

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

CAMPUS NORTE

Análisis de los efectos de memoria en un proceso cuántico inducido por un ambiente modelado por matrices aleatorias sobre un sistema cuántico de dos niveles de energía.

TESIS QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA EL M. EN C.

MOISÉS CARRERA NÚÑEZ

DIRECTOR

DR. THOMAS GORIN

IN MEMORIAM

*de la más fiel amiga y compañera
Chanty*

Agradecimientos

Deseo expresar mi gratitud al Dr. Thomas Gorin por dirigir esta investigación, al Dr. Thomas Seligman y al Instituto de Ciencias Físicas (ICF-UNAM) por haberme proporcionado un lugar y el ambiente adecuado en donde pude desarrollar mi trabajo como estudiante de doctorado.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico, al Dr. Francois Leyvraz por haberme otorgado la beca a través de su proyecto Transiciones de Fase en Sistemas Lejos de Equilibrio (continuación) CB 2015/254515.

También agradezco al personal administrativo del posgrado en ciencias de la UAEM: Dulce Verónica, María Cristina y Mayumi por su apoyo y paciencia.

Y un especial agradecimiento a Lina, César y César F.

Índice general

1. Introducción	4
2. Preliminares	6
2.1. Sistemas cuánticos abiertos	6
2.1.1. Dinámica cuántica	6
2.1.2. Vectorización de un mapa dinámico	9
2.1.3. Norma y distancia de traza	11
2.2. No Markovianidad	11
2.2.1. Markovianidad en procesos clásicos	12
2.2.2. No Markovianidad cuántica	15
2.3. Teoría de matrices aleatorias (RMT)	17
2.3.1. Ensemble Gausiano Ortogonal (GOE)	18
2.3.2. Ensemble Gausiano Unitario (GUE)	18
3. Qubit con entorno RMT	19
3.1. Modelo	19
3.2. Canal cuántico	20
3.2.1. Representación de Bloch	21
3.2.2. Matriz de Choi y superoperador	24
3.2.3. Mapa para tiempos intermedios	25
3.3. Medidas de no Markovianidad	26
3.3.1. Divisibilidad	26
3.3.2. Contractividad	27
3.3.3. Máxima recuperación de la distancia de traza	29
4. Análisis de los Resultados Numéricos	31
4.1. Finalización de la dinámica	31
4.1.1. Tiempo de finalización para un GUE	33
4.1.2. Tiempo de finalización para un GOE	35
4.2. Medidas de no Markovianidad	36
4.2.1. Medida de RHP y su convergencia (GUE)	36
4.2.2. Medida de RHP (GOE)	39
4.2.3. Medida de BLP y su convergencia (GUE)	39
4.2.4. Medida de BLP (GOE)	42
4.2.5. Máxima recuperación de la distancia de traza y su convergencia (GUE)	42
4.2.6. Máxima recuperación de la distancia de traza (GOE)	45
4.3. Fluctuaciones estadísticas	45
4.4. Tiempo de Markovianidad	46
4.4.1. Tiempo de MD	47
4.4.2. Tiempo de MC	50

4.5. Intersección de trayectorias en la bola de Bloch como signatura de memoria en el sistema	53
5. Conclusiones	55
A. Evolución de los eigenestados: $\rho_q^{+z,+x,+y}$	57
A.1. Conceptos y definiciones	57
A.2. Evolución de un estado inicial arbitrario	58
A.2.1. Evolución del eigenestado ρ_q^{+z}	59
A.2.2. Evolución del eigenestado ρ_q^{+x}	59
A.2.3. Evolución del eigenestado ρ_q^{+y}	61
Bibliografía	61

Capítulo 1

Introducción

La teoría de los sistemas cuánticos abiertos tiene como meta principal el estudio de sistemas cuánticos que interactúan con su entorno [1, 2]. El enfoque estándar en la descripción teórica y el análisis de tales sistemas presupone que su evolución temporal no tiene memoria. Bajo esa suposición se obtiene una ecuación maestra cuántica para el estado del sistema reducido [3, 4], llamada en algunas ocasiones ecuación maestra Markoviana y en otras ecuación maestra de Lindblad. La derivación microscópica, es decir partiendo del Hamiltoniano que describe al sistema reducido más su entorno, de una ecuación de este tipo usualmente es realizada por medio de la aproximación Born-Markov que consiste en suponer un acoplamiento débil entre el sistema de interés y su entorno, así como despreciar las correlaciones temporales del entorno entre otras suposiciones que llegan a ser drásticas [1].

Cuando el acoplamiento entre el sistema y el entorno es fuerte, o si existen correlaciones iniciales sistema-entorno, o al considerar entornos finitos, resulta que una ecuación maestra Markoviana no es adecuada para la correcta descripción del sistema. En todos los ejemplos anteriores es evidente que dicha aproximación no sea válida, pues contradicen una o varias suposiciones de la misma. Sin embargo, en algunos sistemas, como en aquellos en donde es posible controlar algunas propiedades del entorno tales como su espectro de frecuencias [5, 6] o en modelos que involucran entornos con propiedades caóticas [7–9] no es trivial decidir si tal aproximación es apropiada o no. De allí la importancia de poder determinar si la dinámica de un sistema está gobernada por los efectos de memoria y en qué medida.

Desde un punto de vista fundamental el interés en el estudio de sistemas cuánticos con memoria, llamados no Markovianos, se debe al hecho de que nos podrían conducir al entendimiento teórico de sistemas más realistas tales como materiales con banda fotónica prohibida, sistemas biológicos cuánticos y redes cuánticas complejas [10]. Esos sistemas físicos tienen en común que interactúan con entornos estructurados y no pueden ser descritos por el tradicional baño de osciladores. Desde un punto de vista práctico se ha demostrado que los entornos con memoria mejoran la protección del sistema contra la decoherencia [11, 12].

Esas dos motivaciones, fundamental y con fines aplicativos, han provocado un resurgimiento en el estudio de los sistemas cuánticos no Markovianos. Los esfuerzos van dirigidos, a grandes rasgos, en dos direcciones: la primera es definir rigurosamente qué es o qué debe entenderse por no Markovianidad en sistemas cuánticos y en consecuencia establecer una teoría general para ellos [13, 14]. La segunda es cuantificar el grado de memoria del sistema, es decir, que tanto se aleja la dinámica de un sistema con memoria de la de un sistema sin memoria o Markoviano [15, 16]. En la investigación que expondremos en las siguientes páginas de esta Tesis pretendemos avanzar en esas dos direcciones, a través de un modelo en donde el entorno es descrito por ensembles de matrices aleatorias, un entorno de esa naturaleza puede considerarse como altamente estructurado debido a que en ellos subyacen propiedades universales que exhiben los sistemas caóticos, una idea originalmente propuesta por M. Berry y M. Tabor [17] y ampliamente popularizada por G. Casati *et al.* [18] y O. Bohigas *et al.* [19, 20].

La estructura general de esta Tesis es la siguiente: en el capítulo 2 presentamos los conceptos fundamentales y las herramientas necesarias para dar una idea clara de lo que actualmente se entiende por procesos cuánticos no Markovianos, todo ello en la medida de la analogía que puede establecerse con los procesos estocásticos clásicos. También se da una breve revisión a la teoría de sistemas cuánticos abiertos y su descripción a través de mapas lineales, y a la teoría de matrices aleatorias. El capítulo 3 está dedicado al estudio de nuestro modelo que consiste de un sistema cuántico de dos niveles de energía usualmente llamado qubit (acrónimo de quantum bit en analogía al bit de información clásico) que interactúa con un entorno modelado por un ensemble de matrices aleatorias (al que llamaremos entorno RMT), allí también presentamos nuestros resultados analíticos. Los resultados obtenidos a través de simulaciones numéricas de nuestro modelo son expuestos en el capítulo 4 junto con ellos se incluyen las discusiones de los mismos. Finalmente, en el capítulo 5, presentamos las conclusiones a las que llegamos al finalizar nuestra investigación de la memoria del sistema qubit más entorno RMT.

Capítulo 2

Preliminares

A continuación daremos los conceptos y herramientas necesarios para comprender lo que hoy se conoce como sistema cuántico Markoviano. Iniciamos dando un breve repaso de la teoría de los sistemas cuánticos abiertos adoptando la descripción de su dinámica por mapas lineales llamados canales cuánticos. Después pasamos a la revisión de Markovianidad tanto en procesos clásicos como en procesos cuánticos. Finalizando con una breve exposición de la teoría de matrices aleatorias.

2.1. Sistemas cuánticos abiertos

Debe entenderse por *sistema cuántico abierto* a un sistema de interés S al que llamaremos *sistema central* cuya dinámica es influenciada de forma no despreciable por otro sistema cuántico E al que llamaremos el *entorno*. En este trabajo nos restringiremos a sistemas de dimensión finita.

2.1.1. Dinámica cuántica

Al sistema S le corresponde un espacio de Hilbert \mathcal{H}_S , un Hamiltoniano H_S y sus estados físicos (estados cuánticos) son descritos por matrices de densidad ϱ_S . Mientras que al entorno, el sistema E , le corresponde un espacio de Hilbert \mathcal{H}_E , un Hamiltoniano H_E y estados ϱ_E . En el enfoque que seguiremos de ahora en adelante, la interacción entre el sistema central y el entorno es descrita a través de un *Hamiltoniano de interacción* H_I , en la Fig. 2.1 se muestra un esquema de lo que hemos dicho.

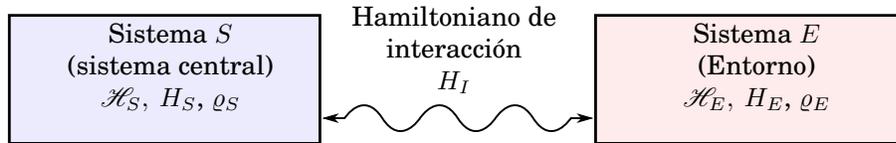


Figura 2.1: Sistema cuántico abierto. El sistema de interés S está influenciado por otro sistema E llamado entorno, dicha influencia es descrita por un Hamiltoniano de interacción H_I .

Podemos entonces, definir un *sistema total* que estará compuesto por el subsistema S y el subsistema E . Dicho sistema total $S + E$ tendrá por espacio de Hilbert al *producto tensorial* de los espacios de Hilbert de los subsistemas, esto es, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$. Y un Hamiltoniano dado por

$$H = H_S \otimes \mathbb{1}_E + \mathbb{1}_S \otimes H_E + H_I, \quad (2.1)$$

en donde $\mathbb{1}_S$ y $\mathbb{1}_E$ son los *operadores identidad* del sistema S y E , respectivamente. Los estados del sistema total son descritos por las matrices de densidad ϱ .

Asumiremos que la evolución temporal o *dinámica* del sistema total es unitaria, esto significa que su *operador de evolución* está dado por [1]:

$$U(t) = e^{-iHt}, \quad (\text{en donde } \hbar = 1). \quad (2.2)$$

Entonces, la evolución temporal de un estado inicial arbitrario $\varrho(0)$ del sistema total evoluciona hasta el tiempo t de acuerdo a:

$$\varrho(t) = U(t)\varrho(0)U(t)^\dagger. \quad (2.3)$$

Podemos obtener el estado del sistema S o del sistema E al tiempo t tomando la *traza parcial* de la ecuación (2.3),

$$\varrho_S(t) = \text{tr}_E[\varrho(t)], \quad \varrho_E(t) = \text{tr}_S[\varrho(t)]. \quad (2.4)$$

La operación de traza parcial significa que sumamos sobre todos los grados de libertad de uno de los subsistemas indicado por el subíndice E o S . En general la evolución del sistema S no es unitaria, ni tampoco la del sistema E . Además, debemos mencionar que la traza parcial es una operación no invertible [1].

Ecuación maestra cuántica

El enfoque “tradicional” para describir la evolución temporal de los estados de un sistema abierto es a través de una ecuación de movimiento para su matriz de densidad. En analogía a la ecuación de Liouville de la mecánica estadística clásica, tenemos [13]

$$i\dot{\varrho}(t) = \mathcal{L}\{\varrho(t)\}, \quad (2.5)$$

el punto arriba de un operador o variable indicará derivación con respecto al tiempo, y \mathcal{L} es llamado *superoperador de Liouville*¹. Una ecuación como la anterior es llamada *ecuación maestra cuántica*. Debemos notar que no hemos asumido que la matriz de densidad en (2.5) sea del sistema total, o del sistema S o E , esto se debe a que en principio es posible construir una ecuación maestra de cualquier sistema que sea descrito por matrices de densidad. En el siguiente párrafo describimos su solución general.

Por conveniencia escribimos el Hamiltoniano total (2.1) en un modelo perturbativo [21]

$$H = H_0 + \lambda V_I, \quad (2.6)$$

en donde $H_0 = H_S \otimes \mathbb{1}_E + \mathbb{1}_S \otimes H_E$ expresa al Hamiltoniano sin perturbar, $\lambda V_I = H_I$ es la perturbación y el parámetro $\lambda \geq 0$ es la intensidad de esa perturbación. En el cuadro de interacción la ecuación de movimiento para el sistema total esta dado

$$i\frac{d}{dt}\tilde{\varrho}(t) = \lambda[\tilde{V}_I(t), \tilde{\varrho}(t)], \quad \text{entonces } \mathcal{L}\{\tilde{\varrho}(t)\} = \lambda[\tilde{V}_I(t), \tilde{\varrho}(t)], \quad (2.7)$$

las tildes arriba de los operadores indican que están en el cuadro de interacción, es decir, definido $U_0(t) = \exp(-iH_0t)$, cualquier operador A pasa a ser $\tilde{A}(t) = U_0(t)^\dagger A U_0(t)$. La solución formal resulta de una integración directa de (2.7)

$$\tilde{\varrho}(t) = \tilde{\varrho}(0) - i\lambda \int_0^t dt_1 [\tilde{V}_I(t_1), \tilde{\varrho}(t_1)], \quad (2.8)$$

podríamos seguir iterando (2.8) con signo misma de tal manera que obtendremos una expansión en potencias de λ del lado derecho. Por ejemplo, para dos iteraciones:

$$\tilde{\varrho}(t) = \tilde{\varrho}(0) - i\lambda \int_0^t dt_1 [\tilde{V}_I(t_1), \tilde{\varrho}(0)] - \lambda^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 [\tilde{V}_I(t_1), [\tilde{V}_I(t_2), \tilde{\varrho}(t_2)]]; \quad (2.9)$$

el estado del sistema reducido en el cuadro de interacción se obtiene por $\tilde{\varrho}_S(t) = \text{tr}_E\{\tilde{\varrho}(t)\}$.

¹Un superoperador no es más que un operador que actúa sobre otros operadores

Mapas dinámicos cuánticos

Ahora analizaremos la evolución de un sistema abierto desde otro enfoque, el de mapas lineales [1].

Denotemos como $\mathcal{M}(\mathcal{H}_S)$ al espacio de estados del sistema S , o lo que es lo mismo, su espacio de matrices de densidad, y de forma similar, al espacio de estados del sistema E lo denotamos con $\mathcal{M}(\mathcal{H}_E)$, y para el sistema total $S + E$ tendremos $\mathcal{M}(\mathcal{H})$.

Ahora, consideremos un tiempo fijo $t \geq 0$, y que el estado del entorno no cambia, es decir $\varrho_E(t) = \varrho_E(0) = \varrho_E$. Además, asumiremos que al inicio de los tiempos el sistema S y el entorno E son estadísticamente independientes, esto significa que al tiempo $t = 0$ no existen correlaciones entre el sistema central y el entorno, por lo cual siempre podemos escribir el estado inicial del sistema total como

$$\varrho(0) = \varrho_S(0) \otimes \varrho_E. \quad (2.10)$$

Con esas suposiciones podemos re-escribir la primera de las ecuaciones (2.4) como:

$$\varrho_S(t) = \text{tr}_E[U(t)\varrho(0)U(t)^\dagger] = \text{tr}_E[U(t)\varrho_S(0) \otimes \varrho_E U(t)^\dagger], \quad (2.11)$$

la expresión anterior define un mapeo lineal del espacio de estados del sistema S en si mismo:

$$\Lambda_{(t,0)}: \mathcal{M}(\mathcal{H}_S) \mapsto \mathcal{M}(\mathcal{H}_S), \quad (2.12)$$

este es el *mapa dinámico cuántico* correspondiente al tiempo t . Entonces, tenemos que

$$\varrho_S(t) = \Lambda_{(t,0)}\varrho_S(0) \equiv \text{tr}_E[U(t)\varrho_S(0) \otimes \varrho_E U(t)^\dagger]. \quad (2.13)$$

En la Figura 2.2 se muestra un diagrama de la equivalencia expresada en la ecuación (2.13). Debemos enfatizar que dicho diagrama es no conmutativo debido a que las trazas parciales son operaciones no invertibles.

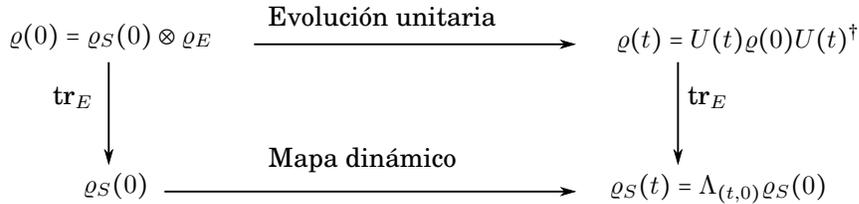


Figura 2.2: Equivalencia entre la obtención del estado reducido del sistema S a través de la evolución unitaria del sistema total o como un mapa dinámico.

Dado un operador arbitrario $A \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_S)$ y un mapa dinámico $\Lambda_{(t,0)}$ que actúa sobre A , tenemos las siguientes propiedades

- El mapa dinámico preserva la Hermiticidad de operador A : $[\Lambda_{(t,0)}A]^\dagger = \Lambda_{(t,0)}A^\dagger$.
- Preserva la traza: $\text{tr}\{\Lambda_{(t,0)}A\} = \text{tr}\{A\}$.
- Es un mapa positivo: si $A \geq 0$ entonces $\Lambda_{(t,0)}A \geq 0$.
- Completa positividad. Consideremos un sistema auxiliar X con espacio de Hilbert \mathcal{H}_X y el *mapa extendido* $\Lambda_{(t,0)} \otimes \mathbb{1}_X$, diremos que, si para un operador arbitrario $B \geq 0 \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_X)$ tenemos $\Lambda_{(t,0)} \otimes \mathbb{1}_X(B) \geq 0$ el mapa $\Lambda_{(t,0)}$ es completamente positivo.

Un mapa arbitrario que satisface las cuatro propiedades anteriores es llamado *mapa completamente positivo que conserva la traza* (CPTP², por sus siglas en inglés) o *canal cuántico* en la teoría de la información.

²Completely Positive Trace-Preserving.

Hasta aquí hemos considerado que t representa un tiempo fijo, en otras palabras, es un parámetro fijo. Si ahora permitimos que varíe, obtendremos una *familia de mapas dinámicos de un parámetro*, es decir, un mapa $\Lambda_{(t,0)}$ que es CPTP para cada $t \geq 0$. Llamaremos *proceso cuántico* a la familia de mapas CPTP de un parámetro que describen la evolución temporal de cualquier posible estado inicial de un sistema cuántico abierto dado y lo representaremos como:

$$\{\Lambda_{(t,0)} | t \geq 0, \Lambda_{(0,0)} = \mathbb{1}\}. \quad (2.14)$$

Con este formalismo podremos caracterizar a los sistemas analizando las propiedades de los mapas que definen al proceso bajo estudio, y resulta de gran utilidad como veremos a continuación.

Divisibilidad de los mapas dinámicos

Un proceso cuántico es *divisible* si para cuales quiera $t_2 \geq t_1 \geq 0$ existe un *mapa intermedio* $\Lambda_{(t_2,t_1)}$ que es CPTP y la siguiente *ley de composición* se cumple [13]:

$$\Lambda_{(t_2,0)} = \Lambda_{(t_2,t_1)} \circ \Lambda_{(t_1,0)}. \quad (2.15)$$

Notemos de la ecuación (2.15) que tanto el término del lado izquierdo como el segundo término del lado de la derecha están determinados por la familia de mapas dinámicos y por lo tanto son CPTP, en otras palabras, son *mapas dinámicos válidos* pues mapean estados a estados, sin embargo la existencia de una transformación lineal $\Lambda_{(t_2,t_1)}$ que sea un mapa CPTP y envíe los estados desde el tiempo t_1 hasta estados al tiempo t_2 no está garantizada. Por ejemplo, dado que tal transformación puede ser obtenida de (2.15) como

$$\Lambda_{(t_2,t_1)} = \Lambda_{(t_2,0)} \circ [\Lambda_{(t_1,0)}]^{-1}, \quad (2.16)$$

si $\Lambda_{(t_1,0)}$ no es invertible, la transformación lineal $\Lambda_{(t_2,t_1)}$ podría no existir. Por otro lado, aunque existiese tal transformación, esta podría no ser CPTP o incluso podría no ser positiva. Así, podemos decir que las propiedades de esa transformación nos ayudan a clasificar un proceso cuántico dado. En la Figura 2.3 se da una breve descripción del significado de la ecuación anterior.

Matriz de Choi de un mapa lineal

Consideremos al sistema S , una copia de él y un estado *máximamente entrelazado*³ entre esos dos sistemas. En la notación de Dirac (*bra's* y *ket's*) tenemos que dicho estado se escribe como [22]:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=0}^{d-1} |nn\rangle, \quad \text{entonces} \quad \varrho = |\Psi\rangle\langle\Psi|, \quad (2.17)$$

en donde $d = \dim\{\mathcal{H}_S\}$. Ahora, podemos asociar una matriz a cualquier mapa lineal Λ a través de la regla [23]:

$$C_\Lambda = d [\Lambda \otimes \mathbb{1}_S](|\Psi\rangle\langle\Psi|), \quad (2.18)$$

tal matriz así definida es llamada *matriz de Choi*. El teorema de Choi [24] afirma que el mapa lineal Λ es CP (completamente positivo) sí y solo sí la matriz defina en la ecuación (2.18) es *positiva semidefinida* (sus eigenvalores son no negativos).

2.1.2. Vectorización de un mapa dinámico

En este apartado nos restringiremos a un espacio de Hilbert de dimensión 2, una generalización de lo que aquí se expone puede encontrarse en [23]. Para simplificar la notación escribimos

³El estado de un sistema compuesto es entrelazado si no puede ser escrito como una suma convexa de estados de producto de los subsistemas que lo componen. Entonces, el conocimiento del estado de uno o más de los subsistemas determina unívocamente el estado de los restantes.

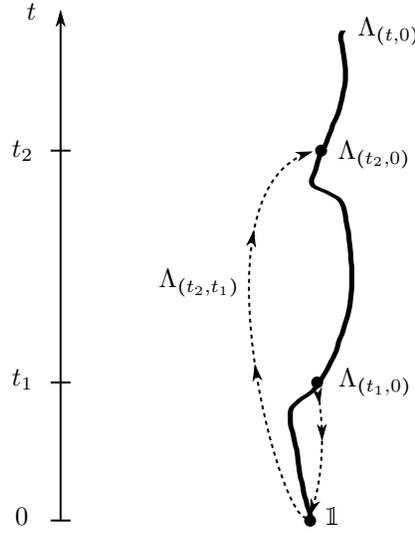


Figura 2.3: Espacio de las transformaciones lineales, en donde el tiempo avanza en la dirección indicada por el eje vertical. Un proceso descrito por una familia de mapas CPTP $\Lambda_{(t,0)}$ describe una curva en ese espacio (línea sólida), la ecuación (2.16) establece que, si tomamos dos elementos arbitrarios de dicha familia, $\Lambda_{(t_1,0)}$ y $\Lambda_{(t_2,0)}$, siempre que $t_2 \geq t_1 \geq 0$ y $\Lambda_{(t_1,0)}$ sea invertible, existe una transformación lineal $\Lambda_{(t_2,t_1)}$ que conecta a los dos mapas anteriores como se muestra en la figura (línea punteada). Si la transformación $\Lambda_{(t_2,t_1)}$ existe y es CPTP para todo $t_2 \geq t_1 \geq 0$, entonces, diremos que $\{\Lambda_{(t,0)} | t \geq 0, \Lambda_{(0,0)} = \mathbb{1}\}$ es un proceso divisible.

Λ_t en lugar de $\Lambda_{(t,0)}$, en caso de que se requiera escribimos sólo los dos índices omitiendo los paréntesis: $\Lambda_{t,s}$.

En el lenguaje de vectorización, una matriz de densidad puede ser tratada como un vector, el cual es construido siguiendo la regla:

$$\varrho = \begin{pmatrix} \varrho_{00} & \varrho_{01} \\ \varrho_{10} & \varrho_{11} \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{\varrho} = \begin{pmatrix} \varrho_{00} \\ \varrho_{10} \\ \varrho_{01} \\ \varrho_{11} \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

y la acción de un mapa dinámico $\Lambda_t : \varrho(0) \rightarrow \varrho(t)$ es descrita por una matriz de tamaño 4×4 , que denotaremos por L_t :

$$\vec{\varrho}(t) = L_t \vec{\varrho}(0), \quad (2.20)$$

Una de las ventajas más útiles de la vectorización es que la ley de composición (2.15) se reduce a la usual multiplicación de matrices. Así de acuerdo a dicha ley $L_{t_2} = L_{t_2,t_1} L_{t_1}$, y por lo tanto la acción del mapa lineal intermedio esta dada por:

$$L_{t_2,t_1} = L_{t_2} L_{t_1}^{-1}, \quad (2.21)$$

en donde el último término del lado derecho no es más que la matriz inversa de L_{t_1} .

Reshuffling de una matriz 4×4

Existe una equivalencia entre las matrices de Choi (2.18) y las matrices L_t (2.20) que se obtiene mediante una operación llamada *reshuffling* de una matriz:

$$C_{\Lambda_t} \equiv L_t^R, \quad (2.22)$$

en donde el super índice R denota esa operación de reshuffling, la cual consiste en reorganizar algunos elementos de la matriz L_t . Para ilustrar esto, consideremos que

$$L_t = \begin{pmatrix} l_{00} & l_{01} & l_{02} & l_{03} \\ l_{10} & l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{20} & l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{30} & l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

entonces

$$C_{\Lambda_t} = L_t^R = \begin{pmatrix} l_{00} & l_{20} & l_{02} & l_{22} \\ l_{10} & l_{30} & l_{12} & l_{32} \\ l_{01} & l_{21} & l_{03} & l_{23} \\ l_{11} & l_{31} & l_{13} & l_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

donde hemos puesto en letra negrita aquellos elementos que cambiaron de posición. Como podemos notar de la ecuación anterior la matriz de Choi contiene toda la información acerca de la evolución de un sistema dado, es por ello que también se le llama *matriz dinámica*. Además, notemos de (2.24) que $[L_t^R]^R = L_t$, entonces $L_t = C_{\Lambda_t}^R$.

Otro detalle importante es que si conocemos L_t podemos obtener una ecuación maestra como se describe a continuación. Derivando (2.20) con respecto al tiempo

$$\dot{\tilde{\varrho}}(t) = \dot{L}_t \tilde{\varrho}(0), \quad (2.25)$$

también de (2.20) se tiene que $\tilde{\varrho}(0) = L_t^{-1} \tilde{\varrho}(t)$, que al sustituirse en la expresión de arriba nos da la ecuación buscada:

$$\dot{\tilde{\varrho}}(t) = \dot{L}_t L_t^{-1} \tilde{\varrho}(t). \quad (2.26)$$

Una ecuación maestra así construida puede tener puntos singulares en donde L_t no es invertible.

2.1.3. Norma y distancia de traza

La *norma de traza*⁴ $\|A\|_1$ de una matriz A es la suma de los valores singulares de A . Los valores singulares son las raíces de los eigenvalores de AA^\dagger [22]:

$$\|A\|_1 = \text{tr}\{\sqrt{AA^\dagger}\}. \quad (2.27)$$

Para matrices Hermíticas, como las matrices de densidad, su norma de traza es simplemente la suma de los valores absolutos de sus eigenvalores.

Dado que $\|A\|_1$ define una norma en el espacio de matrices, es natural definir una medida de distancia basada en ella. Así, para dos matrices de densidad ϱ^1 y ϱ^2 definimos su *distancia de traza*⁵ como:

$$D[\varrho^1, \varrho^2] = \frac{1}{2} \|\varrho^1 - \varrho^2\|_1 = \frac{1}{2} \sum_i |a_i|, \quad (2.28)$$

en donde las a_i son los eigenvalores de la matriz $\varrho^1 - \varrho^2$. La distancia de traza nos proporciona una medida de la certeza con la cual podremos distinguir los estados ϱ^1 y ϱ^2 [22, 25].

2.2. No Markovianidad

Para poder exponer lo que se entiende por no Markovianidad cuántica resulta inevitable primero dar una revisión del caso clásico. Es por ello que dedicamos el apartado 2.2.1 a los conceptos y propiedades básicas de la teoría de probabilidades clásica que nos conducirán a la definición de un proceso Markoviano clásico, para después retomar el caso cuántico.

