



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS



Instituto de Investigación en Ciencias Básicas y Aplicadas
Centro de Investigación en Ciencias

Restricciones a modelos Inflacionarios con Agujeros Negros
Primordiales

T e s i s
para obtener el título de

Licenciado en Ciencias área terminal en Física

Presenta
Sofía del Pilar Samario Nava

Director de tesis
Dra. Ariadna Montiel Arenas

Cuernavaca Morelos, diciembre 2019

AGRADECIMIENTOS

Quiero dar las gracias a mi madre Guadalupe Nava Núñez por siempre querer lo mejor para mí en todos los sentidos y en todo momento, a mi hermana Sarah Helena Samario Nava la cual me hace ver con otra perspectiva que gracias a su compañía mi vida es mejor y a mi padre Ernesto Samario Hernández que siempre intenta darme la mejor versión de él guiándome con sus consejos en cada decisión.

También y de suma importancia, quiero expresar mi gratitud a mis abuelas, Agustina Hernández Sánchez y Alberta Núñez Estrada, las cuales siempre serán un gran ejemplo para mí y el pilar de la familia que tengo, a mis abuelos Juan Nava Montellano y Jesús Samario Gutiérrez con los que he pasado buenos momentos, a mis tías y tíos que han estado ahí para ayudarme y apoyarme siempre.

También quiero reconocer la dedicación de la Dra. Ariadna Montiel Arenas y del Dr. Juan Carlos Hidalgo Cuéllar, por el tiempo prestado dándole seguimiento a este trabajo de tesis y el apoyo brindado durante todo el año, en verdad nunca pensé encontrar a alguien que se preocupara tanto por sus estudiantes hasta que los conocí.

Cabe destacar que esta tesis contó con el apoyo financiero de los proyectos PA-PIIT - UNAM IN104119 *Estudios en gravitación y cosmología* y CONACYT CB-2016-282569 *Distorsiones por desplazamiento al rojo y lentes débiles cosmológicas en relatividad*. ¡Muchas gracias por el apoyo!

Por último, quiero agradecer a Gaby, Samanta, David, Lalo, Nicolás y Dariel que con su compañía han hecho más ameno, estos cuatro años y medio. Les deseo lo mejor hoy y siempre, estoy segura que este no es un adiós, sino un hasta luego y sepan que siempre tendrán un lugar en mi mente y corazón.

RESUMEN

Recientemente los Agujeros Negros Primordiales (por sus siglas en inglés PBHs) han captado la atención de la comunidad científica debido a que son fuertes candidatos a ser los causantes de las ondas gravitacionales detectadas por LIGO. Entre los estudios recientes de estos objetos se encuentran cotas observacionales a su abundancia como candidatos a materia oscura y como perturbadores de la radiación cósmica de fondo mediante el proceso de radiación de Hawking. Dichas cotas observacionales se traducen en restricciones al espectro de fluctuaciones primordiales de baja masa.

Para esta tesis la hipótesis es que estas restricciones a la abundancia de PBHs sirven para restringir parámetros inflacionarios, partiendo de que al evaporarse completamente un PBH mediante la radiación de Hawking lo único que queda es una reliquia del tamaño de la masa de Planck.

En este trabajo se incorporan estas restricciones en forma de "priors" (información a priori) de los parámetros de inflación y se reevalúan las cotas al running del espectro de potencias de inflación, mediante estadística bayesiana, usando los métodos de Monte Carlo para construir cadenas de Markov. Esto se hace computacionalmente con el paquete MONTE PYTHON utilizando el algoritmo Metropolis-Hastings.

Finalmente con los resultados obtenidos se hace un análisis para evaluar la mejoría en la estimación de estos parámetros haciendo uso del test "figure of merit".

Índice general

| | |
|--|-----------|
| AGRADECIMIENTOS | I |
| RESUMEN | II |
| 1. INTRODUCCIÓN | 1 |
| 1.1. Universo Homogéneo e Isotrópico | 1 |
| 1.1.1. <i>Factor de escala y parámetro de Hubble</i> | 2 |
| 1.1.2. <i>Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker</i> | 3 |
| 1.1.3. <i>Tensor de Energía - Momento</i> | 5 |
| 1.1.4. <i>Ecuación de Friedmann</i> | 6 |
| 1.2. Concepto de inflación | 8 |
| 1.2.1. <i>Problema del horizonte</i> | 8 |
| 1.2.2. <i>Problema de la planitud</i> | 9 |
| 1.3. Características de la inflación primordial | 10 |
| 2. PARÁMETROS DE INFLACIÓN | 12 |
| 2.1. Campo escalar inflacionario | 15 |
| 2.2. Fluctuaciones del campo escalar | 20 |
| 2.2.1. <i>Perturbaciones en un Universo De Sitter</i> | 21 |
| 2.2.2. <i>Perturbaciones en Inflación Cuasi-De Sitter</i> | 25 |
| 2.3. Espectro primordial | 26 |
| 2.3.1. <i>Índice espectral</i> | 27 |
| 2.3.2. <i>Índice espectral a partir de una solución exacta</i> | 29 |

| | |
|--|-----------|
| 2.3.3. <i>¿Cómo se parametriza el espectro primordial de perturbaciones?</i> | 30 |
| 2.4. Fondo cósmico de microondas (CMB) | 30 |
| 2.4.1. C'_ℓ s | 32 |
| 3. AGUJEROS NEGROS PRIMORDIALES | 36 |
| 3.1. Agujeros Negros Primordiales ¿qué son y cómo se forman? | 36 |
| 3.1.1. <i>Formación de PBHs</i> | 38 |
| 3.1.2. <i>Masa de los PBHs respecto al horizonte.</i> | 42 |
| 3.1.3. <i>Radiación de Hawking</i> | 43 |
| 3.2. Relevancia cosmológica de los Agujeros Negros Primordiales. | 45 |
| 3.2.1. <i>Relíquias.</i> | 46 |
| 3.2.2. <i>Derivación de cotas.</i> | 47 |
| 3.2.3. <i>¿Cómo podemos restringir el parámetro α_s?</i> | 48 |
| 4. METODOLOGÍA | 51 |
| 4.1. Estadística Bayesiana | 51 |
| 4.2. Cadenas de Markov | 52 |
| 4.2.1. <i>Algoritmo Metropolis-Hasting</i> | 53 |
| 4.3. Monte Python | 54 |
| 4.3.1. <i>Parámetros calculados</i> | 54 |
| 4.3.2. <i>Restricciones a valores a priori en parámetros de inflación</i> | 55 |
| 5. RESULTADOS | 57 |
| 5.1. <i>Particularidades del muestreo</i> | 57 |
| 5.2. Resultados para el muestreo de DATOS LITE | 58 |
| 5.3. Resultados para el muestreo de DATOS FULL | 59 |
| 5.4. Análisis de resultados | 60 |
| 6. CONCLUSIONES | 62 |
| A. Obtención de Cotas | 66 |
| A.0.1. <i>Ecuación de la recta</i> | 68 |

