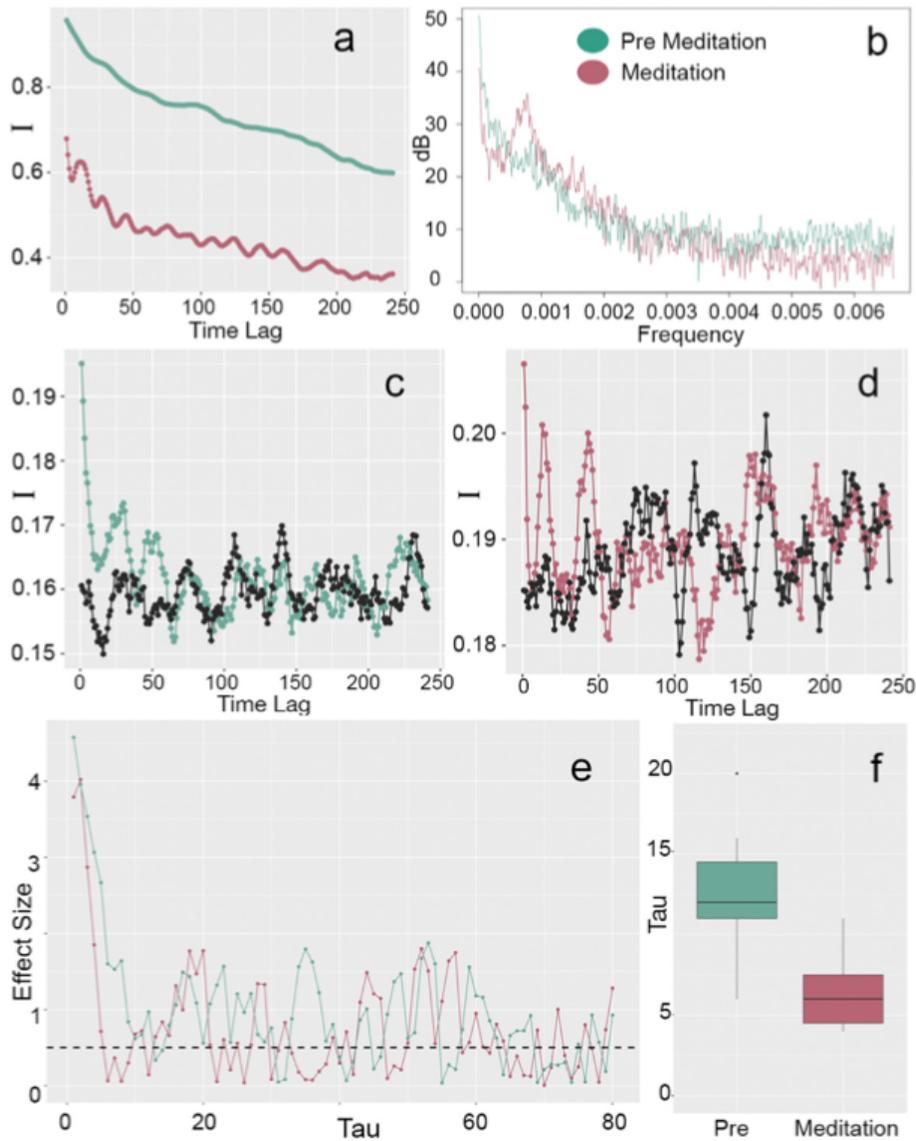
Las curvas correspondientes para el sujeto 3 se muestran en el panel **e** de la Figura 23. De hecho, durante la meditación la curva cae antes por debajo del umbral, lo que indica claramente una longitud de autocorrelación no lineal más pequeña.

Finalmente, el panel **g** resume los resultados de todo el grupo. Observamos que la longitud de autocorrelación no lineal durante la meditación tiende a ser más corta que durante el período previo a la meditación. Una comparación cuantitativa aplicando la prueba no paramétrica de Mann-Whitney-Wilcoxon arroja un valor  $p = 0.04$ , es decir, los resultados son significativos en un nivel del 5%.

En resumen, el análisis de los registros de frecuencia cardíaca muestra claramente que (1) incluso en sistemas no lineales, las características lineales pueden dominar muy fuertemente y pueden eclipsar por completo las características no lineales, (2) que diferentes características no lineales pueden ser capturadas por diferentes medidas no lineales, y (3) la consideración de las señales A1 puede mejorar considerablemente el análisis cuantitativo.

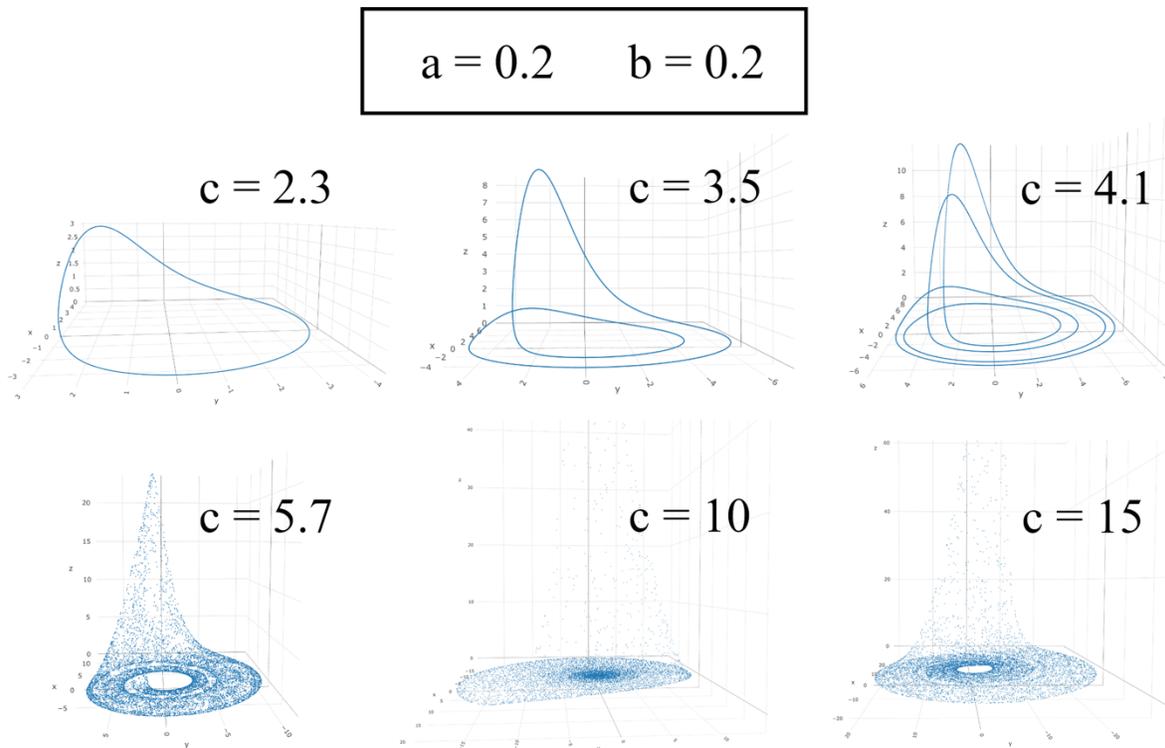
El magDFA cuantifica la autocorrelación no lineal a largo plazo y no es sensible a procesos no lineales que actúan en escalas de tiempo (muy) cortas como en el ejemplo presente. La falta de separación correcta de características lineales y no lineales puede producir una interpretación engañosa de los resultados. Para los datos de la frecuencia cardíaca, solo observamos longitudes de autocorrelación no lineal cortas, que son órdenes de magnitud más cortas que las observadas al mirar las series de tiempo originales sin un procedimiento de preprocesamiento adecuado. Sin embargo, las pequeñas escalas de tiempo en las que los mecanismos no lineales están activos no implican que estos procesos sean irrelevantes. En particular, para sistemas caóticos, pequeños cambios pueden conducir a efectos desproporcionadamente grandes.