⁴Trace norm

⁵Trace distance

2.2.1. Markovianidad en procesos clásicos

En este apartado trabajamos con probabilidades clásicas sin pretender dar definiciones detalladas, la exposición toma como guía lo presentado en el artículo de revisión *Quantum non-Markovianity: characterization, quantification and detection* de los autores Á. Rivas, S. Huelga y M. Plenio [26], mismo en el que se pueden consultar las demostraciones aquí omitidas.

Espacio de probabilidad y variable aleatoria

Los tres ingredientes básicos de un espacio de probabilidad son: un conjunto Ω llamado *espacio muestral* cuyos elementos ω son llamados *eventos elementales*. Una colección (o *sistema*) Σ de *eventos posibles* que es una σ -álgebra de subconjuntos de Ω , conteniendo al mismo Ω . Y la *probabilidad* $\mathbb{P} : \Sigma \mapsto [0, 1]$, que es una función σ -aditiva con la propiedad $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ con todas las propiedades descritas en el párrafo anterior, una *variable aleatoria*⁶ se define como un mapa,

$$X : \Omega \mapsto \mathbb{R}, \quad (2.29)$$

el cual asigna un número real $X(\omega)$ a cada evento elemental $\omega \in \Omega$. Dado algún ω el valor,

$$x = X(\omega) \quad (2.30)$$

es llamado *realización* de X . Esta definición de variable aleatoria, aunque está incompleta, es suficiente para nuestros propósitos. La definición completa resulta de imponer la condición de *medible* a la función X , ello nos habilita para definir una *función de distribución acumulativa* de X :

$$F_X(x) \equiv \mathbb{P}(\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x). \quad (2.31)$$

Y con ello podemos decir que la variable aleatoria X tiene una *densidad de probabilidad* $p_X(x)$ si su función de distribución acumulativa puede representarse como

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x dx p_X(x). \quad (2.32)$$

Consideremos una variable aleatoria discreta X , es decir, una variable aleatoria que toman valores sobre un conjunto finito \mathcal{X} [26], entonces podemos definir [1]

$$p(x) = \mathbb{P}(X = x), \quad (2.33)$$

así X induce una *distribución de probabilidad* p en \mathcal{X} . La definición (2.33) es el equivalente discreto a la definición $p_X(x)$ en (2.32). Y puede pensarse que proporciona las probabilidades de ocurrencia de los diferentes resultados en un experimento.

Proceso estocástico

Un *proceso estocástico* es una familia de variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad en común cuyas propiedades estadísticas dependen de un parámetro t [1]:

$$\{X(t), t \in I \subset \mathbb{R}\}, \quad (2.34)$$

de ahora en adelante convendremos que t es el tiempo e I es un intervalo de la recta real. Equivalentemente, un proceso estocástico puede ser pensado como un mapa:

$$X : \Omega \times I \mapsto \mathbb{R}, \quad (2.35)$$

el cual asocia a cada $\omega \in \Omega$ y cada $t \in I$ un número real $X(\omega, t)$. La última definición es útil, dado que para un ω fijo encontramos el mapa:

$$t \mapsto X(\omega, t), \quad \forall t \in I, \quad (2.36)$$

el cual es llamado *realización*, *trayectoria* o *ruta muestra* de un proceso estocástico, y podemos representarlo esquemáticamente como en la Figura 2.4.

⁶También llamada variable estocástica

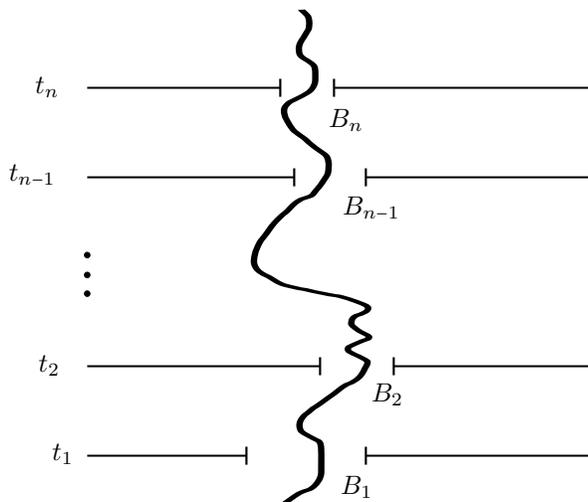


Figura 2.4: Una realización $X(\omega, t)$ de un proceso estocástico el cual pasa por los conjuntos $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}, B_n$ a los tiempos $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n$, respectivamente. La probabilidad para que esa trayectoria ocurra está dada por la *probabilidad conjunta* $\mathbb{P}(B_1, t_1; \dots; B_n, t_n)$.

Definición clásica de Markovianidad

Un proceso estocástico $\{X(t), t \in I\}$ es *Markoviano* si la probabilidad de que la variable aleatoria X tome el valor x_n a un tiempo arbitrario $t_n \in I$, dado que tomó el valor x_{n-1} a un tiempo previo $t_{n-1} < t_n \in I$, está unívocamente determinada, y no es afectada por los posibles valores de X en tiempos anteriores a t_{n-1} . Esto puede ser formulado a través de *probabilidades condicionales* como sigue:

$$\mathbb{P}(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_0, t_0) = \mathbb{P}(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}), \quad (2.37)$$

para todo $\{t_n \geq t_{n-1} \geq \dots \geq t_0\} \in I$. De lo anterior, concluimos que un proceso Markoviano es un proceso estocástico con una memoria corta, esto es, *olvida rápidamente su pasado*.

Matrices de transición y ecuación de Chapman-Kolmogorov

Dado un proceso estocástico, existe un mapa T que conecta la probabilidad de una variable aleatoria X , a diferentes tiempos $t_3 \geq t_2 \geq 0$ [26, 27]:

$$\mathbb{P}(x_3, t_3) = \sum_{x_2 \in \mathcal{X}} T(x_3, t_3 | x_2, t_2) \mathbb{P}(x_2, t_2). \quad (2.38)$$

A la matriz T se le llama *matriz de transición*⁷. Puesto que los elementos de esas matrices representan probabilidades, entonces son no negativos: $T(x_3, t_3 | x_2, t_2) \geq 0$, $\forall x_3, x_2 \in \mathcal{X}$. Además, la suma de todos los elementos de cualquiera de sus columnas es igual a 1, debido a que la probabilidad de que el proceso tome cualquier valor a cualquier tiempo fijo es igual a 1, en símbolos: $\sum_{x_3 \in \mathcal{X}} T(x_3, t_3 | x_2, t_2) = 1$.

Bajo la suposición de que tenemos un proceso estocástico Markoviano, la probabilidad condicional para tres tiempos consecutivos $t_3 > t_2 > t_1$ satisfará la siguiente ecuación:

$$\mathbb{P}(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \sum_{x_2 \in \mathcal{X}} \mathbb{P}(x_3, t_3 | x_2, t_2) \mathbb{P}(x_2, t_2 | x_1, t_1), \quad (2.39)$$

llamada *ecuación de Chapman-Kolmogorov*. Y la relación entre las ecuaciones (2.38) y (2.39) para tales procesos es directa e implica que

$$T(x_3, t_3 | x_2, t_2) = \mathbb{P}(x_3, t_3 | x_2, t_2), \quad (2.40)$$

⁷También llamada *matriz estocástica*

así la ecuación (2.39) toma la forma

$$T(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \sum_{x_2 \in \mathcal{X}} T(x_3, t_3 | x_2, t_2) T(x_2, t_2 | x_1, t_1), \quad (2.41)$$

en este sentido la ecuación de Chapman-Kolmogorov representa un ley de composición análoga a (2.15) del caso cuántico, y admite una interpretación que es ilustrada en la Figura 2.5. La ecuación anterior nos dice que la probabilidad para la transición desde (x_1, t_1) a (x_3, t_3) es obtenida multiplicando las probabilidades para las transiciones $(x_1, t_1) \rightarrow (x_2, t_2)$ y $(x_2, t_2) \rightarrow (x_3, t_3)$ y sumando sobre todos los valores posibles de las posiciones intermedias x_2 .

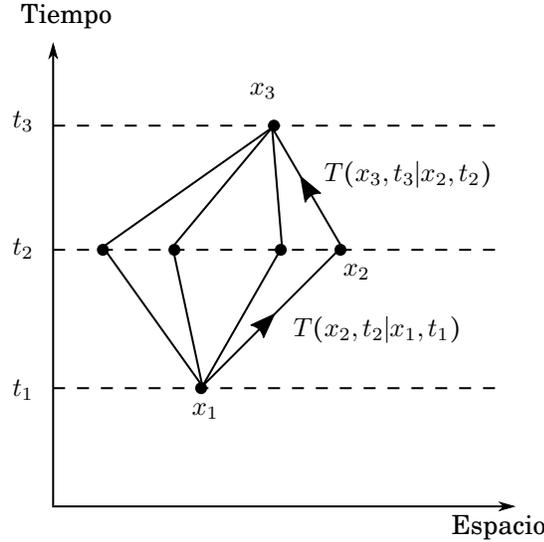


Figura 2.5: Ilustración de la ecuación de Chapman-Kolmogorov (2.41). Iniciando en el punto x_1 al tiempo t_1 , el proceso alcanza el punto x_3 un tiempo después t_3 . Para un tiempo intermedio fijo t_2 el proceso toma algún valor x_2 .

Divisibilidad en procesos clásicos

La definición de matriz de transición (2.38) junto con la ecuación de Chapman-Kolmogorov (2.41) nos permiten encontrar dos propiedades muy importantes que deben satisfacer los procesos estocásticos para ser considerados como Markovianos, a saber, las propiedades de *divisibilidad* y de *contractividad*. A través de esas dos propiedades es posible evitar la evaluación directa de la condición de Markov (2.37) sorteando con ello las dificultades originadas al tratar de determinar las probabilidades condicionales para los n puntos [26].

En este párrafo analizamos la propiedad de divisibilidad y dejamos el estudio de la contractividad para el siguiente. Ya hemos establecido una relación entre la ley de composición en los casos clásico (2.41) y cuántico (2.15). Con ello podemos definir un *proceso clásico divisible* como un proceso estocástico $\{X(t), t \in I\}$ para el cual sus matrices de transición asociadas satisfacen las siguientes propiedades para tres tiempos arbitrarios $t_3 \geq t_2 \geq t_1$:

$$\sum_{x_2 \in \mathcal{X}} T(x_2, t_2 | x_1, t_1) = 1, \quad (2.42)$$

$$T(x_2, t_2 | x_1, t_1) \geq 0, \quad (2.43)$$

$$T(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \sum_{x_2 \in \mathcal{X}} T(x_3, t_3 | x_2, t_2) T(x_2, t_2 | x_1, t_1). \quad (2.44)$$

Entonces, un proceso Markoviano es necesariamente divisible [26], sin embargo, esa implicación es sólo en una dirección, es decir, existen procesos divisibles que son no Markovianos [27] en el sentido de la definición (2.37).

Propiedad contractiva

Sean $T(x_2, t_2|x_1, t_1)$ las matrices de transición de algún proceso estocástico. Entonces tal proceso es divisible si y sólo si su norma de traza nunca se incrementa cuando $T(x_2, t_2|x_1, t_1)$ es aplicada a cada vector de probabilidad $\bar{p}(x)$, $x \in \mathcal{X}$, para todo t_1 y t_2 [26, 28, 29]:

$$\left\| \sum_{x_1 \in \mathcal{X}} T(x_2, t_2|x_1, t_1) \bar{p}(x_1) \right\|_1 \leq \|\bar{p}(x_2)\|_1, \quad t_1 \leq t_2. \quad (2.45)$$

en donde $\|\bar{v}\|_1 = \sum_i |v_i|$.

La *distancia de Kolmogorov* entre dos vectores de probabilidad está definida como

$$D_K\{\bar{p}^1(x), \bar{p}^2(x)\} = \frac{1}{2} \|\bar{p}^1(x) - \bar{p}^2(x)\|_1. \quad (2.46)$$

Entonces, podemos decir que dado un proceso estocástico que satisface la ecuación (2.45) la distancia de Kolmogorov de dos vectores de probabilidad disminuye monótonamente como $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n$, y lo podemos interpretar como una *contracción* del espacio de probabilidades. En este sentido diremos que un proceso estocástico Markoviano es un *proceso contractivo* pues la distancia de Kolmogorov entre dos vectores de probabilidad no puede incrementarse.

2.2.2. No Markovianidad cuántica

En este trabajo estamos interesados en las definiciones de no Markovianidad cuántica basadas en las implicaciones que surgen al ser satisfecha una ecuación del tipo Chapman-Kolmogorov, es decir, el análogo cuántico de la propiedad de divisibilidad [30] y de la propiedad contractiva [31], que son las dos posturas ampliamente aceptadas en la actualidad. Esto es así, principalmente, por que al describir un sistema cuántico abierto se hace a través del formalismo de las matrices de densidad, a partir de las cuales podemos conocer la probabilidad de que el sistema se encuentre en un cierto estado a un tiempo dado, esto significa que tenemos, de cierto modo, una probabilidad de un solo punto⁸ y eso nos permite verificar una condición del tipo Chapman-Kolmogorov. Adicionalmente, para evaluar directamente la condición de Markov sería necesario realizar mediciones consecutivas del sistema y ello carece de sentido pues al hacer una sola medición estaremos irremediamente perturbando o determinando el estado del sistema posterior a la medición.

No Markovianidad cuántica basada en divisibilidad (NMD)

Dado un proceso cuántico (2.14), consideremos dos tiempos $t, \varepsilon \geq 0$ y el mapa CPTP $\Lambda_{(t,0)}$, entonces, un estado inicial arbitrario que evoluciona hasta un tiempo posterior $t + \varepsilon$, viene dado por

$$\varrho(t + \varepsilon) = \Lambda_{(t+\varepsilon,0)}\varrho(0) = \Lambda_{(t+\varepsilon,t)}\Lambda_{(t,0)}\varrho(0). \quad (2.47)$$

Partiendo de la expresión anterior podemos establecer una analogía entre la primera de las igualdades y la ecuación (2.38), identificando los estados ϱ con las probabilidades \mathbb{P} y al mapa dinámico Λ con las matrices de transición T . La segunda igualdad implica que $\Lambda_{(t+\varepsilon,0)} = \Lambda_{(t+\varepsilon,t)} \circ \Lambda_{(t,0)}$ y puede interpretarse como el análogo cuántico de la ecuación de Chapman-Kolmogorov expresada en la forma (2.41), continuando con esa analogía con lo expuesto en el caso de procesos estocásticos clásicos llegamos a nuestra primera definición [16]: *diremos que un proceso cuántico es Markoviano basado en la divisibilidad (MD) si la familia de mapas dinámicos que lo caracterizan es divisible, si no es divisible será llamado no Markoviano de acuerdo al criterio de divisibilidad (NMD)*. Con esta definición que relaciona no Markovianidad y divisibilidad en el caso cuántico, la

⁸Nos referimos a probabilidades en un solo punto en el contexto de que no nos proporciona probabilidades como lo hacen las probabilidades conjuntas, por ejemplo, para dos puntos: $\mathbb{P}(x_1, t_1; x_2, t_2)$ nos proporciona la probabilidad de que una variable aleatoria $X = x_1$ al tiempo t_1 y $X = x_2$ al tiempo t_2 .

tarea de investigar si un proceso es o no Markoviano se ha simplificado a determinar si el mapa intermedio $\Lambda_{(t+\varepsilon,t)}$ es CPTP (v. p. 8).

Para comprobar la completa positividad del mapa intermedio Rivas *et al.* [30] consideran la norma de traza de la matriz de Choi asociada a dicho mapa, definida como $\|C_{\Lambda(t+\varepsilon,t)}\|_1 = \sum_i |\lambda_i|$, en donde λ_i son los eigenvalores de la matriz $C_{\Lambda(t+\varepsilon,t)}$. De acuerdo al teorema de Choi [24] y por la conservación de la traza⁹ si el mapa intermedio es CPTP, entonces, dicha matriz tendrá eigenvalores no negativos ($\lambda_i \geq 0$) y la suma de ellos será igual a la dimensión del espacio de Hilbert del sistema, por otro lado, si el mapa intermedio no es CPTP su matriz de Choi asociada tendrá eigenvalores negativos y la suma de sus valores absolutos será mayor que la dimensión del espacio de Hilbert asociado al sistema. Además, debemos tener en cuenta que el tiempo juega el rol de un parámetro continuo es por ello que necesitamos considerar un mapa intermedio para tiempos infinitesimales $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Podemos resumir lo anterior a través de la siguiente expresión:

$$g(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{d} \|C_{\Lambda(t+\varepsilon,t)}\|_1 - 1}{\varepsilon} \begin{cases} = 0, & \text{Divisible (MD),} \\ > 0, & \text{No divisible (NMD),} \end{cases} \quad (2.48)$$

en donde d es la dimensión del espacio de Hilbert del sistema.

La función definida en (2.48) depende del tiempo, entonces, podríamos encontrar que un proceso dado es MD [$g(t) = 0$] solo en ciertos intervalos y NMD, [$g(t) > 0$], en otros¹⁰. En base a lo anterior podemos pensar en una cantidad que sume todas las contribuciones en donde $g(t) > 0$ y con ello *cuantificar* la NMD. Es así como Á. Rivas, S. F. Huelga y M. B. Plenio definen el *grado* de NMD de un proceso cuántico como [16]

$$\mathcal{N}_{\text{RHP}} = \int dt g(t), \quad (2.49)$$

es claro que $\mathcal{N}_{\text{RHP}} = 0$ si el proceso es MD y en otro caso nos dice que *tan no Markoviano es* de acuerdo a la no divisibilidad del proceso. Nos referimos a esta medida como *medida de RHP*. En el mejor de los casos la integral (2.49) puede evaluarse para $t \in [0, \infty)$, sin embargo, para sistemas en cuasi equilibrio, es decir, sistemas cuya dinámica no llega a un punto de equilibrio sino que fluctúa al rededor de algún valor para tiempos suficientemente largos, la región de integración debe limitarse a un intervalo en donde esas fluctuaciones no contribuyan de forma significativa. En el siguiente párrafo analizaremos la propiedad de contractividad en procesos cuánticos.

No Markovianidad cuántica basada en la contractividad (NMC)

Continuando con la analogía entre procesos estocásticos clásicos y procesos cuánticos basados en las implicaciones de la ecuación de Chapman-Kolmogorov, comparemos la ecuación (2.28) con la ecuación (2.46), identificaremos a los estados con los vectores de probabilidad y la distancia de traza con la distancia de Kolmogorov. Entonces, podemos dar la siguiente afirmación [15]: *diremos que un proceso cuántico es Markoviano de acuerdo a la propiedad de contractividad (MC) si la distancia de traza nunca se incrementa para cuales quiera pares de estados iniciales posibles, por otro lado si existe un par de estados iniciales tales que su distancia de traza aumenta en un intervalo I , entonces, el proceso será llamado no Markoviano de acuerdo a la propiedad contractiva (NMC)*. Con ello podemos definir la función:

$$\sigma(t; \varrho_1, \varrho_2) = \frac{d}{dt} D[\varrho_1(t), \varrho_2(t)], \quad (2.50)$$

tal que, $\sigma(t; \varrho_1, \varrho_2) \leq 0$ para un proceso MC y $\sigma(t; \varrho_1, \varrho_2) > 0$ para un proceso NMC. Desde luego que esa definición de no Markovianidad lleva implícito un proceso de optimización, pues debemos investigarla para todos los posibles pares de estados iniciales. Breuer *et al.* [15] llaman *flujo*

⁹También se conserva la Hermiticidad

¹⁰Incluso podría presentar puntos singulares en donde $g \rightarrow \infty$.

de información a la definición (2.50): si es menor que cero se interpreta como información que fluye desde el sistema hacia el entorno, mientras que, si es mayor que cero la interpretan como información que regresa desde el entorno hacia el sistema. Dado que es una función del tiempo podríamos encontrar intervalos en donde el sistema es MC y otros en donde sea NMC.

A partir de (2.50) H. P. Breuer, E. M. Laine y J. Piilo cuantifican el *grado* de NMC de un proceso a través de la cantidad [15]:

$$\mathcal{N}_{\text{BLP}} = \max_{\varrho_1, \varrho_2} \int_{\sigma > 0} dt \sigma(t; \varrho_1, \varrho_2), \quad (2.51)$$

quedando explícito el proceso de optimización. Además, como la integración es únicamente sobre aquellos intervalos en donde la derivada de la distancia de traza es positiva, la medida será igual a cero en procesos MC y mayor que cero en procesos NMC. Llamaremos a la ecuación (2.51) *medida de BLP* debido a sus autores.

Divisibilidad frente a contractividad

Hasta aquí hemos analizado dos definiciones de (no)Markovianidad cuántica, una basada en la divisibilidad (N)MD y otra en la contractividad de los mapas dinámicos (N)MC, las cuales no necesariamente coinciden [32], es más, puede probarse que todos los procesos Markovianos de acuerdo a la divisibilidad lo son también de acuerdo a la contractividad, sin embargo la afirmación inversa no siempre es cierta [33, 34], es decir, podemos encontrar procesos que son Markovianos de acuerdo a la propiedad contractiva y al mismo tiempo ser indivisibles.

Podemos reconciliar esas dos posturas introduciendo el concepto de completa positividad en la definición de Markovianidad propuesta por BLP tal y como lo hicieron en la Ref. [33]. Para que un proceso sea Markoviano a lá BLP se requiere que el mapa Λ_t sea positivo para todo $t \geq 0$, esto es claro pues en ese caso se mapean matrices de densidad a matrices de densidad. Consideramos que el mapa Λ_t es completamente positivo entonces el mapa extendido $\Lambda_t \otimes \mathbb{1}_X$ es positivo¹¹, y puede introducirse una generalización de (2.50) como:

$$\tilde{\sigma}(t; \tilde{\varrho}_1, \tilde{\varrho}_2) = \frac{d}{dt} D[\tilde{\varrho}_1(t), \tilde{\varrho}_2(t)], \quad (2.52)$$

en donde

$$\tilde{\varrho}_k(t) = [\Lambda_t \otimes \mathbb{1}_X] \tilde{\varrho}_k, \quad k = 1, 2.$$

Puede demostrarse que $\tilde{\sigma}(t; \tilde{\varrho}_1, \tilde{\varrho}_2) \leq 0$ si y sólo si Λ_t es divisible [33, 34]. Esto significa que, *podemos identificar Markovianidad con la divisibilidad del mapa Λ_t manteniendo la interpretación del flujo de información pero en el sistema extendido descrito por el mapa $\Lambda_t \otimes \mathbb{1}_X$.*

2.3. Teoría de matrices aleatorias (RMT)

Una *matriz aleatoria* es una matriz cuyos elementos, en general, son complejos y algunos o todos son variables aleatorias. En física nuclear fue Wigner quien introdujo la teoría de matrices aleatorias (RMT, por sus siglas en inglés) para describir algunas propiedades estadísticas de los núcleos atómicos [35], posteriormente Brody *et al.* extendieron estas ideas [36]. Por otro lado, las matrices aleatorias fueron utilizadas por Berry y Tabor [17] para describir las propiedades estadísticas de los sistemas cuánticos cuya contra parte clásica tiene un comportamiento caótico, en otras palabras, para describir sistemas cuánticos caóticos, idea que fue ampliamente popularizado por Bohigas *et al.* [19]. Adicionalmente, podemos decir que RMT es útil para describir sistemas que nos son desconocidos o tenemos mínimo conocimiento de ellos, por ejemplo para modelar un entorno que no podemos controlar [37, 38]. Un estudio formal de la teoría de matrices aleatoria puede consultarse en la Ref. [39] y un enfoque orientado a sistemas físicos en la Ref. [40].

¹¹Aquí X es la dimensión del espacio de Hilbert de un sistema auxiliar, v. p. 8.

En este trabajo consideramos únicamente dos tipos de ensembles, el denominado Ensemble Gaussiano Ortogonal (GOE, por sus siglas en inglés) y el Ensemble Gaussiano Unitario (GUE, por sus siglas en inglés). Un elemento de esos ensembles es representado por una matriz cuadrada de dimensión N :

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1N} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & h_{N2} & \dots & h_{NN} \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

cuyos elementos de matriz son variables aleatorias que siguen una distribución de probabilidad Gaussiana, si los elementos diagonales tienen media μ y varianza s^2 , entonces, los no diagonales tendrán la misma media μ pero la mitad de la varianza $s^2/2$. Hemos elegido la letra H para denotar un elemento del ensemble por que en aplicaciones físicas juegan el rol de Hamiltoniano de un sistema y nos referiremos a él como *Hamiltoniano aleatorio*. La idea general es hacer varias realizaciones del Hamiltoniano aleatorio y promediar sobre el ensemble GUE o GOE, para fines prácticos, no es más que promediar los resultados por el número de realizaciones de H .

2.3.1. Ensemble Gaussiano Ortogonal (GOE)

Cuando el sistema posee la propiedad de ser invariante bajo la transformación de inversión temporal, la representación matricial del Hamiltoniano es real y simétrica, entonces puede utilizarse el ensemble GOE para modelarlo. En este caso todos los elementos de matriz son reales y siguen una distribución Gaussiana, son matrices simétricas: $h_{ij} = h_{ji}$ ($i < j$). En nuestro trabajo los elementos diagonales tienen media cero y varianza dos, mientras que los elementos fuera de la diagonal tienen media cero y varianza uno. Además, los elementos h_{ij} ($i \geq j$) son estadísticamente independientes. Estos ensembles son invariantes ante transformaciones ortogonales.

2.3.2. Ensemble Gaussiano Unitario (GUE)

El ensemble GUE resulta apropiado para modelar sistemas que no son invariantes bajo la transformación de inversión temporal, en estos casos la representación matricial del Hamiltoniano es inevitablemente compleja. Son invariantes ante transformaciones unitarias y se definen en el espacio de matrices Hermíticas: $h_{ij} = h_{ji}^*$ ($i < j$) y sus elementos diagonales son reales. Además, h_{ij} ($i > j$) tienen parte real e imaginaria estadísticamente independientes con una distribución Gaussiana, típicamente con media cero y varianza un medio, los elementos diagonales son también estadísticamente independientes y tienen una distribución Gaussiana (media cero y varianza uno).

Capítulo 3

Qubit con entorno RMT

En este capítulo se presenta el modelo sobre el cual trabajaremos. Las propiedades de decoherencia y resultados preliminares de indicios de no Markovianidad en el mismo son presentados en nuestros trabajos [7, 41, 42]. Posterior a la presentación del modelo, se encuentra la expresión general del canal que lo describe. Para, finalmente, aplicar las ideas de no Markovianidad cuántica vistas en el capítulo anterior.

3.1. Modelo

Consideramos un sistema cuántico con dos niveles de energía (qubit) acoplado a un entorno modelado por un ensemble de matrices aleatorias (*entorno RMT*, para abreviar). El Hamiltoniano total está dado por [7, 41]

$$H = \frac{\Delta}{2} \sigma_z \otimes \mathbb{1}_E + \mathbb{1}_q \otimes H_E + \lambda \sigma_x \otimes V_E, \quad (3.1)$$

en la Figura 3.1 se muestra un esquema del modelo. Del lado derecho de la igualdad (3.1) tenemos: el primer término expresa la evolución libre del qubit en donde, σ_z es la matriz de Pauli y Δ es la distancia entre los niveles de energía \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 , mientras que $\mathbb{1}_E$ es el operador identidad del entorno. El segundo término corresponde a la evolución libre del entorno, en donde el Hamiltoniano del entorno H_E es tomado de un ensemble de matrices aleatorias (GOE o GUE), asumiremos que la distancia promedio entre los niveles de energía del espectro del entorno es d_E , y $\mathbb{1}_q$ es el operador identidad del qubit. Finalmente, el tercer término es llamado *Hamiltoniano de interacción*, está formado por una matriz de Pauli σ_x que actúa sobre el qubit y un potencial V_E que actúa sobre el entorno, este último es tomado de un ensemble de matrices aleatorias y es estadísticamente independiente de H_E , el parámetro λ puede ser interpretado como la *fuerza* del acoplamiento entre el qubit y el entorno RMT.

En este párrafo establecemos la adimensionalización de nuestro modelo, iniciando con la definición del *tiempo de Heisenberg* por la relación $t_H = 2\pi\hbar\rho_E$, en donde ρ_E es la densidad de energía promedio de los estados de algún sistema (no debe confundirse con el estado del entorno ρ_E). Utilizaremos un Hamiltoniano del entorno con un espectro desdoblado, entonces, $\rho_E = 1/d_E$ y así podemos medir el *tiempo físico* t_{fis} en unidades del tiempo de Heisenberg del entorno $\hbar/d_E = t_H/(2\pi)$ y trabajar con un tiempo adimensional $t = t_{\text{fis}}d_E/\hbar$, en el cual el tiempo de Heisenberg del entorno es fijado en 2π . Adicional a lo anterior, medimos la energía en unidades de d_E , esto último es equivalente a dividir el Hamiltoniano (3.1) por d_E , en tales unidades $\hbar = 1$. Con esto nuestro modelo es adimensional.