Índice de figuras

| | |
|--|----|
| 3.1. Restricción obtenida con PBHs | 49 |
| 3.2. Resultados del satélite Planck 2015 | 49 |
| 3.3. Restricción esperada | 50 |
| 4.1. Parámetros calculados con FULL PLANCK. | 55 |
| 4.2. Parámetros calculados con PLANCK LITE. | 55 |
| 4.3. Líneas de código de la restricción añadida. | 56 |
| 5.1. Resultados obtenidos con PLANCK LITE. | 58 |
| 5.2. Resultados obtenidos con FULL PLANCK | 59 |
| A.1. Paquetería usada en Python | 66 |
| A.2. Arreglo usado | 66 |
| A.3. Reliquias del tamaño de la masa de Planck | 66 |
| A.4. Reliquias del tamaño de la masa de una partícula super simétrica. . . | 67 |
| A.5. Espectro de potencias evaluado con masas de Planck | 67 |
| A.6. Espectro de potencias evaluado con masas de LSP | 67 |
| A.7. Cotas mínimas de abundancias de Agujeros Negros Primordiales . . . | 67 |
| A.8. Espectro de potencias evaluado con los mínimos de las abundancias . | 67 |
| A.9. Número de onda obtenido con los mínimos de las abundancias | 68 |
| A.10. Valores de α_s obtenidos | 68 |
| A.11. Arreglo n_s | 68 |
| A.12. Valores de α_s | 68 |
| A.13. Ecuación de la recta | 69 |

Índice de tablas

| | |
|---|----|
| 5.1. Resultados obtenidos usando PLANCK LITE sin restricción de PBHs. . | 58 |
| 5.2. Resultados obtenidos usando PLANCK LITE con restricción de PBHs. | 58 |
| 5.3. Resultados obtenidos usando FULL PLANCK sin restricción de PBHs. | 59 |
| 5.4. Resultados obtenidos usando FULL PLANCK con restricción de PBHs. | 59 |

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Actualmente se tiene poca información sobre el Universo temprano, se sabe que este fue originado por partículas ultrarelativistas en la época del Big Bang, sin embargo surge la necesidad de una era de Inflación donde el Universo está dominado por un potencial escalar la cual da paso al Big Bang mediante ciertas condiciones iniciales. Todo esto se discutirá a lo largo de este capítulo, y se presentarán las bases para desarrollar parte de esta teoría.

En este capítulo al igual que en algunas partes de esta tesis, se tomará a la velocidad de la luz c igual a uno, se denota a la constante de gravitación como G y a la masa reducida de Planck como $M_{pl} = (8\pi G)^{-\frac{1}{2}}$.

1.1. Universo Homogéneo e Isotrópico

A escalas cosmológicas (más allá de 200 Mpc) se considera que el Universo es homogéneo, es decir que está uniformemente distribuido y que es isotrópico lo cual implica que tiene las mismas propiedades en todas direcciones. Con ambas definiciones se conforma el *principio cosmológico* que dice

El universo en tres dimensiones es homogéneo e isotrópico, siempre ha sido así y siempre lo será [1].

1.1.1. *Factor de escala y parámetro de Hubble*

Se define a un punto comóvil como aquel que se mueve con la expansión del Universo, si este es homogéneo e isotrópico, la distancia entre dos puntos comóviles será proporcional a un factor de escala $a(t)$, donde t es el tiempo cósmico. En la época presente el factor de escala tiene el valor de uno $a(t_0) = 1$ donde t_0 representa el tiempo al día de hoy. Dado un punto comóvil, se puede medir la distancia de este desde nuestra localización mediante la siguiente fórmula

$$r(t) = xa(t), \quad (1.1)$$

donde x respresenta la distancia comóvil la cual es igual a la distancia física en la época presente.

Usando el factor de escala se puede obtener la tasa de expansión del Universo, en cualquier época mediante el parámetro de Hubble, el cual está dado por

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.2)$$

donde a partir de ahora para mayor simplicidad se denotará a $a(t)$ como a .

Dado el parámetro de Hubble, se puede derivar el tiempo de Hubble, H^{-1} , y la distancia de Hubble, cH^{-1} , (si se toma a $c = 1$ se tiene H^{-1}), la cual también es conocida como horizonte, esta permite estimar la distancia a la que viaja la luz mientras el Universo se expande. Por otra parte también se tiene al horizonte de partículas, el cual se refiere a la distancia que la luz puede viajar desde el comienzo del Universo hasta el día de hoy y finalmente el horizonte de eventos, este se refiere a la distancia que puede viajar la luz hacia el futuro [2].

Otra variable que es importante conocer es el tiempo conforme, que es definido como

$$d\tau \equiv \frac{dt}{a(t)}, \quad (1.3)$$

de donde se sigue

$$\tau(t) = \int \frac{dt}{a(t)}. \quad (1.4)$$

Teniendo esta definición se puede obtener el parámetro de Hubble conforme \mathcal{H} , como

$$\mathcal{H} \equiv \frac{a'}{a}, \quad (1.5)$$

donde la prima denota la derivada respecto al tiempo conforme.

Por último la relación entre ambos parámetros es la siguiente [3]

$$\mathcal{H} = aH. \quad (1.6)$$

1.1.2. Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

La única métrica que nos describe un Universo con estas características de homogeneidad e isotropía es la de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker [2]. En coordenadas esféricas, se escribe como

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (1.7)$$

donde $a(t)$ es nuestro factor de escala, $d\Omega^2$ se refiere al ángulo sólido y donde la constante K representa la geometría del Universo, la cual admite distintos valores. Para un universo esférico $K = 1$, para uno plano $K = 0$ y para uno con geometría hiperbólica $K = -1$. Si se toma al factor de curvatura como nulo la métrica está dada por

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a(t)^2 [dr^2 + r^2 d\Omega^2], \quad (1.8)$$

y en forma matricial se escribe como

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Si se define γ_{ij} de la siguiente manera

$$\gamma_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin \theta \end{bmatrix}, \quad (1.10)$$

se tiene un forma más compacta para la métrica en su forma matricial

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a(t)^2 \gamma_{ij} \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

Su matriz contravariante estará representada de la siguiente manera

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a(t)^{-2} \gamma^{ij} \end{bmatrix}, \quad (1.12)$$

cabe recalcar que debido a que γ_{ij} tiene índices latinos, estos se pueden subir o bajar multiplicando por una γ_i^j la cual actúa como una delta de Kronecker, por ejemplo $\gamma_{ij} \gamma^{ij} = 3$.

Para el determinante de la matriz de la métrica se tiene

$$g \equiv \det(g_{\mu\nu}) = -a^6 \det(\gamma_{ij}), \quad (1.13)$$

por otra parte para la matriz γ_{ij} el determinante es

$$\gamma \equiv \det(\gamma_{ij}) = r^4 \sin^2 \theta. \quad (1.14)$$

Para una matriz de n dimensiones se tiene

$$g \equiv \det(g^{\mu\nu}) = \frac{1}{n!} \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \epsilon^{\beta_1 \dots \beta_n} g_{\alpha_1 \beta_1} \dots g_{\alpha_n \beta_n}, \quad (1.15)$$

si se toma una pequeña variación δg se sigue

$$\delta g = \frac{1}{n!} \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \epsilon^{\beta_1 \dots \beta_n} (\delta g_{\alpha_1 \beta_1} \dots g_{\alpha_n \beta_n} + g_{\alpha_1 \beta_1} \delta g_{\alpha_2 \beta_2} \dots g_{\alpha_n \beta_n} + g_{\alpha_1 \beta_1} \dots \delta g_{\alpha_n \beta_n}), \quad (1.16)$$

$$\text{dado que los índices son mudos} \Rightarrow \delta g = \frac{1}{(n-1)!} \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \epsilon^{\beta_1 \dots \beta_n} g_{\alpha_1 \beta_1} \dots \delta g_{\alpha_n \beta_n}.$$

De la Ec. (1.16) se tiene $g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} = \delta_\alpha^\alpha = n$, si se deriva de ambos lados, se obtiene $g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} = 0$ o equivalentemente $g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}$ con esto se puede ver que la Ec.(1.16) se obtiene multiplicando la Ec.(1.15) por $g^{\alpha-1\beta_1} \delta g_{\alpha_1 \beta_1}$, obteniendo

$$\begin{aligned} \delta g &= g g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}, \\ \delta g &= -g g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

estas últimas ecuaciones serán de utilidad más adelante.