Un último ejemplo en el que se demuestra que aún con preprocesamiento A1 el magDFA es incapaz de distinguir características no lineales en escalas muy cortas se observa en la Figura 25. En el panel inferior se muestran los resultados del magDFA-A1 de series de tiempo tomados de sistemas Rössler periódicos (con valor  $c < 4.2$ ) y caóticos ( $c \geq 4.2$ ) (Ibrahim et al., 2018; Prajapati, 2016). Aunque los valores  $\alpha$  aparentemente permiten distinguir ambos grupos, no se observa una relación clara entre el incremento del parámetro  $c$  y los valores  $\alpha$  obtenidos al hacer el magDFA normal y A1. Tal vez al calcular el tamaño del efecto **E** con ayuda de la Información Mutua se logren resultados positivos como sucedió con los datos de frecuencia cardíaca.



**Figura 24.** Resultados obtenidos para los datos de frecuencia cardiaca de 8 sujetos sanos antes y durante la meditación. Los paneles de **a** hasta **e** muestran los resultados del sujeto 3, mientras que el panel **f** es un resumen de todo el grupo. En el panel **a** se muestran los resultados de la función de información mutua univariante, es decir, la función de auto-información como función del retraso temporal  $\tau$ . El panel **b** muestra las correspondientes densidades espectrales de potencia. Las frecuencias se derivan en términos de los intervalos medios de latido. Los paneles **c** y **d** muestran las funciones de auto-información obtenidas para señales con amplitudes de Fourier establecidas en uno previamente, durante el período de pre-meditación y durante la meditación, respectivamente. Para comparación, también se dibujan en color negro los resultados correspondientes obtenidos para los sustitutos (fases de Fourier mezcladas aleatoriamente) de las señales A1. El panel **e** muestra el tamaño del efecto de las funciones de auto-información que se muestran en los paneles **c** y **d**, estimado con una ventana móvil de longitud mínima (3 puntos de datos) para maximizar la resolución temporal. La línea horizontal discontinua marca el umbral de  $E = 0.5$  (Ec. (6)). Finalmente, el panel **f** resume las longitudes de autocorrelación no lineales de todo el grupo a través de diagramas de

caja. Consistentemente en todos los paneles, se representan los resultados de las grabaciones antes de la meditación en color azul, y durante la meditación en color rojo.



<b>c</b>	<b><math>\alpha</math> magDFA</b>	<b><math>\alpha</math> magDFA-A1</b>
2.3	0.512	1.703
3.5	0.691	1.684
4.1	0.382	1.711
5.7	1.456	1.557
10	1.413	1.416
15	1.361	1.366

**Figura 25.** En la parte superior se grafican los atractores de varios sistemas Rössler con distintos valores de  $c$ , mientras que los valores de los parámetros  $a$  y  $b$  fueron fijados a 0.2. Al variar el parámetro  $c$  se obtienen señales con dinámica periódica o caótica y, por lo tanto, con diferentes propiedades no lineales. Los Rössler con valor  $c \geq 4.2$  presentan comportamiento caótico (Ibrahim et al., 2018). La tabla se muestran los resultados del magDFA y del magDFA-A1 sobre series de tiempo tomadas de los sistemas Rössler representados en la parte superior.

## 6. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Al establecer las amplitudes de Fourier en uno, se elimina la influencia de las autocorrelaciones lineales y las series de tiempo resultantes están exclusivamente influenciadas por características no lineales expresadas por las fases de Fourier. Se evita la mezcla de propiedades lineales y no lineales, así como la influencia de los cambios dinámicos en el espectro de potencia en las estimaciones numéricas. En el caso de magDFA, incluso los datos sustitutos IAAFT comúnmente utilizados no muestran una escalabilidad no lineal artificialmente inducida, siempre y cuando se consideren las señales A1. En principio, sin embargo, es suficiente mostrar que los valores  $\alpha$  derivados de los datos empíricos se desvían significativamente del valor de ruido ( $\alpha = 0.5$ ). Por lo tanto, los datos sustitutos ya no son necesarios, ni para una prueba de significancia, ni para estimar el tamaño del efecto. Dado que se logró demostrar adicionalmente que incluso los datos sustitutos FT no son realizaciones confiables de la hipótesis nula de ruido estocástico linealmente correlacionado, este resultado podría tener un gran impacto en cualquier aplicación práctica.

Se demostró el rendimiento preprocesamiento A1 mediante dos medidas no lineales diferentes: el magDFA y la versión univariada de la Información Mutua. Se analizaron datos sintéticos derivados de modelos numéricos y datos del mundo real, es decir, registros de EEG intra y extracraneales de convulsiones epilépticas; registros de EEG de distintas etapas de sueño en sujetos sanos; caminatas de pacientes con Huntington, Parkinson y sus respectivos controles; así como datos de frecuencia cardíaca de sujetos jóvenes sanos antes y durante la meditación.

En las Figuras 17, 18 y 19, mostramos que el método de preprocesamiento propuesto puede mejorar drásticamente la significancia del análisis estadístico, de completamente indistinguible a valores de  $p$  mucho menores al 1%. La aplicación a los datos EEG de un paciente epiléptico muestra claramente esta mejora. Sin embargo, los ejemplos presentados en este estudio sólo sirven como prueba de principios. Se requiere una investigación sistemática con mayores controles y un tamaño de muestra más amplio.

Para el EEG de sueño los resultados también son interesantes. El análisis de la etapa 2 del sueño confirma que las propiedades lineales presentes en las amplitudes de Fourier pueden tener un

impacto significativo en los resultados al intentar analizar las características no lineales. Aunque se requiere de un análisis más exhaustivo, estos resultados preliminares sugieren que la información no lineal de las diferentes fases del sueño podría tener un comportamiento de escalado diferente al de sus propiedades lineales, al menos en la etapa 2.

Por otro lado, en el caso de las caminatas, se encontró sorprendentemente que el análisis de autocorrelación no lineal arroja resultados similares a los que se obtendrían si se analizaran series de ruido. Solo se pueden distinguir los grupos por su clasificación clínica al analizar sus propiedades lineales. Para este caso, queda mucho por investigar, pues sólo se utilizaron las series de zancadas registradas en el pie derecho. Aún es necesario revisar las series de balanceo y apoyo, las cuales también están disponibles en la base de datos.

Mientras que la magDFA no logró detectar una diferencia significativa entre las señales de frecuencia cardíaca de los sujetos antes y durante la meditación, esto pudo lograrse mediante información mutua. Aparentemente, en este sistema los mecanismos no lineales actúan sólo en escalas de tiempo cortas de unos pocos segundos (Figura 24). En particular, el último ejemplo de las señales de frecuencia cardíaca mostró que una respuesta clara de una medida no lineal no implica necesariamente la presencia de características no lineales pronunciadas (paneles **a** y **b** de la Figura 24). Este ejemplo ilustra claramente que el análisis de datos empíricos que provienen de sistemas altamente complejos no requiere necesariamente el uso de herramientas no lineales sofisticadas cuando se trata de distinguir diferentes estados dinámicos. En la mayoría de los casos, un esquema lineal no sólo es numéricamente más robusto, sino que también puede proporcionar resultados muy significativos. Si se trata sólo de distinguir entre la meditación y la pre-meditación, la aplicación tradicional de la Información Mutua es suficiente. Del mismo modo, también se podría simplemente estimar la función de autocorrelación lineal.

En otras palabras, los sistemas no lineales o incluso caóticos también pueden mostrar efectos lineales pronunciados, que podrían ser esenciales para la caracterización y distinción de diferentes estados fisiológicos. Sin embargo, esta conclusión no implica que los pequeños componentes no lineales o los pequeños cambios en la dinámica no lineal sean irrelevantes. Los sistemas que

operan en un régimen caótico son destacados contraejemplos, y, por lo tanto, la detección confiable de características no lineales en series de tiempo complejas es un asunto importante.

