



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS



Instituto de
Investigación en
Ciencias
Básicas y
Aplicadas

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS



Control Escolar de Licenciatura

VOTOS DE APROBATORIOS

Secretaria ejecutiva del Instituto de Investigación en Ciencias Básicas Aplicadas de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos.
P r e s e n t e .

Por medio de la presente le informamos que después de revisar la versión escrita de la tesis que realizó el C. **ARANDA LOZANO DIEGO** con número de matrícula **20134000252** cuyo título es:

“EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LOS ESTADOS COHERENTES CON FOTONES AÑADIDOS”

Consideramos que **SI** reúne los méritos que son necesarios para continuar los trámites para obtener el título de **Licenciado en Ciencias (Física)**

Cuernavaca, Mor a 04 de noviembre del 2021

Atentamente
Por una universidad culta

Se adiciona página con la e-firma UAEM de los siguientes:

DR. ALEJANDRO RAMÍREZ SOLÍS
DR. REMIGIO CABRERA TRUJILLO
DR. JOSE RECAMIER ANGELINI
DR. MARKUS MUELLER BENDER
DR. GUILLERMO G. HINOJOSA AGUIRRE

PRESIDENTE
SECRETARIO
VOCAL
PRIMER SUPLENTE
SEGUNDO SUPLENTE



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

Sello electrónico

JOSÉ FRANCISCO RÉCAMIER ANGELINI | Fecha:2021-11-04 10:54:56 | Firmante

XGQPpPAQ+G4/UMZKCO/uh6dvRJTn2Vw5VU5dDgR6p056PvEY2DMvFXE0R4tpQN/Bvm9rVgGTXy7rAbTtJ8lu2gadqs4IEHUaFn2OmHmTljbNl6A0rXFhmHNnKa7kCGi29pDRZOC0mwh7llqpMuRN3/nhkKq1Wq8W9g8uQgQl++NX8KqIa6baLVK/yvOwXEBJkeen7t2g13XvL5XXaawZqLlsJmdgnFerRY7vr9qZGWfskoFkSgrTcaZW8WXXU6kynK/DuCEnq10KEt+/Tv//pSsGxHmUxVuqzA7TKUSSTzqg78NZVKUGCME01EkmdNv56g3Zra7nRF3GmTjYvA==

ALEJANDRO RAMIREZ SOLIS | Fecha:2021-11-04 11:04:23 | Firmante

GilBvckdU1AOug4rCV0v73nNBmroGaNO20eV3OcdlijYxBXGaLj7drExIlCadoO7ECMvdlGBBnAWLbsEXDPsbhrU+Pqa4crs9ijGj0p1zcdWZEmskusgg9Ov+fdU0QS3giSbG4aiEu0rV6Xhtu+zZIVzVKTd0e+F3+OSqn06p3GEMy1Q9cBS+tH2+c+5JevGsyry/FLnYn8DssWZd11cpAdR2/HZmjaEPIWKCkpkp9GRL8jInvyN5nuNYeVIZC+maNqflwbp2D/ZFPX/088FFhpkznb5qWW6RMFuuzWeY5OfhrsltUPC6+IXEDf4F4Yfyq1Fyp5K+qfp1O5NXDfA==

MARKUS FRANZISKUS MULLER | Fecha:2021-11-04 11:15:15 | Firmante

E/hXVz6Jm6+ReOEAu53vf1PxShvIU3BhHlqHV8atkgTkwKf+qF2cMwQTRTMk73VfElad5zlARhbG19UvkegMtH99Bt4mGlbJpzOVv4js1Wt3CeourW2VVEtoRPsbvGCJoLHam0S/WL7j2jNxDYrQ/1SYIMKcbDbowQRp/FbGumTfJzguUids8HIJtNynV2zmGrBV+TkA8l33lDzP0rCgLhalpTILDOhD/QdimP2j3sbUpjv05j1i7WG+hFKR+kqIAOTeDRzBiy9dfafkXxtcu1QkbP67wfwvPsrC/qmu5uemT0UJfJAKf0tjSh+++E9SgutgOrswTMxCMhdLrg==

GUILLELMO GUADALUPE HINOJOSA AGUIRRE | Fecha:2021-11-04 12:18:29 | Firmante

pL8DtZx9rc36vGDRFPFanYhAxFA2ndPTFeWX4FipJ01zANINQXYOhlf3RmkWJ/YlbdZnTnGqToL1rp8w6lQzwdwqAmVdPmez/MgbVsTc1RHPL53Rad5K9GjA9xP2blXmp9FIMBERZQ2L22EMsq9DoiWweDf+eYzvRu8aU2YzsIYTeZnC4KEV5JOjpNltgn4bGuLd65cwgfWeBe7F9ms1UcZz0F4Dtdokd2HHOAJY2EJ7FXKgGgQT4MccrV2Yw9GPAbeF+gmBlqZulfAzP9DPbxGYxpbIRmwkzz99Qb79qfkgmlHV13DwgDteJ37YmPh9MDMwbevYh969hOQ71gcQ==

REMIGIO CABRERA TRUJILLO | Fecha:2021-11-07 17:46:03 | Firmante

x3nWOzaaosVeYgqno8jra1rwCMlfJBXNxcL1EAHdHZmQyr9tAXXK7hkEicEbDZ4HI0V6jZ9BMjs2ugdAFjvpakCgPkhPUDepTyPnKeQQUCqs1Hy70ZAI+hOTgKmYOWOWO0a2rIsX6DoVOWHS+rmVvyAqPXaw+ShPoUrgsFLFr6V53mVwAGEUw3EzFy8dHwHq9CR08+CoS56iyKipDoHHRs2N41OBu/9H9e/wnQLYPh38v+68lx1YzU9p6SeTUC5gOxBeJnoHdU8FjzX4gYvJTH4DglqvkyFxySktkj7a9U/WWLeQa+HIJe7w4+AiNsOihNqy4vEWJwmcooMZ8OJg==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



6VJUWmKzI

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/CU9WYPWsiJFAO4q5sRZnYmtRjs7l5m7>





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS
ÁREA TERMINAL EN FÍSICA

EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LOS ESTADOS
COHERENTES CON FOTONES AÑADIDOS

T E S I S

QUE PRESENTA:

DIEGO ARANDA LOZANO

Para obtener el Grado de
LICENCIADO EN CIENCIAS

Director de la Tesis:

Dr. José F. Récamier Angelini

Sinodales:

Dr. Remigio Cabrera Trujillo (UNAM)
Dr. Guillermo Hinojosa Aguirre (UNAM)
Dr. Alejandro Ramírez Solís (UAEM)
Dr. Markus Müller Bender (UAEM)

Cuernavaca, Morelos

11 de noviembre de 2021

Agradecimientos

Quiero Agradecer al Instituto de ciencias físicas (ICF) de la UNAM por el espacio, material y prestaciones brindadas para el desarrollo de este trabajo.

Al Dr. José Récamier por su guía, instrucción y apoyo para el desarrollo de la tesis.

A mi abuelo Antonio Aranda Valdes por su apoyo en el transcurso de mi carrera.

A mis compañeros Jousué Samayoa, Nicolás García, Oscar Suárez, compañeros de toda la licenciatura, los cuales su apoyo y compañía fueron un pilar a lo largo de nuestra trayectoria.

Por último pero no menos importante. A todos los profesores que me guiaron con mucha paciencia y disposición para poder salir adelante.

Resumen

En este trabajo estudiamos los estados coherentes con fotones añadidos y algunas de sus propiedades. Calculamos su parametro de Mandel, el cuál nos indica que los estados coherentes con fotones añadidos presentan una estadística sub-Poissoniana.

Calculamos su función de Husimi para diferentes valores de estado coherente y distintas cantidades de fotones añadidos y las comparamos con las funciones de Husimi correspondientes a Estados coherentes de Glauber y de Estados de número.

Calculamos la dispersión en sus cuadraturas y encontramos que los estados coherentes con fotones añadidos presentan compresión. con esto afirmamos que los estados coherentes con fotones añadidos son un estado intermedio entre un estado semi-clásico y un estado puramente cuántico.