1.1.3. *Tensor de Energía - Momento*

Una de las implicaciones de que el Universo sea homogéneo e isotrópico es que puede ser tratado como un fluido perfecto expresado de manera matemática mediante un tensor de energía - momento,

$$T_\nu^\mu = \begin{bmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{bmatrix}, \quad (1.18)$$

donde ρ es la densidad y P es la presión del fluido en su marco propio.

1.1.4. Ecuación de Friedmann

Usando la teoría de la Relatividad General, se obtiene la siguiente ecuación para la aceleración

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\rho + 3P}{6M_{pl}^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.19)$$

donde ρ es la densidad de energía del Universo, P es la presión y Λ es una constante cosmológica, aquí se ha tomado al Universo como plano.

Por otra parte, la dependencia de ρ respecto al tiempo, está dada por la ecuación de continuidad,

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P). \quad (1.20)$$

Esta es equivalente a la ley de conservación de la energía de manera adiabática, es decir $dE = -PdV$ donde $E = V\rho$ es la energía en un volumen comóvil $V \propto a^3$, lo cual está de acuerdo con un Universo isotrópico.

Por otro lado, si se considera un Universo en el cual la materia cósmica no genera presión, es decir se puede tratar como polvo, partiendo de la Ec. (1.20) se obtiene

$$\rho_{mat}a^3 = cte. \quad (1.21)$$

Ahora si se considera que el Universo está dominado por radiación, se tiene una ecuación de estado $P = \frac{\rho}{3}$, entonces de la ecuación de continuidad se obtiene

$$\rho_{rad}a^4 = cte. \quad (1.22)$$

De manera general se tiene

$$\rho a^{3(1+\omega)} = cte, \quad (1.23)$$

donde a ω se le denomina parámetro de la ecuación de estado. Cabe notar que si se tiene $\omega = -1$ la densidad será constante, lo cual corresponde al caso dominado por constante cosmológica, teniendo $\rho_\Lambda = cte$ [4].

Usando la ecuación de continuidad, la Ec. (1.19) puede ser reemplazada por la

ecuación de Friedmann,

$$H^2 = \frac{\rho}{3M_{pl}^2} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{K}{a^2}. \quad (1.24)$$

De la Ec. (1.24), se puede ver que para un valor dado del parámetro de Hubble, se obtiene una densidad crítica,

$$\rho_c = 3M_{pl}^2 H^2, \quad (1.25)$$

en la cual se ha considerado un Universo plano, sin constante cosmológica. Con esta densidad se puede definir al parámetro de densidad como $\Omega = \rho/\rho_c$ el cual se puede aplicar para cualquier tipo de materia, por ejemplo bariones o radiación. También se puede incluir la contribución de la constante cosmológica tomando $\Omega_\lambda = \lambda/3H^2$, todo esto tiene como finalidad poder escribir la contribución total como

$$\Omega_{Tot} = \Omega + \Omega_\lambda, \quad (1.26)$$

donde Ω_{Tot} es dependiente del tiempo. Sustituyendo esta ecuación en la ecuación de Friedmann obtenemos

$$\Omega_{Tot} - 1 = \frac{K}{a^2 H^2}. \quad (1.27)$$

Si $\Omega_{Tot} = 1$ tendríamos que el Universo presentaría una geometría plana.

Considerando un Universo dominado por radiación o materia la Ec. (1.24) se puede resolver fácilmente, obteniendo respectivamente

$$\rho_{rad} \propto a^{-4}, \quad a \propto t^{\frac{1}{2}} \propto \tau, \quad (1.28)$$

$$\rho_{mat} \propto a^{-3}, \quad a \propto t^{\frac{2}{3}} \propto \tau^2. \quad (1.29)$$

Las componentes observadas del Universo indican que estuvo anteriormente dominado por materia y por radiación.

Estas componentes describen al Universo estándar con una singularidad en el Big-

Bang. Sin embargo una serie de inconsistencias observadas dan pie a un complemento al modelo en tiempos tempranos: la teoría de inflación primordial.

1.2. Concepto de inflación

Inflación nace de varios problemas que no se explicaban con la teoría del Big Bang, entre ellos se encuentran el problema de la planitud y el problema del horizonte. Esto no significa que dicha teoría sea errónea, sino que pone a Inflación como un complemento que da paso a esta teoría. Fue principalmente Alan Guth quien se dedicó a presentar esta teoría inflacionaria para solucionar dichos problemas. En esta sección se describen más a detalle estos problemas [5].

1.2.1. *Problema del horizonte*

El problema del horizonte trata principalmente de las regiones que están causalmente conectadas, tomando a la edad del Universo como finita, lo que implica que la luz sólo puede viajar una distancia finita en un tiempo dado, con lo cual dado un tiempo de vida del Universo sólo se podrá ver una región de dicho Universo.

Se sabe que la luz del cielo tiene la misma temperatura de 2.725 K, lo que implica un equilibrio térmico, es decir diferentes regiones del cielo han interactuado creando dicho equilibrio. Sin embargo, no es posible que la luz que se acaba de percibir venga del lado opuesto del cielo, esto implica que no hubo tiempo para que estas dos regiones hayan estado causalmente conectadas e interactúen de alguna manera, razón por la cual entramos en una contradicción ya que no habría dicho equilibrio. Esto sugiere que a una distancia muy corta las regiones debieron interactuar y termalizarse antes de llegar a nosotros, por otra parte se sabe que el Universo primigenio era mucho más pequeño por lo tanto la luz recorre una distancia más corta haciendo imposible que dos regiones (incluso si estas son muy cercanas) puedan interactuar para entrar en equilibrio térmico.

Esto nos plantea un problema muy importante y es que el Fondo Cósmico de Microondas no es completamente isotrópico, sino que presenta pequeñas fluctuaciones

que ya han sido detectadas. Se piensa que a partir de estas fluctuaciones se ha formado el Universo y es por la misma razón que se acaba de explicar que tampoco se puede crear una irregularidad. En conclusión simplemente con la teoría del Big Bang no se puede explicar la generación de estas irregularidades [5].

1.2.2. *Problema de la planitud*

En el Universo existe una densidad total de materia cercana a la densidad crítica, se sabe que está en un rango de $0.5 < \Omega_{Tot} < 1.5$ lo cual nos indica que el Universo tiene una geometría casi plana [2].

De la Ec. (1.27) se puede ver que si el Universo es plano se tiene $\Omega_{Tot} = 1$ y esto sería válido en todo momento, de lo contrario el valor $\Omega_{Tot} - 1$ sería diferente.

Considerando una época donde el Universo está dominado por radiación, se tiene $H^2 \propto \rho_{rad} \propto a^{-4}$ insertando esto en la Ec. (1.27) se obtiene

$$\Omega_{Tot} - 1 \propto a^2. \quad (1.30)$$

Si ahora se hace el mismo procedimiento pero durante la época de materia, donde se tiene $H^2 \propto \rho_{mat} \propto a^{-3}$ se obtiene

$$\Omega_{Tot} - 1 \propto a. \quad (1.31)$$

Esto indica que en ambos casos el término $\Omega_{Tot} - 1$ disminuye al retroceder el tiempo.

Por otra parte si consideramos la época de nucleosíntesis, en la cual la temperatura tiene un valor $T_{nuc} \sim 1\text{MeV}$ se tiene

$$\frac{|\Omega_{Tot} - 1|_{T=T_{nuc}}}{|\Omega_{Tot} - 1|_{T=T_0}} \approx \frac{a_{nuc}^2}{a_0^2} \approx \frac{T_0^2}{T_{nuc}^2} \approx \mathcal{O}(10^{-16}), \quad (1.32)$$

donde el subíndice cero se ha puesto para denotar la época actual y $T_0 \sim 10^{-13}\text{GeV}$.