Un ejemplo impresionante de la gran influencia del PSD en medidas no lineales se publicó hace más de dos décadas para el caso de la dimensión de correlación (Pereda, Gamundi, & Rial, 1998). Al establecer las amplitudes de Fourier en uno, se evita tal inconveniente, y ya no es necesario el ajuste elaborado de una ventana (Theiler, 1986) a una ventana en ejecución.

La clara distinción entre "lineal" y "no lineal" ciertamente implica un importante progreso. Sin embargo, la no linealidad implica una estructura en el espacio fase, y por lo tanto queda todo un universo de diferentes efectos no lineales que deben ser distinguidos y caracterizados por medio de las fases de Fourier.

Por ejemplo, el escalamiento no lineal es cualitativamente diferente de las características detectadas por la información mutua, y se distinguen especialmente de los efectos a corto alcance, como los medidos por los exponentes de Lyapunov. Un problema importante para investigaciones futuras sería cómo afectan las diversas características no lineales, así como las estructuras deterministas, las fases de Fourier o, alternativamente, las posibles correlaciones entre las fases y amplitudes de Fourier. La respuesta a esta pregunta posiblemente ofrecería una manera nueva y más directa de revelar dichas propiedades de las series de tiempo.

Hasta ahora, hemos demostrado que tanto las estimaciones  $\text{magDFA}$  como los resultados obtenidos para la información mutua con retardo temporal pueden estar drásticamente sesgados por el PSD de las señales, es decir, por las propiedades lineales, de modo que incluso el análisis de los datos sustitutos FT conduce a resultados que están muy alejados del valor de ruido esperado. El método de preprocesamiento propuesto logra una clara distinción entre propiedades univariantes lineales y no lineales y puede mejorar drásticamente el nivel de significación de los resultados. Además, no se necesita la generación de simulaciones de datos. En el caso de  $\text{magDFA}$ , basta con verificar si las estimaciones numéricas se desvían significativamente del valor teórico de ruido, mientras que en el caso de la información mutua, una hipótesis nula objetiva se representa simplemente por fases de Fourier aleatorias del conjunto de datos  $A_1$ . En el caso de la

información mutua, la estimación del tamaño del efecto propuesto podría ser una herramienta adecuada para cuantificar las autocorrelaciones no lineales en escalas de tiempo cortas. Confiamos en que el método propuesto sea relevante para el campo del análisis de series de tiempo para un amplio espectro de diferentes datos empíricos y una amplia gama de medidas numéricas no lineales.

## 7. Comentarios sobre la investigación original.

Antes de que sucediera la pandemia COVID-19, el proyecto que se planeó para ejecutar durante mi doctorado llevó el nombre “Autocorrelaciones no lineales en las fluctuaciones de piezas musicales y sus efectos en la actividad eléctrica cerebral de músicos y no músicos.”

La primera parte del trabajo consistía en analizar piezas musicales con el fin de obtener estímulos auditivos con ciertas propiedades estadísticas, para aplicarlos durante un experimento en el que se proyectó realizar registros de electroencefalografía (EEG) a participantes músicos y no músicos. La última parte del proyecto tendría como finalidad analizar los registros de EEG y se esperaba obtener diferencias interesantes al comparar los resultados de los participantes músicos y los de los no músicos.

Al momento en el que anunció la cuarentena, se tenía listo el flujo de trabajo para el análisis de diversas piezas musicales. Desde 2018 hasta el 2020 se trabajó con gran cuidado la implementación de las herramientas de análisis, se creó un código en R que traduce archivos MIDI a series de tiempo multivariantes respetando los acordes de las piezas e incluso se terminó una rutina computacional para realizar caminatas aleatorias sobre las series de tiempo traducidas desde el MIDI. Asimismo, se construyó la versión en español del Índice de Sofisticación Musical de Goldsmiths y se aplicó una primera fase de validación piloto de dicho cuestionario, con el fin de decidir si pudiese considerarse como una herramienta útil para obtener información de la relación entre los participantes del experimento con EEG y la música.

A continuación, se presentan algunos comentarios sobre trabajo realizado.

### **Creación del Software**

En primer lugar, se creó un código en R que trabaja con archivos en formato MIDI y los transforma en series de tiempo. La peculiaridad de este código es que toma en consideración el total de notas presentes en la pieza musical y mantiene todos los acordes presentes en la misma. Esto permite generar análisis estadísticos sobre las series de notas y también sobre series de acordes.

Con la idea de construir estímulos auditivos en los que se lograran destruir ciertas propiedades estadísticas, se generó otro código con base en cadenas de Markov, dedicado a generar caminatas aleatorias sobre las series de notas o bien, sobre las series de acordes.

Para el análisis de las series de tiempo se crearon las funciones en R para realizar el *Detrended Fluctuation Analysis* (DFA) y el *Magnitude Detrended Fluctuation Analysis* (magDFA) en su versión multivariante<sup>10</sup>.

### **Selección de las piezas musicales**

Desde un inicio se planeó utilizar piezas clásicas. Primero, porque una parte del proyecto se inspiró en el trabajo realizado por González-Espinoza, A. (2017), donde se mostró la capacidad del DFA y el magDFA para detectar la autocorrelación lineal y no lineal en series de tiempo provenientes de archivos MIDI. Segundo, porque trabajar con piezas clásicas de hace más de 100 años tiene la ventaja de que estas obras son de dominio público y existe una gran cantidad de material especializado (como las partituras y los archivos MIDI) que también se encuentra para su libre uso. Asimismo, este tipo de música cuenta con estructuras que se han analizado por décadas y que pueden dar pistas sobre ciertas propiedades estadísticas de interés.

Después de revisar qué piezas podrían formar un buen conjunto para iniciar con los análisis, se decidió que se elegirían únicamente aquellas con la estructura de Fuga, pues consta de un patrón constante y repetitivo (el “sujeto”) y una parte más libre, con mayor variabilidad (el “desarrollo”). Con esta idea se eligieron 106 fugas: 23 de Buxtehude (siglo XVII), 23 de Bach (siglo XVIII), 8 de Mozart (siglo XVIII), 20 de Beethoven (siglo XVIII-XIX), 23 de Shostakovich (siglo XX) y 9 de Nabuyoshi Tanaka (siglo XX-XXI). De este último compositor se obtuvo el permiso vía correo electrónico para utilizar sus composiciones y los archivos MIDI de estas.

En este periodo, la mayoría de las piezas fueron convertidas de MIDI a series de tiempo.

---

<sup>10</sup> <https://github.com/antonietaamg/multivariate-DFA> y [https://github.com/antonietaamg/Multi\\_MagDFA](https://github.com/antonietaamg/Multi_MagDFA)

## Índice de Sofisticación Musical de Goldsmiths en español

El artículo titulado *The musicality of non-musicians: An index for assessing musical sophistication in the general population* (Müllensiefen, 2014) informa de correlaciones significativas entre el Índice de Sofisticación Musical de Goldsmiths y varias pruebas de percepción y memoria musical.

El Índice de Sofisticación Musical de Goldsmiths es un cuestionario compuesto por 71 preguntas tipo escala Likert, con respuestas que varían desde "Totalmente de Acuerdo" hasta "Totalmente en Desacuerdo". Las preguntas se dividen en distintas categorías: Compromiso Activo, Habilidades Perceptuales, Entrenamiento Musical, Emociones, Habilidades de Canto y Sofisticación Musical General. Cada categoría tiene su propio índice, lo que permite la evaluación individual.

Con el objetivo de crear una herramienta de evaluación de habilidades musicales basada en el autoinforme y con la hipótesis de que las personas sin educación musical (formal o autodidacta) pueden desarrollar habilidades musicales, en (Müllensiefen, 2014) se desarrolló y validó el cuestionario en línea con la participación de miles de personas.

En la actualidad, el Índice de Goldsmiths es comúnmente utilizado como método de evaluación en experimentos relacionados con la música, especialmente aquellos que trabajan con grupos que incluyen tanto músicos como no músicos. Sin embargo, la herramienta solo está disponible al público en inglés, alemán, danés, chino y japonés.