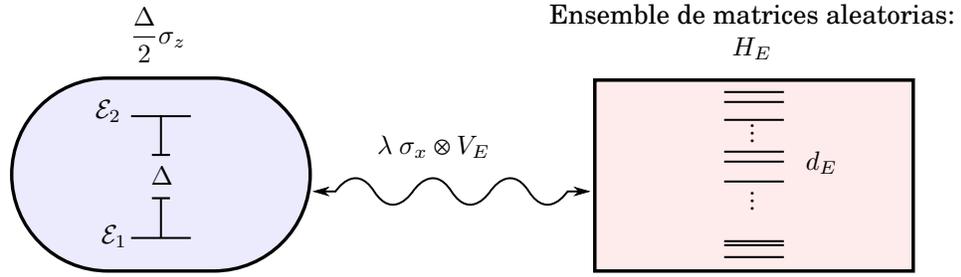


Figura 3.1: Ilustración de un sistema de dos niveles de energía (qubit) acoplado a un entorno aleatorio. El qubit (izquierda) tiene energía \mathcal{E}_1 en su estado base y energía \mathcal{E}_2 en el estado excitado, las cuales están separadas por una distancia Δ , entonces el Hamiltoniano puede expresarse como $\Delta\sigma_z/2$. El Hamiltoniano del entorno H_E (derecha) es tomado de un ensemble de matrices aleatorias de tal manera que la distancia promedio entre sus niveles de energía es d_E . Por último, el término de interacción (centro) está compuesto de dos partes, la primera es la matriz de Pauli σ_x que actúa sobre el qubit y la segunda es un potencial que actúa sobre el entorno y también es tomado de un ensemble de matrices aleatorias, el parámetro λ nos dice que tan fuerte es la interacción entre el qubit y el entorno.

3.2. Canal cuántico

Denotemos por ϱ_q^{+x} , ϱ_q^{+y} y ϱ_q^{+z} a los eigenestados asociados a los eigenvalores +1 de las matrices de Pauli σ_x , σ_y y σ_z , respectivamente. En el Apéndice A se demuestra que esos eigenestados son mapeados de acuerdo a las siguientes expresiones

$$\varrho_q^{+x}(t) = \Lambda_{(t,0)}[\varrho_q^{+x}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & z_x(t)^* \\ z_x(t) & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

$$\varrho_q^{+y}(t) = \Lambda_{(t,0)}[\varrho_q^{+y}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & z_y(t)^* \\ z_y(t) & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

$$\varrho_q^{+z}(t) = \Lambda_{(t,0)}[\varrho_q^{+z}] = \begin{bmatrix} r(t) & 0 \\ 0 & 1 - r(t) \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Las funciones $r(t)$ y $z_{x,y}(t)$ no tienen una expresión analítica explícita (en el Apéndice A se da una forma en la que podrían ser calculadas) y sólo son conocidas de forma numérica. La forma de los mapas (3.2)–(3.4) son válidas tanto para ensembles GOE como para ensembles GUE, aunque las funciones $r(t)$, $z_{x,y}(t)$ serán diferentes según el tipo de ensemble sobre el que se tome el promedio, en la Figura 3.2 se muestra un ejemplo de ello. Veremos más adelante que el conocimiento de esos tres mapas es suficiente para caracterizar completamente el canal cuántico inducido por un entorno de matrices aleatorias.

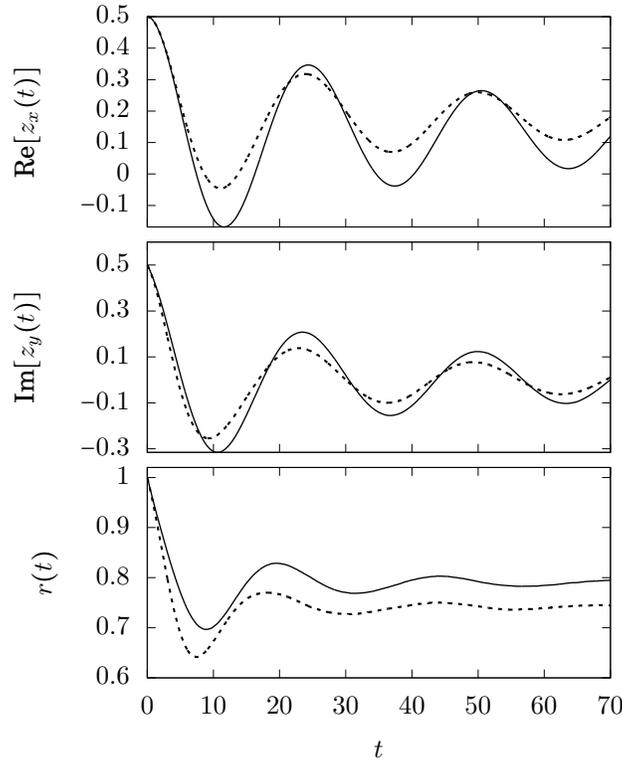


Figura 3.2: En las gráficas las curvas continuas resultan al promediar sobre un ensemble GUE, mientras que las curvas discontinuas al promediar sobre un GOE. En ambos casos, GUE y GOE, los parámetros son $\Delta = 0.26$ y $\lambda = 0.094$ con un entorno de dimensión 200 (matrices 200×200) y se promedio sobre 1200 realizaciones del Hamiltoniano aleatorio. La similitud entre la parte real de $z_x(t)$ y la parte imaginaria de $z_y(t)$ puede entenderse al comparar las ecuaciones (A.36) y (A.39) del Apéndice A, observamos que comparten algunas características, como por ejemplo, su periodo de oscilación debido a que depende de Δ a diferencia de las oscilaciones de $r(t)$ que son independientes de ese parámetro [v. (A.22)].

3.2.1. Representación de Bloch

Existe una relación uno a uno entre los estados de un qubit y los puntos de una bola de radio unitario, de tal manera que podemos representar un proceso cuántico como una familia de un parámetro de transformaciones lineales afín de dicha bola (rotaciones, contracciones, expansiones y translaciones) [22]. A esa representación geométrica de los estados del qubit como los puntos de una bola unitaria se le llama *bola de Bloch*. En la superficie de la bola (llamada *esfera de Bloch*) se encuentran los estados puros, en su interior los estados mixtos y al centro de la bola le corresponde el estado de mezcla máxima: $\mathbb{1}_q/2$.

La matriz de densidad de un qubit siempre puede ser escrita en la *representación de Bloch* como [22]

$$\varrho_q = \frac{1}{2}(\mathbb{1}_q + \vec{R}_B \cdot \vec{\sigma}) \quad (3.5)$$

donde \vec{R}_B es un vector real de tres componentes llamado *vector de Bloch* y $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$. De (3.5) resulta claro que el vector de Bloch determina completamente el estado de un qubit. Veremos a continuación como también un canal cuántico para un solo qubit puede ser descrito a través de dicho vector.

Cualquier canal cuántico para un qubit puede ser escrito en la base de Pauli $\{\mathbb{1}_q, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$

como una matriz B de tamaño 4×4 ¹:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{c} & M \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

en donde M es una matriz real de 3×3 , y \vec{c} es un vector constante. En esta representación, resulta que, un canal cuántico es equivalente a una *mapa lineal afín* del vector de Bloch [22]

$$\vec{R}_B \mapsto \vec{R}'_B = M\vec{R}_B + \vec{c}, \quad (3.7)$$

entonces, el efecto del canal puede visualizarse como una deformación de la bola de Bloch dada por la matriz M más un desplazamiento \vec{c} . Un caso especial es cuando $\vec{c} = \vec{0}$ y corresponde a los llamados *mapas unital* lo cual significa que $\Lambda_t : \mathbb{1}_q \mapsto \mathbb{1}_q$.

Calculamos los elementos de la matriz (3.6) a través de la fórmula [43]

$$B_{j,k} = \frac{1}{2} \text{tr}\{\sigma_j \Lambda_t[\sigma_k]\}, \quad j, k = 0, x, y, z \quad (3.8)$$

con $\sigma_0 = \mathbb{1}_q$ y hemos escrito $\Lambda_t = \Lambda_{(t,0)}$ para simplificar la notación. Los términos $\Lambda_t[\sigma_k]$ para $k = x, y, z$ se obtienen escribiendo las ecuaciones (3.2)–(3.4) en la representación de Bloch (3.5), mientras que $\Lambda_t[\sigma_0] = \mathbb{1}_q$ por que es un mapa unital. Así obtenemos

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Re}(z_x) & \text{Re}(z_y) & 0 \\ 0 & \text{Im}(z_x) & \text{Im}(z_y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2r - 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

notamos que no hay translación ($\vec{c} = \vec{0}$) y que

$$M = \begin{bmatrix} \text{Re}(z_x) & \text{Re}(z_y) & 0 \\ \text{Im}(z_x) & \text{Im}(z_y) & 0 \\ 0 & 0 & 2r - 1 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

lo cual es una rotación al rededor del eje z acompañada de una deformación de las componentes como funciones de $z_{x,y}$ y r , en particular la componente z se contrae y/o expande por un factor de $2r - 1$. Explícitamente la bola de Bloch es transformada de acuerdo a

$$\vec{R}_B \mapsto \vec{R}'_B = \begin{bmatrix} \text{Re}(z_x)x + \text{Re}(z_y)y \\ \text{Im}(z_x)x + \text{Im}(z_y)y \\ (2r - 1)z \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

En la Figura 3.3 se muestra, a manera de ejemplo, como es el efecto del canal cuántico sobre la esfera de Bloch cuando los parámetros del modelo son $\Delta = 0.1$ y $\lambda = 0.03$. En **(a)** $t = 0$ se muestran todos los estados puros, en otras palabras, la esfera de Bloch. Un tiempo después en **(b)** $t = 20$ la esfera se ha contraído de forma casi uniforme y ha girado al rededor del eje z como lo indican los ejes x' y y' , por supuesto $z' = z$. En **(c)** $t = 50$ la esfera ha sufrido una expansión recuperando casi su volumen original, además dicha expansión es acompañada de una rotación al rededor del eje z . Tiempo después en **(d)** $t = 75$ tenemos una contracción no uniforme. En **(e)** $t = 900$ observamos que la esfera ha colapsado en un disco en el plano $x'z$ (o $y'z$), podemos mencionar que cuando $t \rightarrow \infty$ la esfera de Bloch colapsa en un disco que yace en el plano xz lo cual se debe a que la componente y siempre converge al centro (se anula) como $t \rightarrow \infty$ independientemente del valor de los parámetros Δ y λ , mientras que las componentes x y z convergen a un punto sobre sus respectivos ejes y no necesariamente al centro de la bola, esta aseveración será justificada en el Capítulo 4.

¹En nuestras discusiones por defecto todos los vectores son vectores columna, es así que cuando nos refiramos a un vector fila usaremos el superíndice T para denotar la operación de transposición como es usual.

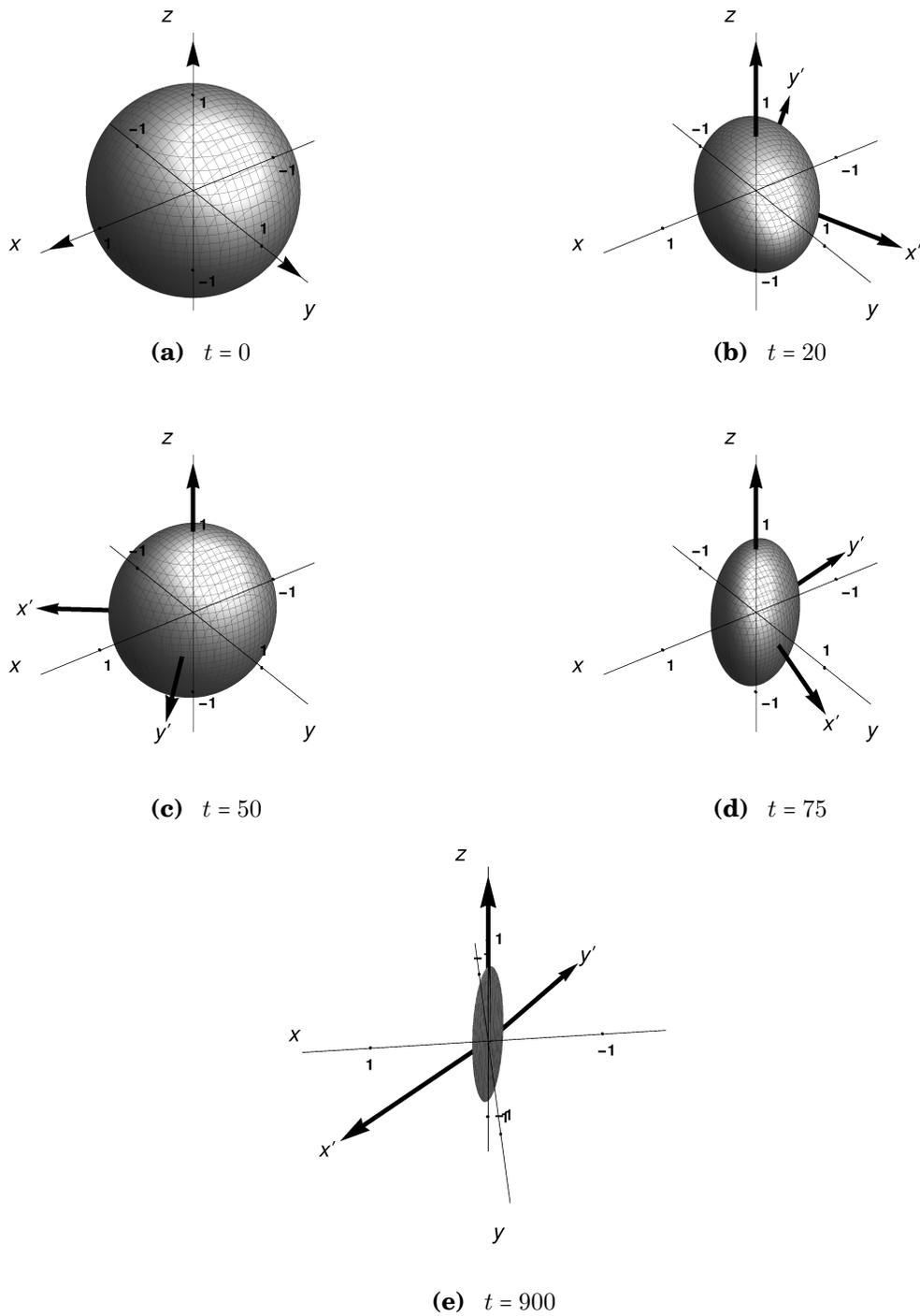


Figura 3.3: Efecto del canal cuántico inducido por un ensemble de matrices aleatorias GUE sobre la esfera de Bloch. Los ejes transformados $x'y'z'$ se han hecho a una escala mayor que 1 para poder apreciar las rotaciones al rededor del eje $z = z'$. Los parámetros del modelo son $\Delta = 0.1$ y $\lambda = 0.03$.

3.2.2. Matriz de Choi y superoperador

Mencionamos que el canal cuántico está completamente determinado por las ecuaciones (3.2)–(3.4) esto se debe, en parte, a que ahora podemos construir la matriz de Choi asociada al canal.

Para un qubit (el sistema S) el sistema auxiliar es otro qubit, así que el estado de máximo entrelazamiento (2.17) está dado por un *estado de Bell*, que en la base computacional $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ se escribe como

$$|\Psi\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (3.12)$$

Podemos, entonces, escribir la matriz (2.18) para $t > \tau = 0$ como

$$C_{\Lambda(t,0)} = \begin{pmatrix} \Lambda_{(t,0)}[|0\rangle\langle 0|] & \Lambda_{(t,0)}[|0\rangle\langle 1|] \\ \Lambda_{(t,0)}[|1\rangle\langle 0|] & \Lambda_{(t,0)}[|1\rangle\langle 1|] \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

en donde cada elemento es un bloque de 2×2 que corresponde al mapeo de los vectores base del qubit.

El primer bloque superior izquierdo de (3.13) se obtiene directamente de la ecuación (3.4), dado que $\Lambda_{(t,0)}[\varrho_q^{+z}] = \Lambda_{(t,0)}[|0\rangle\langle 0|]$. El bloque inferior derecho se obtiene debido a que el canal es unital, y entonces $\Lambda_{(t,0)}[|1\rangle\langle 1|] = \mathbb{1}_q - \Lambda_{(t,0)}[|0\rangle\langle 0|]$. Los dos bloques restantes se obtienen resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$\varrho_q^{+x} = \frac{1}{2} \mathbb{1}_q + \frac{1}{2} |1\rangle\langle 0| + \frac{1}{2} |0\rangle\langle 1|, \quad (3.14)$$

$$\varrho_q^{+y} = \frac{1}{2} \mathbb{1}_q + \frac{i}{2} |1\rangle\langle 0| - \frac{i}{2} |0\rangle\langle 1|, \quad (3.15)$$

para $|1\rangle\langle 0|$ y $|0\rangle\langle 1|$, después les aplicamos el canal, obteniendo así que

$$\Lambda_{(t,0)}[|1\rangle\langle 0|] = \Lambda_{(t,0)}[\varrho_q^{+x}] - i\Lambda_{(t,0)}[\varrho_q^{+y}] - \frac{1-i}{2} \mathbb{1}_q = \begin{bmatrix} 0 & z_2(t)^* \\ z_1(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

$$\Lambda_{(t,0)}[|0\rangle\langle 1|] = \Lambda_{(t,0)}[\varrho_q^{+x}] + i\Lambda_{(t,0)}[\varrho_q^{+y}] - \frac{1+i}{2} \mathbb{1}_q = \begin{bmatrix} 0 & z_1(t)^* \\ z_2(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

en donde hemos definido $z_1(t) = [z_x(t) - iz_y(t)]/2$, y, $z_2(t) = [z_x(t) + iz_y(t)]/2$. Tenemos ahora los elementos necesarios para escribir la matriz de Choi asociada al canal cuántico:

$$C_{\Lambda(t,0)} = \begin{bmatrix} r(t) & 0 & 0 & z_1(t)^* \\ 0 & 1-r(t) & z_2(t) & 0 \\ 0 & z_2(t)^* & 1-r(t) & 0 \\ z_1(t) & 0 & 0 & r(t) \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Haciendo un reshuffling de la matriz anterior obtendremos la representación del canal como un superoperador:

$$L_{(t,0)} = \begin{bmatrix} r(t) & 0 & 0 & 1-r(t) \\ 0 & z_1(t) & z_2(t) & 0 \\ 0 & z_2(t)^* & z_1(t)^* & 0 \\ 1-r(t) & 0 & 0 & r(t) \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

a través de este superoperador y la ecuación (2.20) tenemos que para un estado inicial arbitrario del qubit

$$\bar{\varrho}_q(t) = L_{(t,0)}\bar{\varrho}_q = \begin{bmatrix} r(t)\varrho_{00} + [1-r(t)]\varrho_{11} \\ z_1(t)\varrho_{10} + z_2(t)\varrho_{01} \\ z_1(t)^*\varrho_{01} + z_2(t)^*\varrho_{10} \\ [1-r(t)]\varrho_{00} + r(t)\varrho_{11} \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

y regresando a la notación de matriz obtenemos el canal cuántico para un estado inicial arbitrario del qubit

$$\Lambda_{(t,0)} : \varrho_q \mapsto \varrho_q(t) = \Lambda_{(t,0)} \varrho_q = \begin{bmatrix} r \varrho_{00} + (1-r) \varrho_{11} & z_1^* \varrho_{01} + z_2^* \varrho_{10} \\ z_1 \varrho_{10} + z_2 \varrho_{01} & (1-r) \varrho_{00} + r \varrho_{11} \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

en donde se ha convenido omitir la dependencia temporal de las variables $r, z_{1,2}$, de aquí en adelante tomaremos esa convención. A partir de esa expresión general es evidente que el mapa $\Lambda_{(t,0)}$ es unital.

3.2.3. Mapa para tiempos intermedios

Para dos tiempos $t, \varepsilon \geq 0$ la ecuación (2.21) se escribe como

$$L_{(t+\varepsilon,t)} = L_{(t+\varepsilon,0)} [L_{(t,0)}]^{-1}. \quad (3.22)$$

Si denotamos con primas a aquellas funciones evaluadas en un tiempo $t+\varepsilon$, por ejemplo $r' = r(t+\varepsilon)$ y similarmente para $z_{1,2}$. Entonces de la ecuación (3.19) obtenemos

$$L_{(t+\varepsilon,0)} = \begin{bmatrix} r' & 0 & 0 & 1-r' \\ 0 & z_1' & z_2' & 0 \\ 0 & (z_2')^* & (z_1')^* & 0 \\ 1-r' & 0 & 0 & r' \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

y también de ella obtenemos su matriz inversa

$$[L_{(t,0)}]^{-1} = \begin{bmatrix} r/d & 0 & 0 & (r-1)/d \\ 0 & z_1^*/D & -z_2/D & 0 \\ 0 & -z_2^*/D & z_1/D & 0 \\ (r-1)/d & 0 & 0 & r/d \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

en donde $d = 2r - 1$ y $D = |z_1|^2 - |z_2|^2$. Insertando (3.23) y (3.24) en la expresión (3.22) encontramos que el superoperador correspondiente al mapa intermedio está dado por

$$L_{(t+\varepsilon,t)} = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 1-q \\ 0 & Z_1 & Z_2 & 0 \\ 0 & Z_2^* & Z_1^* & 0 \\ 1-q & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

en donde hemos definido

$$q = \frac{(r' - r - 1)}{d}, \quad (3.26)$$

$$Z_1 = \frac{z_1' z_1^* - z_2' z_2^*}{D}, \quad (3.27)$$

$$Z_2 = \frac{z_2' z_1 - z_1' z_2}{D}. \quad (3.28)$$

Notamos que (3.25) tiene singularidades en $D = 0$ ó $d = 0$, y que conserva su forma, en otras palabras, aquellos elementos que son cero en (3.19) lo siguen siendo en (3.25). Para finalizar nuestra discusión del mapa intermedio escribimos la matriz de Choi correspondiente, la cual resulta del reshuffling de la matriz (3.25), obteniendo

$$C_{\Lambda(t+\varepsilon,t)} = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & Z_1^* \\ 0 & 1-q & Z_2 & 0 \\ 0 & Z_2^* & 1-q & 0 \\ Z_1 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

que será útil para explorar la Markovianidad cuántica en nuestro modelo.

3.3. Medidas de no Markovianidad

Para definir un proceso en nuestro modelo, es decir una familia de mapas CPTP de un parámetro: $\{\Lambda_{(t,0)} | t \geq 0, \Lambda_{(0,0)} = \mathbb{1}_q\}$, lo podemos hacer permitiendo que en la ecuación (3.21) el tiempo varíe en un intervalo $I \in \mathbb{R}^+$ y debemos imponer la condición $r(0) = z_1(0) = 1$ y que $z_2(0) = 0$. Con todo lo anterior nuestro proceso queda bien definido, en lo que sigue investigamos la no Markovianidad de dicho proceso con las herramientas que hemos desarrollado. Debemos aclarar que al estudiar los criterios y las medidas de no Markovianidad será necesario considerar incrementos de tiempo infinitesimales, lo cual significa que tomaremos el límite $\varepsilon \rightarrow 0^+$ del mapa para tiempos intermedios en sus diferentes representaciones (v. subsección 3.2.3).

3.3.1. Divisibilidad

El proceso será divisible si los eigenvalores de la matriz de Choi (3.29):

$$\lambda_1 = q + |Z_1|, \quad \lambda_2 = q - |Z_1|, \quad (3.30)$$

$$\lambda_3 = (1 - q) + |Z_2|, \quad \lambda_4 = (1 - q) - |Z_2|, \quad (3.31)$$

son no negativos.

La expansión en series de Taylor al rededor de t de las funciones etiquetadas con primas resulta en

$$r' = r(t + \varepsilon) = r + \varepsilon \dot{r} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (3.32)$$

$$z_1' = z_1(t + \varepsilon) = z_1 + \varepsilon \dot{z}_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (3.33)$$

$$z_2' = z_2(t + \varepsilon) = z_2 + \varepsilon \dot{z}_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (3.34)$$

dado que estamos interesados en pasos del tiempo infinitesimales, conservaremos sólo hasta primer orden de ε en las ecuaciones anteriores. Y podremos escribir (3.26)-(3.28) como

$$q = 1 + \frac{\varepsilon \dot{r}}{d}, \quad (3.35)$$

$$Z_1 = 1 + \frac{\varepsilon}{D} (\dot{z}_1 z_1^* - \dot{z}_2 z_2^*), \quad (3.36)$$

$$Z_2 = \frac{\varepsilon}{D} (\dot{z}_2 z_1 - \dot{z}_1 z_2). \quad (3.37)$$

Ahora podemos establecer las condiciones para la divisibilidad del proceso. De las ecuaciones (3.30) tenemos que $|Z_1| \leq q$ y de (3.31) $|Z_2| \leq (1 - q)$, utilizando las expresiones (3.35)-(3.37) vienen a ser

$$1 - \varepsilon \delta_1 \leq 1 - \varepsilon \delta_q \quad \Leftrightarrow \quad \delta_1 \geq \delta_q, \quad (3.38)$$

y

$$\delta_2 \leq \delta_q, \quad (3.39)$$

en donde hemos introducido la notación abreviada:

$$\delta_q = -\frac{\dot{r}}{d}, \quad \delta_1 = -\frac{\text{Re}(\dot{z}_1 z_1^* - \dot{z}_2 z_2^*)}{D}, \quad \delta_2 = \frac{|\dot{z}_2 z_1 - \dot{z}_1 z_2|}{|D|} \quad (3.40)$$

además que para un número complejo a , se tiene $|1 + \varepsilon a| = 1 + \varepsilon \text{Re}(a) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Finalmente podemos poner todo en una sola expresión:

$$\delta_2 \leq \delta_q \leq \delta_1, \quad (3.41)$$

esto significa que mientras se satisfagan esas desigualdades para todo $t \in I$ el proceso descrito por el canal (3.21) será divisible, y entonces Markoviano de acuerdo a la divisibilidad (MD), en caso contrario será no Markoviano de acuerdo a la divisibilidad (NMD).

Medida de RHP

La norma de traza de la matriz de Choi (3.29) asociada al mapa intermedio para incrementos de tiempo infinitesimales viene dada por la suma de los valores absolutos de los eigenvalores (3.30) y (3.31) cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, esto es

$$\begin{aligned} \|C_{\Lambda(t+\varepsilon,t)}\|_1 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (|q + |Z_1|| + |q - |Z_1|| + |1 - q + |Z_2|| + |1 - q - |Z_2||) \\ &= 2 - \varepsilon(\delta_q + \delta_1 + |\delta_1 - \delta_q| + |\delta_q + \delta_2| + |\delta_q - \delta_2|), \end{aligned}$$

sustituyendo la expresión anterior en (2.48) obtenemos

$$g(t) = \frac{|\delta_1 - \delta_q| + |\delta_q + \delta_2| + |\delta_q - \delta_2| - \delta_q - \delta_1}{2}, \quad (3.42)$$

y con ello podemos evaluar la medida de RHP (2.49).

3.3.2. Contractividad

Ahora investigaremos bajo qué condiciones el canal cuántico (3.21) de nuestro modelo define a un proceso contractivo, para tal fin primero calculamos la distancia de traza para dos estados iniciales del qubit. Si dichos estados están representados por los *vectores de Bloch* $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, entonces

$$\varrho_q^1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & 1 - a_3 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \varrho_q^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + b_3 & b_1 - ib_2 \\ b_1 + ib_2 & 1 - b_3 \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Así, la diferencia entre ellos viene dada por

$$\varrho_q^1 - \varrho_q^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_3 - b_3 & a_1 - b_1 - i(a_2 - b_2) \\ a_1 - b_1 + i(a_2 - b_2) & -(a_3 - b_3) \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

de donde podemos definir un vector $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, con lo cual

$$\varrho_q^1 - \varrho_q^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} c_3 & c_1 - ic_2 \\ c_1 + ic_2 & -c_3 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$= \frac{1}{2} (c_1 \sigma_x + c_2 \sigma_y + c_3 \sigma_z) \quad (3.46)$$

$$= \frac{1}{2} [c_1(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) + ic_2(|1\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1|) + c_3(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)] \quad (3.47)$$

de esta forma es posible aplicar directamente el canal a la expresión anterior utilizando su linealidad y las ecuaciones (3.16) y (3.17) obteniendo con ello

$$\Lambda_{(t,0)}[\varrho_q^1 - \varrho_q^2] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (2r-1)c_3 & (z_1 + z_2)^* c_1 - i(z_1 - z_2)^* c_2 \\ (z_1 + z_2)c_1 + i(z_1 - z_2)c_2 & -(2r-1)c_3 \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

que al pasar a coordenadas esféricas: $\vec{c} = (R \sin \theta \cos \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta)$, puede escribirse como

$$\Lambda_{(t,0)}[\varrho_q^1 - \varrho_q^2] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (2r-1)R \cos \theta & R \sin \theta e^{-i\phi} (z_1^* + e^{2i\phi} z_2^*) \\ R \sin \theta e^{i\phi} (z_1 + e^{-2i\phi} z_2) & -(2r-1)R \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

La distancia de traza se reduce a la mitad de la suma de los valores absolutos de los eigenvalores de la matriz anterior:

$$D[\varrho_q^1(t), \varrho_q^2(t)] = \frac{1}{2} \|\varrho_q^1(t) - \varrho_q^2(t)\|_1 \quad (3.50)$$

$$= \frac{1}{2} \|\Lambda_{(t,0)} \varrho_q^1 - \Lambda_{(t,0)} \varrho_q^2\|_1 \quad (3.51)$$

$$= \frac{1}{2} \|\Lambda_{(t,0)}[\varrho_q^1 - \varrho_q^2]\|_1 \quad (3.52)$$

obteniendo finalmente

$$D[\varrho_q^1(t), \varrho_q^2(t)] = \frac{1}{2}R\sqrt{(2r-1)^2 \cos^2 \theta + |z_1 + z_2 e^{-i2\phi}|^2 \sin^2 \theta}. \quad (3.53)$$

Sin pérdida de generalidad podemos poner $R = 1$, pues sólo aparece como un parámetro de escala en la ecuación (3.53), además puede pensarse que corresponde al radio de la esfera de Bloch del estado inicial, que siempre será un estado puro. Del mismo modo, los ángulos θ y ϕ permanecen constantes una vez que los dos estados iniciales han sido elegidos sobre la esfera de radio unitario. Entonces, para que la distancia de traza nunca se incremente, y por lo tanto el canal describa a un proceso contractivo, las condiciones son que las funciones $(2r-1)^2$ y $|z_1 + z_2 e^{-i2\phi}|^2$ sean monótonas decrecientes:

$$\frac{d}{dt}(2r-1)^2 \leq 0, \quad (3.54)$$

$$\frac{d}{dt}|z_1 + z_2 e^{-i2\phi}|^2 \leq 0. \quad (3.55)$$

La condición (3.54) viene a ser $\dot{r}(2r-1) \leq 0$, que podemos escribir como:

$$\delta_q \geq 0, \quad \text{siempre que: } (2r-1) \neq 0, \quad (3.56)$$

en donde δ_q fue definida en (3.40). La imposición $(2r-1) \neq 0$ es necesaria para la existencia del mapa intermedio como ya lo establecimos en (3.24).