Además para los estados coherentes con fotones añadidos proponemos un Hamiltoniano de oscilador paramétrico con una frecuencia dada. Dado que el conjunto operadores que conforman el Hamiltoniano cierran bajo la conmutación, utilizamos el teorema de Wei-Normann para construir su operador de evolución temporal resolviendo de manera numérica un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas. Encontrando que los estados coherentes con fotones añadidos evolucionan en el tiempo como una combinación de estados de número (estados de Fock)

Índice

1. Introducción	1
1.1. Cuantización del campo electromagnético	1
1.2. Oscilador armónico cuántico	3
1.3. Operador de evolución temporal para un sistema conservativo . .	7
2. Estados coherentes de Glauber.	9
2.1. Estados coherentes como eigenestados del operador de aniquilación	10
2.2. Estados coherentes a partir del operador de desplazamiento . . .	11
2.3. Como estados de mínima dispersión	13
2.4. Evolución temporal	14
2.5. Relaciones de no ortogonalidad	15
2.6. Probabilidad de ocupación	15
3. Estados coherentes con fotones añadidos y propiedades	17
3.1. Definiciones equivalentes para los estados coherentes con fotones añadidos	18
3.2. Producto escalar	20
3.3. Caracter sub-Poissoniano	21
3.4. Función de Husimi	22
3.5. Dispersión en las cuadraturas	25
4. Evolución temporal de los estados coherentes con fotones añadi- dos	27
4.1. Teorema de Wei-Norman	27
4.2. Operador de evolución temporal para los estados coherentes con fotones añadidos	27
4.3. Evolución temporal de un estado coherente con fotones añadidos	31

4.4. Evolución temporal de los operadores \hat{a} , \hat{a}^\dagger , \hat{n}	32
4.5. Promedio de fotones en el tiempo	34
5. Conclusiones	36

Índice de tablas

1.	Tabla de conmutadores de los operadores del Hamiltoniano de oscilador armónico	7
2.	Tabla de conmutadores de los operadores del Hamiltoniano de interacción.	29

Índice de figuras

1.	Cavidad con paredes perfectamente conductoras en $Z = 0$ y $Z = L$ con un campo eléctrico polarizado a lo largo del eje X.	1
2.	Valores de la probabilidad de ocupacion P_n para diferentes valores de α	17
3.	Parámetro de Mandel ($Q(\alpha, m)$) en función de para diferentes cantidades de fotones añadidos (m).	22
4.	Función de Husimi para estados coherentes con fotones añadidos y para estado de Fock con $n = 5$	23
5.	Función de Husimi para estados coherentes con fotones añadidos y para un estado Coherente de Glauber	24
6.	Dispersión S_x en la cuadratura X en función de $ \alpha $, para diferentes valores de m	26
7.	Valores de $\langle \hat{n}(t) \rangle$ para distintos valores de m	35

1. Introducción

1.1. Cuantización del campo electromagnético

En este capítulo se presenta una discusión de la cuantización del campo electromagnético y se discuten algunas de sus propiedades enfatizando la interpretación del fotón como una excitación elemental de un modo normal del campo. Nos limitamos al caso de un campo con un solo modo confinado por paredes conductoras en una cavidad unidimensional.

Consideremos una cavidad unidimensional a lo largo del eje Z , con paredes perfectamente conductoras en $Z = 0$ y $Z = L$ (tal como se muestra en la figura(1))

[1] El campo eléctrico debe desvanecerse en las fronteras y debe tomar la forma de una onda estacionaria. Asumimos que en la cavidad no hay ninguna fuente de radiación, es decir no hay corrientes, cargas, ni algún medio dieléctrico. Asumimos que el campo está polarizado en la dirección X

$$\vec{E}(r, t) = \hat{e}_x E_x(z, t),$$

donde e_x es el vector unitario de polarización.

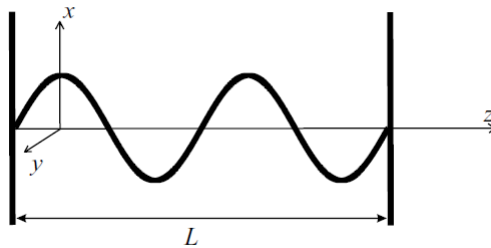


Figura 1: Cavidad con paredes perfectamente conductoras en $Z = 0$ y $Z = L$ con un campo eléctrico polarizado a lo largo del eje X.

Partiendo de ecuaciones de Maxwell en el vacío

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (4)$$

un campo de un solo modo que satisface las ecuaciones de Maxwell con condiciones de frontera $\vec{E}(0) = \vec{E}(L) = 0$ está dado por

$$E_x(z, t) = \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} q(t) \sin(kz). \quad (5)$$

Donde ω es la frecuencia del modo, $k = \frac{\omega}{c}$ es el número de onda, c la velocidad de la luz en el vacío, V es el volumen de la cavidad y $q(t)$ es un factor dependiente del tiempo con unidades de longitud el cual actúa como la coordenada canónica de posición. El campo magnético en la cavidad lo calculamos a partir de las ecuaciones (2), (5)

$$B_y(z, t) = \left(\frac{\mu_0 \epsilon_0}{k} \right) \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right) \dot{q}(t) \cos(kz). \quad (6)$$

Aquí $\dot{q}(t)$ toma el rol de la variable canónica de momento, es decir $p(t) = \dot{q}(t)$.

La energía o Hamiltoniano H de un campo de un solo modo está dada por

$$H = \frac{1}{2} \left[\epsilon_0 E_x^2(r, t) + \frac{1}{\mu_0} B_y^2(r, t) \right]$$

$$H = \frac{1}{2} \left[\epsilon_0 E_x^2(z, t) + \frac{1}{\mu_0} B_y^2(z, t) \right], \quad (7)$$

a partir de las ecuaciones (5) y (6) es sencillo mostrar que

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2). \quad (8)$$

Podemos observar que un campo de un solo modo es formalmente equivalente a un oscilador armónico de masa unitaria, donde los campos eléctrico y magnético toman el papel de las variables canónicas de posición y momento respectivamente. Hasta el momento tenemos el Hamiltoniano para un campo clásico de un solo modo. Para cuantizarlo basta con proponer que las variables canónicas conjugadas ahora sean operadores, es decir $p \rightarrow \hat{p}$ y $q \rightarrow \hat{q}$ y además satisfacen la relación de conmutación

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar.$$

Con esto obtenemos el Hamiltoniano de un campo electromagnético (de un solo modo) cuantizado

$$H = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2). \quad (9)$$

1.2. Oscilador armónico cuántico

En mecánica clásica un oscilador armónico es una partícula que se mueve a lo largo de un eje sujeta a una fuerza de restitución proporcional al desplazamiento. En mecánica cuántica el problema equivalente en una dimensión es una partícula de masa m con el Hamiltoniano [2]

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2 \omega^2 q^2) \quad (10)$$

con q la coordenada de posición de la partícula, p la coordenada de momento y ω la frecuencia de oscilación. Además las variables canónicas q y p satisfacen la relación de conmutación

$$[q, p] = i\hbar. \quad (11)$$

Escribiendo el Hamiltoniano en variables adimensionales tenemos

$$H = \frac{1}{2} (P^2 + Q^2) \quad (12)$$

con

$$q = \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^{1/2} Q$$
$$p = (m\omega\hbar)^{1/2} P$$
$$\mathcal{H} = H\hbar\omega,$$

Los operadores Hermitianos P y Q satisfacen la relación de conmutación

$$[Q, P] = 1. \quad (13)$$

Nuestro problema ahora es encontrar los eigenvalores y construir las eigenfunciones del Hamiltoniano dado en la ecuación (12), para hacerlo substituiremos el Hamiltoniano en la ecuación de Schrödinger:

$$\frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{dQ^2} + Q^2 \right] \Psi = E\Psi. \quad (14)$$

En la literatura encontramos dos formas para resolver este problema, la primera es de manera rigurosa resolviendo la ecuación a 'fuerza bruta' y la otra forma es de manera algebraica utilizando los operadores escalera los cuales vamos a definir como

$$\hat{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} (Q + iP) \quad (15)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{\sqrt{2}}{2} (Q - iP). \quad (16)$$

Donde \hat{a} y \hat{a}^\dagger por construcción mutuamente adjuntos y satisfacen la relación de conmutación

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (17)$$

Reescribimos la ecuación (12) en términos de los operadores de escalera y obtenemos

$$H = \frac{1}{2} (\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}), \quad (18)$$

y sea

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a} \quad (19)$$

donde \hat{n} por construcción es un operador Hermitiano .

La ecuación (18) se reduce a

$$H = \hat{n} + \frac{1}{2}. \quad (20)$$

De la ecuación (17) y (19) obtenemos las relaciones:

$$\hat{n}\hat{a} = \hat{a}(\hat{n} - 1) \quad (21)$$

$$\hat{n}\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger(\hat{n} + 1). \quad (22)$$

El problema de eigenvalores que intentamos resolver es equivalente a construir las eigenfunciones del operador \hat{n} definido por la ecuación (19). Para esto enunciaremos y demostraremos el siguiente teorema. [3]

Teorema: Si $|\nu\rangle$ es eigenvector de \hat{n} , y ν es su correspondiente eigenvalor, entonces:

1. necesariamente $\nu \geq 0$
2. si $\nu = 0$, $\hat{a}|\nu\rangle = 0$; si no $\hat{a}|\nu\rangle$ es un vector distinto de cero con norma $\nu\langle\nu|\nu\rangle$, y es eigenvector de \hat{n} perteneciente al eigenvalor $\nu - 1$
3. $\hat{a}^\dagger|\nu\rangle$ es un vector distinto de cero; su norma es $(\nu + 1)\langle\nu|\nu\rangle$, y es un

eigenvector de \hat{n} correspondiente a el eigen valor $\nu + 1$.