La idea de utilizar una herramienta para evaluar la "musicalidad" de los participantes en un experimento con músicos y no músicos, dio lugar a la creación de la versión en español del cuestionario y su aplicación en una prueba piloto a 27 participantes. Más de la mitad de ellos llevaron a cabo la prueba de forma presencial, en un entorno silencioso, con audífonos y en su propio equipo informático, mientras que algunos otros la realizaron en línea, bajo una supervisión rigurosa.

La prueba consistió en responder a los 71 ítems traducidos del Índice Goldsmiths en español, así como en llevar a cabo dos pruebas de habilidades musicales que fueron programadas para correr en Psytoolkit: una de memoria melódica y otra de percepción del ritmo. Por lo general, aquellos con entrenamiento musical obtienen puntuaciones elevadas en ambas pruebas. El objetivo era determinar si existía alguna correlación entre las habilidades musicales auto reportadas por los participantes y sus puntuaciones en las pruebas de melodía y ritmo.

Una vez obtenidos los resultados de los participantes, se realizó el cálculo de la correlación de Spearman. En la Figura 26 se presenta la matriz de correlación únicamente con aquellas correlaciones significativas que tienen un valor  $p < 0.05$ . Cabe señalar que todas las correlaciones que no resultaron significativas fueron igualadas a cero.

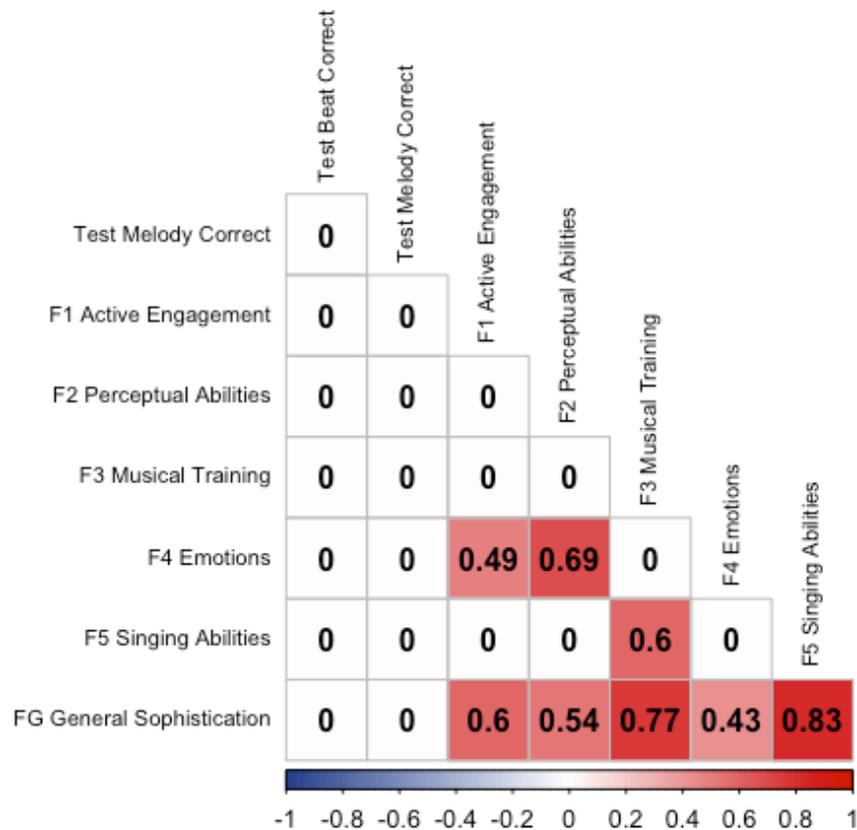
Como se puede apreciar, ninguna de las categorías del cuestionario muestra una correlación significativa con las pruebas de melodía o ritmo. De hecho, únicamente la categoría de Sofisticación Musical General presenta correlaciones significativas con las demás. Puesto que las únicas correlaciones significativas corresponden a los elementos de auto reporte, se puede concluir que la percepción personal de los participantes respecto a su habilidad musical no guarda relación con sus puntuaciones en las pruebas de habilidad musical.

En resumen, los resultados preliminares parecen indicar que, en el caso de los hispanohablantes, la habilidad musical no se correlaciona directamente con la percepción personal. Aunque algunos participantes puedan considerarse musicalmente competentes, esto no significa que lograrán resolver de manera efectiva una prueba de habilidad técnica. Por lo tanto, estos hallazgos sugirieron que el Índice de Goldsmiths podría no ser una herramienta adecuada para evaluar la musicalidad de los participantes en el experimento de EEG.

No obstante, a pesar de estos resultados, la batería de pruebas en idioma español elaborada para su aplicación en línea ya está disponible<sup>11</sup>, por lo que se encuentra pendiente confirmar los resultados de este experimento piloto a una mayor escala.

---

<sup>11</sup> Se puede acceder al cuestionario aquí: <https://forms.gle/nGhbgTtSL6wUT56H6>. Se deshabilitaron las pruebas de habilidades musicales pero se cuenta con el código para ponerlas en línea de nuevo.



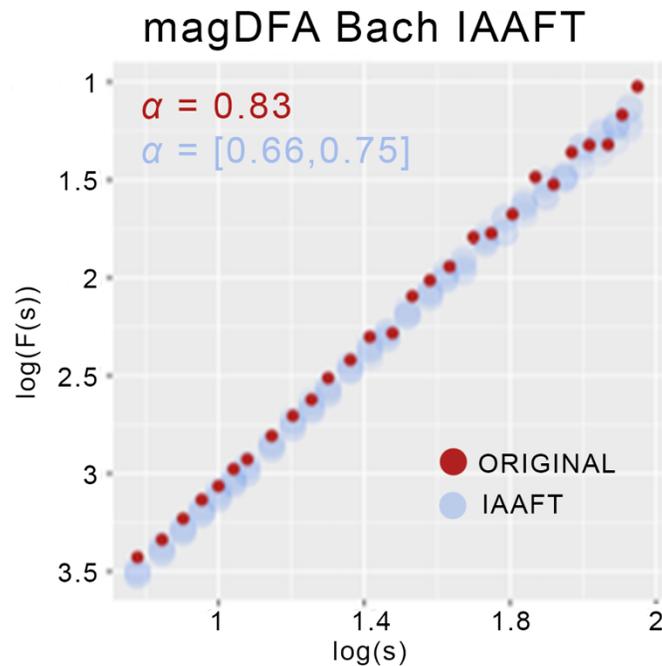
**Figura 26.** Matriz de correlación de Spearman de los índices obtenidos por los 27 participantes para las distintas categorías del cuestionario de Goldsmiths (F1, F2, F3, F4, F5 y FG) y de las dos pruebas técnicas de habilidades musicales (Test Melody Correct y Test Beat Correct). Las correlaciones con un valor  $p < 0.05$  se igualaron a 0.

### La transición del proyecto de música al de las fases de Fourier.

Tras un arduo trabajo en la programación de herramientas de análisis, la selección de piezas musicales y la elección y diseño de pruebas para el experimento de EEG, la pandemia de COVID-19 interrumpió el proyecto al imposibilitar las sesiones presenciales de registro electroencefalo-gráfico. Por lo tanto, el enfoque se centró exclusivamente en el análisis de datos.

Se inició el análisis de algunas piezas musicales para probar el software programado y durante este proceso se obtuvieron resultados sorprendentes. Como se muestra en la Figura 26, al aplicar magDFA a una serie de tiempo obtenida de una pieza de Bach, los valores de  $\alpha$  para los IAAFT variaron entre 0.66 y 0.75. Lo que se esperaba era que fueran cercanos a 0.5, debido a que sus

fases son aleatorizadas. Se realizaron varias pruebas y se generaron distintas variaciones de estos datos sustitutos para comprender la razón detrás de este resultado. Con el fin de entender por qué los IAAFT se comportaban de esta manera, se implementó el modelo de ruidos de colores, lo que dio inicio a la exploración de un nuevo tema de investigación que es el que se aborda en la presente tesis.