Se puede concluir que para obtener actualmente $(\Omega_{Tot} - 1) \sim 1$ en tiempos del Universo primigenio el valor de $\Omega_{Tot} - 1$ debe ajustarse a valores muy pequeños y cercanos a cero pero sin tomar dicho valor. Esta es la razón por la cual a este

problema también se le denomina *problema de ajuste* [4].

1.3. Características de la inflación primordial

Inflación pone solución a los problemas antes vistos de la siguiente manera

- **Para el problema de la planitud.**

Este problema se resuelve al poner como condición que Ω_{Tot} vaya acercándose a 1 en lugar de alejarse de él, en otras palabras, de la Ec. (1.27) se puede ver que es el factor de escala debe tomar un valor muy grande y el parámetro de Hubble debe ser constante.

- **Para el problema del horizonte.**

Este se puede resolver mediante una reducción de la longitud comóvil de Hubble, llevada a cabo en inflación, lo cual permite que en el Universo observable de la época presente exista una pequeña región que estaba dentro del radio de Hubble, haciendo que esta haya estado causalmente conectada.

Lo que describe principalmente a inflación es una expansión acelerada, es decir

$$\ddot{a} > 0, \quad (1.33)$$

o de manera equivalente

$$\frac{d}{dt} \frac{H^{-1}}{a} < 0, \quad (1.34)$$

donde H^{-1}/a es la distancia comóvil de Hubble, lo cual da como condición que esta decrece con el tiempo, por eso mismo usando coordenadas fijas se puede notar que el Universo debió ser más pequeño en inflación.

Empleando Relatividad General, la Ec.(1.33) se puede reescribir en términos de ρ y P , obteniendo

$$\rho + 3P < 0. \quad (1.35)$$

Debido a que la densidad de energía es siempre positiva, para satisfacer la ecuación anterior se requiere de una presión negativa, razón por la cual se propone un campo escalar $\phi(t)$ homogéneo, proporcionando materia con presión negativa. Dicho campo escalar también es conocido como Inflatón.

En el siguiente capítulo se obtendrán las ecuaciones de movimiento que este campo debe cumplir, al igual que algunos parámetros que en conjunto describen la teoría inflacionaria.

El presente trabajo considera a los agujeros negros primordiales, por sus siglas en inglés PBHs, como el producto de colapso de inhomogeneidades grandes producidas durante inflación.

Se tiene como hipótesis que las cotas observacionales a la abundancia de PBHs deben heredarse a los parámetros que definen inflación. Se mostrará la derivación de una nueva restricción a los parámetros observables propios de inflación.

La presente tesis está organizada de la siguiente manera:

- En el capítulo dos se introducen los elementos de la teoría inflacionaria necesarios para describir la formación de estructura cósmica.
- En el capítulo tres se definen y caracterizan los agujeros negros primordiales y sus poblaciones de masas específicas. Adicionalmente se presentan las cotas observacionales a los agujeros negros de masa menor.
- En el capítulo cuatro se adaptan las cotas observacionales a la abundancia de PBHs en una estimación de parámetros de inflación mediante cadenas de Markov y sobre observaciones al CMB.
- En el capítulo cinco se presentan los resultados de dicho análisis y finalmente, en el capítulo seis se exponen las conclusiones.

Capítulo 2

PARÁMETROS DE INFLACIÓN

La descripción matemática del periodo inflacionario en su versión más simple surge de la ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar. En esta sección se desarrollará la teoría inflacionaria partiendo de la acción para un campo escalar ϕ , con una energía potencial $V(\phi)$. Todo el planteamiento de esta sección es estándar, y se ha tomado de la referencia [3].

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} \equiv \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right]. \quad (2.1)$$

Al hacer pequeñas variaciones de la acción con respecto al campo, se obtiene

$$\delta_\phi S = \int d^4x \left[\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) - \sqrt{-g} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right] \delta_\phi. \quad (2.2)$$

Al hacer $\delta_\phi S = 0$ debido a que las variaciones son pequeñas, entonces de la Ec. (2.2) se obtiene

$$\square \phi = \frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad (2.3)$$

donde se usa la definición del operador covariante de D'Lambert, la cual es la siguiente

$$\square \phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi). \quad (2.4)$$

La Ec. (2.4) es la ecuación clásica para un campo escalar, la cual tiene la forma

de la ec. de Klein-Gordon.

Usando las Ecs. (1.13) y (1.14) en la Ec. (2.4)

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi). \quad (2.5)$$

La primera componente corresponde al término

$$-\ddot{\phi} - 3H\dot{\phi}. \quad (2.6)$$

Las demás componentes están dadas por

$$\frac{1}{a^2 \sqrt{\gamma}} \partial_i (\sqrt{\gamma} \partial^i \phi). \quad (2.7)$$

Al definir

$$\nabla^2 \phi \equiv \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_i (\sqrt{\gamma} \partial^i \phi), \quad (2.8)$$

se sigue

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (2.9)$$

Por otro lado, el tensor de energía, se define como

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.10)$$

donde δS está dado por

$$\delta S = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \mathcal{L} \frac{1}{\sqrt{-g}} + \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \right]. \quad (2.11)$$

Usando la Ec.(1.17), la Ec. (2.11) se transforma a

$$\delta S = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \mathcal{L} g_{\mu\nu} \sqrt{-g} + \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu}, \quad (2.12)$$

con lo cual

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \mathcal{L} g_{\mu\nu} \sqrt{-g} + \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}}, \quad (2.13)$$

y entonces, la Ec. (2.10) queda

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= \frac{-2}{\sqrt{-g}} \left[-\frac{1}{2} \mathcal{L} g_{\mu\nu} \sqrt{-g} + \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \right], \\
&= \mathcal{L} g_{\mu\nu} - 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}}, \\
&= \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) \right].
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Finalmente, la ecuación anterior se puede escribir como

$$T_\nu^\mu = g^{\alpha\mu} \partial_\alpha \phi \partial_\nu \phi - \delta_\nu^\mu \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) \right]. \tag{2.15}$$

Del tensor de Energía-Momento Ec. (1.18) en el marco comóvil de un fluido homogéneo e isotrópico, se tiene

$$\begin{aligned}
T_0^0 &= -\rho, \\
T_0^i &= T_i^0 = 0, \\
T_j^i &= \delta_j^i P.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

De la componente T_0^0 se tiene

$$\begin{aligned}
T_0^0 &= g^{\alpha 0} \partial_\alpha \phi \partial_0 \phi - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi), \\
&= -\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} a^{-2} (\nabla \phi)^2 - V(\phi),
\end{aligned} \tag{2.17}$$

las componentes $T_i^0 = T_0^i = 0$, mientras que T_j^i están dadas por

$$\begin{aligned} T_j^i &= g^{\alpha i} \partial_\alpha \phi \partial_j \phi - \delta_j^i \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \right] \\ &= \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} a^{-2} (\nabla \phi)^2 - V(\phi) \right] \delta_j^i. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Se puede ver que el campo escalar no depende del espacio, es decir, depende sólo del tiempo y eso va de acuerdo con la homogeneidad e isotropía del Universo. De los resultados anteriores se obtienen las siguientes igualdades

$$-\rho = T_0^0 = -\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} a^{-2} (\nabla \phi)^2 - V(\phi) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (2.19)$$

$$P = T_j^j = \delta_j^j \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} a^{-2} (\nabla \phi)^2 - V(\phi) \right] = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (2.20)$$

Al reescribir la ecuación de continuidad de energía usando las Ecs. (2.19) y (2.20) se obtiene,

$$\ddot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} + 3H\dot{\phi} = 0. \quad (2.21)$$

En esta sección se ha derivado la ecuación de movimiento para un campo escalar homogéneo, el cual se supone es la fuente dominante de energía que hay en el Universo.