Para desarrollar las operaciones en (3.55) primero expandamos esa función y adoptemos la notación:

$$M = |z_1 + z_2 e^{-i2\phi}|^2 \quad (3.57)$$

$$= A + B \cos 2\phi - C \sin 2\phi \quad (3.58)$$

en donde

$$A = |z_1|^2 + |z_2|^2, \quad B = 2\text{Re}(z_1 z_2^*), \quad C = 2\text{Im}(z_1 z_2^*) \quad (3.59)$$

y hemos seguido omitiendo la dependencia temporal como se convino, por otro lado el parámetro ϕ queda fijado por las condiciones iniciales, así la derivada temporal es simplemente $\dot{M} = \dot{A} + \dot{B} \cos 2\phi - \dot{C} \sin 2\phi$. Notamos de (3.59) que B y C son, respectivamente, la parte real y la parte imaginaria de $\zeta = 2z_1 z_2^* = B + iC$, por lo que podemos poner $\dot{B} = |\dot{\zeta}| \cos \alpha$, y $\dot{C} = |\dot{\zeta}| \sin \alpha$. Con ello podemos escribir

$$\dot{M} = \dot{A} + |\dot{\zeta}|(\cos \alpha \cos 2\phi - \sin \alpha \sin 2\phi) \quad (3.60)$$

$$= \dot{A} + |\dot{\zeta}| \cos(\alpha + 2\phi), \quad (3.61)$$

dado que buscamos $\dot{M} \leq 0$, bastará con explorar si el valor más grande posible que pueda tomar (3.61) satisface dicha condición, ese valor ocurre en $\alpha = -2\phi$, escribimos $M_{\text{máx}} = \dot{A} + |\dot{\zeta}| \leq 0$, que haciendo un poco de álgebra se obtiene:

$$|\dot{z}_1 z_2^* + z_1 \dot{z}_2^*| \leq -\text{Re}(\dot{z}_1 z_1^* + \dot{z}_2 z_2^*). \quad (3.62)$$

Por lo tanto, si las dos condiciones (3.56) y (3.62) se cumplen $\forall t \in I \subset \mathbb{R}^+$ el proceso será contractivo, o en otras palabras, se tratará de un proceso Markoviano de acuerdo a la contractividad (MC).

Podemos condensar las desigualdades (3.56) y (3.62) en una sola expresión, para ello definimos

$$\sigma_{\text{máx}} = \text{máx} \{ \dot{\kappa}, \dot{M}_{\text{máx}} \}, \quad (3.63)$$

con $\kappa = (2r-1)^2$ así que $\dot{\kappa}$ debe satisfacer la condición (3.54) para que el proceso sea contractivo, el segundo término encerrado por las llaves fue definido a través de (3.61) y se obtuvo que

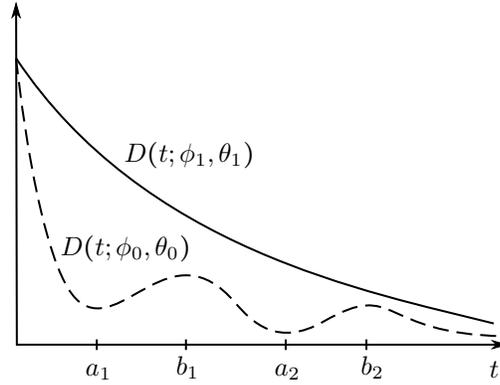


Figura 3.4: Ilustración del procedimiento de discriminación en la medida de BLP. Se dibujan dos curvas para dos posibles estados iniciales. La curva sólida decae monótonamente por lo que $\mathcal{N}_{\text{BLP}} = 0$ para el estado inicial dado por ϕ_1, θ_1 . Sin embargo, para el mismo proceso pero con un estado inicial diferente dado por ϕ_0, θ_0 (curva discontinua) la distancia de traza tiene dos intervalos: (a_1, b_1) y (a_2, b_2) en donde su derivada es positiva y $\mathcal{N}_{\text{BLP}} > 0$ puede ser calculada a través de (3.66) como la suma de las áreas bajo la curva en esos dos intervalos.

$\dot{M}_{\text{máx}} = \dot{A} + |\dot{\zeta}|$ con $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$, \mathbf{y} , $\zeta = 2z_1z_2^*$, el cual también debe ser menor que o igual a cero para que el proceso sea contractivo. Entonces, esas dos condiciones pueden condensarse en una sola vía (3.63) como

$$\sigma_{\text{máx}} \leq 0, \quad (3.64)$$

la cual juega un rol equivalente al que tiene $g(t)$ en el criterio de divisibilidad.

Medida de BLP

Escribimos la ecuación (3.53) como:

$$D(t; \phi, \theta) = \frac{1}{2} \sqrt{[2r(t) - 1]^2 \cos^2 \theta + |z_1(t) + z_2(t)e^{-i2\phi}|^2 \sin^2 \theta}, \quad (3.65)$$

en donde hemos puesto $R = 1$ y por conveniencia se incluyó la dependencia explícita del tiempo para las variables $r, z_{1,2}$. En esa forma es fácil observar que para un par θ y ϕ fijados por las condiciones iniciales la distancia de traza será una función que solo depende del tiempo. Además, es claro que la maximización sobre todos los posibles pares de estados iniciales se transforma en una exploración sobre los valores de los ángulos $\theta \in [0, \pi]$ y $\phi \in [0, 2\pi]$. Entonces, la medida de BLP (2.51) puede ser calculada de acuerdo a

$$\mathcal{N}_{\text{BLP}} = \max_{\theta, \phi} \sum_i [D(b_i; \phi, \theta) - D(a_i; \phi, \theta)], \quad (3.66)$$

la sumatoria se extiende sobre todos los intervalos (a_i, b_i) en donde la distancia de traza (3.65) tiene resurgimientos. En la Figura 3.4 se ilustra el significado de la medida de BLP así definida.

3.3.3. Máxima recuperación de la distancia de traza

En un proceso real resultará inevitable que los datos obtenidos experimentalmente presenten errores o fluctuaciones estadísticas. Esas fluctuaciones podrían conducir a valores poco confiables en las medidas de RHP y BLP. Consideremos, por ejemplo, la Figura 3.5, es claro que las fluctuaciones de la curva $D(t; \phi_1, \theta_1)$ terminarán contribuyendo de manera significativa en la cuantificación de la no Markovianidad (3.66) y concluiríamos erróneamente que ese es el estado

inicial que la maximiza, cuando en realidad tiene un comportamiento más monótono decreciente que la curva $D(t; \phi_0, \theta_0)$. Un argumento similar puede aplicarse a la medida de RHP si hay presencia de ruido, puesto que esas fluctuaciones terminarán contribuyendo significativamente a la integral sobre $g(t)$. Para evitar este tipo de inconsistencias, la propuesta es tomar el valor de la máxima recuperación de la distancia de traza como una medida de la no Markovianidad cuántica. En nuestro ejemplo, correspondería al valor $D(b_1, \phi_0, \theta_0) - D(a_1, \phi_0, \theta_0)$ que refleja con más certeza lo que realmente está ocurriendo, evitando con ello las contribuciones de las fluctuaciones estadísticas pues en caso de que la máxima recuperación de la distancia de traza sea del orden de esas fluctuaciones podemos decir que no existen resurgimientos.

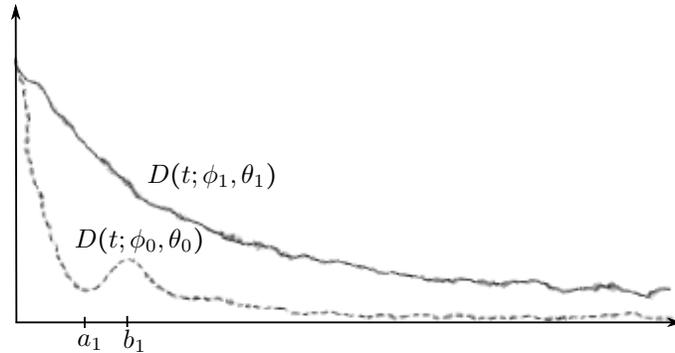


Figura 3.5: Ilustración de la distancia de traza para un proceso con fluctuaciones estadísticas. Si consideramos tiempos largos es evidente que la medida de BLP se vería seriamente influenciada por las fluctuaciones.

Capítulo 4

Análisis de los Resultados Numéricos

A continuación expondremos y discutiremos los resultados que se obtienen, a través de simulaciones numéricas, de las expresiones obtenidas en el capítulo 3. En todos los resultados que presentamos la dimensión del espacio de Hilbert del entorno es igual a 200 y se ha promediado sobre 1200 realizaciones de los Hamiltonianos aleatorios, a menos que se den otras especificaciones. Por fines prácticos y de claridad en las discusiones, los valores numéricos de Δ y λ se muestran hasta un máximo de dos cifras significativas.

4.1. Finalización de la dinámica

Cuando analizamos el canal cuántico a través del vector de Bloch en el apartado 3.2.1, mencionamos que para tiempos suficientemente largos la componente y se anulaba independientemente de los parámetros Δ y λ . Para justificar lo anterior, consideremos las trayectorias que describen los eigenestados iniciales ϱ_q^{+z} , ϱ_q^{+x} y ϱ_q^{+y} en la bola de Bloch como funciones del tiempo. Esas trayectorias pueden encontrarse fácilmente a través de la matriz M dada en la ecuación (3.10). Cuando iniciamos con el eigenestado ϱ_q^{+z} significa que partimos desde el punto $\vec{R}_B = (0, 0, 1)$ y se transforma cómo:

$$\vec{R}_B^z(t) = M\vec{R}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2r(t) - 1 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Para ϱ_q^{+x} , partimos desde en el punto $\vec{R}_B = (1, 0, 0)$, entonces

$$\vec{R}_B^x(t) = M\vec{R}_B = \begin{bmatrix} \text{Re}[z_x(t)] \\ \text{Im}[z_x(t)] \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Y para ϱ_q^{+y} partimos de $\vec{R}_B = (0, 1, 0)$ obteniendo

$$\vec{R}_B^y(t) = M\vec{R}_B = \begin{bmatrix} \text{Re}[z_y(t)] \\ \text{Im}[z_y(t)] \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

En la Figura 4.1 se muestran las trayectorias que describe el vector de Bloch como función del tiempo ($\Delta = 0.1$ y $\lambda = 0.03$). En (a) se muestra la trayectoria correspondiente a $\vec{R}_B^z(t)$ ec. (4.1) observamos que el eigenestado describe oscilaciones sobre el eje z , alcanzando un punto de equilibrio en $z \approx 0.76$ para tiempo largos, en general ese punto de equilibrio depende de forma no

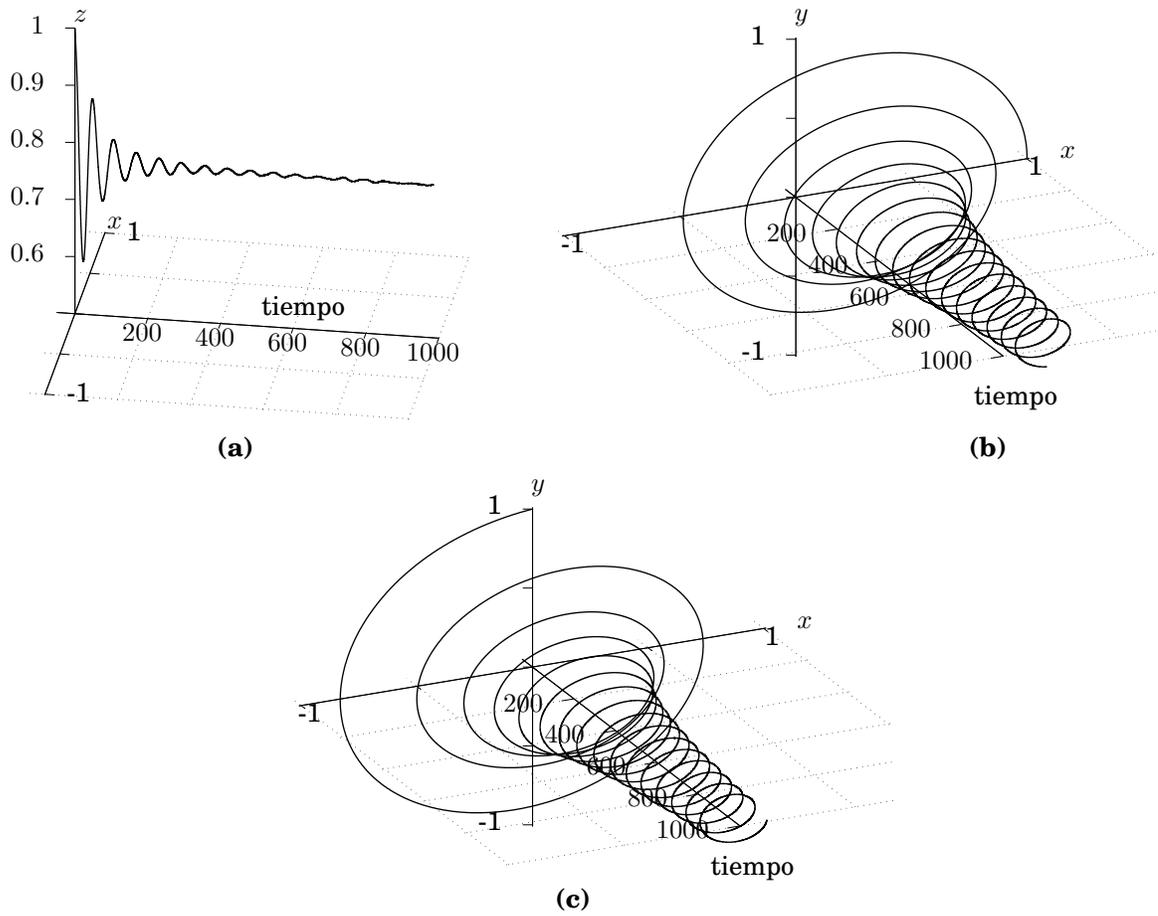


Figura 4.1: Trayectorias del vector de Bloch como función del tiempo con los parámetros $\Delta = 0.1$ y $\lambda = 0.03$. **(a)** Eigenestado inicial ϱ_q^{+z} . **(b)** Eigenestado inicial ϱ_q^{+x} , y, **(c)** Eigenestado inicial ϱ_q^{+y} .

trivial de los parámetros Δ y λ . En **(b)** tenemos la trayectoria que describe $\vec{R}_B^x(t)$ ec. (4.2), la cual muestra rotaciones en el plano xy y que el punto de equilibrio para tiempos largos yace en algún punto del eje x (no necesariamente en el centro de dicho plano) y al igual que el caso anterior depende de los parámetros del modelo. En **(c)** encontramos la trayectoria que describe $\vec{R}_B^y(t)$ ec. (4.3) que son rotaciones en el plano xy sin embargo observamos que el punto de equilibrio yace en el centro del plano (que es también el centro de la bola de Bloch), lo cual siempre ocurre independientemente de los valores de los parámetros Δ y λ . De lo anterior podemos concluir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda_{(t,0)} \varrho_q^{+y} = \frac{1}{2} \mathbb{1}_q, \quad \forall \Delta, \lambda. \quad (4.4)$$

Esta característica del canal cuántico nos será útil para determinar un tiempo máximo en nuestras simulaciones numéricas, y es el tema del siguiente párrafo.

La *pureza de un estado* $\varrho(t)$ se define como

$$P[\varrho(t)] = \text{tr}[\varrho^2(t)] \quad (4.5)$$

es igual a uno si $\varrho(t)$ es un estado puro y menor que uno si es un estado mezclado, alcanzando su valor mínimo en el estado de mezcla máxima. Para un qubit, esto significa que en la esfera de Bloch tenemos estados con pureza uno y que el centro de la bola tiene pureza un medio. Entonces,

la ecuación (4.4) implica que

$$P[\varrho_q^{+y}(t)] = \frac{1}{2}, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty, \quad (4.6)$$

y podemos considerar que en ese momento el sistema alcanzó el equilibrio, sin embargo para fines prácticos (simulaciones numéricas) no podemos considerar un tiempo infinito es por ello que necesitamos establecer un tiempo de finalización de la dinámica de tal manera que las contribuciones que pudieran hacer las fluctuaciones estadísticas a las medidas y criterios de no Markovianidad sean minimizadas. Basándonos en la ecuación (4.6) definimos el *tiempo de finalización de la dinámica* como el tiempo mínimo en el cual la pureza del estado $\varrho_q^{+y}(t)$ a caído un 2% por arriba de su valor mínimo:

$$t_{\text{end}}(\Delta, \lambda) = \min \{t \mid P[\varrho_q^{+y}(t)] = 0.51\}. \quad (4.7)$$

A continuación analizamos tres casos particulares del tiempo de finalización.

4.1.1. Tiempo de finalización para un GUE

En la Figura 4.2 se muestra un caso típico del decaimiento de $P[\varrho_q^{+y}(t)]$ para valores pequeños de los parámetros, $\Delta = 0.16$ y $\lambda = 0.031$. Ambos ejes, horizontal y vertical, están en escala logarítmica. Con la finalidad de determinar el tipo de decaimiento que muestra la pureza se le ha restado un medio (su valor mínimo). Observamos que las oscilaciones indican una recuperación en la pureza del eigenestado inicial en ciertos tiempos y que el decaimiento es polinomial para $t > 50$. La intercepción de la línea punteada con la curva sólida nos indica el tiempo de finalización de la dinámica como lo definimos en la ecuación (4.7) y se tiene $t_{\text{end}} \approx 946$. Podemos inferir que el decaimiento de $P[\varrho_q^{+y}(t)]$ será polinomial para valores pequeños de los parámetros Δ y λ .

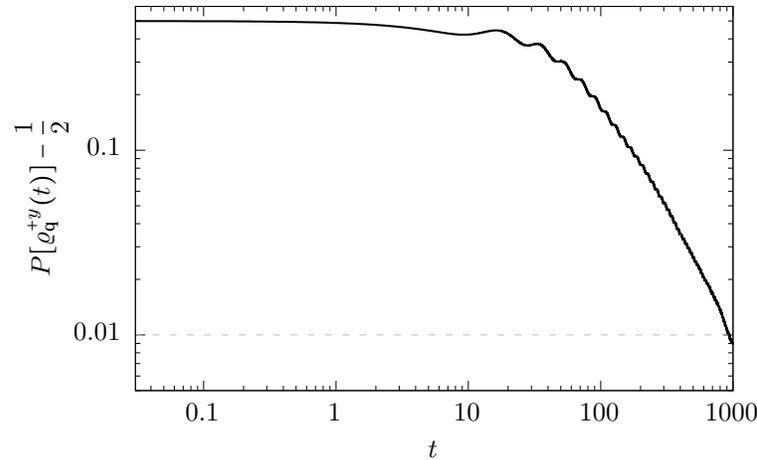


Figura 4.2: Decaimiento algebraico de la pureza. En la gráfica se muestra $P[\varrho_q^{+y}(t)] - 0.5$ para $\Delta = 0.16$ y $\lambda = 0.031$. Tanto el eje vertical como el horizontal se encuentran en escala logarítmica.

Por otro lado, en la Figura 4.3, consideramos un acoplamiento fuerte $\lambda = 0.5$, manteniendo $\Delta = 0.16$ y la escala logarítmica para el eje vertical, mientras que el eje horizontal se ha cambiado a una escala lineal. Lo que se observa es que la pureza ya no presenta oscilaciones o resurgimientos sino que decae monótonamente y de forma exponencial. Nuevamente la intercepción de la línea punteada con la curva sólida nos indica el tiempo de finalización de la dinámica, que es de $t_{\text{end}} \approx 0.7$ lo cual es mucho menor que en el caso previo. Entonces, podemos decir que un acoplamiento fuerte entre el qubit y el entorno RMT causará un decaimiento exponencial de la pureza cuando el estado inicial es ϱ_q^{+y} .

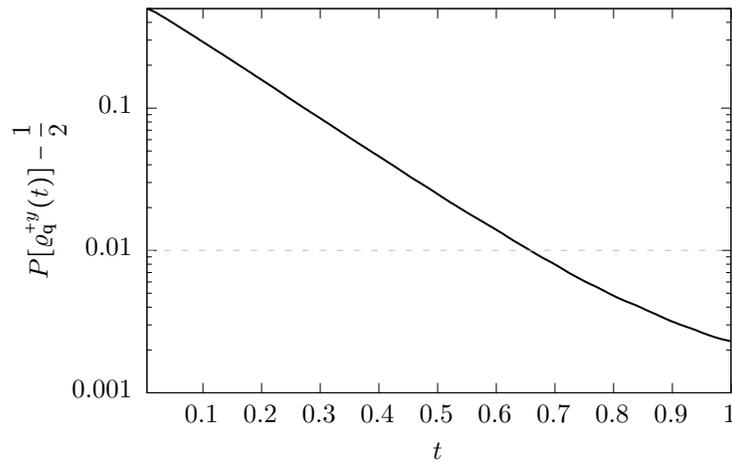


Figura 4.3: Decaimiento exponencial de la pureza. En la gráfica se presenta la pureza menos un medio como función del tiempo cuando el estado inicial es el eigenestado ϱ_q^{+y} con $\Delta = 0.16$ y $\lambda = 0.5$, el eje vertical está en escala logarítmica y horizontal en escala lineal.

Como tercer ejemplo del decaimiento de la pureza para el eigenestado inicial ϱ_q^{+y} consideremos la Figura 4.4. En esa figura tenemos $\Delta = 0.16$ y $\lambda = 0.25$. Observamos que el decaimiento de la pureza no es polinomial **(a)** ni exponencial **(b)** sino que es más complejo que en los dos casos previos. Es entonces, que podemos considerar este como un régimen intermedio entre el polinomial y el exponencial. También observamos que $t_{\text{end}} \approx 13$.

De ahora en adelante consideraremos intervalos $t \in [0, t_{\text{end}}(\Delta, \lambda)]$ en nuestros resultados, pues como hemos argumentado en este apartado, consideraremos que en ese tiempo el sistema llegó al equilibrio, ello significa que estamos tomando solo aquellos intervalos de tiempo en donde la dinámica es relevante.

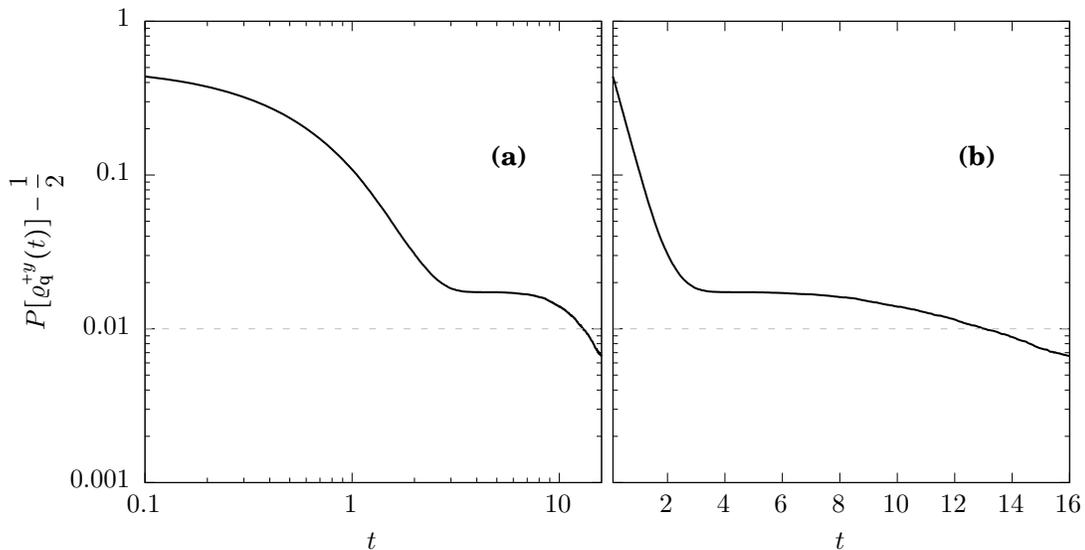


Figura 4.4: Decaimiento de la pureza como función del tiempo para el eigenestado inicial ϱ_q^{+y} con $\Delta = 0.16$ y $\lambda = 0.25$. En **(a)** ambos ejes están en escala logarítmica, a diferencia de **(b)** en donde el eje horizontal está en escala lineal.

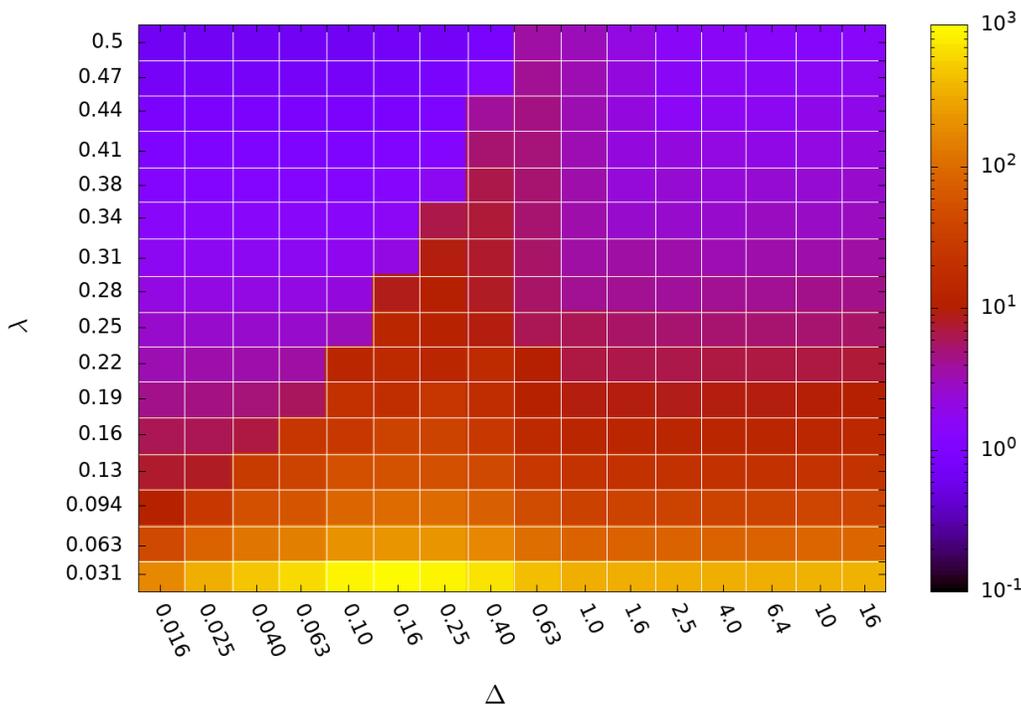


Figura 4.5: Tiempo de finalización de la dinámica de un qubit cuando el ambiente es un GUE como función de la distancia entre los dos niveles de energía del qubit Δ y la intensidad del acoplamiento con el entorno λ . La escala para el eje Δ se presenta en forma logarítmica y la del eje λ en escala lineal, mientras que la escala de colores para $t_{\text{end}}(\Delta, \lambda)$ se presenta en escala logarítmica.