**Figura 26.** Resultados del análisis magDFA para una pieza musical de Bach, donde se muestra el valor  $\alpha$  en color rojo. En azul se observan los resultados obtenidos para los datos sustitutos IAAFT (25 series de datos sustitutos) y sus respectivos rangos de valores.

### Futuros proyectos.

Actualmente es factible desarrollar diversos proyectos de investigación con el material generado durante los dos primeros años del doctorado. Adicionalmente, se cuenta con evidencia sólida que alerta sobre los riesgos de analizar características no lineales en series de tiempo univariantes, así como con una estrategia simple y confiable (el preprocesamiento A1), lo que posibilitará un análisis más exhaustivo de las piezas musicales. Del mismo modo, al igualar las amplitudes de Fourier a 1, será posible emplear otros métodos de análisis diseñados para identificar características no lineales, además del magDFA.

Otro aspecto que queda por investigar es la realización de caminatas aleatorias sobre las series de notas y acordes, con el propósito de detectar cambios en las características lineales y no lineales al desarticular estructuras particulares de las piezas musicales.

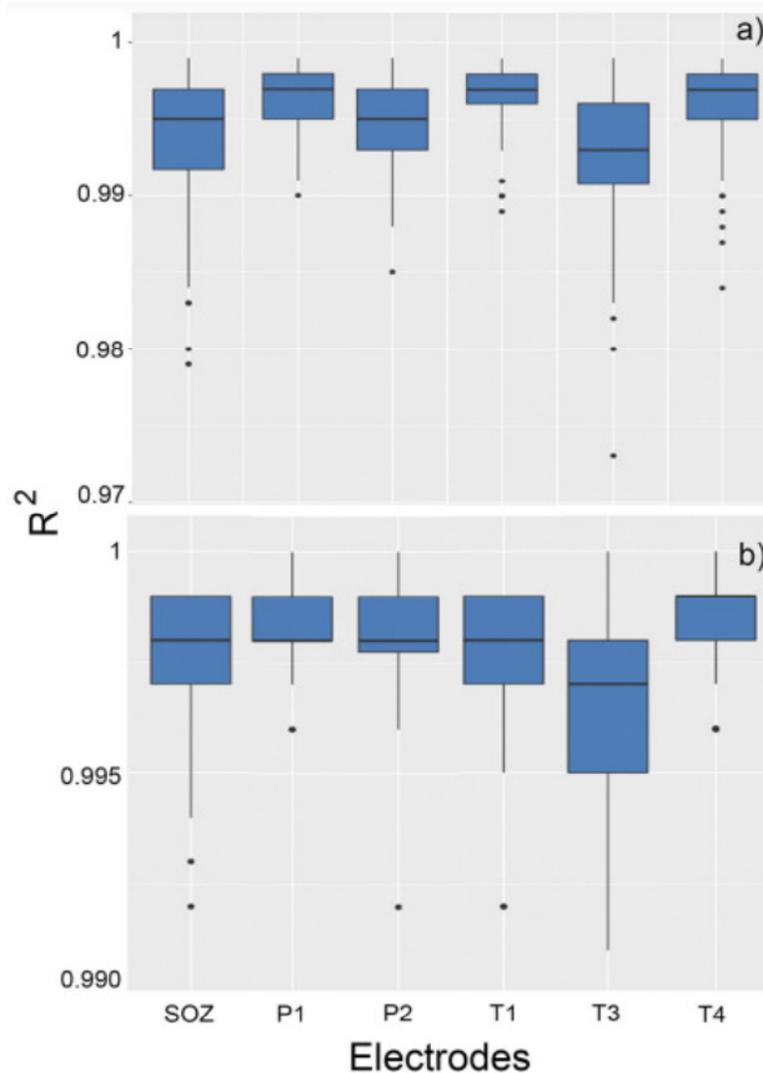
Se ha efectuado la prueba piloto de Goldsmiths y se han elaborado baterías de pruebas para ser aplicadas a gran escala en el público hispanohablante. Asimismo, aún sigue sin resolverse la pregunta principal del proyecto original: ¿es posible identificar diferencias en la actividad eléctrica cerebral de músicos y no músicos cuando escuchan piezas musicales con ciertas propiedades estadísticas?

Cada paso del camino recorrido hasta el momento resulta valioso y la experiencia adquirida en estos años me ha proporcionado las herramientas necesarias para culminar en un futuro estos y otros proyectos de manera exitosa. Por esta razón considero importante incluir estos comentarios en mi trabajo y concluir el manuscrito con un sincero agradecimiento a todas las personas que me han permitido transitar desde la filosofía hasta la ciencia, dos disciplinas que comparten, sobre todo, su amor por el conocimiento.

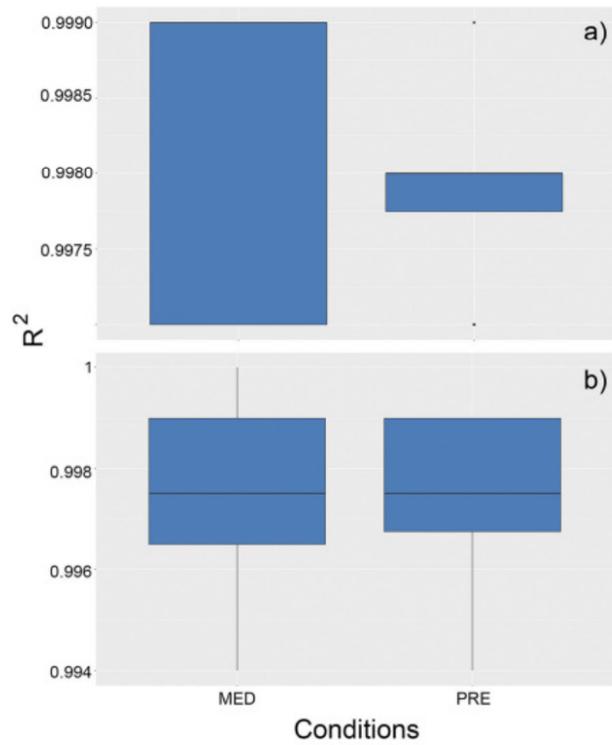
## ANEXO

A continuación, se presentan las figuras correspondientes a los ajustes de  $r^2$  para las funciones de fluctuación (magDFA y magDFA-A1) de las series de EEG de epilepsia (Figura 1) y de las series derivadas de la frecuencia cardiaca (Figura 2). Como se puede notar, los valores de  $r^2$  para todos los casos se encuentra por arriba de 0.9, lo que muestra una alta calidad del ajuste.