2.1. Campo escalar inflacionario

Para que se cumpla inflación se deben de cumplir dos condiciones muy importantes, la primera es que inflación ocurre en un Universo en una etapa de de Sitter, en la que $P = -\rho$, lo que implica que inflación se lleve a cabo un periodo denominado **rodamiento lento**, en inglés *slow-roll*, esto conlleva a una segunda condición la cual es imponer un campo escalar, que se mueva lentamente hacia el mínimo de su potencial es decir, la energía potencial es más grande que la energía cinética, $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$,

si $\dot{\phi}^2$ es pequeño $\ddot{\phi}$ también lo es, con estas aproximaciones las Ecs. (2.19) y (2.20) se escriben como

$$P \approx -V(\phi) \approx -\rho. \quad (2.22)$$

Ambas dan paso a inflación de la siguiente manera, si tenemos un Universo el cual está dominado por la energía potencial de un campo escalar, el cual rueda o evoluciona lentamente, esto dará paso a una etapa de de Sitter, razón por la cual esta aproximación de rodamiento lento asegura que suceda inflación. Bajo las condiciones de la Ec. (2.22), la ecuación de movimiento (2.21) se transforma en

$$3H\dot{\phi} \approx -V'(\phi), \quad (2.23)$$

por otro lado, la ecuación de Friedmann se transforma a

$$H^2 \approx \frac{8\pi G}{3} V(\phi). \quad (2.24)$$

De ellas se obtienen los parámetros de rodamiento lento. De la ecuación (2.23)

$$H^2 \dot{\phi}^2 \propto V'^2 \Rightarrow \frac{V'^2}{H^2} \propto \dot{\phi}^2 \ll V \Rightarrow \frac{V'^2}{V} \ll H^2, \quad (2.25)$$

$$3H \frac{d\dot{\phi}}{d\phi} \approx -V' \Rightarrow 3H^2 \ddot{\phi} \approx -H\dot{\phi}V'' \Rightarrow V'' < H^2, \quad (2.26)$$

por lo tanto, estas condiciones de slow-roll pueden expresarse en parámetros de desplazamiento definidos por

$$\epsilon \equiv \frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2, \quad (2.27)$$

$$\eta \equiv M_{pl}^2 \left(\frac{V''}{V} \right), \quad (2.28)$$

donde M_{pl} es la masa reducida de Planck.

Las condiciones (2.25) y (2.26) pueden reescribirse en términos de ϵ y η usando

las Ec. (2.24) de la siguiente manera

$$\frac{V'^2}{V} \ll H^2 \Rightarrow \frac{3V'^2}{8\pi G V^2} \ll 1 \Rightarrow \epsilon \ll 1, \quad (2.29)$$

$$V'' \ll H^2 \Rightarrow 3M_{pl}^2 \frac{V''}{V} \ll 1 \Rightarrow \eta \ll 1, \quad (2.30)$$

estos parámetros por ser muy pequeños cumplen la condición de slow-roll, también son importantes debido a que indican el final de inflación una vez que fallan las condiciones derivadas en las Ecs. (2.29) y (2.30), esto permite calcular cuánto dura inflación, a través de un nuevo parámetro N llamado **número de e -folds** [4], el cual está definido como

$$N \equiv \int_{t_i}^{t_f} H dt = \int_{a_i}^{a_f} \frac{d \ln a}{dt} dt = \ln \left(\frac{a_f}{a_i} \right) \Rightarrow \exp N = \left(\frac{a_f}{a_i} \right), \quad (2.31)$$

se puede notar a partir de esta última expresión, que dicha definición va de acuerdo con el nombre.

Es posible expresar a este parámetro en términos de ϵ y η de la siguiente manera,

$$N \equiv \int_{t_i}^{t_f} H dt, \quad (2.32)$$

si se toma a $H = \frac{dt}{d\phi} d\phi = \frac{d\phi}{\dot{\phi}}$, se tiene una expresión en términos del campo escalar

$$N = \int_{\phi_i}^{\phi_f} H \frac{d\phi}{\dot{\phi}}, \quad (2.33)$$

usando las Ecs. (2.24) y (2.23), la ecuación anterior tiene la forma

$$N = -8\pi G \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V}{V'} d\phi, \quad (2.34)$$

y empelando la definición del parámetro ϵ se llega

$$N = \frac{-1}{2M_{pl}} \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{d\phi}{\epsilon^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow N \simeq \frac{\Delta\phi}{\epsilon^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{M_{pl}}. \quad (2.35)$$

Actualmente se tiene estimado que el número de e-folds está alrededor de $N = 70$ [4].

Por otra parte en la etapa cuasi de Sitter, el parámetro de Hubble no es constante, varía como el parámetro de ϵ , y esto se puede ver de la siguiente manera. Partiendo de la Ec. (2.24)

$$H^2 \approx \frac{V(\phi)}{3M_{pl}^2} \Rightarrow 2H \frac{dH}{d\phi} \approx \frac{V'(\phi)}{3M_{pl}^2}, \quad (2.36)$$

y de la Ec. (2.23)

$$\dot{\phi} \approx -\frac{V'(\phi)}{3H} \Rightarrow \frac{1}{\phi} = -\frac{3H}{V'(\phi)}, \quad (2.37)$$

usando ambas ecuaciones, se obtiene

$$\frac{dH}{d\phi} = \frac{dH}{dt} \frac{dt}{d\phi} \approx \dot{H} \left(-\frac{3H}{V'(\phi)} \right) = -\frac{3H\dot{H}}{V'}, \quad (2.38)$$

$$2H \frac{dH}{d\phi} \approx \frac{V'}{3M_{pl}^2} \Rightarrow 2H \left(-\frac{3H\dot{H}}{V'} \right) = \frac{V'}{3M_{pl}^2} \quad (2.39)$$

$$\Rightarrow -\frac{6H^2\dot{H}}{V'} = \frac{V'}{3M_{pl}^2} \Rightarrow -6H^2\dot{H} = \frac{V'^2}{3M_{pl}^2},$$

donde se ha usado para mayor simplicidad a $V'(\phi)$ como V' . Al elevar al cuadrado la ecuación de Friedmann en términos de la masa de Planck y al sustituir en la Ec. (2.39) se obtiene

$$-\frac{6\dot{H}}{H^2} \approx 3M_{pl}^2 \left(\frac{V'}{V} \right)^2. \quad (2.40)$$

En términos de ϵ la Ec. (2.40) queda

$$\dot{H} = -\epsilon H^2, \quad (2.41)$$

esto sólo es válido cuando se trata de una etapa cuasi de Sitter. En una etapa de de Sitter pura se cumpliría la igualdad $P = -\rho$ y por lo tanto $\dot{\phi} = 0$. Esto significa

que el campo escalar no tendría energía cinética y no rodaría a lo largo del potencial; entonces durante una etapa de de Sitter pura, los parámetros de rodamiento lento son nulos.