En la Figura 4.5 mostramos el tiempo de finalización de la dinámica en función de los parámetros Δ y λ como un *mapa de calor*. Mientras que λ está en una escala lineal, Δ está en una escala logarítmica. La escala de colores que representa los valores de t_{end} también se muestra en escala logarítmica debido a que varía en varios ordenes de magnitud de una región a otra. Se puede observar que cuando λ se incrementa el tiempo de finalización de la dinámica decrece exponencialmente. Es interesante notar que para valores pequeños de λ , los valores más grandes de t_{end} se encuentran en la vecindad de $\Delta = 0.16$, el cual es aproximadamente igual a t_{H}^{-1} , donde $t_{\text{H}} = 2\pi$ es el tiempo de Heisenberg del entorno RMT. Entonces, en $\Delta = 0.16$ el periodo de las oscilaciones [v. Figs. 4.1(b) y 4.1(c)] es igual al tiempo de Heisenberg. En esa región, como λ se incrementa los tiempos de finalización decaen notablemente más lento en una curva $\lambda_{\text{crit}}(\Delta)$. Las regiones amarillas son aquellas en donde el decaimiento de $P[\varrho_{\text{q}}^{+y}(t)]$ es algebraico y las de color azul en donde el decaimiento es exponencial, las cuales se encuentran separadas por una *zona de transición* en donde el decaimiento podría no ser ni algebraico ni exponencial (cf. Fig. 4.4).

4.1.2. Tiempo de finalización para un GOE

Hasta aquí hemos presentado los resultados obtenidos para un GUE, puede hacerse un análisis similar para un GOE, sin embargo solo presentaremos el resultado final en la Figura 4.6. En donde observamos un comportamiento similar al mostrado por un ambiente GUE.

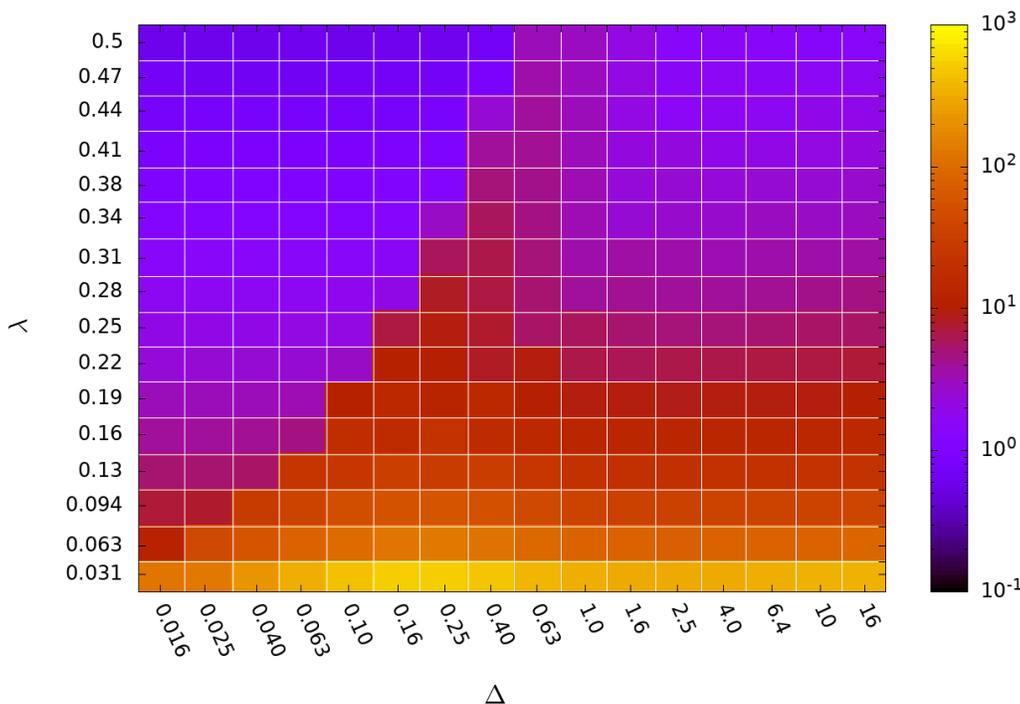


Figura 4.6: Tiempo de finalización de la dinámica cuando el entorno es un GOE. La escala del eje Δ es logarítmica, la del eje λ es lineal y la escala de colores que corresponde a t_{end} es logarítmica.

4.2. Medidas de no Markovianidad

Ahora que hemos definido un tiempo límite para cada uno de los procesos involucrados en nuestro estudio, estamos en posición de evaluar las medidas de no Markovianidad cuántica tomando en cuenta únicamente aquellos tiempos relevantes. Por lo que consideraremos intervalos de la forma $t \in [0, t_{\text{end}}]$ en la medida de RHP (2.49) y en la medida de BLP (2.51).

4.2.1. Medida de RHP y su convergencia (GUE)

La medida de RHP (2.49) toma la siguiente forma

$$\mathcal{N}_{\text{RHP}} = \int_0^{t_{\text{end}}} dt g(t), \quad (4.8)$$

que como sabemos t_{end} depende de los parámetros Δ y λ .

En la Figura 4.7 mostramos los resultados de la ecuación (4.8), en donde tenemos una escala lineal para los valores de λ y escalas logarítmicas para Δ y la codificación de colores de \mathcal{N}_{RHP} . Puede observarse una región MD en $0.016 < \Delta < 0.40$ y $0.094 < \lambda < 0.5$ que se encuentra delimitada a la derecha por una región no MD que sigue una curva $\lambda_{\text{crit}}(\Delta)$ en el plano. También se observa que las regiones altamente no MD se corresponden con los tiempos de finalización largos, podría pensarse que las fluctuaciones influyen de forma no despreciable a la medida de RHP, sin embargo, como puede apreciarse en la región $\Delta > 1$ como λ se incrementa, el valor de la medida de RHP permanece casi constante mientras que como se observa de la Figura 4.5 los tiempos de finalización difieren en varios ordenes de magnitud para la misma región. Las fluctuaciones estadísticas y la convergencia de la medida de RHP son analizados en el siguiente párrafo.

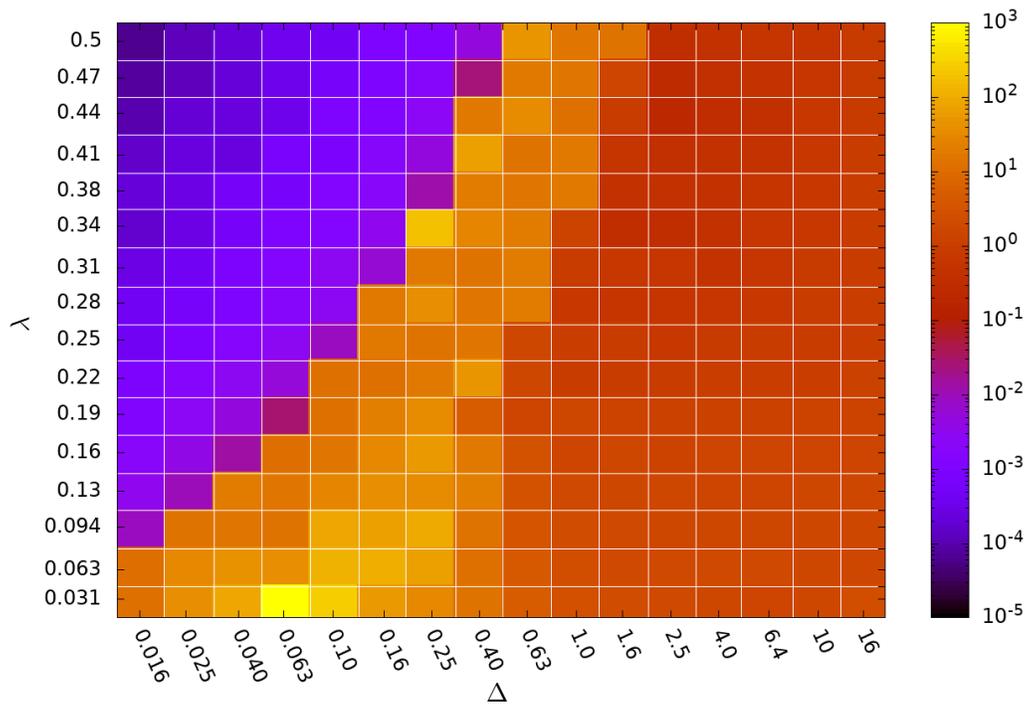


Figura 4.7: Medida de RHP cuando el entorno es modelado por un ensemble GUE. Se observa una región MD (azul), otra no MD (amarillo) y una tercera que es *medianamente* MD (rojo). La separación entre cada una de esas tres regiones está dada por una curva $\lambda_{\text{crit}}(\Delta)$.

Convergencia de la medida de RHP

Existen básicamente dos fuentes de error al calcular la integral (4.8) en un modelo como el nuestro: la dimensión finita de las matrices aleatorias a la que llamaremos N (es el equivalente a la dimensión del entorno), y el número de realizaciones sobre el que se promedian dichos ensembles que denotamos como M (esto equivale a las realizaciones de los Hamiltonianos aleatorios H_E y V_E). La manera obvia de eliminar esos errores estadísticos es haciendo $N \rightarrow \infty$ o bien $M \rightarrow \infty$, no necesariamente de forma simultánea. Sin embargo, para fines prácticos, ninguna de esas opciones es viable.

En la Figura 4.8 observamos la convergencia de la medida de RHP como una función del tiempo tomando dos valores de N y M . Para $N = 100$: los cuadrados grises corresponden a $M = 1200$, mientras la línea gris continua es para $M = 10000$. Poniendo $N = 200$: se tienen las cruces negras cuando $M = 1200$ y la línea negra discontinua cuando $M = 10000$. Las escalas de los ejes verticales son logarítmicas dado que la medida se incrementa rápidamente a tiempo cortos, en los tres casos que allí se presentan se observa que la convergencia de la medida para valores cercanos a t_{end} (el límite del eje horizontal en cada una de las tres figuras) la medida de RHP prácticamente no cambia al variar N o M (o lo hace muy poco).

En la Figura 4.9 observamos cómo es la convergencia de la medida de RHP como función del número de realizaciones M para dos tamaños diferentes del entorno RMT $N = 100, 200$. Ambas escalas para los ejes vertical y horizontal son logarítmicas. Las cruces son para $N = 100$ y los cuadrados vacíos para $N = 200$. En el primer (arriba) y tercer (abajo) caso la convergencia ocurre para $M \geq 100$. Mientras en el segundo (en medio) la convergencia no ocurre sino hasta $M = 1200$.

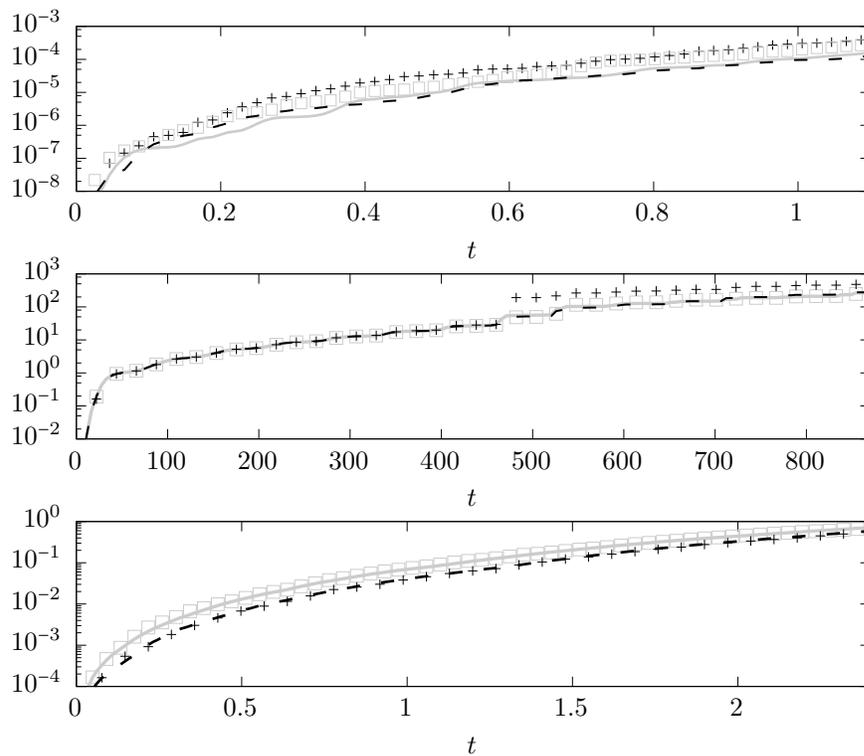


Figura 4.8: Convergencia en la medida de RHP como función del tiempo t , el tamaño de los ensemble N y el número de realizaciones de esos ensembles M , cuando se ha promediado sobre un ensemble GUE. Para $N = 100$ tenemos: cuadros grises ($M = 1200$), curvas grises sólidas ($M = 10000$). Para $N = 200$: cruces negras ($M = 1200$), curvas negras discontinuas ($M = 10000$). (Arriba) es para $\Delta = 0.040$ y $\lambda = 0.38$. (En medio) $\Delta = 0.10$ y $\lambda = 0.031$. (Abajo) $\Delta = 6.4$ y $\lambda = 0.38$.

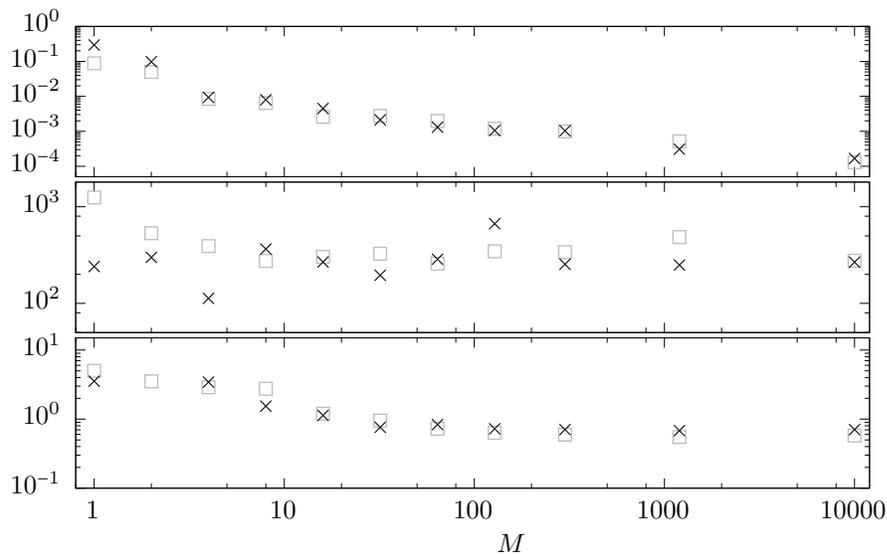


Figura 4.9: Convergencia de la medida de RHP como función del número de realizaciones del ensemble M para dos diferentes tamaños N , las escalas vertical y horizontal son logarítmicas. Cada punto es el resultado de la integral (4.8). Las cruces son para $N = 100$ y los cuadros vacíos para $N = 200$. (Arriba) $\Delta = 0.040$ y $\lambda = 0.38$. (En medio) $\Delta = 0.10$ y $\lambda = 0.031$. (Abajo) $\Delta = 6.4$ y $\lambda = 0.38$. Las escalas son logarítmicas tanto en el eje vertical como en el eje horizontal.

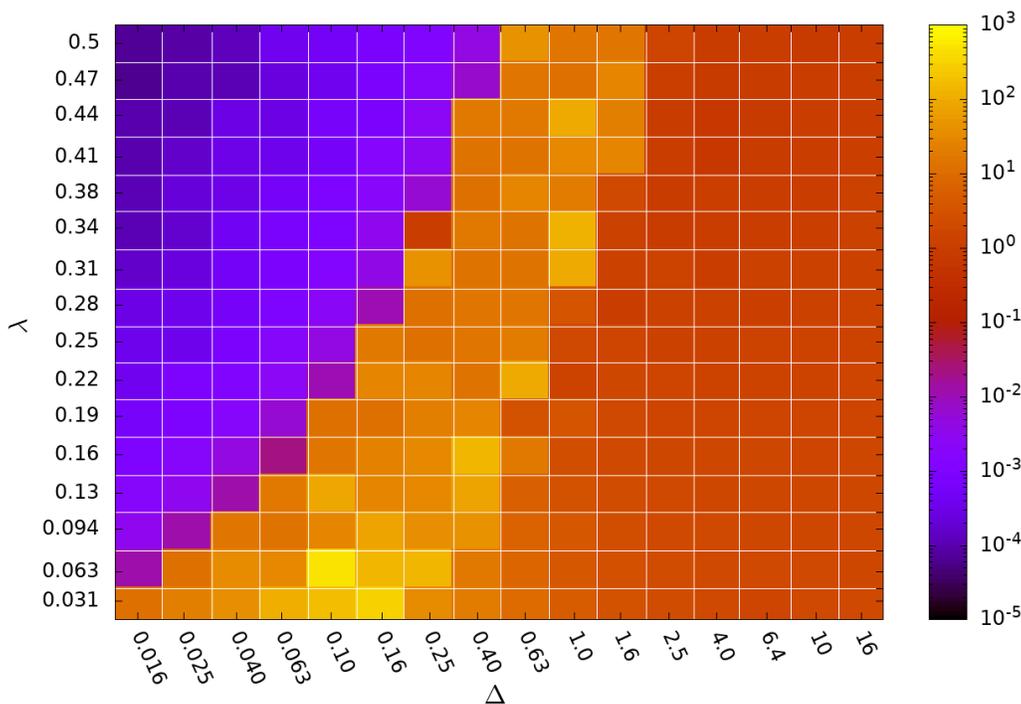


Figura 4.10: Medida de RHP para un qubit con entorno GOE. El eje Δ y la escala de colores para \mathcal{N}_{RHP} son logarítmicos, mientras que el eje λ es lineal.

4.2.2. Medida de RHP (GOE)

En la Figura 4.10 presentamos los resultados de la medida de RHP en la dinámica de un qubit cuando el entorno es modelado por un GOE. Su comportamiento es muy similar al observado para un GUE (Figura 4.7).

4.2.3. Medida de BLP y su convergencia (GUE)

Al igual que lo hicimos con la medida de RHP, evaluaremos la medida de BLP en un intervalo:

$$\mathcal{N}_{\text{BLP}} = \max_{\substack{\varrho_1, \varrho_2 \\ \sigma > 0}} \int dt \sigma(\varrho_1, \varrho_2, t), \quad t \in [0, t_{\text{end}}]. \quad (4.9)$$

En la Figura 4.11 se presentan los resultados para la medida de BLP cuando se promedia sobre un ensemble GUE. La escala de colores representa los valores de \mathcal{N}_{BLP} en escala logarítmica, el eje Δ también está en escala logarítmica; y el eje λ en escala lineal. Se observa una región Markoviana (oscura) en la esquina superior izquierda ($\Delta < 0.25$ y $\lambda > 0.19$) cuya frontera a la derecha es similar a la curva $\lambda_{\text{crit}}(\Delta)$ que vimos en la medida de RHP. Observamos dos regiones medianamente MC (color azul) la primera separa a la región MC de la no MC (región de color rojo-amarillo), mientras que la segunda se encuentra en la parte superior derecha de la figura. La región no MC aparece como una región de color rojo-amarillo.

Al contrastar la Figura 4.11 con la Figura 4.7 podremos visualizar una comparación directa entre la medida de BLP y RHP en nuestro modelo. De esa comparación podemos decir que cuando el mapa es divisible (región azul en la Figura 4.7) implica que también es contractivo (región oscura-azul en la Figura 4.11). También observamos que, a excepción de una pequeña región de la que discutiremos más adelante, cuando el mapa es indivisible también es no contractivo (regiones amarillas-naranja en ambas figuras). Observemos que en la esquina superior derecha de

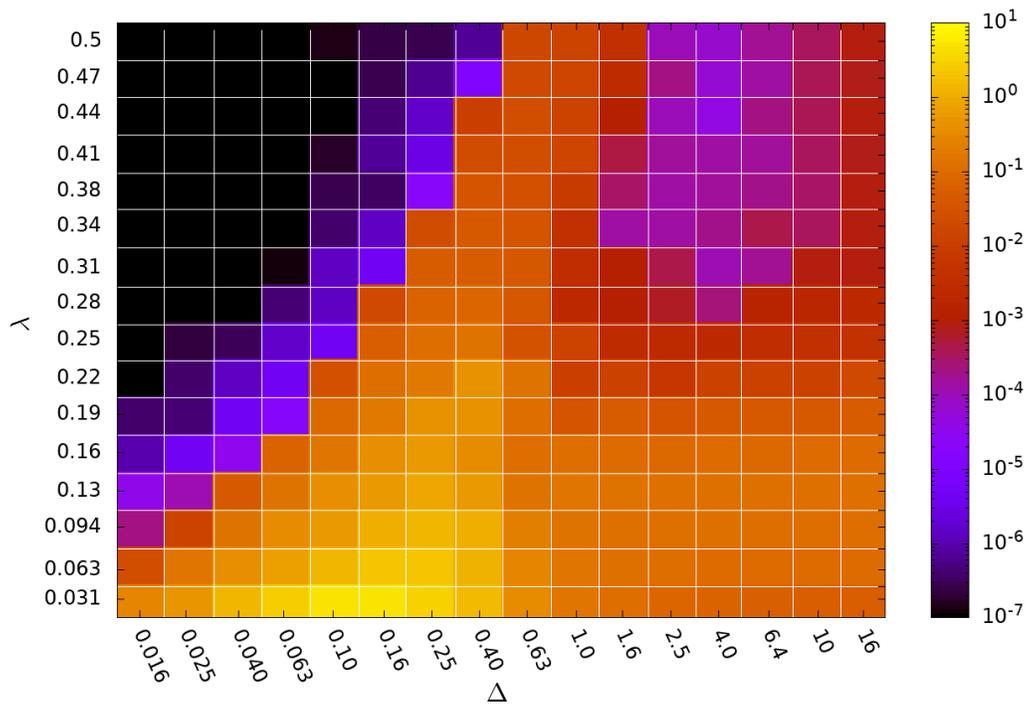


Figura 4.11: Medida de BLP cuando el entorno es modelado por un ensemble GUE. El eje Δ y la escala de colores son logarítmicos, el eje λ está en una escala lineal. Podemos identificar tres regiones: una MC (color negro), otra medianamente MC (azul) y una región no MC (color rojo-amarillo).

la Figura 4.11 el mapa es contractivo (región azul) mientras que esa misma región es indivisible como puede apreciarse en la Figura 4.7, este resultado está de acuerdo con lo expuesto al final de la subsección 2.2.2, y no contradice el teorema presentado en la Ref. [33] pues no estamos considerando la contractividad del mapa extendido sino únicamente la del mapa para un sólo qubit.

Convergencia en la medida de BLP

En la Figura 4.12 se muestra la convergencia de la medida de BLP como una función del tiempo para dos diferentes N y M . Si fijamos $N = 100$, para $M = 1200$ los resultados obtenidos son los cuadros grises, mientras que si $M = 10000$ los resultados son expresado por las curvas sólidas grises. Cuando fijamos $N = 200$, obtenemos las cruces negras con $M = 1200$ y si $M = 10000$ las líneas discontinuas negras. (Arriba) observamos que la medida converge a cero como el número de realizaciones y el tamaño de los ensambles aumenta. (En medio) la convergencia es hacia un valor de aproximadamente 9. (Abajo) la medida converge a cero como M y N aumentan. En la Figura 4.13 presentamos la convergencia de la medida de BLP como una función del número de realizaciones para dos tamaños del entorno.

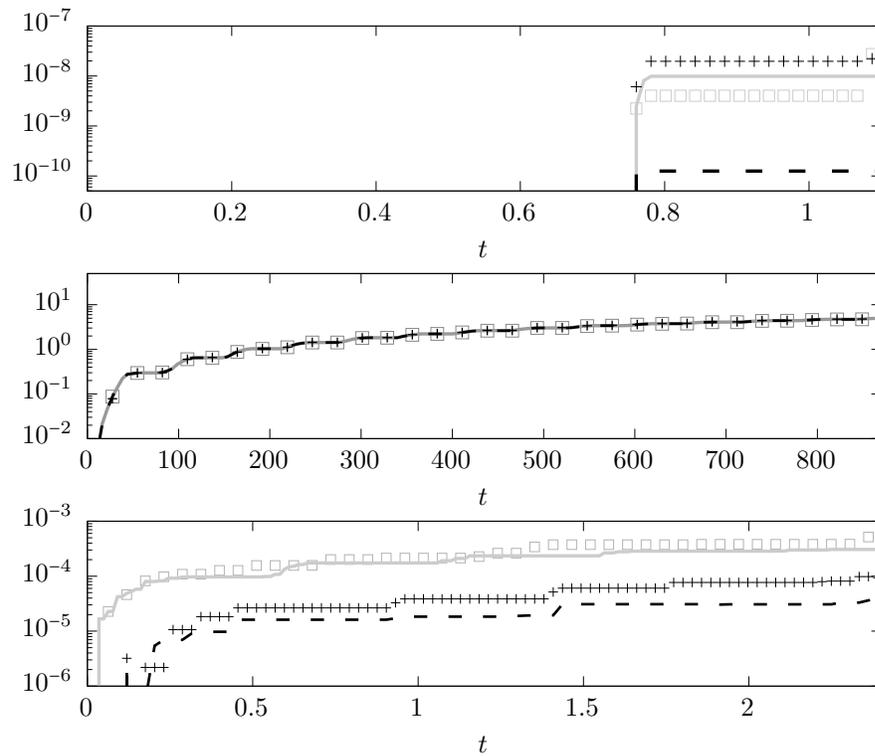


Figura 4.12: Convergencia en la medida de BLP como función del tiempo t , el tamaño de los ensembles (GUE) N y el número de realizaciones de esos ensembles M . Si fijamos $N = 100$, obtenemos para $M = 1200$ cuadros grises vacíos y con $M = 10000$ se obtienen las curvas grises sólidas. Al fijar $N = 200$, obtenemos para $M = 1200$ las cruces negras, y con $M = 10000$ se obtienen las líneas discontinuas negras. (Arriba) es para $\Delta = 0.040$ y $\lambda = 0.38$. (En medio) $\Delta = 0.10$ y $\lambda = 0.031$. (Abajo) $\Delta = 6.4$ y $\lambda = 0.38$.

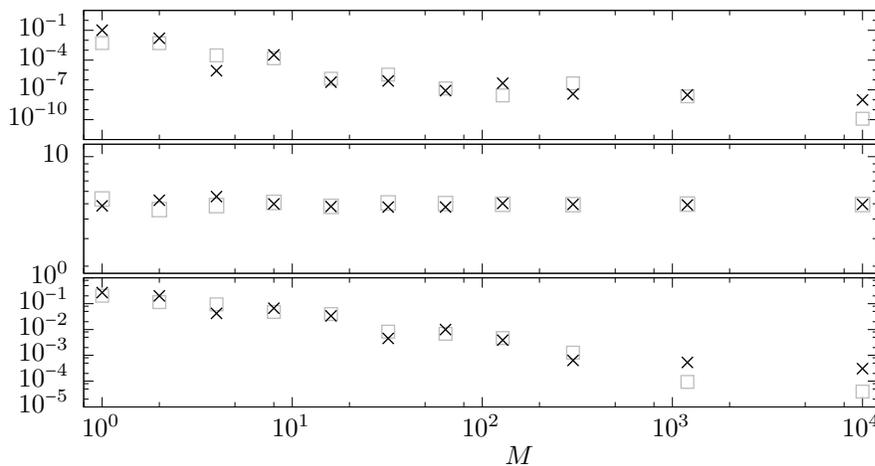


Figura 4.13: Convergencia de la medida de BLP como función del número de realizaciones del ensemble M para dos diferentes tamaños del entorno (GUE) N , las escalas vertical y horizontal son logarítmicas. Cada punto es el resultado de la integral (4.9). Las cruces son para $N = 100$ y los cuadros vacíos para $N = 200$. (Arriba) $\Delta = 0.040$ y $\lambda = 0.38$. (En medio) $\Delta = 0.10$ y $\lambda = 0.031$. (Abajo) $\Delta = 6.4$ y $\lambda = 0.38$. Las escalas son logarítmicas tanto en el eje vertical como en el eje horizontal.