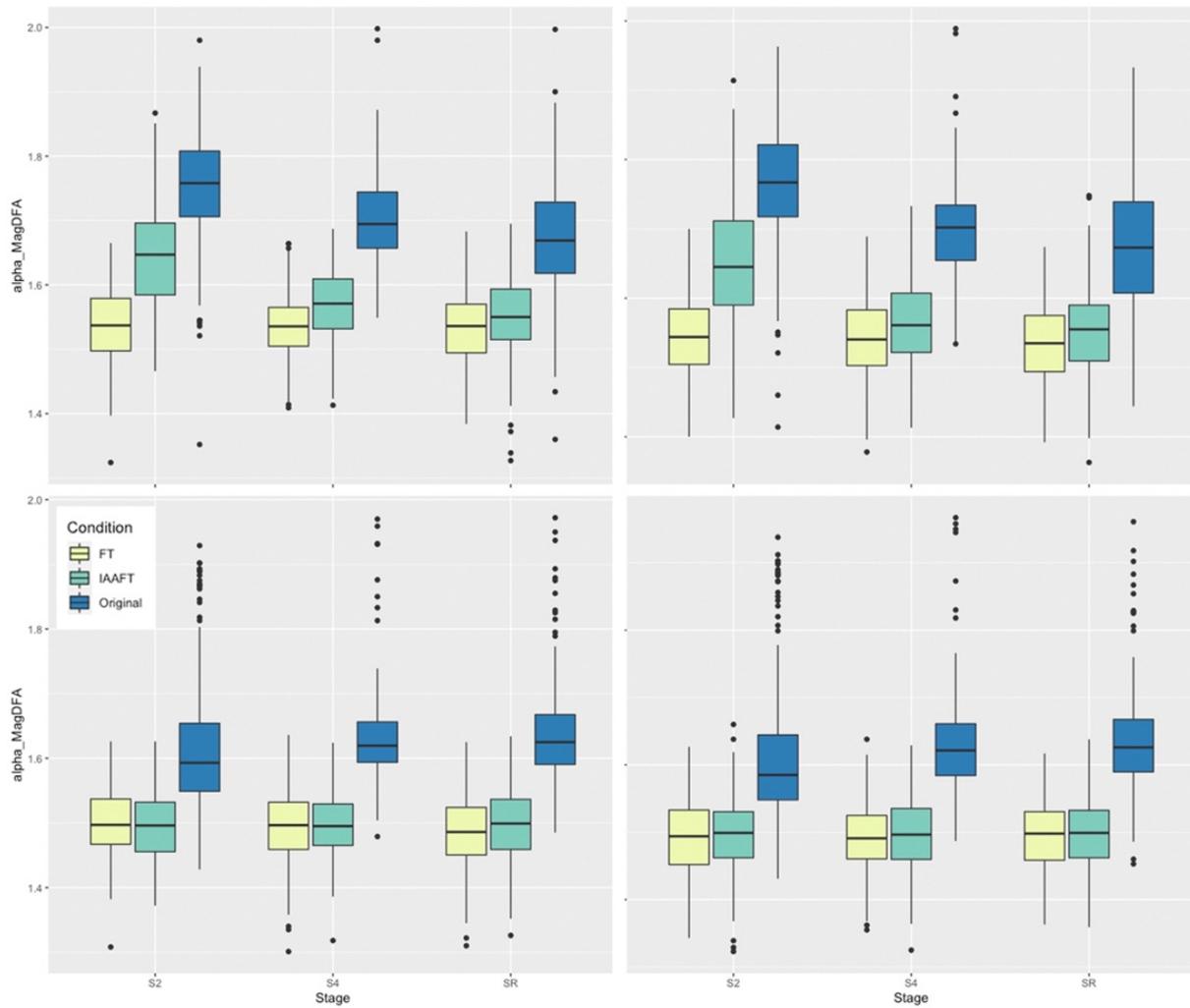
Por último, en la Figura 3 se muestran las distribuciones de los valores  $\alpha$  (magDFA y magDFA-A1) de los tres sujetos para los electrodos C3 y C4 en las 3 condiciones analizadas (etapa 2, etapa 4 y MOR).



**Figura 1.** Distribución de los valores  $r^2$  obtenidos para las funciones de fluctuación de los registros de EEG durante el ataque epiléptico. El panel **a** muestra la distribución para el magDFA de la serie original, el panel **b** para el magDFA de la serie A1.



**Figura 2.** Distribución de los valores de  $r^2$  obtenidos para las funciones de fluctuación de las series temporales derivadas de la frecuencia cardíaca instantánea antes (PRE) y durante la meditación (MED). El panel a muestra la distribución para la función magDFA de las series originales, mientras que el panel b muestra la distribución para la función magDFA de las series A1.



**Figura 3.** Distribuciones de los valores  $\alpha$  de los Electrodo C3 (izquierda) y C4 (derecha) para los 3 sujetos en las distintas fases de sueño. Arriba magDFA original y abajo magDFA-A1.

# Bibliografía

- Ashkenazy, Y. H.-F. (2003). Magnitude and sign scaling in power-law correlated time series. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 323, 19-41. [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(03\)00008-6](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(03)00008-6).
- Ashkenazy, Y. I. (2001). Magnitude and sign correlations in heartbeat fluctuations. *Physical Review Letters*, 86(9), 1900. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.1900>.
- Bertuglia, C. S., & Vaio, F. (2005). *Nonlinearity, chaos, and complexity: The Dynamics of Natural and Social Systems*. Oxford University Press.
- Bradley, & Kantz. (2015). Nonlinear time-series analysis revisited. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 25(9), <https://doi.org/10.1063/1.4917289>.
- Carballido-Landeira, J., & Escribano, B. (2016). Nonlinear dynamics in biological systems (Vol. 7). London, UK: Springer.
- Carpena, P., Gómez-Extremera, M., Carretero-Campos, C., Bernaola-Galván, P., & Coronado, A. (2017). Spurious Results of Fluctuation Analysis Techniques in Magnitude and Sign Correlations. *Entropy*, 19(261), <https://doi.org/10.3390/e19060261>.
- Coronado, A., & Carpena, P. (2005). Size effects on correlation measures. *Journal of Biological Physics*, 31(1), 121-133. doi:10.1007/s10867-005-3126-8.
- Croca, J. (2020). *Dialogues on the new physics: Complexity and nonlinearity in nature*. Cambridge Scholars Publishing.
- Danjon, A. (1946). La découverte de Neptune. *L'Astronomie, Bulletin de la Société astronomique de France*, 225-278.
- Degen, H., Olsen, A., & Holden, A. (1987). *Chaos in Biological Systems (NATO Science Series A) (Vol. 138)*. Springer.
- Farag, A. F.-M. (2013). Automated sleep staging using detrended fluctuation analysis of sleep EEG. *Soft Computing Applications: Proceedings of the 5th International Workshop Soft Computing Applications (SOFA)*, 501-510. doi: 0.1007/978-3-642-33941-7\_44.
- Farag, A. F., El-Metwally, S. M., & Morsy, A. A. (2013). Automated sleep staging using detrended fluctuation analysis of sleep EEG. *Soft Computing Applications*, 501–510. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-33941-7\\_44](https://doi.org/10.1007/978-3-642-33941-7_44)
- Feder, J. (1988). *Fractals*. New York, NY: Springer .
- Goldberger, A. L. (2000). Components of a new research resource for complex physiologic signals. *Circulation [Online]*, 101(23), e215-e220.

- Gómez-Extremera, M., Carpena, P., Ivanov, P. C., & Bernaola-Galván, P. A. (2016). Magnitude and sign of long-range correlated time series: Decomposition and surrogate signal generation. *Physical Review E*, 93(4), <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.93.042201>.
- González-Espinoza, A., Larralde, H., Martínez-Mekler, G., & Müller, M. (2017). Multiple scaling behaviour and nonlinear traits in music scores. *Royal Society open science*, 4(12), 171282.
- Grosse-Erdmann, K.-G., & Manguillot, A. P. (2011). *Linear Chaos*. London: Springer.
- Hausdorff, J., Lertratanakul, A., Cudkowicz, M., Peterson, A., Kaliton, D., & Goldberger, A. (2000). Dynamic markers of altered gait rhythm in amyotrophic lateral sclerosis. *Journal of Applied Physiology*, 88(6), 2045-2053. doi: 10.1152/jappl.2000.88.6.2045.
- Heneghan, C., & McDarby, G. (2000). Establishing the relation between detrended fluctuation analysis and power spectral density analysis for stochastic processes. *Physical review E*, 62(5), 6103, <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.62.6103>.
- Hennig, H., Fleischmann, R., Fredebohm, A., Hagmayer, Y., Nagler, J., Witt, A., . . . Geisel, T. (2011). The nature and perception of fluctuations in human musical rhythms. *PloS one*, 6(10), e26457, <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0026457>.
- Höll, M., Kiyono, K., & Kantz., H. (2019). Theoretical foundation of detrending methods for fluctuation analysis such as detrended fluctuation analysis and detrending moving average . *Physical Review E*, 99(3), 033305, <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.99.033305>.
- Ibrahim, K. M., Jamal, R. K., & Ali, F. H. (2018). Chaotic behaviour of the Rossler model and its analysis by using bifurcations of limit cycles and chaotic attractors. *Journal of Physics: Conference Series*, 1003, 012099, <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1003/1/012099>
- Ivanov, P. C. (1999). Multifractality in human heartbeat dynamic. *Nature*, 270(1-2), 461–465.
- Ivanov, P. C. (2003). Quantifying heartbeat dynamics by magnitude and sign correlations. *AIP Conference Proceedings*, 665(1), doi: <https://doi.org/10.1063/1.1584912>.
- Kantelhardt, J. W.-B. (2001). Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 295(3-4), 441-454. [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(01\)00144-3](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(01)00144-3).
- Kantz, H., & Schreiber, T. (2004). *Nonlinear time series analysis (Vol. 7)*. Cambridge university press.
- Kreuz, T., Mormann, F., Andrzejak, R. G., Kraskov, A., Lehnertz, K., & Grassberger, P. (2007). Measuring synchronization in coupled model systems: A comparison of different approaches. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 225(1), 29-42, <https://doi.org/10.1016/j.physd.2006.09.039>.
- Laplace, P. (1814). *Essai philosophique sur les probabilités I-II*. Paris: Coursier.