Por otra parte existe una diferencia entre el tiempo conforme y el tiempo cósmico, dependiendo de la etapa que estemos tratando (pura o cuasi de Sitter). En una etapa de de Sitter el parámetro de Hubble es constante en el tiempo por definición. Por lo tanto el factor de escala sería el siguiente

$$a(t) = e^{Ht}, \quad (2.42)$$

insertando la Ec.(2.42) en la definición del tiempo conforme obtenemos

$$\tau(t) = \int dt e^{-Ht} = \frac{-1}{H} e^{-Ht} = \frac{-1}{a(t)H}, \quad (2.43)$$

Para escribir la Ec. (2.41) en términos del tiempo conforme, se hace un cambio de variable obteniendo la siguiente ecuación

$$\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 \approx -\epsilon \mathcal{H}^2, \quad (2.44)$$

para derivar esto en una etapa cuasi de Sitter partiremos de la ecuación anterior de la siguiente manera

$$\frac{dH}{dt} = -\epsilon H^2 \Rightarrow H = \frac{1}{\epsilon t}, \quad (2.45)$$

de la definición del parámetro de Hubble y usando la Ec. (2.45) se sigue

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{\epsilon t} \Rightarrow a = t^{1/\epsilon}. \quad (2.46)$$

Insertando la Ec. (2.46) en la definición de tiempo conforme se obtiene

$$\tau(t) = \int \frac{dt}{t^{1/\epsilon}} = -\frac{1}{aH(1-\epsilon)}, \quad (2.47)$$

entonces el factor de escala o el tiempo conforme están dados por,

$$\tau(t) = -\frac{1}{a(t)H(1-\epsilon)}, \quad (2.48)$$

$$a(t) = -\frac{a}{\tau(t)H(1-\epsilon)}. \quad (2.49)$$

2.2. Fluctuaciones del campo escalar

Ahora se considerarán fluctuaciones del campo escalar, por conveniencia se harán primero en una época pura de de Sitter. Se comenzará perturbando el campo escalar, tomando una parte homogénea y otra perturbada

$$\phi(\tau, \bar{x}) = \phi(\tau) + \delta\phi(\tau, \bar{x}), \quad (2.50)$$

y asumiendo que en el régimen perturbativo $\delta\phi \ll \phi$. Por conveniencia se redefine el campo escalar como

$$\delta\tilde{\phi} = a\delta\phi. \quad (2.51)$$

Se sigue la segunda cuantización de manera estándar, por lo cual se hará uso de operadores de creación y aniquilación $a_{\bar{k}}$ y $a_{\bar{k}}^{\dagger}$, (estos cumplen las relaciones de conmutación usuales) y se vuelve a reescribir $\delta\tilde{\phi}$ como

$$\delta\tilde{\phi} = \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^{3/2}} \left[u_{\bar{k}}(\tau) a_{\bar{k}} e^{i\bar{k}\bar{x}} + u_{\bar{k}}^*(\tau) a_{\bar{k}}^{\dagger} e^{-i\bar{k}\bar{x}} \right]. \quad (2.52)$$

Debido a que ahora se está tratando con perturbaciones, es necesario hacer un cambio de variable transformando el resultado dado por la Ec. (2.9) en una ecuación que esté en términos del tiempo conforme,

$$\phi'' + 2\mathcal{H}\phi' - \nabla^2\phi = -a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}, \quad (2.53)$$

aquí se usa el resultado sin tener en cuenta que ϕ sólo depende del tiempo. Al sustituir

la Ec. (2.50) en Ec. (2.53), se obtiene el caso homogéneo analizado antes y,

$$\delta\phi'' + 2\mathcal{H}\delta\phi' - \nabla^2\delta\phi = -a^2\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}\delta\phi, \quad (2.54)$$

donde por simplicidad denotará $\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}$ como $V_{\phi\phi}$.

Despejando $\delta\phi$ de la Ec. (2.51) y sustituyendo en la Ec. (2.54) se obtiene

$$\left(\frac{1}{a}\delta\tilde{\phi}\right)'' + 2\mathcal{H}\left(\frac{1}{2}\delta\tilde{\phi}\right)' - \nabla^2\left(\frac{1}{2}\delta\tilde{\phi}\right) + aV_{\phi\phi}\delta\tilde{\phi} = 0 \quad (2.55)$$

haciendo uso de la Ec. (2.52) y de la ecuación anterior se obtiene

$$\int \frac{d^3}{(2\pi)^{3/2}} \left[u_k'' - \frac{a''}{a}u_k + k^2u_k + a^2V_{\phi\phi}u_k \right] a_{\bar{k}}e^{i\bar{k}\bar{x}} = 0, \quad (2.56)$$

aquí no se ha tomado el término hermitiano conjugado el cual contiene los modos u_k^+ , si se hiciera se tendría la misma ecuación.

De la Ec. (2.56) se observa que

$$u_k'' - \frac{a''}{a}u_k + k^2u_k + a^2V''u_k = 0. \quad (2.57)$$

Al llamar a $V_{\phi\phi}$ como m_ϕ^2 , denotando una masa efectiva, la cual corresponde a una masa de campo escalar si el potencial es $V = \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2$, se obtiene la ecuación de movimiento para los modos,

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} + m_\phi^2 a^2 \right) u_k = 0. \quad (2.58)$$

2.2.1. *Perturbaciones en un Universo De Sitter*

Al transformar la ecuación anterior a una ecuación de Bessel, esta tiene solución exacta. Primero se analizarán algunos cambios de variable y se sustituirá

$a = -(H\tau)^{-1}$ en la Ec. (2.58) para obtener

$$\frac{a''}{a} - m_\phi^2 a^2 = \frac{2}{\tau^2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m_\phi^2}{H^2} \right), \quad (2.59)$$

$$\Rightarrow u_k'' + \left[k^2 + \frac{2}{\tau^2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m_\phi^2}{H^2} \right) \right] u_k = 0.$$

Si se define la siguiente cantidad, tomándola como constante con respecto del tiempo y la insertamos en la Ec. (2.59)

$$\nu_\phi^2 = \left(\frac{9}{4} - \frac{m_\phi^2}{H^2} \right), \quad (2.60)$$

$$\Rightarrow u_k'' + \left[k^2 - \left(\frac{\nu_\phi^2 - \frac{1}{4}}{\tau^2} \right) \right] u_k = 0, \quad (2.61)$$

ahora si hacemos el siguiente cambio de variable $u_k = (-\tau)^{\frac{1}{2}} y$ y lo insertamos en el resultado anterior

$$\tau^2 y'' + \tau y' + (k^2 \tau^2 - \nu_\phi^2) y = 0, \quad (2.62)$$

con el cambio de variable $x = -k\tau$ en la Ec. (2.62) queda

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu_\phi^2) y = 0. \quad (2.63)$$

La Ec. (2.63) tiene la forma de una ecuación de Bessel cuya solución general es de la forma,

$$y(x) = C_1 H_{\nu_\phi}^{(1)}(x) + C_2 H_{\nu_\phi}^{(2)}(x), \quad (2.64)$$

donde los $H_{\nu_\phi}(x)$ son las funciones de Hankel. La Ec. (2.64) toma la forma

$$y(-k\tau) = C_1 H_{\nu_\phi}^{(1)}(-k\tau) + C_2 H_{\nu_\phi}^{(2)}(-k\tau), \quad (2.65)$$

regresando al primer cambio de variable $u_k = (-\tau)^{\frac{1}{2}}y$ finalmente se obtiene,

$$u_k(\tau) = \sqrt{-\tau} \left[C_1 \mathbf{H}_{\nu_\phi}^{(1)}(-k\tau) + C_2 \mathbf{H}_{\nu_\phi}^{(2)}(-k\tau) \right]. \quad (2.66)$$

bajo la suposición de que ν_ϕ es una constante. Esta solución es exacta, aunque hay soluciones más simples en ciertos límites de escala ya que los modos u_k tienen asociados longitudes de onda λ y dado que $k \propto \lambda$, a escalas del super horizonte las longitudes de onda son $\lambda \gg (aH)^{-1}$ ($k \ll aH$) y a escalas del sub horizonte se tiene $\lambda \ll (aH)^{-1}$ ($k \gg aH$).