Demostración

Por hipótesis

$$\hat{n} |\nu\rangle = \nu |\nu\rangle, \quad \langle \nu | \nu \rangle > 0.$$

Usando las ecuaciones (19) y (17) deducimos las respectivas normas de $\hat{a} |\nu\rangle$ y $\hat{a}^\dagger |\nu\rangle$:

$$\langle \nu | \hat{a}^\dagger \hat{a} |\nu\rangle = \langle \nu | \hat{n} |\nu\rangle = \nu \langle \nu | \nu \rangle \quad (23)$$

$$\langle \nu | \hat{a} \hat{a}^\dagger |\nu\rangle = \langle \nu | (\hat{n} + 1) |\nu\rangle = (\nu + 1) \langle \nu | \nu \rangle. \quad (24)$$

La norma de un vector en el espacio de Hilbert es no negativa, y el desvanecimiento de la norma es una condición necesaria y suficiente para el desvanecimiento del vector. De esta manera es necesario y suficiente que $\nu \geq 0$ (propiedad 1). Por otro lado, $\hat{a} |\nu\rangle$ y $\hat{a}^\dagger |\nu\rangle$ satisfacen sus correspondientes ecuaciones de eigenvalores de acuerdo con las relaciones (21) y (22),

$$\hat{n} \hat{a} |\nu\rangle = \hat{a} (\hat{n} - 1) |\nu\rangle = (\nu - 1) \hat{a} |\nu\rangle \quad (25)$$

$$\hat{n} \hat{a}^\dagger |\nu\rangle = \hat{a}^\dagger (\hat{n} + 1) |\nu\rangle = (\nu + 1) \hat{a}^\dagger |\nu\rangle. \quad (26)$$

Q.E.D.

El conjunto de operadores $\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{n}, \hat{1}\}$ es cerrado bajo la conmutación, tal como se muestra en la tabla (1)

	\hat{a}	\hat{a}^\dagger	\hat{n}	1
\hat{a}	0	1	\hat{a}	0
\hat{a}^\dagger	-1	0	$-\hat{a}^\dagger$	0
\hat{n}	$-\hat{a}$	$2\hat{a}^\dagger$	0	0
1	0	0	0	0

Tabla 1: Tabla de conmutadores de los operadores del Hamiltoniano de oscilador armónico .

1.3. Operador de evolución temporal para un sistema conservativo

Un sistema cuántico $|\Psi\rangle$ aislado de cualquier influencia externa evoluciona en el tiempo de manera exactamente predecible. Sea $|\Psi(t_0)\rangle$ el ket que representa a un estado en el tiempo t_0 ; el ket $|\Psi(t)\rangle$ que representa su estado al siguiente tiempo t puede ser determinado exactamente a partir de la forma específica de $|\Psi(t_0)\rangle$ asumiendo que de ahora en adelante el sistema no fue sometido a ninguna observación en el intervalo (t_0, t) .

Primero postularemos que la superposición lineal de estados se conserva en el tiempo, en consecuencia, la correspondencia entre $|\Psi(t_0)\rangle$ y $|\Psi(t)\rangle$ es lineal y define cierto operador lineal $\hat{U}(t, t_0)$, el cual se llama operador de evolución temporal:

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle, \quad (27)$$

donde el operador de evolución temporal \hat{U} es solución a la ecuación de Schrödinger con condición inicial

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} = \hat{H} \hat{U}, \quad \hat{U}(t = t_0) = \hat{1}, \quad (28)$$

si el sistema es conservativo, es decir, si su energía representada por el Hamiltoniano H no tiene una dependencia temporal explícita, entonces $\hat{U}(t_0, t)$ puede

ser encontrado integrando directamente la ecuación (28):

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t-t_0)}. \quad (29)$$

2. Estados coherentes de Glauber.

En la literatura es frecuentemente sugerido que el límite clásico del campo cuantizado es el límite cuando el número de fotones se vuelve muy grande, tan grande que el operador de número \hat{n} se convierte en una variable continua. Sin embargo el valor promedio del campo $\langle \hat{n} | \hat{E} | \hat{n} \rangle = 0$ sin importar que tan grande sea el número de fotones.

Sabemos que para un punto fijo en el espacio el campo clásico oscila de manera sinusoidal en el tiempo. Claramente esto no pasa para el valor esperado del operador de campo para un estado de número. En este capítulo presentamos un conjunto de estados, los estados coherentes, que dan lugar a un estado en el límite clásico y que de hecho son los estados 'más clásicos' del oscilador armónico cuántico.

Los estados coherentes pueden ser obtenidos a partir de cualquiera de las siguientes definiciones[4]:

1. Como eigenestados del operador de aniquilación \hat{a}

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$$

2. Como los estados obtenidos de aplicar el operador de desplazamiento

$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})$ en el estado de vacío del oscilador armónico.

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle$$

3. Como los estados que satisfacen el principio de incertidumbre de Heisenberg

con el mínimo valor permitido, es decir:

$$\Delta X \Delta P = \frac{\hbar}{2}$$

2.1. Estados coherentes como eigenestados del operador de aniquilación

Partiendo de la definición $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ escribiremos los estados $|\alpha\rangle$ en términos de los estados de Fock

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \quad (30)$$

aplicando \hat{a} y reacomodando los subíndices tenemos

$$\sum_m c_{m+1} \sqrt{m+1} |m\rangle = \alpha \sum_n c_n |n\rangle,$$

aplicando la relación de ortogonalidad de los estados de Fock

$$\langle n|m\rangle = \delta_{n,m},$$

encontramos

$$c_1 = \alpha c_0,$$

aplicando \hat{a} k veces

$$\hat{a}^k |\alpha\rangle = \alpha^k \sum_n c_n |n\rangle,$$

obtenemos la relación de recurrencia para los coeficientes c_n

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0, \quad (31)$$

sustituyendo en la ec(30) llegamos a:

$$|\alpha\rangle = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle,$$

normalizando encontramos c_0 encontnramos finalmente

$$c_0 = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right),$$

y sustituyendo nuevamente en (30) obtenemos:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (32)$$

2.2. Estados coherentes a partir del operador de desplazamiento

El operador de desplazamiento está definido como

$$D(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}). \quad (33)$$

Para encontrar los estados coherentes primero escribiremos el operador de desplazamiento como un producto de exponenciales [5], para hacerlo escribimos :

$$e^{\lambda(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})} = e^{\lambda \alpha \hat{a}^\dagger} F(\lambda), \quad (34)$$

donde λ es un parámetro tal que al final haremos $\lambda = 1$.

Derivando respecto a λ y eliminando términos semejantes tenemos:

$$-\alpha^* e^{-\lambda \alpha \hat{a}^\dagger} \hat{a} e^{\lambda \alpha \hat{a}^\dagger} F(\lambda) = \frac{dF}{d\lambda},$$

aplicando la transformación anterior llegamos a

$$-(\alpha^* \hat{a} + \lambda |\alpha|^2) F(\lambda) = \frac{dF}{d\lambda},$$

para hacerlo, usamos el teorema B.C.H que establece que [5]

$$e^{\alpha \hat{A}} \hat{B} e^{-\alpha \hat{A}} = \hat{B} + \alpha [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} \alpha^2 [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$$

integrando llegamos a

$$F(\lambda) = e^{-\alpha^* \hat{a} \lambda - \frac{1}{2} |\alpha|^2 \lambda^2},$$

hacemos $\lambda = 1$ y sustituimos en la ecuación (34) llegando a una forma de un producto de exponenciales para el operador de desplazamiento

$$D(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}} e^{-\frac{1}{2} |\alpha|^2}. \quad (35)$$

Aplicando $D(\alpha) |0\rangle$ y usando $\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$, $\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$ tenemos que

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2} |\alpha|^2} |0\rangle &= e^{-\frac{1}{2} |\alpha|^2} |0\rangle, \\ e^{-\alpha^* \hat{a}} |0\rangle &= \sum_n \frac{(-\alpha)^n}{n!} \hat{a}^n |0\rangle = |0\rangle, \\ e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle &= \sum_n \frac{\alpha^n}{n!} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle = \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \end{aligned}$$

usando los resultados anteriores obtenemos:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2} |\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (36)$$