- Lee, J. M. (2004). Nonlinear-analysis of human sleep EEG using detrended fluctuation analysis. *Medical engineering & physics*, 26(9), 773-776. <https://doi.org/10.1016/j.medengphy.2004.07.002>.
- Lee, J.-M., Kim, D.-J., Kim, I.-Y., Suk Park, K., & Kim, S. I. (2004). Nonlinear-analysis of human sleep EEG using detrended fluctuation analysis. *Medical Engineering & Physics*, 26(9), 773–776. <https://doi.org/10.1016/j.medengphy.2004.07.002>
- Leistedt, S., Dumont, M., Lanquart, J.-P., Jurysta, F., & Linkowski, P. (2007). Characterization of the sleep EEG in acutely depressed men using detrended fluctuation analysis. *Clinical Neurophysiology*, 118(4), 940–950. <https://doi.org/10.1016/j.clinph.2007.01.003>
- Martínez-Guerrero, A. (2022). On Fourier phases and their relevance for nonlinear time series analysis. *Physica A*, 604, <https://doi.org/10.1016/j.physa.2022.127878>.
- Müllensiefen, D. G. (2014). The musicality of non-musicians: An index for assessing musical sophistication in the general population. *PLoS One*, <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0089642>.
- Ni, X., & Huo, X. (2006). Statistical interpretation of the importance of phase information in signal and image reconstruction. *Statistics & Probability Letters*, 77(4), 447–454. doi: 10.1016/j.spl.2006.08.025.
- Oestreicher, C. (2007). A history of chaos theory. *Dialogues in Clinical Neuroscience*, 9(3), 279-289. doi: 10.31887/dcns.2007.9.3/coestreicher.
- Olguín-Rodríguez, P. V., Arzate-Mena, J. D., Corsi-Cabrera, M., Gast, H., Marín-García, A., Mathis, J., . . . Müller, M. (2018). Characteristic fluctuations around stable attractor dynamics extracted from highly nonstationary electroencephalographic recordings. 8(8), 457-474, <https://doi.org/10.1089/brain.2018.0609>.
- Packard, N. H., Crutchfield, J. P., Farmer, J. D., & Shaw, R. S. (1980). Geometry from a time series. *Physical Review Letters*, 45(9), 712–716. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.45.712>.
- Peng, C. K. (1994). Mosaic organization of DNA nucleotides. *Physical Review E*, 49(2), 1685. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.49.1685>.
- Peng, C. K., Havlin, S., Hausdorff, J. M., Mietus, J. E., Stanley, H. E., & Goldberger, A. L. (1995). Fractal mechanisms and heart rate dynamics. *Journal of Electrocardiology*, 28, 59–65. [https://doi.org/10.1016/s0022-0736\(95\)80017-4](https://doi.org/10.1016/s0022-0736(95)80017-4)
- Peng, C. K., J. E. (1999). Exaggerated heart rate oscillations during two meditation techniques. *International Journal of Cardiology*, 70(2), 101-107. Doi: [https://doi.org/10.1016/S0167-5273\(99\)00066-2](https://doi.org/10.1016/S0167-5273(99)00066-2).

- Penzel, T., Kantelhardt, J. W., Grote, L., Peter, J.-H., & Bunde, A. (2003). Comparison of Detrended Fluctuation Analysis and Spectral Analysis for Heart Rate Variability in Sleep and Sleep Apnea. *IEEE Transactions on biomedical engineering*, 50(10), 1143-1151. doi: 10.1109/TBME.2003.817636.
- Pereda, E., Gamundi, A., & Rial, R. &. (1998). Non-linear behaviour of human EEG: fractal exponent versus correlation dimension in awake and sleep stages. *Neuroscience letters*, 250(2), 91-94, [https://doi.org/10.1016/S0304-3940\(98\)00435-2](https://doi.org/10.1016/S0304-3940(98)00435-2).
- Prajapati, U. (2016, April 16). The Rössler attractor, chaotic simulations. Academia.edu. Retrieved April 26, 2023, from [https://www.academia.edu/24458357/The\\_R%C3%B6ssler\\_Attractor\\_Chaotic\\_Simulations](https://www.academia.edu/24458357/The_R%C3%B6ssler_Attractor_Chaotic_Simulations)
- Räth, C., Gliozzi, M., Papadakis, I. E., & Brinkmann, W. (2012). Revisiting algorithms for generating surrogate time series. *Physical review letters*, 109(14), 144101, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.144101>.
- Rechtschaffen, A. Kales, A. (1968). A Manual of Standardized Terminology, Techniques and Scoring System for Sleep Stages of Human Subjects, Los Angeles, CA: BIS/BRI, University of California.
- Rummel, C., Abela, E., Müller, M., Hauf, M., Scheidegger, O., Wiest, R., & Schindler, K. (2011). Uniform approach to linear and nonlinear interrelation patterns in multivariate time series. *Physical Review E*, 83(6), 066215, <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.83.066215>.
- Schreiber, T. &. (1996). Improved surrogate data for nonlinearity tests. *Physical review letters*, 77(4), 635, <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.77.635>.
- Soriano, J., & Ma, L. (2017). Probabilistic Multi-Resolution Scanning for Two-Sample Differences. *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*, 79(2), 547–572, <https://doi.org/10.1111/rssb.12180>.
- Strien, M. v. (2014). On the origins and foundations of Laplacian determinism. *Studies in History and Philosophy of Science*, 45, 24-31. doi: 10.1016/j.shpsa.2013.12.003.
- Strogatz, S. (2019). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC Press, Taylor et Francis Group.
- Takens, F. (1981). Detecting strange attractors in Turbulence. *Lecture Notes in Mathematics*, 366–381. <https://doi.org/10.1007/bfb0091924>.
- Theiler, J. (1986). Spurious dimension from correlation algorithms applied to limited time-series data. *Physical review A*, 34(3), 2427.

- Von Wegner, F., Laufs, H., & E., T. (2018). Mutual information identifies spurious Hurst phenomena in resting state EEG and fMRI data. *Physical Review E*, 97(2), 022415, <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.97.022415>.
- Walleczek, J. (2006). *Self-organized biological dynamics and nonlinear control: toward understanding complexity, chaos and emergent function in living systems*. Cambridge University Press.
- Winfree, A. T. (1967). Biological Rhythms and the Behavior of Populations of Coupled Oscillators. *Journal of Theoretical Biology*, 16(1), 15-42.
- Zou, Y. D., Marwan, N., & Donges, J. F. (2019). Complex network approaches to nonlinear time series analysis. *Physics Reports*, 787, 1-97, <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2018.10.005>.