De la definición de m_ϕ se tiene,

$$\frac{m_\phi^2}{H^2} = \frac{V_{\phi\phi}}{H^2}, \quad (2.67)$$

por el hecho de trabajar en una etapa de Sitter, H es una constante. Sin embargo no sucede lo mismo para $V_{\phi\phi}$, sólo será constante en algunos casos, por ejemplo si el potencial es cuadrático.

Por otra parte, en escalas del sub-horizonte $k \gg aH$ (escalas muy pequeñas), la solución para los modos debe coincidir con la solución teórica del campo en un espacio-tiempo plano, la cual es una onda plana de la forma

$$u_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\tau}. \quad (2.68)$$

A partir de la Ec. (2.43) se sigue

$$-k\tau = \frac{k}{aH} \gg 1, \quad (2.69)$$

por tanto, al usar la aproximación $-k\tau \gg 1$ siendo esta una cantidad positiva y grande, al usar el método de descenso en las representaciones integrales de las funciones, se tiene

$$\mathbf{H}_{\nu_\phi}^{(1)}(-k\tau \gg 1) \sim \sqrt{\frac{-2}{\pi k\tau}} e^{-i(x - \frac{\pi}{2}(\nu_\phi - \frac{1}{2}))}, \quad (2.70)$$

$$H_{\nu_\phi}^{(2)}(-k\tau \gg 1) \sim \sqrt{\frac{-2}{\pi k\tau}} e^{i(x - \frac{\pi}{2}(\nu_\phi - \frac{1}{2}))}, \quad (2.71)$$

y entonces, la forma asintótica de la solución es

$$u_k(\tau) = \sqrt{\frac{2}{k\pi}} \left[C_1(k) e^{-i(x - \frac{\pi}{2}(\nu_\phi - \frac{1}{2}))} + C_2 e^{i(x - \frac{\pi}{2}(\nu_\phi - \frac{1}{2}))} \right]. \quad (2.72)$$

Dado que debe coincidir con una onda plana Ec. (2.68), se establece $C_2(k) = 0$ y $C_1(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{2}(\nu_\phi + \frac{1}{2})}$ obteniendo la solución exacta

$$u_k(\tau) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}(\nu_\phi + \frac{1}{2})} \sqrt{\tau} H_{\nu_\phi}^{(1)}(-k\tau). \quad (2.73)$$

Ahora si se quiere ver la solución fuera del horizonte cosmológico ($-k\tau \ll 1$), la aproximación de las funciones de Hankel depende del valor que tome ν_ϕ . Cuando $\nu_\phi > 0$, lo cual implica que $m_\phi < \frac{3}{2}H$, las funciones de Hankel toman la forma

$$H_{\nu_\phi}^{(1)}(x) = -\frac{i\Gamma(\nu_\phi)}{\pi} \left(\frac{1}{2}x \right)^{-\nu_\phi}, \quad (2.74)$$

y con el cambio de variable $x = -k\tau$ y sustituyendo dicho resultado en la Ec. (2.73), se obtiene

$$\begin{aligned} u_k(\tau) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{2}(\nu_\phi + \frac{1}{2})} \sqrt{-\tau} \left[-\frac{i\Gamma(\nu_\phi)}{\pi} \left(-\frac{1}{2}k\tau \right)^{(-\nu_\phi)} \right], \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} e^{i\frac{\pi}{2}(\nu_\phi - \frac{1}{2})} \Gamma(\nu_\phi) \left(-\frac{1}{2}k\tau \right)^{\frac{1}{2} - \nu_\phi}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Con el cambio de variable de la Ec. (2.51) y la relación dada por la Ec. (2.43), se puede obtener la magnitud de las fluctuaciones cuánticas notando que $\delta\tilde{\phi}_k$ únicamente se representa por los modos u_k ,

$$|\delta\phi_k| = \frac{u_k}{a} = \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \Gamma(\nu_\phi) \left(\frac{k}{2aH} \right)^{\frac{1}{2} - \nu_\phi} = \sqrt{\frac{2}{\pi k^3}} H \Gamma(\nu_\phi) \left(\frac{k}{2aH} \right)^{\frac{3}{2} - \nu_\phi}. \quad (2.76)$$

Con la definición η_ϕ como una nueva pequeña cantidad $\eta_\phi \equiv m_\phi^2/3H^2$, de manera análoga que los parámetros de *slow-roll*, podemos poner el resultado anterior en términos de este nuevo parámetro expandiendo a ν_ϕ ; η_ϕ se puede escribir de la siguiente manera

$$\frac{3}{2} - \nu_\phi = \frac{3}{2} - \left(\frac{9}{4} - \frac{m_\phi^2}{H^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \left(1 + \frac{4}{3}\eta_\phi \right)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{2}{3}\eta_\phi + \dots \right) \approx \eta_\phi, \quad (2.77)$$

de donde $\Gamma(\nu_\phi) \approx \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Al insertar esto último en la Ec. (2.76) se obtiene

$$|\delta\phi_k| \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k}} H \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) \left(\frac{k}{2aH} \right)^{\frac{3}{2} - \nu_\phi} \approx \frac{1}{\sqrt{2k^3}} H \left(\frac{k}{2aH} \right)^{\frac{3}{2} - \nu_\phi}, \quad (2.78)$$

para simplificar un poco más la ecuación anterior se debe notar que $2^{\nu_\phi - \frac{3}{2}} \approx 2^{-\nu_\phi} \approx 1$, teniendo como solución

$$|\delta\phi_k| \approx \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \left(\frac{k}{aH} \right)^{\frac{3}{2} - \nu_\phi}. \quad (2.79)$$

2.2.2. *Perturbaciones en Inflación Cuasi-De Sitter*

Se debe recordar que este resultado fue derivado a partir de considerar una época pura de Sitter, sin embargo para reproducir la etapa inflacionaria es necesario un escenario Cuasi-De Sitter. Ahora se tienen las herramientas necesarias para desarrollar lo mismo pero en dicho escenario. Partiendo de la Ec. (2.58) se obtendrá una nueva ecuación.

De las Ecs. (2.43) y (2.44), se tienen las siguientes ecuaciones en términos de los parámetros de rodamiento lento,

$$\frac{a''}{a} \approx \mathcal{H}^2(2 - \epsilon), \quad (2.80)$$

$$\mathcal{H} = \frac{-1}{\tau(1 - \epsilon)}, \quad (2.81)$$

usando ambas se obtiene,

$$\frac{a''}{a} \approx \frac{2 - \epsilon}{\tau^2(1 - \epsilon)^2} \approx \frac{1}{\tau^2}(2 - \epsilon)(a + 2\epsilon + \dots) \approx \frac{1}{\tau^2}(2 + 3\epsilon), \quad (2.82)$$

recordando el valor de η_ϕ y usando la Ec. (2.82), se obtiene el término $-\frac{a''}{a} + m_\phi^2 a^2$ de la Ec. (2.58) de la siguiente manera

$$\frac{a''}{a} - m_\phi^2 a^2 = \frac{1}{\tau^2}(2 + 3\epsilon) - m_\phi^2 a^2 \approx \frac{1}{\tau^2}(2 + 3(\epsilon - \eta_\phi)), \quad (2.83)$$

definiendo a $\nu_\phi^2 \equiv \frac{3}{2} + \epsilon - \eta_\phi$ y elevando al cuadrado, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\nu_\phi^2 = \frac{9}{4} + 3(\epsilon - \eta_\phi), \quad (2.84)$$

donde se ha tomado que los parámetros ϵ y η_ϕ son pequeños. Cabe señalar que η_ϕ equivale al parámetro de *slow-roll* η en el caso de un campo sin auto-interacción, i.e. $V = \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2$. Introduciendo la Ec. (2.84) en la Ec. (2.83) se obtiene

$$\frac{a''}{a} - m_\phi^2 a^2 \approx \frac{1}{\tau^2} \left(\nu_\phi^2 - \frac{1}{4} \right), \quad (2.85)$$

e insertando el resultado anterior en la Ec. (2.58) se obtiene una ecuación igual a la obtenida para una época pura de Sitter, Ec. (2.61), de la cual ya se sabe que la solución es la Ec. (2.79).