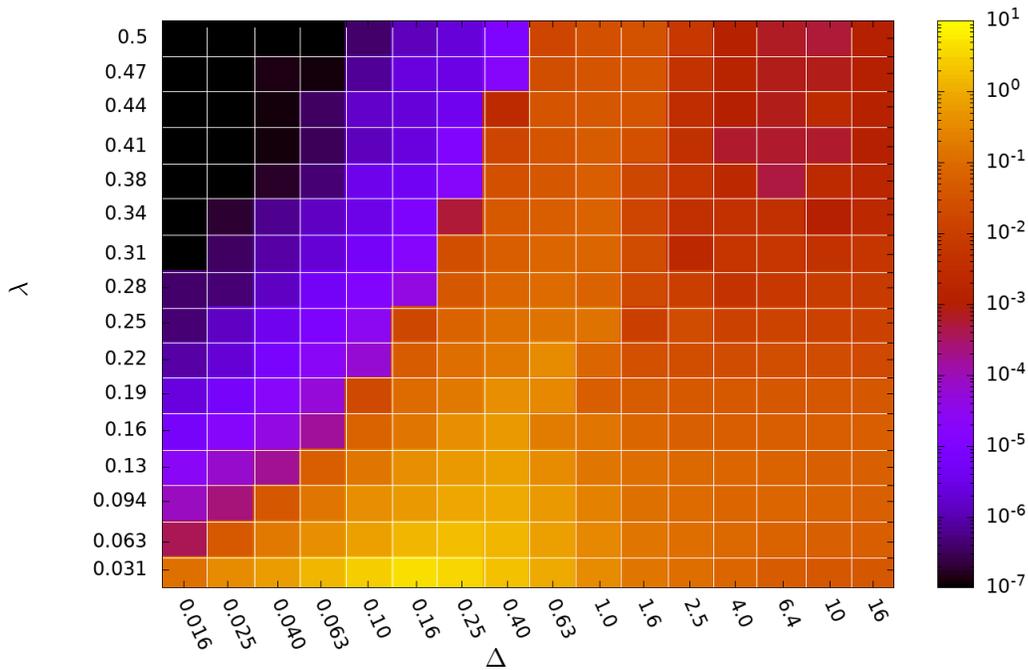


Figura 4.14: Medida de BLP para un qubit acoplado a un entorno GOE. Las escalas son logarítmicas en Δ y el código de colores, mientras que es lineal en λ . Observamos tres regiones: una Markoviana (color negro) en la esquina superior izquierda. Otra medianamente Markoviana (color azul). Y una región no Markoviana (color rojo). La transición de una región a otra es mucho más suave que el caso del GUE.

4.2.4. Medida de BLP (GOE)

Los resultados de la medida de BLP cuando el qubit es acoplado a un entorno GOE es presentado en la Figura 4.14. Observamos sólo una región Markoviana para valores $\Delta < 0.10$ y $\lambda > 0.28$ cuya frontera esta delimitada a la derecha por una curva $\lambda_{\text{crit}}(\Delta)$, después de esa región nos encontramos con una región medianamente Markoviana (color azul) que a su vez se encuentra delimitada a la derecha por una región no Markoviana (color rojo–amarillo) cuya frontera describe una curva similar a $\lambda_{\text{crit}}(\Delta)$. Algo que podemos destacar es que las zonas altamente no Markovianas ocurren en la vecindad de $\Delta = (2\pi)^{-1}$, la cual es el inverso del tiempo de Heisenberg del entorno. Dicho comportamiento es recurrente en nuestro modelo aún para las diferentes definiciones de Markovianidad empleadas.

4.2.5. Máxima recuperación de la distancia de traza y su convergencia (GUE)

Una tercera medida de no Markovianidad cuántica es la propuesta de tomar la máxima recuperación de la distancia de traza para cada proceso (v. subsección 3.3.3), esta maximización se hace explorando todos los pares de estados iniciales. En la Figura 4.15 presentamos los resultados obtenidos para esta medida cuando promediamos sobre un ensemble GUE. Su comportamiento es muy parecido al que muestra la medida de BLP, aunque el máximo es un orden de magnitud menor, esto es debido a que la máxima recuperación de la distancia de traza minimiza las contribuciones de las fluctuaciones, mientras una medida como la de BLP o la de RHP al involucrar integración sobre curvas ruidosas están propensas a las contribuciones de esas fluctuaciones en mayor grado.

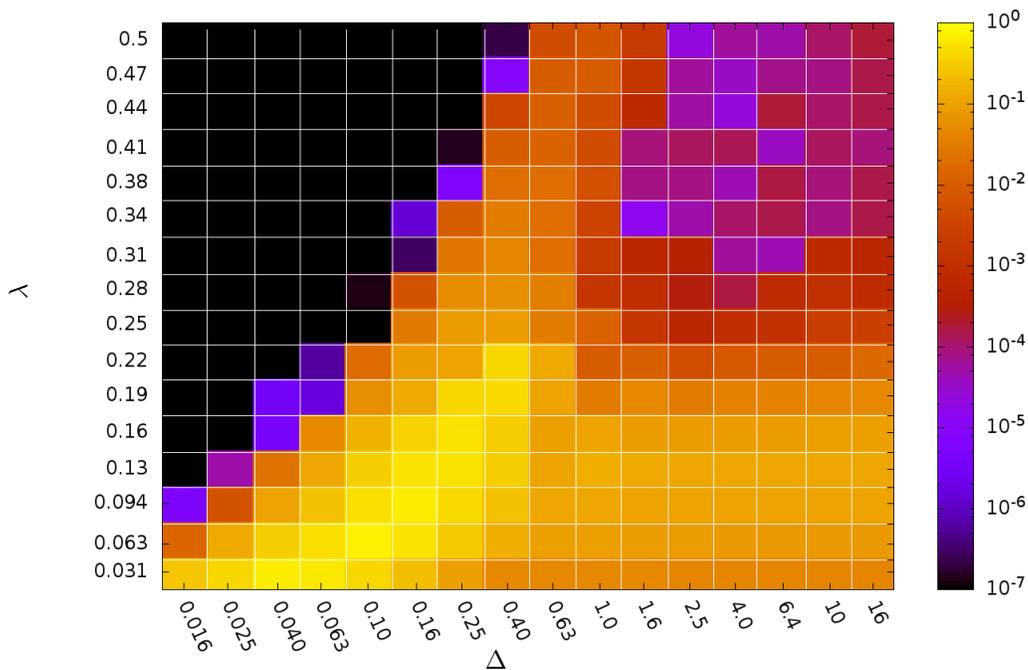


Figura 4.15: Máxima recuperación de la distancia de traza cuando se promedia sobre un ensemble GUE. Existe básicamente una región Markoviana en la parte superior derecha (color negro), una zona no Markoviana (en rojo-amarillo) y regiones medianamente Markovianas (color azul) dispersas en diferentes locaciones del plano. Aunque, se observa un comportamiento similar a la medida de BLP, el máximo en este caso es un orden de magnitud menor.

Convergencia de la máxima recuperación de la distancia de traza

La convergencia de la máxima recuperación de la distancia de traza como una función del tiempo para dos diferentes tamaños del entorno $N = 100, 200$ y realizaciones $M = 1200, 10000$ es presentada en la Figura 4.16 en donde los ejes verticales están en escala logarítmica y el eje horizontal es lineal. Al igual que en los casos anteriores, para $N = 100$ tenemos los cuadros vacíos grises ($M = 1200$) y la línea gris continua ($M = 10000$), y para $N = 200$ las cruces negras ($M = 1200$) y la línea negra discontinua ($M = 10000$). En la parte superior observamos como la medida se estabiliza rápidamente en un valor muy pequeño. En la figura intermedia notamos que la convergencia al valor ≈ 0.4 es muy rápida sin importar cómo variemos N y M . En la parte de abajo observamos que aunque la convergencia a 3×10^{-5} es lenta podemos decir que la medida tiende a cero más rápido si fijamos N e incrementamos M .

Para continuar con nuestro análisis de la convergencia, en la Figura 4.17 presentamos los resultados de la máxima recuperación de la distancia de traza (4.9) como una función del tamaño de los ensembles, allí ambas dos escalas, vertical y horizontal, son logarítmicas. Las cruces negras son para $N = 100$ y los cuadros vacíos grises para $N = 200$. En la parte superior observamos que aunque la convergencia es lenta, esta tiende a cero. La figura de la parte media indica claramente que la medida converge rápidamente a aproximadamente 0.41 sin importar N o M . En la figura del fondo la medida tiende a cero.

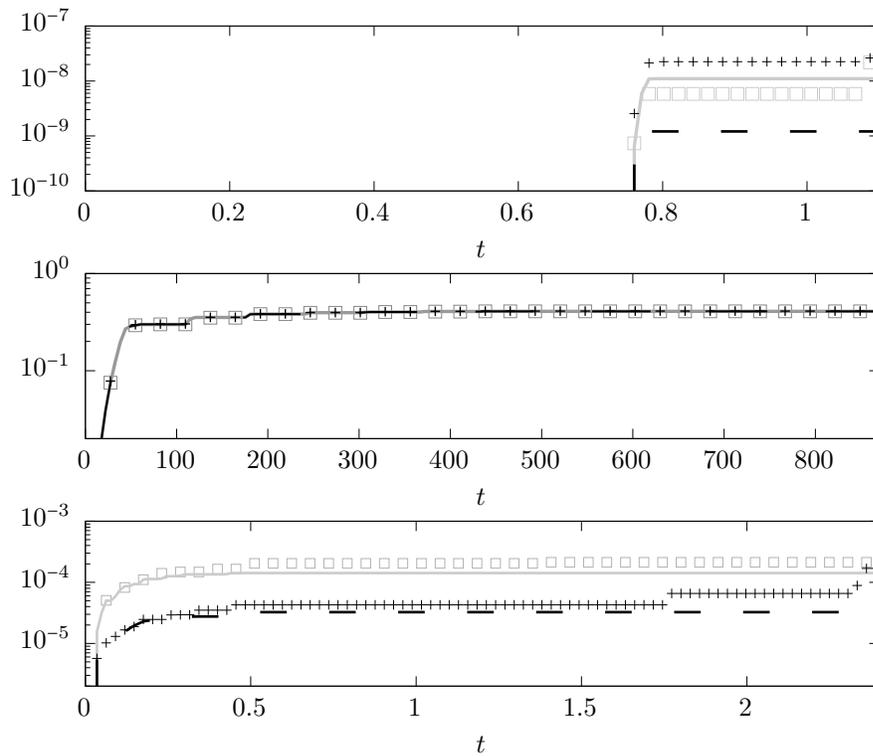


Figura 4.16: Convergencia de la máxima recuperación de la distancia de traza. Los ejes verticales están en escala logarítmica y los horizontales en escala lineal. Con $N = 100$, tenemos, $M = 1200$ (cuadros vacíos grises) y $M = 10000$ (curva sólida gris). Para $N = 200$, las cruces negras ($M = 1200$) y la línea discontinua negra ($M = 10000$). (Arriba) $\Delta = 0.040$ y $\lambda = 0.38$. (En medio) $\Delta = 0.10$ y $\lambda = 0.031$. (Abajo) $\Delta = 6.4$ y $\lambda = 0.38$.

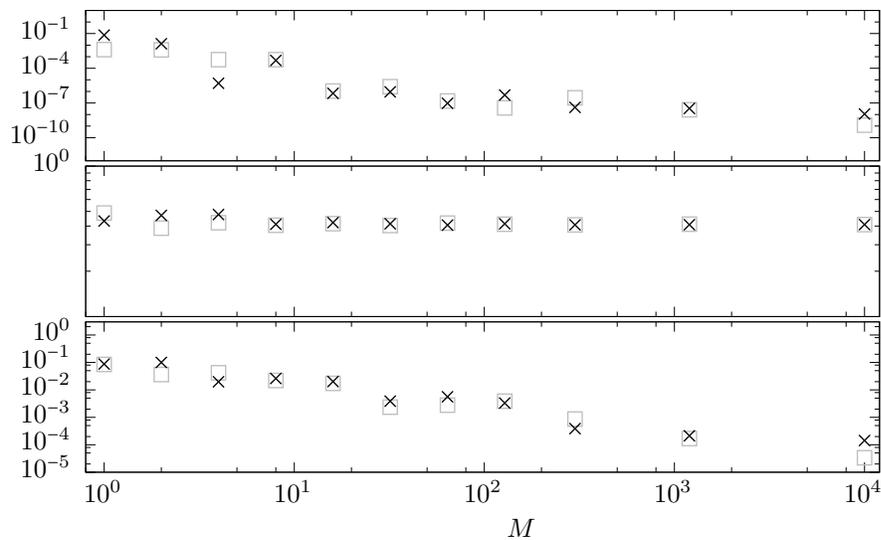


Figura 4.17: Convergencia de la máxima recuperación de la distancia de traza como una función del tamaño de los ensembles aleatorios. Ambos ejes, vertical y horizontal, se encuentran en escala logarítmica. Las cruces negras son para $N = 100$ y los cuadros grises para $N = 200$. (Arriba) $\Delta = 0.040$ y $\lambda = 0.38$. (En medio) $\Delta = 0.10$ y $\lambda = 0.031$. (Abajo) $\Delta = 6.4$ y $\lambda = 0.38$.

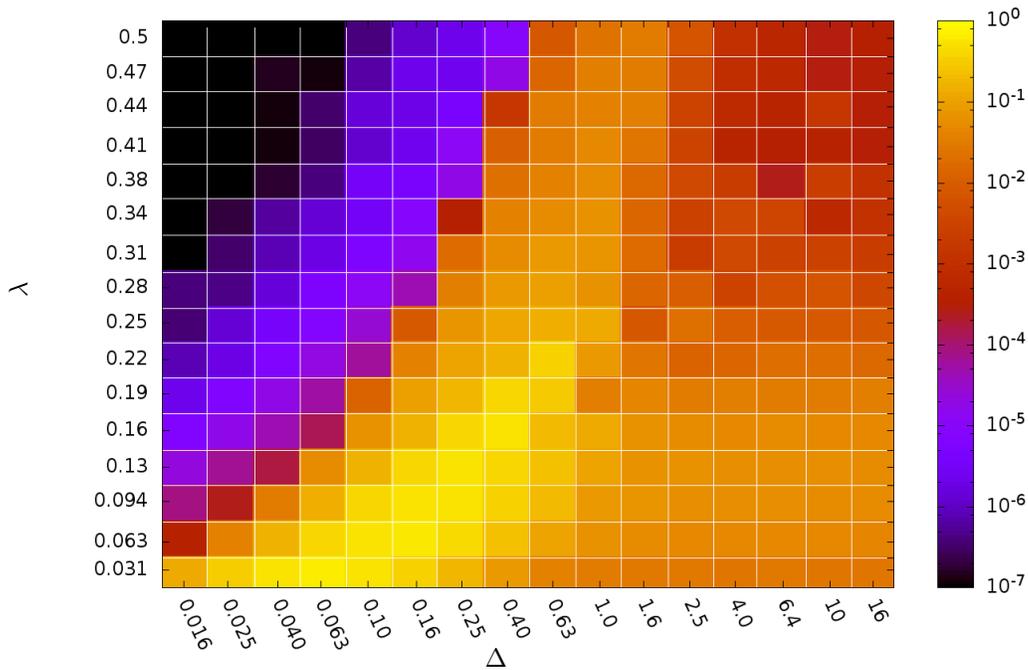


Figura 4.18: Máxima recuperación de la distancia (GOE). Las escalas para Δ y el código de colores se presentan en forma logarítmica, mientras la escala para λ es lineal.

4.2.6. Máxima recuperación de la distancia de traza (GOE)

Al igual que con las medidas anteriores, ahora presentamos los resultados de la máxima recuperación de la distancia de traza para un qubit, pero acoplado a un entorno modelado por un GOE en la Figura 4.18. Podemos identificar tres regiones: una Markoviana en la esquina superior izquierda en donde la medida es cercana a cero. La segunda es una región de color azul que podemos interpretar como medianamente Markoviana. Y la tercera es una región no Markoviana (color naranja–amarilla). Esas tres regiones se encuentran delimitadas por curvas similares a $\lambda_{\text{crit}}(\Delta)$.

4.3. Fluctuaciones estadísticas

Por la naturaleza aleatoria de nuestro modelo, la tarea de evaluar condiciones como las expresadas por las desigualdades (3.41) o (3.62) resulta difícil debido a las fluctuaciones de las funciones involucradas. Dichas fluctuaciones se originan esencialmente por el número finito de realizaciones de los Hamiltonianos aleatorios H_e y V_e (1200 en nuestro caso). Como una ilustración de ello consideremos la Figura 4.19 en donde se muestran las funciones δ_q (curva gris sólida), δ_1 (curva negra punteada) y δ_2 (curva gris-claro sólida) con $\Delta = 0.16$, $\lambda = 0.25$ y se ha promediado sobre un ensemble GUE. Podemos decir que evaluar la condición $\delta_2 \leq \delta_q \leq \delta_1$ será difícil sobre todo para la región $t < 7$ debido a las fluctuaciones, es por ello que en el siguiente párrafo estableceremos un método que nos permita evaluar este tipo de condiciones.

Para decidir cuando una desigualdad es violada usaremos el *modelo de regresión lineal* [44], que consiste en buscar un ajuste lineal para un conjunto de datos, así la desviación estándar de ese conjunto de datos nos dice que tan alejados se encuentran del ajuste lineal. Diremos que una desigualdad es violada cuando encontremos un valor mayor que dos veces la desviación estándar de esos datos. Aunque ahora podríamos evaluar desigualdades como (3.41), aun necesitamos de-

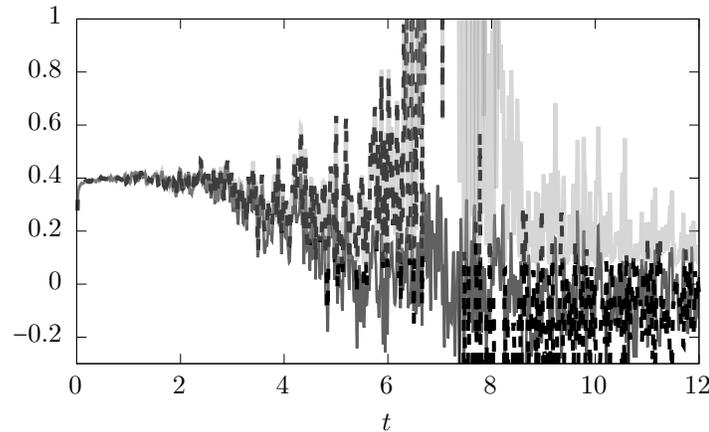


Figura 4.19: Fluctuaciones estadísticas en las funciones δ_q (curva gris sólida), δ_1 (curva negra punteada) y δ_2 (curva gris-claro) para $\Delta = 0.16$ y $\lambda = 0.25$ (ensamble GUE).

terminar el tamaño de la ventana de datos que se usarán para realizar el ajuste lineal. Para ese fin, dados un par (Δ, λ) , tenemos que el tamaño de los pasos en el tiempo para la simulación se tomó como $\delta t = t_{\text{end}}(\Delta, \lambda)/2000^1$, entonces, determinamos el tamaño de la ventana de acuerdo a la expresión

$$I_s = \text{máximo entero}\{\delta t^{-1}, 70\}, \quad (4.10)$$

la elección de 70 es un tanto arbitraria y se llegó a ella después de varios ensayos con diferentes valores y se determinó que es la mejor elección para la estructura de nuestros datos. Mientras que, la elección de δt^{-1} se origina de considerar la rapidez de la dinámica, así tenemos que, si la dinámica es lenta, los pasos de tiempo en la simulación numérica son grandes por lo tanto δt^{-1} es pequeño. Por otro lado, si la dinámica es rápida los pasos en el tiempo deben ser necesariamente pequeños y δt^{-1} es grande. Finalmente debemos considerar el caso en donde I_s resulta tan grande que está más allá del tiempo de finalización de la dinámica, entonces, lo que hacemos es tomar el tamaño de la ventana igual a todos los datos disponibles en el intervalo $(0, t_{\text{end}}]$. En la Figura 4.20 presentamos un ejemplo de lo expuesto en este párrafo.

4.4. Tiempo de Markovianidad

En la sección 4.1 establecimos un tiempo de finalización de la dinámica y con ello un intervalo $[0, t_{\text{end}}(\Delta, \lambda)]$ durante el cual consideramos que la dinámica del sistema es relevante. Podemos, entonces, evaluar las expresiones obtenidas en la sección 3.3 en dicho intervalo para determinar el tiempo durante el cual el sistema es Markoviano. Dado que esas expresiones involucran desigualdades y por la naturaleza aleatoria de nuestro modelo en la sección 4.3 se estableció un método que emplea la regresión lineal con el cual podremos evaluar las *condiciones de divisibilidad* (3.41) y *contractividad* (3.56) y (3.62).

Definimos el *tiempo de Markovianidad* como *el tiempo máximo durante el cual un determinado proceso puede ser considerado Markoviano*. Por supuesto que dicho tiempo dependerá del concepto que utilicemos, sea Markovianidad basada en la divisibilidad (MD) o Markovianidad basada en la contractividad (MC), debido a lo cual en ocasiones nos referiremos a él como *tiempo de divisibilidad* o bien *tiempo de contractividad*, y en general será una función de los parámetros del modelo: Δ y λ .

¹De ser necesario, sobre todo para valores de Δ y λ pequeños, se dividió sobre 3600 y no sobre 2000.

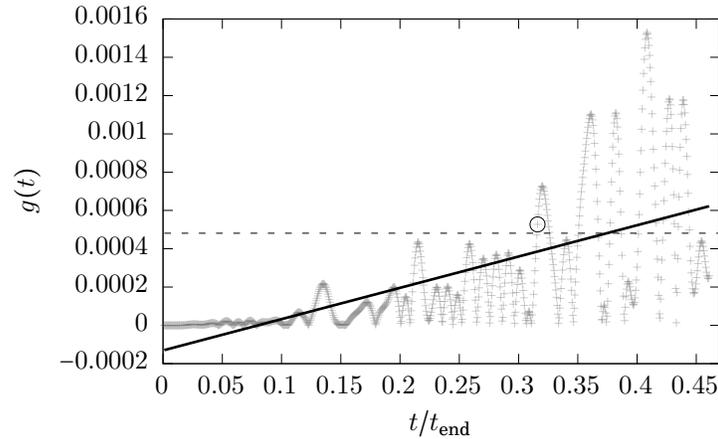


Figura 4.20: Determinando una desigualdad a través del modelo de regresión lineal. En este ejemplo se ha promediado sobre un entorno GUE con $\Delta = 0.10$, $\lambda = 0.28$ y $t_{\text{end}} = 2.4$. El tamaño de la ventana $I_s = 833$ datos, nótese que la escala de tiempo está normalizada al tiempo de finalización de la dinámica, así que I_s comprende aproximadamente el 50 % del tiempo relevante. Los puntos representan a los datos numéricos para la función $g(t)$, la línea sólida es el ajuste lineal de esos datos y la línea punteada es dos veces su desviación estándar $\approx 4.8 \times 10^{-4}$. Entonces, de acuerdo con lo expuesto en el apartado 4.3, la desigualdad $g(t) \leq 0$ es violada cuando encontramos un tiempo mínimo tal que $g(t)$ es mayor que dos veces su desviación estándar, en la figura lo presentamos como el punto encerrado por un círculo en $t/t_{\text{end}} \approx 0.32$, y se lo interpreta como el tiempo hasta donde el proceso es divisible o bien es Markoviano de acuerdo a la divisibilidad (MD).

4.4.1. Tiempo de MD

Si consideramos que un proceso es Markoviano siempre que el canal $\Lambda_{t,0}$ es divisible, entonces llegamos a las desigualdades (3.41): $\delta_2(t) \leq \delta_q(t) \leq \delta_1(t)$. Con ello tendremos que t_{MD} será el tiempo máximo hasta donde podemos considerar que esas desigualdades se cumplen. Equivalentemente tendremos que $g(t) = 0$ durante ese tiempo. Entonces, podemos evaluar esas desigualdades a través del método de regresión lineal como

$$\delta_2 - \delta_q \leq 2s(\delta_2 - \delta_q), \quad \delta_q - \delta_1 \leq 2s(\delta_q - \delta_1), \quad (4.11)$$

en donde s denota la desviación estándar para el conjunto de datos en el intervalo I_s , equivalentemente

$$g \leq 2s(g). \quad (4.12)$$

Así t_{MD} será el tiempo mínimo cuando una de esas desigualdades es violada. Como puede inferirse de las Figuras 4.19 y 4.20 es más fácil evaluar la condición (4.12) que (4.11) pues la primera muestra un comportamiento más suave, lo anterior se debe a que cuando escribimos $g(t)$ en términos de funciones $\delta_{q,1,2}$ [v. ec. (3.42)] las fluctuaciones que presentan cada una de forma individual al ser combinadas (sumadas, restadas, etc.) se reducen en gran medida, es por ello que decidimos usar (4.12) para evaluar el tiempo de MD.

t_{MD} para un entorno GUE

En la Figura 4.21 se muestran los resultados del tiempo de divisibilidad normalizado por su correspondiente tiempo de finalización de la dinámica;

$$\frac{t_{\text{MD}}(\Delta, \lambda)}{t_{\text{end}}(\Delta, \lambda)} \in [0, 1],$$

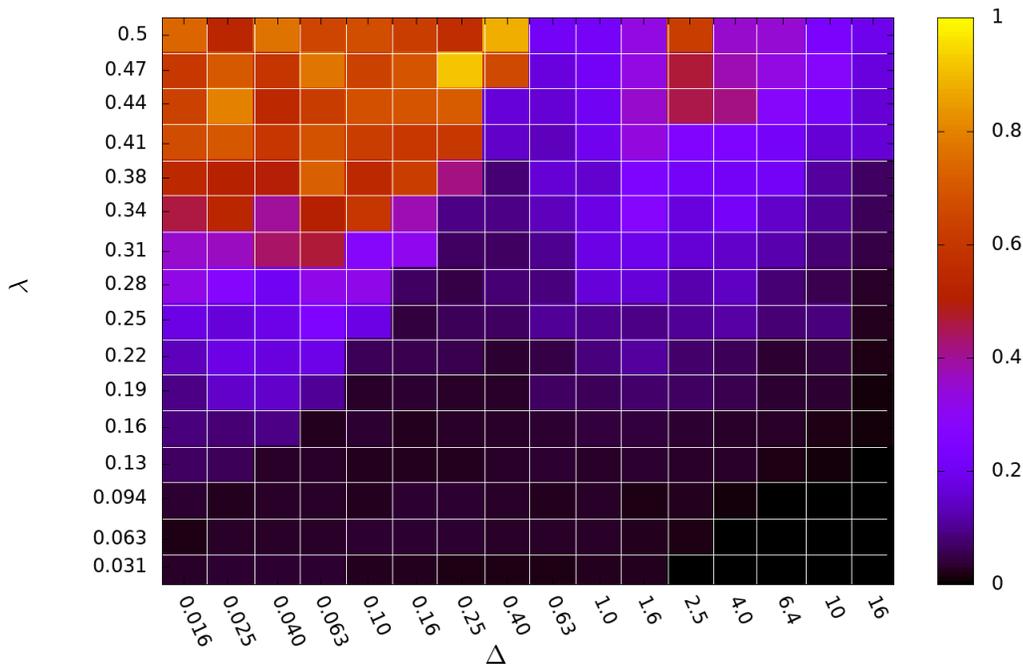


Figura 4.21: Tiempo de divisibilidad del proceso normalizado por su tiempo de finalización. La figura se obtiene al promediar sobre un ensemble GUE, las escalas para el acoplamiento (λ) y los colores ($t_{\text{MD}}/t_{\text{end}}$) son lineales, mientras que para Δ es logarítmica. Observamos tres comportamientos: el primero en donde no es divisible casi desde el tiempo inicial (color negro), el segundo que es divisible (azul) hasta tiempos notables entre $(0.2-0, 4) t_{\text{end}}$ y otro en donde es MD (naranja-amarillo) hasta tiempos mayores a $0.5 t_{\text{end}}$.

cuando se promedia sobre un ensemble GUE. La escala para λ y el código de colores son lineales, mientras que la de Δ es logarítmica. Observamos una región en donde el proceso es MD por un tiempo muy corto y aparece como una región oscura allí los valores del acoplamiento son pequeños $\lambda < 0.13$, sin embargo para valores de $\Delta > 6.4$ esa región empieza a extenderse incluso para valores del acoplamiento mayores que 0.22. Una segunda región en donde el proceso es divisible por un tiempo entre 0.2 y 0.4 del tiempo de finalización de la dinámica aparece en color azul. Y una tercera región, en donde podemos decir que el proceso es MD, esto es, el proceso es divisible durante casi todo el intervalo de tiempo relevante, se muestra de color que va del naranja hasta el amarillo, vemos que hay dos islas con estas características, una en la parte superior izquierda y la otra cerca de la parte superior derecha de la figura, ese comportamiento puede entenderse debido a que allí la dinámica decae exponencialmente y podemos interpretarla como una rápida contracción de la bola de Bloch sin expandirse. La transición de una región a otra ocurre de forma suave.

En lo que resta de esta sección examinaremos el tiempo de MD en tres puntos del plano paramétrico (Δ, λ) , a saber, un punto en donde la medida de BLP tanto como la de RHP son casi cero $(0.040, 0.38)$ al que nos referiremos cómo *punto Markoviano*. Otro en donde la medida de BLP tiene el valor máximo y en el cual la medida de RHP tiene uno de los valores más altos $(0.10, 0.031)$ y lo llamaremos *punto altamente no Markoviano*. El tercer punto es aquel en donde la medida de BLP es cero (o casi) y la medida de RHP indica que es no Markoviano, es decir, un punto en donde el mapa es contractivo e indivisible $(6.4, 0.38)$ al cual llamaremos *punto medianamente no Markoviano*.