2.3. Como estados de mínima dispersión

De la relación de incertidumbre de Heisenberg

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2},$$

donde

$$\Delta X = \sqrt{\langle \hat{X}^2 \rangle - \langle \hat{X} \rangle^2}, \quad \Delta P = \sqrt{\langle \hat{P}^2 \rangle - \langle \hat{P} \rangle^2}.$$

Partiendo de las definiciones para \hat{X} y \hat{P} en términos de los operadores de creación y aniquilación :

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad \hat{P} = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} i (\hat{a}^\dagger - \hat{a}),$$

y utilizando la definición

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle,$$

encontramos los valores para la dispersión de los operadores \hat{X} , \hat{P} :

$$\Delta X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}, \tag{37}$$

$$\Delta P = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}, \tag{38}$$

de esta manera tenemos

$$\Delta X \Delta P = \frac{\hbar}{2}. \tag{39}$$

2.4. Evolución temporal

Como se discutió en la sección 1.3, partiendo del Hamiltoniano de un oscilador armónico

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right). \quad (40)$$

El operador de evolución temporal correspondiente al Hamiltoniano \hat{H} es

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-i\omega(\hat{n} + \frac{1}{2})(t-t_0)},$$

aplicando $\hat{U}(t, t_0) |\alpha\rangle$, obtenemos $|\alpha(t)\rangle$,

$$|\alpha(t)\rangle = e^{\frac{-i\omega}{2}(t-t_0)} e^{-i\omega(t-t_0)\hat{n}} |\alpha\rangle,$$

usando la definición dada por la ecuación (36) obtenemos

$$e^{-i\omega(t-t_0)\hat{n}} |\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega(t-t_0)\hat{n}} |n\rangle.$$

Desarrollando $e^{-i\omega(t-t_0)\hat{n}}$ y aplicando al ket $|\alpha\rangle$, obtenemos

$$e^{-i\omega(t-t_0)\hat{n}} |\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega(t-t_0)n} |n\rangle.$$

Finalmente llegamos a:

$$|\alpha(t)\rangle = e^{\frac{-i\omega(t-t_0)}{2}} \left| \alpha e^{-i\omega(t-t_0)} \right\rangle. \quad (41)$$

Podemos notar que un estado coherente de oscilador armónico al evolucionar en el tiempo permanece como un estado coherente con una fase adquirida.

2.5. Relaciones de no ortogonalidad

Los estados coherentes forman una base no ortogonal sobrecompleta, es decir, que no hay una manera única de escribir un estado en términos de la base de estados coherentes, esta base satisface la siguiente relación de no ortogonalidad: Sean $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ dos estados coherentes con la forma

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$|\beta\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k}{\sqrt{k!}} |k\rangle.$$

Tomando el producto escalar

$$\langle\alpha|\beta\rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2)} \sum_{n,p} \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} \frac{\beta^p}{\sqrt{p!}} \langle n|p\rangle,$$

normalizando obtenemos

$$\langle\alpha|\beta\rangle = e^{-\frac{(\alpha^*\beta+|\alpha|^2+|\beta|^2)}{2}} \sum_n \frac{(\alpha^*\beta)^n}{n!}.$$

Finalmente obtenemos la relación de no ortogonalidad:

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2}, \quad (42)$$

2.6. Probabilidad de ocupación

La probabilidad de encontrar el campo en un estado $|n\rangle$ cualquiera, está dada por [3]

$$P_n = |\langle n|\alpha\rangle|^2. \quad (43)$$

Reemplazando la ecuación (36) en (43) obtenemos

$$P_n = \left| \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} \langle n|k\rangle \right|^2.$$

Por ortogonalidad de los estados de número, el bracket $\langle k|n\rangle$ nos da una delta de Kronecker, es decir

$$\langle n|k\rangle = \delta_{n,k}$$

la cual nos elimina todos los elementos de la suma, excepto el término con $k = n$, con esto obtenemos

$$P_n = \exp(-|\alpha|^2) \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}.$$

Podemos observar que su estadística es Poissoniana, lo cual implica que los estados coherentes de Glauber son un sistema semi-clásico. En la figura (2) se muestran las probabilidades de ocupación para los valores de $\alpha = 0.5, \alpha = 2, \alpha = 4$.

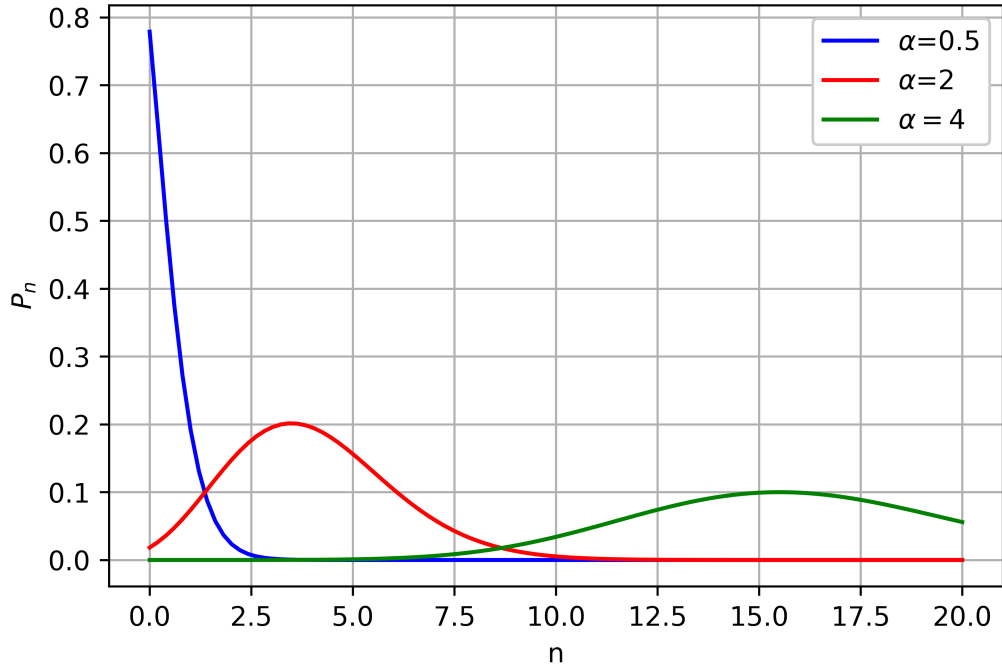


Figura 2: Valores de la probabilidad de ocupacion P_n para diferentes valores de α .

3. Estados coherentes con fotones añadidos y propiedades

En el capítulo 2 discutimos los estados coherentes de Glauber, los cuales son los estados cuánticos 'más clásicos' posibles, por el otro lado, los estados de número (estados de Fock) son estados puramente cuántos con ningún análogo clásico. En este capítulo discutiremos sobre un estado que es intermedio entre los estados de número y los estados coherentes. Consideramos un estado obtenido a partir de aplicar repetidamente el operador de creación de fotones \hat{a}^\dagger sobre un

estado coherente $|\alpha\rangle$. Introducimos el estado $|\alpha, m\rangle$ cómo [6]:

$$|\alpha, m\rangle = \frac{\hat{a}^{\dagger m} |\alpha\rangle}{[\langle\alpha|\hat{a}^m\hat{a}^{\dagger m}|\alpha\rangle]^{\frac{1}{2}}}, \quad (44)$$

donde $|\alpha\rangle$ es un estado coherente, m es un entero. En el límite cuando $\alpha \rightarrow 0$ $m \rightarrow 0$ $|\alpha, m\rangle$ se reduce al estado $|0\rangle$ (un estado de Fock), el cual es un estado coherente.

Los estados coherentes con fotones añadidos están normalizados, con función de normalización :

$$\langle\alpha|\hat{a}^m\hat{a}^{\dagger m}|\alpha\rangle = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(m!)^2}{[(m-p)!]^2 p!} |\alpha|^{2(m-p)} = L_m(-|\alpha|^2) m!, \quad (45)$$

donde $L_m(x)$ es el polinomio de Laguerre de orden m definido por:

$$L_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n (m!)}{(n!)(m-n)!}$$

3.1. Definiciones equivalentes para los estados coherentes con fotones añadidos

En el capítulo 2 construimos los estados coherentes de Glauber a partir de tres definiciones equivalentes, como eigen estados del operador de aniquilación, como resultado de aplicar el operador de desplazamiento en el estado de vacío y como aquellos estados que saturan la relación de incertidumbre de Heisenberg. En esta sección construiremos los estados coherentes con fotones añadidos con dos representaciones completamente equivalentes.