**DRA. LINA ANDREA RIVILLAS ACEVEDO  
COORDINADORA DEL POSGRADO EN CIENCIAS  
PRESENTE**

Atendiendo a la solicitud para emitir DICTAMEN sobre la revisión de la tesis titulada: **Sobre la importancia de las fases de Fourier en el análisis no lineal de series de tiempo**, que presenta la alumna Antonieta Martínez Guerrero (10012788) para obtener el título de **Doctor en Ciencias**.

Director de tesis: Dr. Markus Franziskus Muller  
Unidad Académica: Instituto de Investigación en Ciencias Básicas y Aplicadas

Nos permitimos informarle que nuestro voto es:

NOMBRE	DICTAMEN	FIRMA
Dr. Raúl Salgado García CInC - UAEM	APROBADO	
Dra. Lorena Díaz González CInC - UAEM	APROBADO	
Dr. Gustavo Carlos Martínez Mekler ICF – UNAM	APROBADO	
Dra. Zeidy Vanessa Muñoz Torres FPsicología - UNAM	APROBADO	
Dr. Antonio Daniel Rivera López CInC - UAEM	APROBADO	
Dr. Jorge Hermosillo Valadez CInC - UAEM	APROBADO	
Dr. Markus Franziskus Muller CInC - UAEM	APROBADO	



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

### Sello electrónico

**MARKUS FRANZISKUS MULLER** | Fecha:2023-03-23 14:35:00 | Firmante

aneOwQSGhRiulrXqysTv/fc3Yc0BUJh9ZrQt0WcMTeoxa1qJ/xebjFxoVxf8G6STaBx0QcucXEor3huR5pLPQYSo3/3p5RdGOhhXOFXYyLG2zn0eJF0xhq+mBK7IQaAYaf5iYkECP  
W6vmmionvup15sCQGILxRdUYyWl0MnTpmgtkbqh/sgvEWMJjwaXaKhkrnVKRFpCtFYTpzPvo4MCqSp2eOzikux2ngSljZjNancXQhOvz/GddqWS2x0ld7toD1FBI7xLnCO8v7i2VK  
QfozF3mWBAem1WZzcepbE3d2+UT6HbsrKMDs0v8gXoT5EtBKQfKSN0QdgCSDkANjSYw==

**LORENA DIAZ GONZALEZ** | Fecha:2023-03-23 14:35:11 | Firmante

JZuJuFf8Q/331n0KR4Usx3foAJ3GxWAs005eJnx138iH64GqWxzKFaQNCiAt/IluEaH5HaS7fqbhV10//d+N1gCVGJD5zdGE7QVA/o65CxPFGA2j+tx8sJjkO6kCzJfEtIQ41sPjSa6Zs  
vqrcZZg4+9tjcz+lzHTQiq8fCdFezKK1dUpnzheVaYm3tLEStgPUxEEZRpi/N5j4DrhUcMu7r+PSRCC4oE69r6b/hzskomjeV/HSEGzlgHQ3+c+Yp0KjAjsB6sEgR583gbYR351Rn/V9  
/tGUYeBb8l+NPRAgQjYAJ2GvRBH2QUATmvyvSbZ/nqXWY8OCleQDLqB5iw==

**JORGE HERMOSILLO VALADEZ** | Fecha:2023-03-23 15:36:23 | Firmante

Cq3fnq2rybLh6Uf7hw8aKoaLHpgE+dhAWb56GgUqMxLrPzdjGRP5jL7Sce4IOx25oN6dkaJBOd490rD277Hw87v12KBpLzjxl0881VdwoJmVMC2WLPe+MqPLXPO/NEJSncWAL  
GKrLuWkos4HuHevntVxQwOEpR309RZb63TKBNRrZ6BpcrJfIAskJSKBo3qpAWYzll6UKKsy+eODODJ//YGSLICxqO4DNg2Hy2z/SG2FQ1hqS8NAuIND3mEJ79AyquGPq8sjGz  
GN4OSVOeVgKkrK9a04O1GXwNnrNAauKv2YFnpF6Bb3RN8IMeyvdjNq+09B6ZT wjuxEsYUSU1Q==

**RAUL SALGADO GARCIA** | Fecha:2023-03-23 17:07:38 | Firmante

fpG2uL8tnvqJV8VGxonZCYvkuDrpLdUnARjJdDI7GoZvR3omqxeYwLkF5BKMlyyYPhGw06RI8cN8DjzAjysSC5xj9T1cNvnKwlsx+nkppX3Mz6wUzF1opHICTkdh3O5Wa0EoLs  
8Ry3XNCKaje7eVYcQsOwho4ThxCoO8onV+iTJxXDjrZlaD44cupzYCeSnadUyroVAj0KxkTv1Hpd1wbSyeXeZlF8fa3rJtBmMnxp7ZKdN+eXMQMflp1qy1rzCcsyCBI+T2XjPAuK  
ovgkOCuq3nM4gqlZlQfGMWx2+PvMbfWSPZUTHijqtlULXsX+S7iJlflj+zLxfPXcnw==

**GUSTAVO CARLOS MARTÍNEZ MEKLER** | Fecha:2023-03-23 18:22:43 | Firmante

yRmDFRqVwVaphBIH+XK7OusyR23N4X3hzgkCsh5lR3nVktRNShvnstX8aiiqiOF05q9cda7SOFiWeddMp5lnuzkBsbnbWnMgaoibRP3EEEmGyFR36XrH5eN8jnGKFPkbT4A9fCQ  
q4x/h80jyNKq0QN1d+A0XOn73YzclsX6jYwziTm2nB3doJFa1HFtLQ1BVIJ6QsAonVmNwO+T3ORty2Cj95HBKd6mkahDY8Ale9wo+GXnrln6c0GrJEYZbi+TSGbMvp8j3FrF3uj+q  
Qw08KTek2UQR6hgHkO3+IHBkc0znZT5MhM/xoDF/lfomWd5wEkwXktgHwJcRJsGPw==

**ANTONIO DANIEL RIVERA LOPEZ** | Fecha:2023-03-23 20:25:10 | Firmante

KoxesjCSsoXJlHqi8w+Sbz/gi3lp/ZpHlTCFRc3a+KlgSuoHskHgDDiJCZPvKyCybseGaLkCTvjo5hGw3kn1MhCT/htbiC/ActAM6G11ADzsRtx9lJyDQ1THwBs6k81ToVArqzLc3+bw  
U7hdOnGK0r/hUagClijyfyQvV+fSbr+y0f3Y1PvUdm5Ty4ioA0r8jGjf0QMvk6Pg/2ujt7jJHgF/D/aKLYBaP7LYurwWMfhvQh7Gj27Ysaw4hQa4qRUQEBkbbaox7aHXpZs0i4TWTXK  
YalkxEjkyS7RoFEzOs9zPGhiCOMNRS2CDaPN6KNvmDDLAsLs+3M+FzxLnpFA==

**ZEIDY VANESSA MUÑOZ TORRES** | Fecha:2023-03-23 20:41:34 | Firmante

EZUzu/JRre/AwZKfHs8On4FiqzgvZkFLZtHHumRhBKK7gs4XSZLdrNJKuil540lL25kwbox7+c9v6m79vO4ke77BkjUj7RA77UhxI6CJMPTeWgAf4NBUEMLBueKmi6mryiS+O0nF  
Ujluo0YQ5q+kPZzqjUx2lkK07FWKS1lJsNh8lGcsmEVpnmMwQu8tEJl9u9l7pJUHD4iQY2T8adP++jDwqvlYaoDOOXQzY4VjiAxcjrsrSL9cylKWfRyg4ymv3Ju4l+KmpUfYBJPkW9  
MdYEI9RIs+DyOB54lbLeI5kOIZu4psWL/Z2qIM8JJo/i/sg57noVWbSuApbmqifg==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o  
escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



wyE9IVHuN

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/0I5wxTiZa796xBEtNfLLcaaVoKW7w6iC>