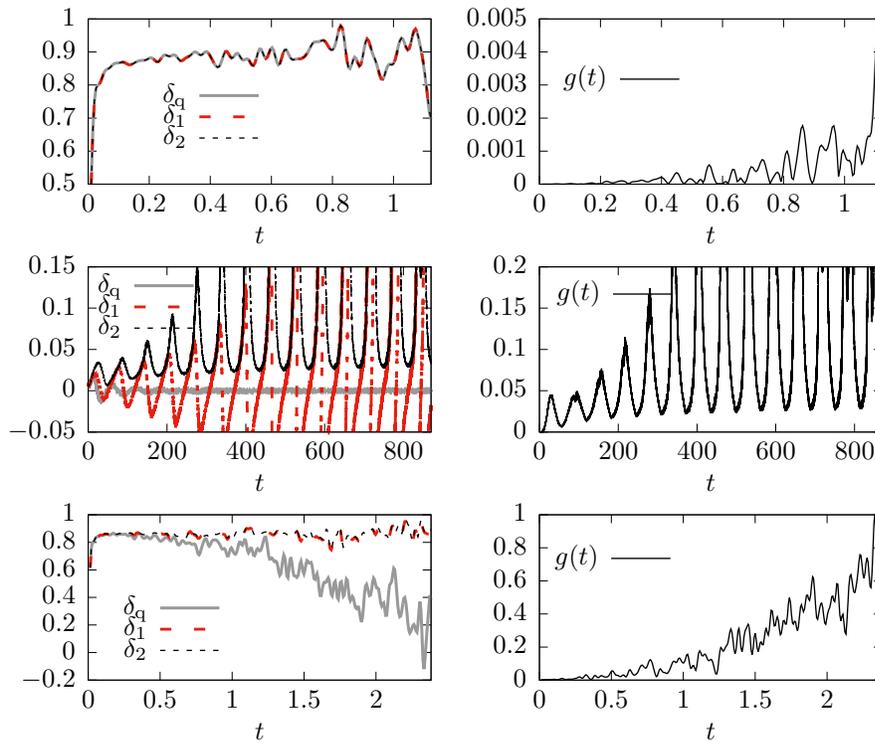


Figura 4.22: Tiempo de Markovianidad basado en la divisibilidad del proceso. En la columna de la izquierda están graficadas las funciones $\delta_{1,2,q}(t)$ las cuales deben cumplir las desigualdades (3.41), en la columna de la derecha encontramos sus correspondientes funciones $g(t)$. (Arriba) un punto Markoviano en donde $\Delta = 0.040$ y $\lambda = 0.38$. (En medio) un punto altamente no Markoviano que corresponde a $\Delta = 0.10$ y $\lambda = 0.031$. (Abajo) un punto medianamente Markoviano en donde $\Delta = 6.4$ y $\lambda = 0.38$

En la columna izquierda de la Figura 4.22 están graficadas las funciones $\delta_{q,1,2}(t)$ y en la columna derecha su correspondiente función $g(t)$ hasta sus respectivos tiempos de finalización. En la parte superior de dicha Figura, $\Delta = 0.040$ y $\lambda = 0.38$, observamos que no se satisface la desigualdad sino más bien la igualdad entre las funciones $\delta_{q,1,2}$ y que $g(t)$ llega a ser mayor que cero esto debido a las fluctuaciones estadísticas, aun así podemos decir que el mapa permanece divisible durante los tiempos relevantes y por tanto ese proceso es MD.

En los gráficos de la parte media de la Figura 4.22 tenemos $\Delta = 0.10$ y $\lambda = 0.031$, se puede apreciar que las desigualdades son violadas para tiempos realmente cortos y que la función $g(t)$ es mayor que cero poco después del tiempo inicial, además presenta singularidades en donde su valor crece de forma abrupta, podemos decir que al rededor de dichas singularidades la dinámica será necesariamente NMD.

Ahora, en los gráficos de la parte inferior de la Figura 4.22 tenemos que $\Delta = 6.4$ y $\lambda = 0.38$, podemos observar que el proceso se mantiene divisible por lo menos hasta $t \approx 0.3$, después de ese tiempo $\delta_2 > \delta_q$ lo cual se ve reflejado en que $g(t)$ es mayor que cero.

t_{MD} para un ensemble GOE

Presentamos brevemente los resultados obtenidos para la divisibilidad del proceso cuando el entorno es modelado por un GOE en la Figura 4.23. Observamos un comportamiento muy similar al de un GUE.

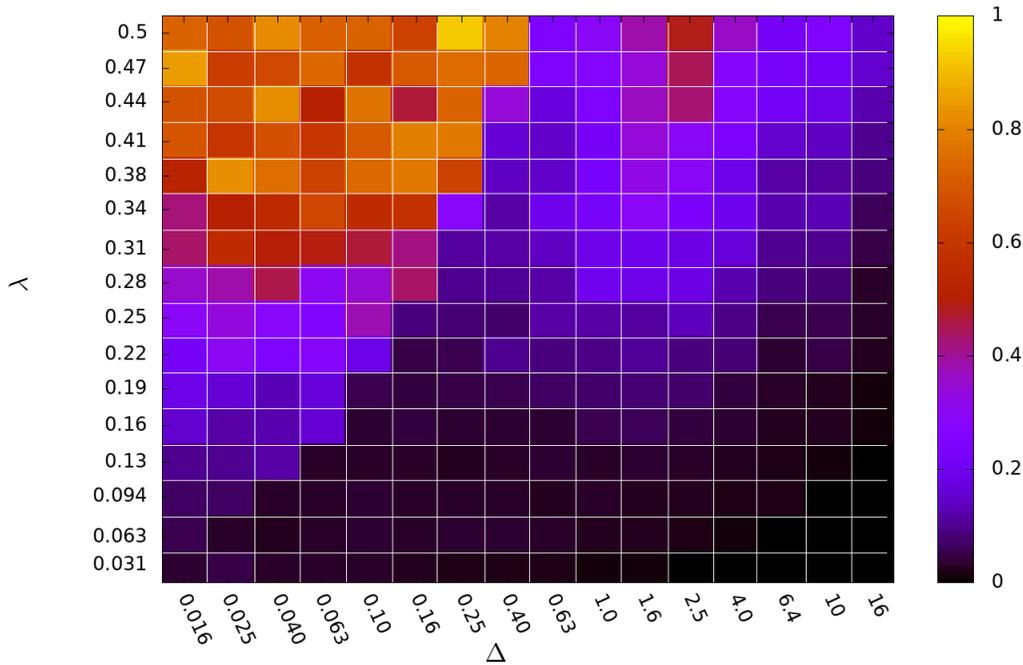


Figura 4.23: Tiempo de Markovianidad de acuerdo a la divisibilidad del proceso cuando el entorno es un GOE. Se presenta $t_{\text{MD}}/t_{\text{end}}$ en la escala de colores y es lineal, al igual que lo es la escala para λ , mientras la escala para Δ es logarítmica.

4.4.2. Tiempo de MC

Diremos que un sistema es Markoviano de acuerdo a la contractividad (MC) si la familia de mapas que lo describe forma un proceso contractivo, en otras palabras, la dinámica será MC si para cualesquiera pares de estados iniciales su distinguibilidad nunca se incrementa. Con esa definición llegamos a las desigualdades (3.56) y (3.62), mismas que fueron condensadas en la expresión $\sigma_{\text{máx}} \leq 0$ definida en (3.63). Entonces, al tomar en cuenta las fluctuaciones podemos evaluar esa condición cómo

$$\sigma_{\text{máx}} \leq 2 s(\sigma_{\text{máx}}), \quad (4.13)$$

para un intervalo I_s . La ecuación (4.13) nos dice que el mapa deja de ser contractivo cuando encontramos un valor de $\sigma_{\text{máx}}$ mayor que dos veces la desviación estándar de esos datos para un intervalo I_s . Es así cómo determinaremos el tiempo de MC en lo que resta de esta sección.

t_{MC} para un ensemble GUE

En la Figura 4.24 se muestra el tiempo de contractividad t_{MC} como función de los parámetros Δ y λ normalizado (por conveniencia) hasta su respectivo tiempo de finalización cuando se promedia sobre un ensemble GUE, esto es,

$$\frac{t_{\text{MC}}(\Delta, \lambda)}{t_{\text{end}}(\Delta, \lambda)} \in [0, 1].$$

Observamos que en la región de la esquina superior izquierda el proceso es MC (de color rojo) pero dentro de esa misma región existen puntos que podríamos considerar como no MC (azul), sin embargo, esto podría deberse a las fluctuaciones que eventualmente (mejorando la estadística) serán también MC. Existe también una región que podemos considerar como no MC (de color negro), al igual que regiones intermedias (azul).

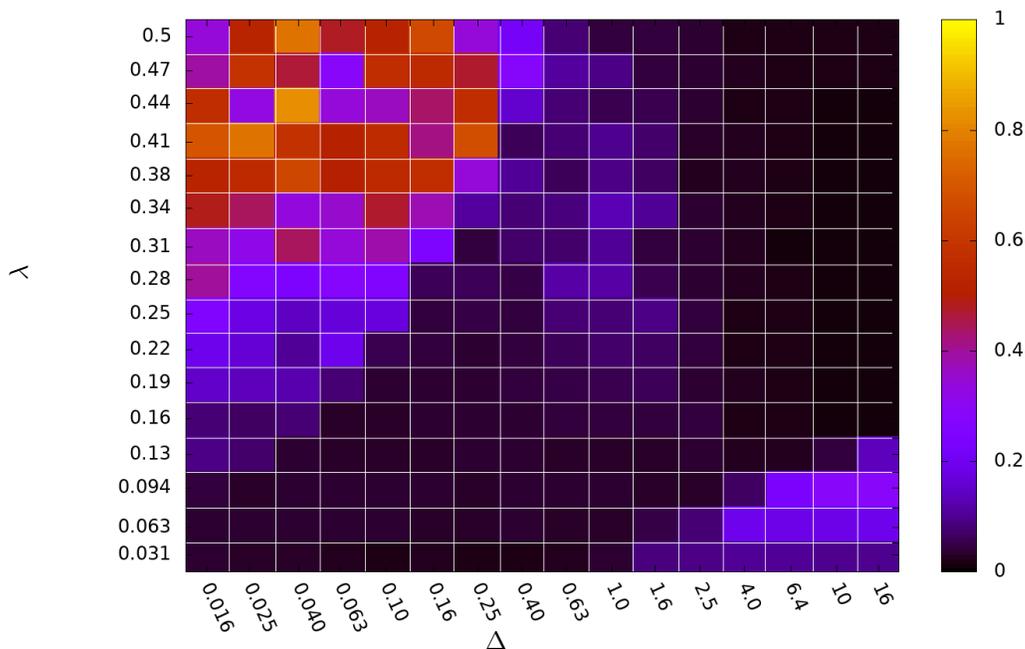


Figura 4.24: Tiempo de Markovianidad basado en la contractividad (MC) normalizado por su tiempo de finalización. En la figura se ha promediado sobre un ensemble GUE, las escalas para λ y los colores son lineales, mientras que la escala para Δ es logarítmica. Observamos tres regiones: una MC (color rojo), una no MC (oscura) y una intermedia (azul).

Podemos comparar el criterio de divisibilidad y el de contractividad del mapa al contrastar la Figura 4.21 con la Figura 4.24. Al hacerlo notamos que ambos dos criterios están de acuerdo a excepción de la región ubicada en la parte superior derecha ($\Delta > 1.6$ y $\lambda > 0.31$), que podríamos interpretar como una región en donde el mapa es divisible pero no contractivo contradiciendo lo establecido al final de la subsección 2.2.2. Creemos que esto sucede debido a que el método que hemos empleado no es efectivo en esa zona, o a que los criterios no deben ser interpretados de forma tan directa como si podemos hacerlo con las medidas de RHP y BLP.

Procedamos a analizar tres puntos del plano (Δ, λ) . En la columna de la izquierda de la Figura 4.25 se muestran las funciones involucradas en las desigualdades (3.56) y (3.62), mientras, en la columna de la derecha tenemos a $\sigma_{\text{máx}}$ y a las funciones que la definen (3.63). Hemos dispuesto la Figura 4.25 en tres filas y dos columnas, de esta forma (en orden descendente): la primera fila corresponde a $\Delta = 0.040$, $\lambda = 0.38$ y $t_{\text{end}} \approx 1.1$, observamos que las igualdades (3.56) y (3.62) se satisfacen, sin embargo $\sigma_{\text{máx}}$ parece ser mayor que cero en $t/t_{\text{end}} \approx 0.72$ esto podría deberse a las fluctuaciones estadísticas. Pero, el criterio que utilizamos para determinar el tiempo de MC no lo interpreta así y por consecuencia da un valor prácticamente igual a cero. La segunda fila es para $\Delta = 0.10$, $\lambda = 0.031$ y $t_{\text{end}} \approx 870$, ahí se observa como las condiciones de contractividad son violadas casi inmediatamente después de $t/t_{\text{end}} = 0$. En la tercera fila se tiene $\Delta = 0.10$, $\lambda = 0.031$ y $t_{\text{end}} \approx 2.4$, nuevamente observamos que (aparentemente) se satisfacen las condiciones (3.56) y (3.62), por otro lado $\sigma_{\text{máx}} > 0$ casi inmediatamente después del inicio de la dinámica, por supuesto sin considerar las fluctuaciones y al mejorar las estadística, incrementando el tamaño de los ensembles o efectuando más realizaciones de los Hamiltonianos aleatorios, podríamos esperar que la curva $\sigma_{\text{máx}}$ tienda a cero, así tenemos que este punto es NMD pero MC (cf. Fig. 4.22).

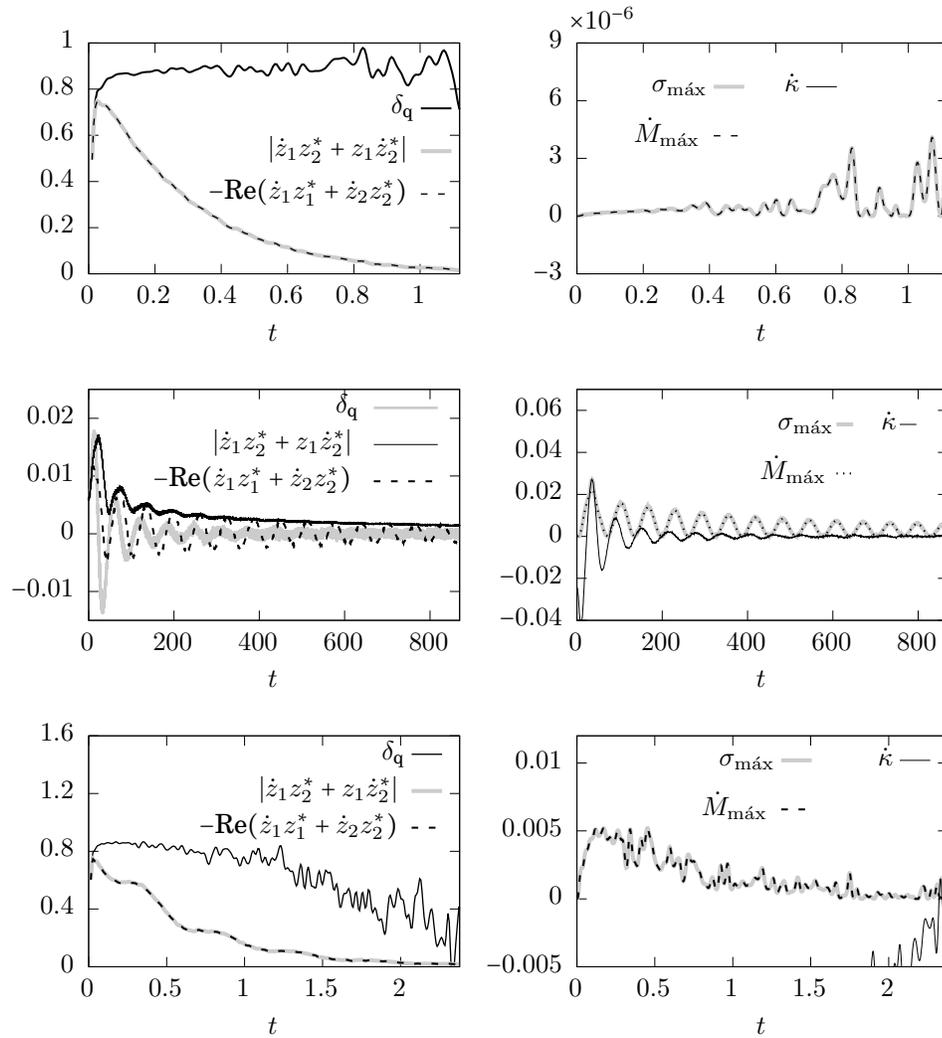


Figura 4.25: Tiempo de Markovianidad basado en la contractividad del proceso (MC). (Arriba) un punto MC en donde $\Delta = 0.040$, $\lambda = 0.38$ y $t_{\text{end}} \approx 1.1$. (En medio) un punto altamente no MC que corresponde a $\Delta = 0.10$, $\lambda = 0.031$ y $t_{\text{end}} \approx 870$. (Abajo) un punto difícil de evaluar (MC o no) con $\Delta = 6.4$, $\lambda = 0.38$ y $t_{\text{end}} \approx 2.4$.

t_{MC} para un ensemble GOE

En la Figura 4.26 presentamos los tiempos de contractividad normalizados hasta su correspondiente tiempo de finalización cuando el entorno del qubit es modelado por un ensemble GOE. Observamos una región que puede considerarse Markoviana en donde el proceso permanece contractivo por largos tiempos, $t_{\text{MC}} \approx t_{\text{end}}$, y aparece como una región de color roja. Existe, además, dos regiones *intermedias* en donde el proceso es contractivo por un tiempo que es aproximadamente el 40% del tiempo de finalización y aparece en color azul, es interesante notar que dichas regiones se encuentran separadas por una región de dinámica no Markoviana (color negro).

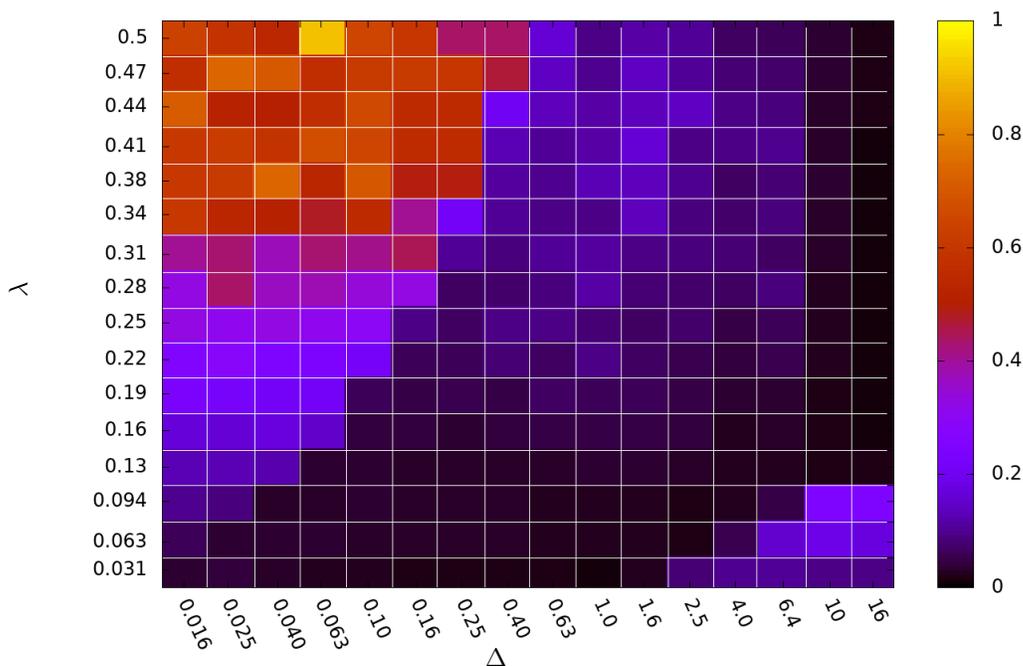


Figura 4.26: Tiempo de contractividad cuando el ambiente es modelado por un ensemble GOE. La escala de colores corresponde a t_{MC}/t_{end} y está en escala lineal al igual que la escala para el eje λ , el eje Δ se muestra en escala logarítmica. Los puntos en donde el proceso es MC se observa en color rojo, aquellos que son no MC en color negro, y una dinámica intermedia en azul.

4.5. Intersección de trayectorias en la bola de Bloch como signatura de memoria en el sistema

En el sentido más fundamental, la *memoria de un sistema* se refiere al hecho de tener que conocer su historia pasada para poder determinar su estado futuro. En mecánica clásica esa idea se traslada directamente en la llamada condición de Markov, pero al intentar llevar esa definición al reino cuántico nos enfrentamos con el problema de la medición, dado que para conocer el pasado del sistema es necesario medir su estado lo que irremediamente perturba o determina su futuro, y una definición de Markovianidad como la antes mencionada carece de sentido. Es por ello que la *memoria cuántica* se ha definido a través de probabilidades en un punto utilizando para ello las matrices de densidad. En este apartado, sin embargo, queremos dar una interpretación más directa del término memoria del sistema para un qubit acoplado a un entorno GUE.

En la Figura 4.27 se muestran las trayectorias que describe el vector de Bloch como una función del tiempo para el eigenestado inicial ϱ_q^{+x} como una línea sólida y la del eigenestado inicial ϱ_q^{+y} como una línea discontinua en el plano XY para diferentes valores de los parámetros Δ y λ . El tiempo ha sido sincronizado de tal manera que cuando las trayectorias se cruzan o se tocan suceden en el mismo instante. En la primera columna se ha fijado $\Delta \approx (2\pi)^{-1}$ y el valor del acoplamiento se incrementa: en (a) $\lambda = 0.031$, en (b) $\lambda = 0.094$, y en (c) $\lambda = 0.16$. En la segunda columna se ha fijado $\Delta = 6.4$ y los valores del acoplamiento son: (d) $\lambda = 0.16$, (e) $\lambda = 0.41$, y en (f) $\lambda = 0.50$. En los puntos donde las trayectorias se cruzan *necesitaríamos conocer* su pasado para poder determinar que trayectoria (punteada o continua) seguirían un tiempo después de cada intersección, así cuando el estado inicial es ϱ_q^{+y} seguirá por la línea punteada, mientras que si el estado inicial es ϱ_q^{+x} seguirá por la línea sólida. En este sentido el sistema *tiene memoria*, en otras palabras, es no Markoviano. Adicionalmente, podríamos decir que el sistema tiene *más*

memoria en **(a)** que en **(b)** por que las trayectorias se intersecan en más puntos. Por otro lado, en las figuras **(c)**–**(f)** *no necesitaríamos* tener que conocer el pasado pues las trayectorias nunca se cruzan o tocan, entonces, siempre sabremos que trayectoria seguir, en esos casos es Markoviano (sin memoria).

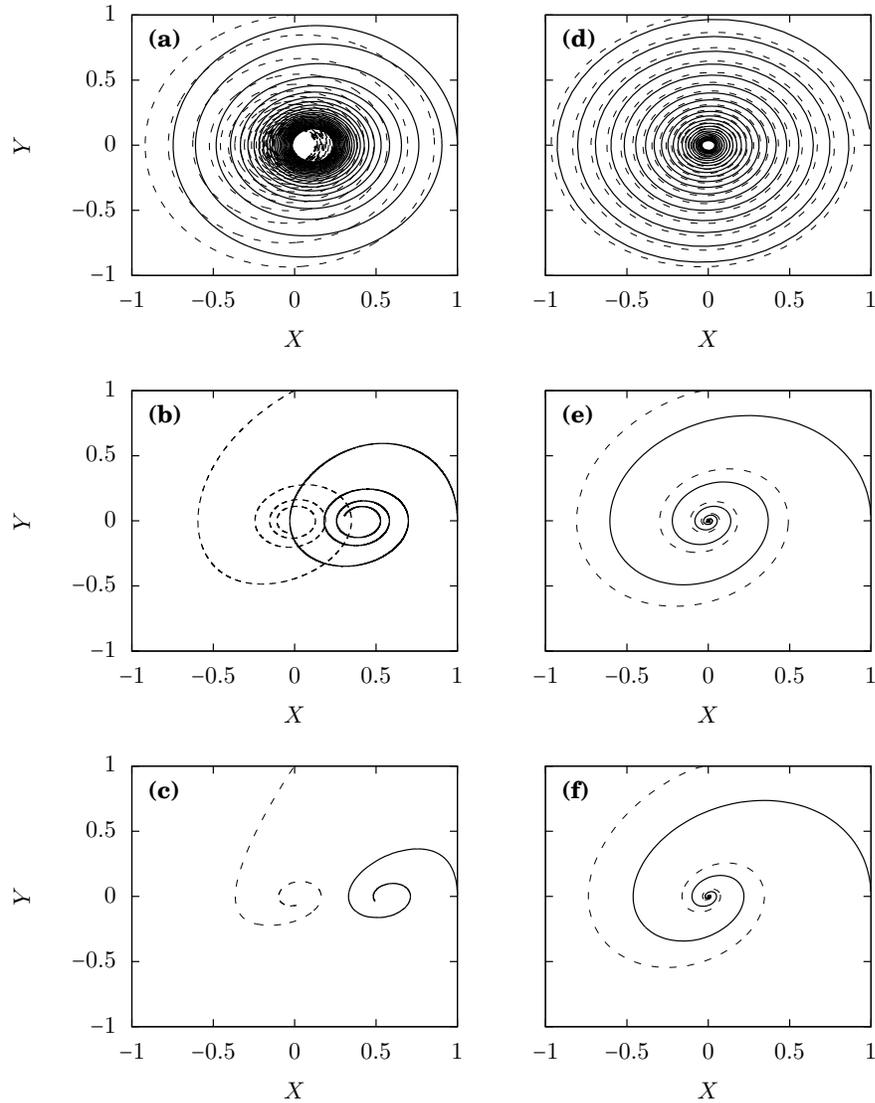


Figura 4.27: Trayectorias en el plano XY de la bola de Bloch. En la primera columna se fija $\Delta \approx (2\pi)^{-1}$ y: **(a)** $\lambda = 0.031$, **(b)** $\lambda = 0.094$, **(c)** $\lambda = 0.16$. Mientras en la segunda columna $\Delta = 6.4$ y: **(d)** $\lambda = 0.16$, **(e)** $\lambda = 0.41$ y **(f)** $\lambda = 0.50$.

Capítulo 5

Conclusiones

Iniciamos este trabajo exponiendo los conceptos fundamentales como un conjunto de herramientas en el capítulo 2, las cuales nos ayudaron a dar una explicación de lo que se entiende por no Markovianidad en sistemas cuánticos abiertos, siendo esas ideas ampliamente adoptadas por la comunidad especializada en el tema. En ese capítulo a través de la introducción de los mapas dinámicos para describir la evolución temporal de los sistemas cuánticos abiertos se llegó a una correspondencia con los procesos estocásticos clásicos, la dinámica de estos últimos es descrita por matrices estocásticas. Así, dicha analogía se establece entre: matrices estocásticas y mapas dinámicos. Debido a la dificultad fundamental de implementar la condición de Markov, que implica probabilidades condicionales de muchos puntos en la dinámica cuántica originada por el principio de medición, se establece la estrategia de buscar propiedades que deben cumplir las probabilidades en un punto llegando así a la ecuación de Chapman–Kolmogorov. Es en ese camino que obtuvimos las propiedades de contractividad y divisibilidad de los procesos cuánticos.

En el capítulo 3 se presentó el modelo que consiste de un qubit interactuando con un ambiente que es modelado por un esemble de matrices aleatorias, sean GUE o GOE. Se demostró la forma general que tiene el canal cuántico que describe la dinámica del qubit en ese modelo así como su visualización geométrica en la representación de Bloch. Se aplicaron las ideas de no Markovianidad cuántica, arriba mencionadas, lo que nos condujo al establecimiento de las condiciones bajo las cuales el proceso es o bien divisible o bien contractivo; mismas que se presentaron como un conjunto de desigualdades que deben satisfacerse. Además, se encontraron expresiones exactas para dos medidas de no Markovianidad cuántica, la medida de Á. Rivas *et al.* y la medida de Breuer *et al.* Al final de ese capítulo, se introdujo una medida de no Markovianidad cuántica que considera las fluctuaciones estadísticas inherentes a ciertos procesos.

Finalmente, en el capítulo 4, se presentaron los resultados numéricos así como sus respectivos análisis, mismos que nos llevaron a concluir:

Finalización de la dinámica

El estado de equilibrio depende de la fuerza del acoplamiento con el entorno y de la distancia entre los niveles de energía del qubit, así como del estado inicial. Sin embargo, el modelo presenta la característica de que si se inicia con un eigenestado de la matriz de Pauli σ_y el estado de equilibrio siempre es el de la mezcla máxima. Si el acoplamiento es pequeño la coherencia del sistema presenta un decaimiento algebraico, mientras que para acoplamientos fuertes el decaimiento es exponencial. Sin embargo, cuando la distancia entre los niveles del qubit tiene un valor cercano al inverso del tiempo de Heisenberg del entorno el decaimiento de la coherencia es más lento de lo que se espera aun para acoplamientos fuertes.