- **En términos de los estados de Fock**

Partiendo de la ecuación (44),

$$|\alpha, m\rangle = N_m(\alpha) \hat{a}^{\dagger m} |\alpha\rangle = N_m(\alpha) \sum_k \frac{\alpha^k}{k!} \hat{a}^{\dagger m} |k\rangle,$$

si aplicamos $\hat{a}^{\dagger m} |k\rangle$ obtenemos

$$\hat{a}^{\dagger m} |k\rangle = \sqrt{\frac{(k+m)!}{k!}} |k+m\rangle,$$

usando esto llegamos a

$$|\alpha, m\rangle = \sum_k \frac{\alpha^k}{k!} \sqrt{(k+m)!} |k+m\rangle \quad (46)$$

- **En términos de los estados de Fock desplazados.** Partiendo de la definición de los estados coherentes de Glauber como estados obtenidos al aplicar el operador de desplazamiento en el estado de vacío

$$\begin{aligned} |\alpha, m\rangle &= N_m(\alpha) \hat{a}^{\dagger m} |\alpha\rangle = N_m(\alpha) \hat{a}^{\dagger m} \hat{D}(\alpha) |0\rangle, \\ |\alpha, m\rangle &= N_m(\alpha) \hat{D}(\alpha) \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a}^{\dagger m} \hat{D}(\alpha) |0\rangle \end{aligned}$$

haciendo la transformación $\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a}^\dagger \hat{D}(\alpha)$ obtenemos

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a}^\dagger \hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*.$$

Como podemos ver, el operador $\hat{D}(\alpha)$ desplaza al operador de creación una cantidad α^* .

Sustituyendo tenemos

$$|\alpha, m\rangle = N_m(\alpha) \hat{D}(\alpha) \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a}^{\dagger m} \hat{D}(\alpha) |0\rangle = N_m(\alpha) \hat{D}(\alpha) \left[(\hat{a}^\dagger + \alpha^*)^m \right] |0\rangle,$$

debido que \hat{a}^\dagger y α^* conmutan, el término $(\hat{a}^\dagger + \alpha^*)^m$ lo podemos desarrollar como un binomio de Newton

$$(\hat{a}^\dagger + \alpha^*)^m = \sum_{p=0}^m \binom{m}{p} \alpha^{*(m-p)} \hat{a}^{\dagger p},$$

en donde $\binom{m}{p} = \frac{m!}{p!(m-p)!}$, finalmente obtenemos

$$|\alpha, m\rangle = N_m(\alpha) \sum_{p=0}^m \binom{m}{p} \sqrt{p!} \alpha^{*(m-p)} \hat{D}(\alpha) |p\rangle. \quad (47)$$

Cabe destacar de la ecuación (47) el término $\hat{D}(\alpha) |p\rangle$, el cual nos define un estado de número desplazado.

Los estados coherentes con fotones añadidos no necesariamente son estados de mínima dispersión debido a que presentan compresión en una de sus cuadraturas. Este último punto será analizado con detalle en la sección 3.5 .

3.2. Producto escalar

Como en el caso de los estados coherentes de Glauber, los estados coherentes con fotones añadidos son no ortogonales, su producto escalar para los estados $\langle \alpha, m |, |\alpha, n \rangle$ para $m \neq n$

$$\langle \alpha, m | \alpha, n \rangle = \frac{e^{-|\alpha|^2}}{[m! L_m(-|\alpha|^2) n! L_n(-|\alpha|^2)]^{1/2}} \times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2p}}{p! (m+p-n)!} (m+p)! \alpha^{m-n}. \quad (48)$$

Para los estados $\langle \beta, m |, |\alpha, m \rangle$ para $\beta \neq \alpha$ obtenemos

$$\langle \beta, m | \alpha, m \rangle = \frac{L_m(-\beta^* \alpha)}{[L_m(-|\beta|^2) L_m(-|\alpha|^2)]^{1/2}}. \quad (49)$$

3.3. Caracter sub-Poissoniano

La probabilidad de encontrar n fotones en el campo está dada por

$$P(n) = |\langle n|\alpha, m\rangle|^2,$$

es decir

$$P(n) = \frac{n!|\alpha|^{2(n-m)} \exp\{-|\alpha|^2\}}{[(n-m)!]^2 L_m(-|\alpha|^2) m!}, \quad (50)$$

la cual es cero para $n < m$. Esta distribución tiene una variación menor que una distribución de Poisson, para verificar esto, se utiliza el parámetro Q (parámetro de Mandel), este parámetro nos ayuda a cononer la estadística de un estado cualquiera. El parámetro de Mandel está definido por

$$Q(\alpha, m) = \frac{\langle \alpha, m | n^2 | \alpha, m \rangle - \langle \alpha, m | n | \alpha, m \rangle^2}{\langle \alpha, m | n | \alpha, m \rangle}. \quad (51)$$

Para valores de $Q < 1$ se tiene una estadística sub-Poissoniana, para $Q > 1$ tenemos una estadística super-Poissoniana y para $Q = 1$ tenemos un estado coherente.

Calculando los valores esperados correspondientes para un estado coherente con fotones añadidos obtenemos

$$Q(\alpha, m) = \left(\frac{1}{\frac{(m+1)L_{m+1}}{L_m} - 1} \right) \left[\frac{(m+2)(m+1)L_{m+2} - 3(m+1)L_{m+1}}{L_m} \right] - \left[\frac{(m+1)^2 L_{m+1}^2 + 2(m+1)L_{m+1} - 1}{L_m^2} \right]. \quad (52)$$

Es importante destacar que por comodidad para el lector, en la ecuación (52) se omitió la dependencia de los parámetros α y m . La dependencia de estos parámetro se encuentra en las funciones $L_k = L_k(\alpha, m)$, las cuales son polinomios de Laguerre de orden K .

En la figura(3) podemos observar el parámetro $Q(\alpha, m)$ en función de $|\alpha|$ para diferentes valores de m . Los valores de $Q(\alpha, m)$ menores a 1 significan una estadística sub-Poissoniana del campo. También notamos que para $m = 0$ $Q(\alpha, 0) = 1$ el cuál corresponde a los estados coherentes de Glauber. Para $\alpha \neq 0$, $m \neq 0$ el campo en un estado $|\alpha, m\rangle$ presenta una estadística sub-Poissoniana.

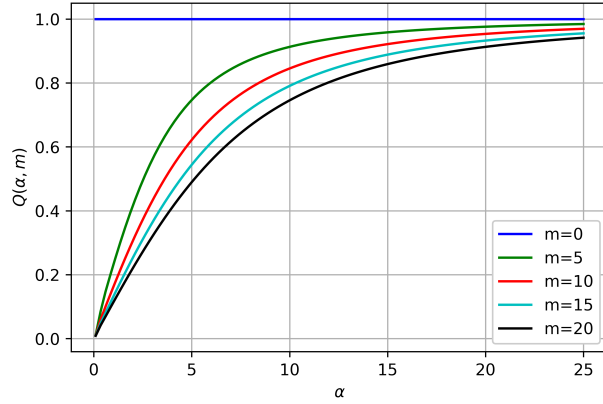


Figura 3: Parámetro de Mandel ($Q(\alpha, m)$) en función de $|\alpha|$ para diferentes cantidades de fotones añadidos (m).

3.4. Función de Husimi

La función Q de Husimi representa la distribución de un estado cuántico en el espacio fase y está definida como la traza de la matriz densidad ρ sobre la base de estados coherentes $\{|z\rangle\}$,

$$Q(z) = \frac{1}{\pi} \langle z | \hat{\rho} | z \rangle = \frac{1}{\pi} \langle z | \alpha, m \rangle \langle \alpha, m | z \rangle. \quad (53)$$

Haciendo las proyecciones correspondientes obtenemos

$$Q(z) = \frac{|z|^{2m}}{m! L_m(-|\alpha|^2)} \exp\{-|z - \alpha|^2\}. \quad (54)$$

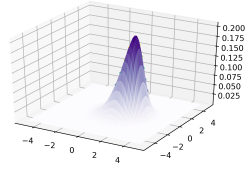
La función de Husimi correspondiente a un estado de Fock es

$$Q(z) = \frac{1}{\pi} e^{-|z|^2} \frac{|z|^{2n}}{n!},$$

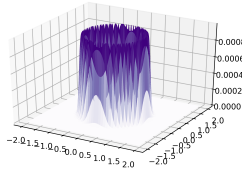
y para un estado coherente de Glauber tenemos

$$Q(z) = \frac{1}{\pi} e^{-|z-\alpha|^2}. \quad (55)$$

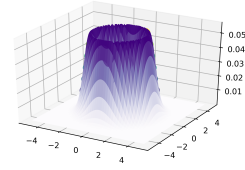
En la figura (4) se muestran las gráficas de la función de Husimi para diferentes estados. En la figura(4a) se muestra para un estado coherente con fotones añadidos $|\alpha, m\rangle = |0.5, 2\rangle$, la figura (4b) es la correspondiente para un estado de Fock $|n\rangle = |5\rangle$ y en la figura (4c) se muestra para el estado $|\alpha, m\rangle = |0.001, 5\rangle$. Como podemos observar, en el límite cuando $\alpha \rightarrow 0$, la función de Husimi para el estado $|\alpha, m\rangle$ tiende al estado de Fock $|m\rangle$.



(a) Función de Husimi para un estado coherente con fotones añadidos $\alpha = 0.5, m=2$



(b) Función de Husimi para el estado de Fock $|n\rangle = |5\rangle$

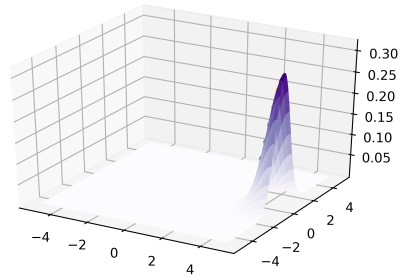


(c) Función de Husimi para un estado coherente con fotones añadidos $\alpha = 0.001, m = 5$

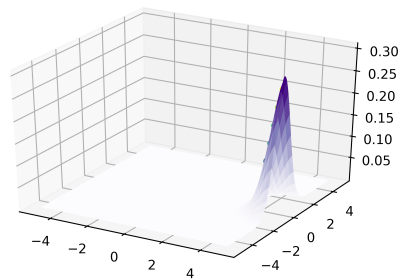
Figura 4: Función de Husimi para estados coherentes con fotones añadidos y para estado de Fock con $n = 5$

En la figura (5) comparamos las funciones de Husimi para un estado coherente de Glauber (figura(5a)) y de un estado coherente con fotones añadidos (figura (5b)) las cuales tienen el mismo α . Podemos notar que para valores de $\alpha > 1$ el comportamiento de los estados coherentes con fotones añadidos es muy parecido al de los estados coherentes de Glauber. Con esto concluimos que los estados

coherentes con fotones añadidos son estados intermedios entre los estados de Fock y los estados coherentes de Glauber.



(a) Función de Husimi para un estado coherente de Glauber con $\alpha = 5$



(b) Función de Husimi para el estado coherente con fotones añadidos $|\alpha, m\rangle = |5, 1\rangle$

Figura 5: Función de Husimi para estados coherentes con fotones añadidos y para un estado Coherente de Glauber

3.5. Dispersión en las cuadraturas

Sean X y P las cuadraturas del campo, definidas por:

$$X = \frac{1}{2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (56)$$

$$P = \frac{i}{2} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \quad (57)$$

$$\cdot \quad (58)$$

Podemos calcular las fluctuaciones en X y P de la siguiente manera:

$$\Delta X = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}$$

$$\Delta P = \sqrt{\langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2},$$

en donde los respectivos valores esperados para X , X^2 son

$$\langle X \rangle = \text{Re}(\alpha) N_m^2(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n} (n+m+1)!}{n!(n+1)!}, \quad (59)$$

$$\langle X^2 \rangle = \frac{1}{4} \left[2 \left(\text{Re}(\alpha)^2 - \text{Im}(\alpha)^2 \right) N_m^2(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n} (n+m+2)!}{n!(n+2)!} \right. \\ \left. + 2N_m^2(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n} (n+m)! (n+m)}{(n!)^2} + 1 \right] \quad (60)$$

Para $\langle P \rangle$ y $\langle P^2 \rangle$:

$$\langle P \rangle = \text{Im}(\alpha) N_m^2(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n} (n+m+1)!}{n!(n+1)!}, \quad (61)$$

$$\langle P^2 \rangle = -\frac{1}{4} \left[2 \left(\text{Re}(\alpha)^2 - \text{Im}(\alpha)^2 \right) N_m^2(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n} (n+m+2)!}{n!(n+2)!} \right. \\ \left. - 2N_m^2(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n} (n+m)! (n+m)}{(n!)^2} - 1 \right] \quad (62)$$

En la figura 6 podemos observar la dispersión de la cuadratura X para diferentes valores de $|\alpha|$ y m . Para $m = 0$ (estado coherente) y $|\alpha| \geq 0.7$ $S_x = 1$, mientras que para $m \neq 0$ $S_x < 1$ lo cual implica que la cuadratura X presenta compresión.

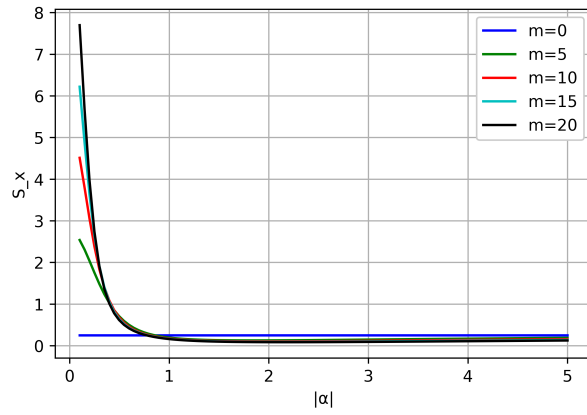


Figura 6: Dispersión S_x en la cuadratura X en función de $|\alpha|$, para diferentes valores de m .

4. Evolución temporal de los estados coherentes con fotones añadidos

4.1. Teorema de Wei-Norman

EL operador de evolución temporal \hat{U} correspondiente a un Hamiltoniano con la forma

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^m a_i(t) \hat{X}_i,$$

en términos de los operadores \hat{X}_i que cierran un algebra de Lie finita, puede ser escrito como un producto de exponenciales

$$\hat{U}(t) = \prod_{i=1}^m e^{\alpha_i \hat{X}_i}, \quad (63)$$

donde los α_i son funciones del tiempo complejas por determinar [7]

4.2. Operador de evolución temporal para los estados coherentes con fotones añadidos

Suponiendo que el estado $|\alpha, m\rangle$ fue creado de alguna manera en una cavidad o en una trampa de iones en el momento $t = 0$, supongamos que el oscilador (modo de campo) comienza a variar en el tiempo de acuerdo con la ley $\Omega(t)$. La evolución del sistema para $t > 0$ está determinada por la ecuación de Schrödinger con el Hamiltoniano

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\hat{p}^2}{m} + m\Omega^2(t) \hat{q}^2 \right], \quad (64)$$

donde \hat{p} y \hat{q} son las variables canónicas conjugadas del sistema, y Ω es la frecuencia definida como [8]

$$\Omega(t) = \Omega_0 (1 + 2\gamma \cos(2\Omega_0 t)), \quad |\gamma| \ll 1, \quad (65)$$

sustituyendo (65) en (64) reescribimos el Hamiltoniano

$$\hat{H}(t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\Omega_0^2 q^2}{2} (1 + 2\gamma \cos(2\Omega_0 t))^2, \quad (66)$$

$$\hat{H}(t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega_0^2 q^2 + m\Omega_0^2 q^2 [2\gamma \cos(2\Omega_0 t) (1 + \gamma \cos(2\Omega_0 t))]. \quad (67)$$

Entonces podemos escribir el Hamiltoniano como $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + V(t)$, con

$$\hat{H}_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega_0^2 q^2 \quad (68)$$

$$V(t) = m\Omega_0^2 q^2 [2\gamma \cos(2\Omega_0 t) (1 + \gamma \cos(2\Omega_0 t))]. \quad (69)$$

Reescribimos el Hamiltoniano en términos de los operadores de creación y aniquilación \hat{a} y \hat{a}^\dagger ,

$$\hat{H}_0 = \hbar\Omega_0 \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right), \quad (70)$$

$$V(t) = F(t) [\hat{a}^{\dagger 2} + 2\hat{n} + \hat{a}^2 + 1]. \quad (71)$$

donde $F(t) = \Omega_0 [2\gamma \cos(2\Omega_0 t) (1 + \gamma \cos(2\Omega_0 t))]$.