Medidas de no Markovianidad

Cuantitativamente las medidas de no Markovianidad difieren según la definición empleada, sin embargo cualitativamente resultan consistentes en algunas regiones. Por ejemplo, para valores de $\Delta \leq 0.25$ y $\lambda > 0.31$ las tres medidas predicen una dinámica Markoviana. Sin embargo, están en desacuerdo para valores grandes de esos parámetros. Aún así, vuelven a estar en acuerdo para la región no Markoviana. En resumen, las tres medidas detectan bien la no Markovianidad, pero no así la Markovianidad del sistema.

Tiempo de Markovianidad

Debido a la finitud del ensemble RMT utilizado, las condiciones para que el sistema sea considerado como Markoviano expresadas como un conjunto de desigualdades resultan difíciles de evaluar. Esa dificultad se origina por las fluctuaciones estadísticas que presentan las funciones involucradas, es por ello que se debe recurrir a los métodos estadísticos para poder evaluar dichas condiciones, por ejemplo, regresión lineal y considerar su desviación estándar para determinar cuando se cumple una condición. Se identifican básicamente tres regiones: una Markoviana ($\Delta \leq 0.25$ y $\lambda > 0.28$), una región medianamente Markoviana y una región no Markoviana que corresponde a aquellos tiempos de coherencia largos.

Memoria del sistema

Al considerar las trayectorias del vector de Bloch como función del tiempo para los estados iniciales de las matrices de Pauli σ_x y σ_y , se observa que las intersecciones de esas trayectorias son una signature de memoria del sistema. Así, mientras más veces se intercepten dichas curvas más memoria tendrá el sistema, porque en cada punto en donde ocurren esas intersecciones es necesario conocer el estado anterior para poder determinar que trayectoria seguir, en consecuencia una dinámica sin memoria implicará que las trayectorias nunca se interceptan.

Apéndice A

Evolución de los eigenestados:

$+z, +x, +y$
 ρ_q

En este apartado daremos una justificación de las ecuaciones (3.2)–(3.4) que describen cómo son mapeados los eigenestados con eigenvalor +1 de las matrices de Pauli por el canal cuántico (3.21) asumiendo, por supuesto, que tal transformación nos es desconocida, adicionalmente $\hbar = 1$ como es costumbre.

A.1. Conceptos y definiciones

Escribimos el Hamiltoniano del modelo (3.1) como¹:

$$H_\lambda = H_0 + \lambda \sigma_x \otimes V_E, \quad (\text{A.1})$$

donde $H_0 = \frac{\Delta}{2} \sigma_z \otimes \mathbb{1}_E + \mathbb{1}_q \otimes H_E$, de tal forma que podemos definir los siguientes operadores

$$U_0(t) = e^{-iH_0 t} = e^{-i\frac{\Delta}{2}\sigma_z t} \otimes e^{-iH_E t}, \quad (\text{A.2})$$

$$U_\lambda(t) = e^{-iH_\lambda t}, \quad (\text{A.3})$$

$$M(t) = U_0(t)^\dagger U_\lambda(t), \quad (\text{A.4})$$

el operador $M(t)$ es llamado *operador de eco*. Colocaremos una tilde arriba de un operador para indicar que está en el cuadro de interacción, esto es, dado un operador A , entonces se escribe como, $\tilde{A}(t) = U_0(t)^\dagger A U_0(t)$. Además, supondremos que siempre es posible preparar el estado inicial del sistema total como un estado de producto

$$\rho(0) = \rho_q \otimes \rho_E. \quad (\text{A.5})$$

Sabemos de la ec. (2.3) del Capítulo 2 que la evolución de un estado inicial arbitrario del sistema total está dada por $\rho(t) = U_\lambda(t)\rho(0)U_\lambda(t)^\dagger$, y ahora podemos expresarlo en el cuadro de interacción como

$$\tilde{\rho}(t) = M(t)\rho_q \otimes \rho_E M(t)^\dagger. \quad (\text{A.6})$$

Entonces, la dinámica del sistema reducido en el cuadro de interacción se obtiene al tomar el promedio sobre el ensemble RMT y la traza parcial (en cualquier orden) en (A.6)

$$\tilde{\rho}_q(t) = \text{tr}_E[\langle \tilde{\rho}(t) \rangle_{\text{RMT}}], \quad (\text{A.7})$$

y finalmente regresamos al cuadro de Schrödinger

$$\rho_q(t) = e^{-i\frac{\Delta}{2}\sigma_z t} \tilde{\rho}_q(t) e^{i\frac{\Delta}{2}\sigma_z t}.$$

¹Las definiciones y notación introducidas en este párrafo son de uso estándar en la *teoría del caos cuántico*, en la Ref. [45] se realiza una revisión de esos conceptos y está íntimamente relacionada a nuestro trabajo.

A.2. Evolución de un estado inicial arbitrario

La expansión en serie de Born (serie de Dyson en matemáticas) del operador de eco (A.4) produce [45]

$$M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-i\lambda)^k \int \cdots \int_{t > \tau_1 > \cdots > \tau_k > 0} d\tau_1 \cdots d\tau_k \tilde{\sigma}_x(\tau_1) \otimes \tilde{V}_E(\tau_1) \cdots \tilde{\sigma}_x(\tau_k) \otimes \tilde{V}_E(\tau_k), \quad (\text{A.8})$$

en donde hemos asumido que el término para $k = 0$ resulta ser el operador identidad y que la serie converge. Formalmente $M(t) = \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-i\lambda)^k}{\hbar^k k!} \int \cdots \int_{t > \tau_1 > \cdots > \tau_k > 0} d\tau_1 \cdots d\tau_k \tilde{\sigma}_x(\tau_1) \otimes \tilde{V}_E(\tau_1) \cdots \tilde{\sigma}_x(\tau_k) \otimes \tilde{V}_E(\tau_k)$.

Dado que el término perturbativo $\lambda \sigma_x \otimes V_E$ es separable; podemos escribirlo en el cuadro de interacción como una matriz de bloques

$$\tilde{\sigma}_x(\tau) \otimes \tilde{V}_E(\tau) = U_0(\tau)^\dagger \sigma_x \otimes V_E U_0(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & e^{i\Delta\tau} \mathcal{V}_E(\tau) \\ e^{-i\Delta\tau} \mathcal{V}_E(\tau) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A(\tau) \\ A(\tau)^\dagger & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

en la expresión anterior hemos definido $\mathcal{V}_E(\tau) = e^{iH_E\tau} V_E e^{-iH_E\tau}$, además es evidente que $\mathcal{V}_E(\tau) = \mathcal{V}_E(\tau)^\dagger$. Utilizando la notación $\mathcal{I}^k(\tau) = \int \cdots \int_{t > \tau_1 > \cdots > \tau_k > 0} d\tau_1 \cdots d\tau_k$, e insertando (A.9) para cada τ_k en (A.8)

obtendremos la siguiente expresión para el operador de eco:

$$M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-i\lambda)^k \mathcal{I}^k(\tau) \begin{bmatrix} 0 & A(\tau_1) \\ A(\tau_1)^\dagger & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 & A(\tau_k) \\ A(\tau_k)^\dagger & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

En general la sumatoria (A.10) puede descomponerse en dos partes, una que contenga términos pares y la otra términos impares. Para los términos pares tendremos que el producto de las matrices de bloques puede ser expresado como

$$\prod_{j=1}^{2k} \begin{bmatrix} 0 & A(\tau_k) \\ A(\tau_k)^\dagger & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{2k}(\tau) & 0 \\ 0 & Q_{2k}(\tau)^\dagger \end{bmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

en donde se ha introducido, por conveniencia, la notación

$$P_{2k}(\tau) = A(\tau_1)A(\tau_2)^\dagger \cdots A(\tau_{2k-1})A(\tau_{2k})^\dagger. \quad (\text{A.12})$$

y

$$Q_{2k}(\tau) = A(\tau_{2k})^\dagger A(\tau_{2k-1}) \cdots A(\tau_2)^\dagger A(\tau_1). \quad (\text{A.13})$$

Por otro lado, para los términos impares tendremos

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{2k+1} \begin{bmatrix} 0 & A(\tau_k) \\ A(\tau_k)^\dagger & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P_{2k}(\tau) & 0 \\ 0 & Q_{2k}(\tau)^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A_{2k+1}(\tau) \\ A_{2k+1}(\tau)^\dagger & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & P_{2k+1}(\tau) \\ Q_{2k+1}(\tau)^\dagger & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

nótese que

$$P_{2k+1}(\tau) = P_{2k}(\tau)A_{2k+1}(\tau), \quad y, \quad Q_{2k+1}(\tau) = A_{2k+1}(\tau)Q_{2k}(\tau). \quad (\text{A.15})$$

Entonces, podemos escribir el operador de eco como

$$M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda^2)^k \left\{ \mathcal{I}^{2k}(\tau) \begin{bmatrix} P_{2k}(\tau) & 0 \\ 0 & Q_{2k}(\tau)^\dagger \end{bmatrix} - i\lambda \mathcal{I}^{2k+1}(\tau) \begin{bmatrix} 0 & P_{2k+1}(\tau) \\ Q_{2k+1}(\tau)^\dagger & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad (\text{A.16})$$

y su matriz Hermítica conjugada como

$$M(t)^\dagger = \sum_{l=0}^{\infty} (-\lambda^2)^l \left\{ \mathcal{I}^{2l}(\alpha) \begin{bmatrix} P_{2l}(\alpha)^\dagger & 0 \\ 0 & Q_{2l}(\alpha) \end{bmatrix} + i\lambda \mathcal{I}^{2l+1}(\alpha) \begin{bmatrix} 0 & Q_{2l+1}(\alpha) \\ P_{2l+1}(\alpha)^\dagger & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad (\text{A.17})$$

sustituyendo las ecs. (A.16) y (A.17) en (A.6) y realizando los productos indicados, encontraremos términos que contienen únicamente bloques de la forma $P_{2k}(\tau)\varrho_{\mathbf{q}} \otimes \varrho_E Q_{2l+1}(\alpha)$ los cuales involucran potencias impares del producto de las matrices $A(\tau)$ y $A(\alpha)$ que al promediar sobre el esemble resultarán ser iguales a cero, sobrevivirán solo aquellos términos que involucran potencias pares, por lo tanto

$$\begin{aligned} \tilde{\varrho}(t) = \sum_{k,l=0}^{\infty} (-\lambda^2)^{k+l} \left\{ \mathcal{I}^{2k}(\tau)\mathcal{I}^{2l}(\alpha) \begin{bmatrix} P_{2k}(\tau) & 0 \\ 0 & Q_{2k}(\tau)^\dagger \end{bmatrix} \varrho_{\mathbf{q}} \otimes \varrho_E \begin{bmatrix} P_{2l}(\alpha)^\dagger & 0 \\ 0 & Q_{2l}(\alpha) \end{bmatrix} \right. \\ \left. + \lambda^2 \mathcal{I}^{2k+1}(\tau)\mathcal{I}^{2l+1}(\alpha) \begin{bmatrix} 0 & P_{2k+1}(\tau) \\ Q_{2k+1}(\tau)^\dagger & 0 \end{bmatrix} \varrho_{\mathbf{q}} \otimes \varrho_E \begin{bmatrix} 0 & Q_{2l+1}(\alpha) \\ P_{2l+1}(\alpha)^\dagger & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad (\text{A.18}) \end{aligned}$$

sustituyendo la expresión (A.18) en (A.7) obtendremos, en principio, la evolución de cualquier estado inicial del sistema reducido. En lo que sigue estudiaremos algunos casos de particular interés.

A.2.1. Evolución del eigenestado $\varrho_{\mathbf{q}}^{+z}$

El estado inicial del sistema reducido puede expresarse a través de los vectores base como $\varrho_{\mathbf{q}} = \varrho_{\mathbf{q}}^{+z} = |0\rangle\langle 0|$, con lo que obtenemos

$$\begin{bmatrix} P_{2k}(\tau) & 0 \\ 0 & Q_{2k}(\tau)^\dagger \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varrho_E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} P_{2l}(\alpha)^\dagger & 0 \\ 0 & Q_{2l}(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} P_{2k}(\tau)\varrho_E P_{2l}(\alpha)^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & P_{2k+1}(\tau) \\ Q_{2k+1}(\tau)^\dagger & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varrho_E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & Q_{2l+1}(\alpha) \\ P_{2l+1}(\alpha)^\dagger & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_{2k+1}(\tau)^\dagger \varrho_E Q_{2l+1}(\alpha) \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

sustituyendo esas dos expresiones en (A.18) se llega a

$$\tilde{\varrho}(t) = \sum_{k,l=0}^{\infty} (-\lambda^2)^{k+l} \left[\begin{array}{cc} \mathcal{I}^{2k}(\tau)\mathcal{I}^{2l}(\alpha)P_{2k}(\tau)\varrho_E P_{2l}(\alpha)^\dagger & 0 \\ 0 & \lambda^2 \mathcal{I}^{2k+1}(\tau)\mathcal{I}^{2l+1}(\alpha)Q_{2k+1}(\tau)^\dagger \varrho_E Q_{2l+1}(\alpha) \end{array} \right]; \quad (\text{A.21})$$

en este caso resulta que $\varrho_{\mathbf{q}}^{+z}(t) = \tilde{\varrho}_{\mathbf{q}}^{+z}(t) = \text{tr}[\langle \tilde{\varrho}(t) \rangle_{\text{RMT}}]$, por lo tanto (A.21) es la justificación de (3.4). Adicionalmente, hemos demostrado que

$$r(t) = \sum_{k,l=0}^{\infty} (-\lambda^2)^{k+l} \mathcal{I}^{2k}(\tau)\mathcal{I}^{2l}(\alpha) \text{tr}[\langle P_{2k}(\tau)\varrho_E P_{2l}(\alpha)^\dagger \rangle_{\text{RMT}}] \quad (\text{A.22})$$

y

$$1 - r(t) = - \sum_{k,l=0}^{\infty} (-\lambda^2)^{k+l+1} \mathcal{I}^{2k+1}(\tau)\mathcal{I}^{2l+1}(\alpha) \text{tr}[\langle Q_{2k+1}(\tau)^\dagger \varrho_E Q_{2l+1}(\alpha) \rangle_{\text{RMT}}]. \quad (\text{A.23})$$

A.2.2. Evolución del eigenestado $\varrho_{\mathbf{q}}^{+x}$

El eigenestado de la matriz de Pauli σ_x con eigenvalor +1 puede escribirse como

$$\varrho_{\mathbf{q}} = \varrho_{\mathbf{q}}^{+x} = \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|), \quad (\text{A.24})$$

entonces, para conocer la evolución de $\varrho_{\mathbf{q}}^{+x}$, primero tenemos que encontrar como es la evolución de cada uno de los vectores que aparecen del lado derecho de (A.24), esto se sigue de la linealidad del canal cuántico Λ_t :

$$\varrho_{\mathbf{q}}^{+x}(t) = \Lambda_t[\varrho_{\mathbf{q}}^{+x}] = \frac{1}{2}(\Lambda_t[|0\rangle\langle 0|] + \Lambda_t[|1\rangle\langle 1|] + \Lambda_t[|0\rangle\langle 1|] + \Lambda_t[|1\rangle\langle 0|]). \quad (\text{A.25})$$

El primer término corresponde a $\varrho_{\mathbf{q}}^{+z}(t)$ y ya se calculó, el resultado está dado por la ecuación (A.21). Así, solo queda calcular la evolución de los tres términos restantes.

Evolución de $|1\rangle\langle 1|$

Tenemos

$$\begin{bmatrix} P_{2k}(\tau) & 0 \\ 0 & Q_{2k}(\tau)^\dagger \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varrho_E \end{pmatrix} \begin{bmatrix} P_{2l}(\alpha)^\dagger & 0 \\ 0 & Q_{2l}(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_{2k}(\tau)^\dagger \varrho_E Q_{2l}(\alpha) \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & P_{2k+1}(\tau) \\ Q_{2k+1}(\tau)^\dagger & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varrho_E \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & Q_{2l+1}(\alpha) \\ P_{2l+1}(\alpha)^\dagger & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{2k+1}(\tau) \varrho_E P_{2l+1}(\alpha)^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

sustituyendo en (A.18)

$$\tilde{\varrho}(t) = \sum_{k,l=0}^{\infty} (-\lambda^2)^{k+l} \begin{bmatrix} \lambda^2 \mathcal{I}^{2k+1}(\tau) \mathcal{I}^{2l+1}(\alpha) P_{2k+1}(\tau) \varrho_E P_{2l+1}(\alpha)^\dagger & 0 \\ 0 & \mathcal{I}^{2k}(\tau) \mathcal{I}^{2l}(\alpha) Q_{2k}(\tau)^\dagger \varrho_E Q_{2l}(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.28})$$

El procedimiento es similar para los otros dos vectores.

Evolución de $|0\rangle\langle 1|$

Se tiene que

$$\begin{bmatrix} P_{2k}(\tau) & 0 \\ 0 & Q_{2k}(\tau)^\dagger \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \varrho_E \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} P_{2l}(\alpha)^\dagger & 0 \\ 0 & Q_{2l}(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & P_{2k}(\tau) \varrho_E Q_{2l}(\alpha) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & P_{2k+1}(\tau) \\ Q_{2k+1}(\tau)^\dagger & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \varrho_E \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & Q_{2l+1}(\alpha) \\ P_{2l+1}(\alpha)^\dagger & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Q_{2k+1}(\tau)^\dagger \varrho_E P_{2l+1}(\alpha)^\dagger & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.30})$$

por lo tanto

$$\tilde{\varrho}(t) = \sum_{k,l=0}^{\infty} (-\lambda^2)^{k+l} \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{I}^{2k}(\tau) \mathcal{I}^{2l}(\alpha) P_{2k}(\tau) \varrho_E Q_{2l}(\alpha) \\ \lambda^2 \mathcal{I}^{2k+1}(\tau) \mathcal{I}^{2l+1}(\alpha) Q_{2k+1}(\tau)^\dagger \varrho_E P_{2l+1}(\alpha)^\dagger & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.31})$$

Evolución de $|1\rangle\langle 0|$

Para el último vector

$$\begin{bmatrix} P_{2k}(\tau) & 0 \\ 0 & Q_{2k}(\tau)^\dagger \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varrho_E & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} P_{2l}(\alpha)^\dagger & 0 \\ 0 & Q_{2l}(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Q_{2k}(\tau)^\dagger \varrho_E P_{2l}(\alpha)^\dagger & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & P_{2k+1}(\tau) \\ Q_{2k+1}(\tau)^\dagger & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varrho_E & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & Q_{2l+1}(\alpha) \\ P_{2l+1}(\alpha)^\dagger & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & P_{2k+1}(\tau) \varrho_E Q_{2l+1}(\alpha) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.33})$$

entonces

$$\tilde{\varrho}(t) = \sum_{k,l=0}^{\infty} (-\lambda^2)^{k+l} \begin{bmatrix} 0 & \lambda^2 \mathcal{I}^{2k+1}(\tau) \mathcal{I}^{2l+1}(\alpha) P_{2k+1}(\tau) \varrho_E Q_{2l+1}(\alpha) \\ \mathcal{I}^{2k}(\tau) \mathcal{I}^{2l}(\alpha) Q_{2k}(\tau)^\dagger \varrho_E P_{2l}(\alpha)^\dagger & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.34})$$

La evolución del eigenestado $\varrho_{\mathbf{q}}^{+x}$ en el cuadro de interacción estará dada por la mitad de la suma de las ecuaciones (A.21), (A.28), (A.31) y (A.34) una vez que se tome el promedio sobre el ensemble y la traza parcial sobre los grados de libertad del entorno. Dado que el canal es unital, como puede deducirse de la ecuación (3.21), la suma de los dos primeros términos en el lado derecho de (A.25) resulta en la identidad, por lo tanto, tenemos que (de regreso al cuadro de Schrödinger):

$$\varrho_{\mathbf{q}}^{+x}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & z_x(t)^* \\ z_x(t) & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.35})$$

en donde

$$z_x(t) = e^{i\Delta t} \sum_{k,l=0}^{\infty} (-\lambda^2)^{k+l} [\mathcal{I}^{2k}(\tau)\mathcal{I}^{2l}(\alpha)\langle P_{2l}(\alpha)^\dagger Q_{2k}(\tau)^\dagger \rangle + \lambda^2 \mathcal{I}^{2k+1}(\tau)\mathcal{I}^{2l+1}(\alpha)\langle P_{2l+1}(\alpha)^\dagger Q_{2k+1}(\tau)^\dagger \rangle] \quad (\text{A.36})$$

y $\langle \dots \rangle = \text{tr}[\langle \dots \rangle_{\mathcal{RMT}}]$. Con esto queda justificada la ecuación (3.2).

A.2.3. Evolución del eigenestado $\varrho_{\mathbf{q}}^{+y}$

Este eigenestado puede escribirse como

$$\varrho_{\mathbf{q}} = \varrho_{\mathbf{q}}^{+y} = \frac{1}{2} [|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| + i(-|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)], \quad (\text{A.37})$$

notamos que es muy similar al caso (A.24) únicamente difiere en la unidad imaginaria y en un signo, siendo así una demostración casi directa en donde se obtendrá que:

$$\varrho_{\mathbf{q}}^{+x}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & z_y(t)^* \\ z_y(t) & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.38})$$

en donde

$$z_y(t) = ie^{i\Delta t} \sum_{k,l=0}^{\infty} (-\lambda^2)^{k+l} [\mathcal{I}^{2k}(\tau)\mathcal{I}^{2l}(\alpha)\langle P_{2l}(\alpha)^\dagger Q_{2k}(\tau)^\dagger \rangle - \lambda^2 \mathcal{I}^{2k+1}(\tau)\mathcal{I}^{2l+1}(\alpha)\langle P_{2l+1}(\alpha)^\dagger Q_{2k+1}(\tau)^\dagger \rangle] \quad (\text{A.39})$$

quedando así justificada la ecuación (3.3).

Bibliografía

- [1] H. P. Breuer y F. Petruccione. *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford University Press, 2002.
- [2] H. Carmichael. *An Open Systems Approach to Quantum Optics*. Springer, Berlin, 1993.
- [3] V. Gorini, A. Kossakowski y E. C. G. Sudarshan. Completely positive dynamical semigroups of N-level systems. *J. Math. Phys.* **17**, 821 (1976).
- [4] G. Lindblad. On the generators of quantum dynamical semigroups. *Commun. Math. Phys.* **48**, 2 (1976).
- [5] F. Verstraete, M. M. Wolf y J. I. Cirac. Quantum computation and quantum-state engineering driven by dissipation. *Nat. Phys.* **5**, 633 (2009).
- [6] C. J. Myatt, B. E. King, Q. A. Turchette, C. A. Sacket, D. Kielpinski, W. M. Itano, C. Monroe y D. J. Wineland. Decoherence of quantum superpositions through coupling to engineered reservoirs. *Nature* **403**, 269 (2000).
- [7] M. Carrera, T. Gorin y T. H. Seligman. Single-qubit decoherence under a separable coupling to a random matrix environment. *Phys. Rev. A* **90**, 022107 (2014).
- [8] H. J. Moreno, T. Gorin y T. H. Seligman. Improving coherence with nested environments. *Phys. Rev. A* **92**, 030104 (2015).
- [9] C. Pineda y T. H. Seligman. Bell pair in a generic random matrix environment. *Phys. Rev. A* **75**, 012106 (2007).
- [10] B. Bylicka, D. Chruściński y S. Maniscalco. Non-Markovianity and reservoir memory of quantum channels: a quantum information theory perspective. *Sci. Rep.* **4**, 5720 (2014).
- [11] B. Bylicka, D. Chruściński y S. Maniscalco. Non-Markovianity as a Resource for Quantum Technologies. *ArXiv:1301.2585 [quant-ph]* (2013).
- [12] C. Pineda, T. Gorin, D. Davalos, D. A. Wisniacki e I. García-Mata. Measuring and using non-Markovianity. *Phys. Rev. A* **93**, 022117 (2016).
- [13] S. F. Huelga y Á. Rivas. *Open Quantum Systems. An Introduction*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.
- [14] H. P. Breuer. Foundations and measures of quantum non-Markovianity. *J. Phys. B* **45**, 15 (2012).
- [15] H. P. Breuer, E. M. Laine y J. Piilo. Measure for the degree of non-Markovian behavior of quantum processes in open systems. *Phys. Rev. Lett.* **103**, 210401 (2009).
- [16] Á. Rivas, S. F. Huelga y M. Plenio. Entanglement and non-Markovianity of quantum evolutions. *Phys. Rev. Lett.* **105**, 50403 (2010).

- [17] M. V. Berry y M. Tabor. Level clustering in the regular spectrum. *Proc. R. Soc. Lond. A* **356**, 375 (1977).
- [18] G. Casati, F. Valz-Gris e I. Guarneri. On the connection between quantization of nonintegrable systems and statistical theory of spectra. *Lett. Nuovo Cimento* **28**, 279 (1980).
- [19] O. Bohigas, M. J. Giannoni y C. Schmit. characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws. *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1 (1984).
- [20] A. M. O. de Almeida O. Bohigas, M.-J. Giannoni y C. Schmit. Chaotic dynamics and the goe-gue transition. *Nonlinearity* **8**, 2 (1995).
- [21] H. Carmichael. *Statistical Methods in Quantum Optics 1: Master Equations and Fokker-Planck Equations*. Physics and Astronomy Online Library. Springer, 1999.
- [22] M. A. Nielsen e I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [23] I. Bengtsson y K. Życzkowski. *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*. Cambridge University Press, 2006.
- [24] M. D. Choi. Completely positive linear maps on complex matrices. *Linear Algebra Appl.* **10**, 3 (1975).
- [25] A. Gilchrist, N. K. Langford y M. A. Nielsen. Distance measures to compare real and ideal quantum processes. *Phys. Rev. A* **71**, 062310 (2005).
- [26] Á. Rivas, S. F. Huelga y M. B. Plenio. Quantum non-Markovianity: characterization, quantification and detection. *Rep. Progr. Phys.* **77**, 094001 (2014).
- [27] N. G. van Kampen. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. North-Holland, Elsevier, 2007.
- [28] E. Ruch, R. Schraner y T. H. Seligman. Generalization of a theorem by hardy, littlewood, and pólya. *J. Math. Anal. Appl.* **76**, 222 (1980).
- [29] G. Polya. G. H. Hardy y J. E. Littlewood. *Inequalities G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya*. Cambridge Cambridge University Press 1983, 2 edition, 1973.
- [30] Á. Rivas, S. F. Huelga y M. B. Plenio. Entanglement and non-Markovianity of quantum evolutions. *Phys. Rev. Lett.* **105**, 050403 (2010).
- [31] H. P. Breuer, E. M. Laine y J. Piilo. Measure for the degree of non-Markovian behavior of quantum processes in open systems. *Phys. Rev. Lett.* **103**, 210401 (2009).
- [32] P. Haikka, J. D. Cresser y S. Maniscalco. Comparing different non-Markovianity measures in a driven qubit system. *Phys. Rev. A* **83**, 012112 (2011).
- [33] D. Chruściński, A. Kossakowski y Á. Rivas. Measures of non-Markovianity: Divisibility versus backflow of information. *Phys. Rev. A* **83**, 052128 (2011).
- [34] D. Chruściński y S. Maniscalco. Degree of non-Markovianity of quantum evolution. *Phys. Rev. Lett.* **112**, 120404 (2014).
- [35] E. P. Wigner. Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions. *Ann. of Math.* **62**, 3 (1955).
- [36] T. A. Brody, J. Flores, J. B. French, P. A. Mello, A. Pandey y S. S. M. Wong. Random-matrix physics: spectrum and strength fluctuations. *Rev. Mod. Phys.* **53**, 385 (1981).

-
- [37] R. Balian. Random matrices and information theory. *II Nuovo Cimento B (1965-1970)* **57**, 1 (1968).
- [38] F. J. Dyson. A brownian-motion model for the eigenvalues of a random matrix. *J. Math. Phys.* **3**, 1191 (1962).
- [39] M. L. Mehta. *Random Matrices and the Statistical Theory of Energy Levels, 3rd Edition*. Academic Press, New York, 2004.
- [40] F. Haake. *Quantum Signatures of Chaos, 2nd. Edition*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2001.
- [41] M. Carrera. Decoherencia y efectos de memoria en un qubit acoplado a un entorno de matrices aleatorias. Tesis de Maestría, Universidad de Guadalajara (2013).
- [42] M. Carrera, T. Gorin y C. Pineda. Markovian and non-Markovian dynamics in the presence of a generic environment (no publicado).
- [43] M. Žnidarič, C. Pineda e I. G. Mata. Non-Markovian behavior of small and large complex quantum systems. *Phys. Rev. Lett.* **107**, 080404 (2011).
- [44] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling y B. P. Flannery. *Numerical Recipes in FORTRAN*. Cambridge University Press, 1992.
- [45] T. Gorin, T. Prosen, T. H. Seligman y M. Žnidarič. Dynamics of loschmidt echoes and fidelity decay. *Phys. Rep.* **435**, 33 (2006).