El operador de evolución temporal de todo del sistema en la representación de interacción lo construimos como

$$\hat{U} = \hat{U}_0 \hat{U}_I,$$

donde \hat{U}_0, \hat{U}_I son los operadores de evolución temporal correspondientes a \hat{H}_0 y \hat{H}_I respectivamente, con

$$\hat{H}_I = \hat{U}_0^\dagger V(t) \hat{U}_0. \quad (72)$$

Para encontrar \hat{H}_I primero necesitamos conocer \hat{U}_0 . El operador de evolución temporal \hat{U}_0 cumple con la ecuación

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}_0 = \hat{H}_0 \hat{U}_0 = \hbar\Omega_0 \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right) \hat{U}_0,$$

debido a que \hat{H}_0 no depende del tiempo, podemos integrar directamente y obtenemos

$$\hat{U}_0 = \exp(-i\Omega_0 t \hat{n}). \quad (73)$$

Para encontrar \hat{H}_I , sustituimos \hat{U}_0 en la ecuación (72) y obtenemos la expresión

$$\hat{H}_I = F(t) [\hat{a}^{\dagger 2} e^{2i\Omega_0 t} + 2\hat{n} + \hat{a}^2 e^{-2i\Omega_0 t} + 1] \quad (74)$$

Debido a que todos los operadores del Hamiltoniano de interacción \hat{H}_I no tienen dependencia temporal y además cierran un álgebra de Lie finita (tal como se muestra en la tabla(2)).

	$\hat{a}^{\dagger 2}$	\hat{n}	\hat{a}^2	1
$\hat{a}^{\dagger 2}$	0	$-2\hat{a}^{\dagger 2}$	$4\hat{n} + 2$	0
\hat{n}	$2\hat{a}^{\dagger 2}$	0	$-2\hat{a}^2$	0
\hat{a}^2	$-4\hat{n} - 2$	$2\hat{a}^{\dagger 2}$	0	0
1	0	0	0	0

Tabla 2: Tabla de conmutadores de los operadores del Hamiltoniano de interacción.

Podemos utilizar el teorema de Wei-Normann y escribir el operador de evolución temporal en la representación de interacción como

$$\hat{U}_I = \prod_{i=1}^n e^{\alpha_i \hat{x}_i} = e^{\alpha_1 \hat{a}^{\dagger 2}} e^{\alpha_2 \hat{n}} e^{\alpha_3 \hat{a}^2} e^{\alpha_4}, \quad (75)$$

con los $\alpha_i = \alpha_i(t)$ por determinar.

Para encontrar los α_i sustituiremos \hat{U}_I dada en la ecuación (74) en la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}_I = \hat{H}_I \hat{U}_I,$$

susstituyendo

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[e^{\alpha_1 \hat{a}^{\dagger 2}} e^{\alpha_2 \hat{n}} e^{\alpha_3 \hat{a}^2} e^{\alpha_4} \right] - F(t) \left[\hat{a}^{\dagger 2} e^{2i\omega_0 t} + 2\hat{n} + \hat{a}^2 e^{-2i\omega_0 t} + 1 \right] \hat{U}_I = 0$$

haciendo las derivadas correspondientes y agrupando términos, llegamos al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales acopladas para las α_i con condiciones iniciales

$$i\hbar \dot{\alpha}_1 = F(t) e^{2i\omega_0 t} + 2\alpha_1 F(t) + 4\alpha_1^2 F(t) e^{-2i\omega_0 t} \quad (76)$$

$$i\hbar \dot{\alpha}_2 = F(t) + 4\alpha_1^2 F(t) e^{-2i\omega_0 t} \quad (77)$$

$$i\hbar \dot{\alpha}_3 = F(t) e^{-2i\omega_0 t} e^{2\alpha_2} \quad (78)$$

$$i\hbar \dot{\alpha}_4 = 2F(t) + 2\alpha_1 F(t) e^{-2i\omega_0 t}, \quad (79)$$

$$\alpha_1(t=0) = \alpha_2(t=0) = \alpha_3(t=0) = \alpha_4(t=0) = 0. \quad (80)$$

La ecuación (76) es una ecuación de Riccati, la cual resolveremos de forma numérica al igual que el sistema de ecuaciones completo.

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones para los coeficientes α_i , podemos escribir de forma exacta el operador de evolución temporal para el Hamiltoniano

de interacción como un producto de exponenciales tal como se planteó en la ecuación (74).

Finalmente utilizando las ecuaciones(73) y (74), el operador de evolución temporal para el sistema completo tiene la forma

$$U = U_0 U_I = e^{-i\omega_0 t \hat{n}} e^{\alpha_1 \hat{a}^{\dagger 2}} e^{\alpha_2 \hat{n}} e^{\alpha_3 \hat{a}^2} e^{\alpha_4}. \quad (81)$$

4.3. Evolución temporal de un estado coherente con fotones añadidos

Ahora que el operador de evolución temporal dado por la ecuación (81) correspondiente a nuestro Hamiltoniano descrito por la ecuación (64) podemos calcular como evoluciona en el tiempo un estado coherente con fotones añadidos $|\alpha, m\rangle$. Definimos el estado $|\alpha, m, t\rangle$ como el estado resultante de aplicar el operador de evolución temporal al estado $|\alpha, m\rangle$ de acuerdo con la ecuación (27)

$$|\alpha, m, t\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\alpha, m\rangle, \quad (82)$$

sustituyendo llegamos a

$$\begin{aligned} |\alpha, m, t\rangle = e^{\alpha_4} N_m(\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k+m}{2} \rfloor} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha^k}{k!} (k+m)! \right) \times \left(\sqrt{\frac{1}{(k+m-2l)!}} e^{(\alpha_2(k+m-2l))} \right) \times \\ \times \left(\frac{\alpha_1}{p!} \sqrt{\frac{(k+m-2l+2p)!}{(k+m-2l)!}} e^{(-i\Omega_0 t(k+m-2l+2p))} |k+m-2l+2p\rangle \right) \end{aligned} \quad (83)$$

En donde $\lfloor \frac{k+m}{2} \rfloor$ es el mayor entero del cociente $\frac{k+m}{2}$.

La dependencia temporal del estado coherente con fotones añadidos está dada por los coeficientes $\alpha_i = \alpha_i(t)$ y por la fase adquirida dada por el término $e^{(-i\Omega_0 t)}$.

Podemos observar que para el Hamiltoniano de oscilador paramétrico propuesto, un estado coherente con fotones añadidos evoluciona en el tiempo como una combinación de estados de número en donde se crean y se aniquilan excitaciones simultáneamente.

4.4. Evolución temporal de los operadores \hat{a} , \hat{a}^\dagger , \hat{n}

En mecánica cuántica existen diversas formas de presentar las ecuaciones de movimiento de un sistema. En la representación de Schrödinger la evolución temporal del mismo afecta al estado que lo representa. Por otro lado, en la representación de Heisenberg la evolución temporal afecta únicamente a los operadores que representan las cantidades observables.

En la sección 1.3 mostramos que en la representación de Schrödinger, un estado $|\Psi(t)\rangle$ evoluciona en el tiempo de forma

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle.$$

La representación de Heisenberg es una manera alternativa de representar la evolución temporal de un sistema cuántico, en la que únicamente los operadores tienen dependencia temporal. Una cantidad observable está representada por un operador Hermitiano $\hat{O}(t)$, que en la representación de Heisenberg tiene la forma:

$$\hat{O}_H = \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{O}_S \hat{U}(t, t_0), \quad (84)$$

en donde \hat{O}_s es el operador en la representación de Schrödinger. Ahora calcularemos los operadores $\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{n}$ en la representación de Heisenberg lo cual es equivalente a transformarlos según la ecuación (84), con el operador de evolución temporal dado en la ecuación (81).

Obtener el operador \hat{U}^\dagger es fácil debido a que por construcción, el operador \hat{U} es

unitario y satisface

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^\dagger = \hat{1}, \quad (85)$$

$$\hat{U}^{-1} = \hat{U}^\dagger \quad (86)$$

De esta manera, nuestro operador \hat{U}^\dagger es:

$$\hat{U}^\dagger = e^{-\alpha_4} e^{-\alpha_3 \hat{a}^2} e^{-\alpha_2 \hat{n}} e^{-\alpha_1 \hat{a}^{\dagger 2}} e^{i\omega_0 t \hat{n}}. \quad (87)$$

Transformando \hat{a}^\dagger :

$$\hat{a}^\dagger(t) = \hat{U}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{U} = e^{-\alpha_4} e^{-\alpha_3 \hat{a}^2} e^{-\alpha_2 \hat{n}} e^{-\alpha_1 \hat{a}^{\dagger 2}} e^{i\omega_0 t \hat{n}} \hat{a}^\dagger e^{-i\omega_0 t \hat{n}} e^{\alpha_1 \hat{a}^{\dagger 2}} e^{\alpha_2 \hat{n}} e^{\alpha_3 \hat{a}^2} e^{\alpha_4}$$

$$\hat{a}^\dagger(t) = e^{i\omega_0 t - \alpha_2} \hat{a}^\dagger - 2e^{i\omega_0 t - \alpha_2} \alpha_3 \hat{a}. \quad (88)$$

Transformando \hat{a} :

$$\hat{a}(t) = \hat{U}^\dagger \hat{a} \hat{U} = e^{-\alpha_4} e^{-\alpha_3 \hat{a}^2} e^{-\alpha_2 \hat{n}} e^{-\alpha_1 \hat{a}^{\dagger 2}} e^{i\omega_0 t \hat{n}} \hat{a} e^{-i\omega_0 t \hat{n}} e^{\alpha_1 \hat{a}^{\dagger 2}} e^{\alpha_2 \hat{n}} e^{\alpha_3 \hat{a}^2} e^{\alpha_4}.$$

$$\hat{a}(t) = 2\alpha_1 e^{-i\omega_0 t - \alpha_2} \hat{a}^\dagger + e^{-i\omega_0 t} [e^{\alpha_2} - 4\alpha_1 \alpha_3 e^{alpha_2}] \hat{a}. \quad (89)$$

Podemos notar que los operadores $\hat{a}^\dagger(t)$, $\hat{a}(t)$ son combinaciones lineales de los operadores \hat{a}^\dagger y \hat{a} , entonces por simplicidad los escribiremos como:

$$\hat{a}^\dagger(t) = c_{11} \hat{a}^\dagger + c_{12} \hat{a} \quad (90)$$

$$\hat{a}(t) = c_{21} \hat{a}^\dagger + c_{22} \hat{a}. \quad (91)$$

donde

$$c_{11} = e^{i\omega_0 t - \alpha_2} \hat{a}^\dagger \quad (92)$$

$$c_{12} = -2e^{i\omega_0 t - \alpha_2} \alpha_3 \quad (93)$$

$$c_{21} = 2\alpha_1 e^{-i\omega_0 t - \alpha_2} \quad (94)$$

$$c_{22} = e^{-i\omega_0 t} [e^{\alpha_2} - 4\alpha_1 \alpha_3 e^{\alpha_2}]. \quad (95)$$

Ahora que conocemos $\hat{a}^\dagger(t), \hat{a}(t)$, podemos calcular de manera sencilla $\hat{n}(t)$

$$\hat{n}(t) = \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t) = c_{11} c_{21} \hat{a}^{\dagger 2} + (c_{11} c_{22} + c_{12} c_{21}) \hat{n} + c_{12} c_{22} \hat{a}^2 + c_{12} c_{21}. \quad (96)$$

4.5. Promedio de fotones en el tiempo

En esta sección calcularemos y discutiremos la interpretación de $\langle \hat{n}(t) \rangle$, el cual es el valor esperado del operador $\hat{n}(t)$ calculado entre el estado $|\alpha, m\rangle$

$$\langle \hat{n}(t) \rangle = \langle \alpha, m | \hat{n}(t) | \alpha, m \rangle, \quad (97)$$

$$\langle \hat{n}(t) \rangle = c_{11} c_{21} \langle \alpha, m | \hat{a}^{\dagger 2} | \alpha, m \rangle + (c_{11} c_{22} + c_{12} c_{21}) \langle \alpha, m | \hat{n} | \alpha, m \rangle + c_{12} c_{22} \langle \alpha, m | \hat{a}^2 | \alpha, m \rangle + c_{12} c_{21}, \quad (98)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}(t) \rangle &= N_m^2(\alpha) c_{11} c_{21} \left[\alpha^{*2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n} (n+m+2)!}{(n+2)! n!} \right] + \\ &+ N_m^2(\alpha) (c_{11} c_{22} + c_{12} c_{21}) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n} (n+m)(n+m)!}{(n!)^2} \right] + \\ &+ N_m^2(\alpha) c_{12} c_{22} \left[\alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n} (n+m+2)!}{(n+2)! n!} \right] + N_m^2(\alpha) c_{12} c_{21}. \end{aligned} \quad (99)$$

Para un estado coherente con fotones añadidos que evoluciona en el tiempo, según el operador dado en la ecuación 81, la probabilidad de ocupación de un estado $|n\rangle$ está dada por

$$P_n = |\langle n | \alpha, m, t \rangle|^2. \quad (100)$$

En la figura (7) se muestran los valores promedio de $\hat{n}(t)$ para valores de $m = 0$, $m = 5$, $m = 10$, $m = 15$. Podemos notar que hay generación de fotones, esto se debe a la presencia de los operadores \hat{a}^2 , $\hat{a}^{\dagger 2}$ en el Hamiltoniano dado en la ecuación (74)

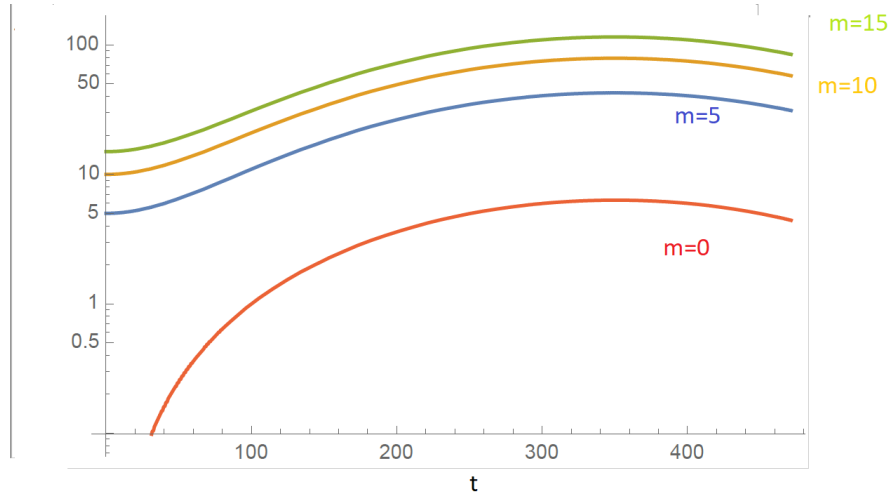


Figura 7: Valores de $\langle \hat{n}(t) \rangle$ para distintos valores de m

5. Conclusiones

El parámetro de Mandel para los estados coherentes con fotones añadidos siempre resulta $Q < 1$, lo cual nos dice que la distribución en el espacio fase tiene caracter sub-poissoniano, lo cual constatamos calculando las dispersiones en las cuadraturas y la función de Husimi, encontrando que los estados estados coherentes con fotones añadidos presentan compresión en la cuadratura de (de posición) X . Con lo cual concluimos que son estados no clásicos. También observamos que en límite cuando $\alpha \rightarrow 0$ su comportamiento es similar al de los estados de número (estados de Fock) y en el caso cuando $\alpha > 1$ y $m \neq 0$ se comportan como estados coherentes de Glauber. Es por esto que los estados coherentes con fotones añadidos son el puente entre un estado puramente cuántico y un estado semi-clásico.

Respecto a la evolución temporal de los estados coherentes con fotones añadidos encontramos que a partir del Hamiltoniano propuesto (oscilador paramétrico), un estado coherente con fotones añadidos evoluciona en el tiempo como una combinación complicada de estados de número en donde se crean y se aniquilan excitaciones con una fase adquirida conforme el tiempo transcurre.

El número promedio de fotones incrementa con el tiempo debido a la presencia de los operadores \hat{a}^2 y $\hat{a}^{\dagger 2}$ en el Hamiltoniano del sistema.

Referencias

- [1] Peter L. Knight Christopher C. Gerry. *Introductory quantum optics*. Cambridge University Press, 2005.
- [2] Jean-Michel Raimond Serge Haroche. *Exploring the Quantum Atoms, Cavities and Photons*. Oxford UNIVERSITY PRESS, 2006. ISBN: 0-19-850914-6.
- [3] Albert Messiah. *Quantum mechanics*. Dover publications,inc., 1999.
- [4] Roy J. Glauber. “Photon Correlations”. En: *Phys. Rev. Lett.* 10.3 (1963), págs. 84-86.
- [5] William H Louisell. *Quantum statistical properties of radiation*. John Wiley & Sons, 1973. ISBN: 0-471-52365-8.
- [6] G. S. Agarwal y K. Tara. “Nonclassical properties of states generated by the excitations on a coherent state”. En: *Phys. Rev. A* 43 (1 ene. de 1991), págs. 492-497. DOI: [10.1103/PhysRevA.43.492](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.43.492). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.43.492>.
- [7] James Wei, Edward Norman. “Lie Algebraic Solution of Linear Differential Equations”. En: *J. Math. Phys* 4.575 (1963). DOI: [10.1063/1.1703993](https://doi.org/10.1063/1.1703993).
- [8] V. V. Dodonov y col. “Dynamical squeezing of photon-added coherent states”. En: *Phys. Rev. A* 58 (5 nov. de 1998), págs. 4087-4094. DOI: [10.1103/PhysRevA.58.4087](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.58.4087). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.58.4087>.