2.3. Espectro primordial

Una cantidad que nos ayuda a cuantificar las perturbaciones es el **espectro de potencias**. Este se define a partir de perturbaciones en el espacio de Fourier, para un campo $f(t, \bar{x})$ la transformada de Fourier se define de la siguiente manera

$$f(t, \bar{x}) = \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\bar{k}\bar{x}} f_{\bar{k}}(t), \quad (2.86)$$

donde k es la magnitud de ambos valores \bar{k}_1 y \bar{k}_2 , el término $\delta^3(\bar{k}_1 - \bar{k}_2)$ es una delta de Dirac.

Así, el espectro de potencias está definido como

$$\langle f_{\bar{k}_1} f_{\bar{k}_2}^* \rangle \equiv \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(k) \delta^3(\bar{k}_1 - \bar{k}_2), \quad (2.87)$$

Entonces, usando las Ecs. (2.87) y (2.86) tenemos

$$\begin{aligned} \langle f^2(t, \bar{x}) \rangle &= \langle f(t, \bar{x}) f^*(t, \bar{x}) \rangle \\ &= \int \frac{d^3 \bar{k}_1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3 \bar{k}_2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i(\bar{k}_1 - \bar{k}_2)x} \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(k) \delta^3(\bar{k}_1 - \bar{k}_2) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{k^3} d^3 \bar{k} \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(k) = \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(k), \end{aligned} \quad (2.88)$$

para llegar a la última igualdad se ha hecho una integración alrededor de una esfera, que contribuye con un factor de 4π .

De la Ec.(2.88) se observa que $\frac{dk}{k} = d \ln k$, lo cual sugiere que el espectro de potencias es una contribución logarítmica al valor cuadrático de $f(t, \bar{x})$.

2.3.1. Índice espectral

El **índice espectral**, $(n_{\mathcal{F}}(k))$, describe la variación de la pendiente del espectro de potencias, matemáticamente se define como:

$$n_{\mathcal{F}}(k) \equiv 1 + \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{F}}}{d \ln k} = 1 + \frac{k}{\mathcal{P}_{\mathcal{F}}} \frac{d \mathcal{P}_{\mathcal{F}}}{dk}. \quad (2.89)$$

Para un campo escalar,

$$\langle \delta \phi_{\bar{k}_1} \delta \phi_{\bar{k}_2}^* \rangle = \left\langle \frac{1}{a} u_{k_1} a_{\bar{k}_1} \frac{1}{a} u_{k_2}^* a_{\bar{k}_2}^{\pm} \right\rangle = \frac{1}{a^2} \langle u_{k_1} u_{k_2}^* [a_{\bar{k}_1} a_{\bar{k}_2}^{\pm}] \rangle, \quad (2.90)$$

donde se cumple la siguiente relación $[a_{\bar{k}}, a_{\bar{k}'}^{\pm}] = \delta^3(\bar{k} - \bar{k}')$. De la ecuación anterior se

tiene

$$\langle \delta\phi_{\bar{k}_1} \delta\phi_{\bar{k}_2}^* \rangle = \frac{1}{a^2} \langle u_{k_1} u_{k_2}^* \delta^3(\bar{k}_1 - \bar{k}_2) \rangle = \frac{|u_k|^2}{a^2} \delta^3(\bar{k}_1 - \bar{k}_2), \quad (2.91)$$

pero recordando que $\frac{|u_k|^2}{a^2} = |\delta\phi_k|^2$ e igualando con la Ec. (2.87), se sigue

$$\langle f_{\bar{k}_1} f_{\bar{k}_2}^* \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(k) \delta^3(\bar{k}_1 - \bar{k}_2) = |\delta\phi_k|^2 \delta^3(\bar{k}_1 - \bar{k}_2), \quad (2.92)$$

al despejar el espectro $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(k)$ de la ecuación anterior se obtiene

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} |\delta\phi_k|^2. \quad (2.93)$$

Usando la Ec. (2.79) para perturbaciones a grandes escalas, el espectro toma la forma

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(k) = \frac{H^2}{4\pi^2} \left(\frac{k}{aH} \right)^{3-2\nu_\phi}. \quad (2.94)$$

Ahora se puede calcular el índice espectral a partir de su definición Ec. (2.89), tomando el $\ln \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(k)$ como se desarrolla a continuación

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(k) &= \ln \frac{H}{4\pi^2} + \ln \left(\frac{k}{aH} \right)^{3-2\nu_\phi}, \\ &= \ln \frac{H}{4\pi^2} + (3 - 2\nu_\phi) \ln k - (3 - 2\nu_\phi) \ln aH. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Derivamos el resultado anterior con respecto al $\ln k$ obteniendo

$$n_{\mathcal{F}}(k) - 1 = \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{F}}}{d \ln k} = (3 - 2\nu_\phi). \quad (2.96)$$

En términos de los parámetros de rodamiento lento, se tiene que $\frac{3}{2} - \nu_\phi \sim 2\eta_\phi$, entonces el índice espectral queda como

$$n_{\mathcal{F}}(k) \sim 1 + 2\eta_\phi. \quad (2.97)$$

2.3.2. Índice espectral a partir de una solución exacta

Para obtener la solución exacta, se partirá de la ecuación exacta de Klein-Gordon la cual es parecida a la ecuación derivada al inicio de esta sección, Ec. (2.58), y se realiza un procedimiento parecido al de la subsección anterior. Ahora, para perturbaciones de curvatura a grandes escalas

$$|\mathcal{Q}_\phi^{(1)}(k)| = \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \left(\frac{k}{aH} \right)^{\frac{3}{2}-\nu_\phi}, \quad (2.98)$$

donde en términos de los nuevos parámetros de *slow-roll* $\nu_\phi \sim \frac{3}{2} + 3\epsilon - \eta$.

Por otro lado se tiene el espectro de potencias para una perturbación de curvatura a grandes escalas, dado por

$$\mathcal{P}_\mathcal{R} = \left| \frac{\mathcal{H}^2}{\phi'} \right| \mathcal{P}_{\mathcal{Q}\phi}^{(1)} \quad (2.99)$$

Se hace un desarrollo de manera análoga que en la sección anterior

$$\mathcal{P}_{\mathcal{Q}\phi}^{(1)} = \frac{k^3}{2\pi^2} |\mathcal{Q}_\phi^{(1)}(k)|^2 = \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{H^2}{2k^3} \left(\frac{k}{aH} \right)^{3-2\nu_\phi} = \frac{H^2}{4\pi^2} \left(\frac{k}{aH} \right)^{3-2\nu_\phi}. \quad (2.100)$$

Y por lo tanto la Ec. (2.99) queda

$$\mathcal{P}_\mathcal{R} = \left(\frac{aH}{a\dot{\phi}} \right)^2 \frac{H^2}{4\pi^2} \left(\frac{k}{aH} \right)^{3-2\nu_\phi} = \left(\frac{H^2}{2\pi\dot{\phi}} \right)^2 \left(\frac{k}{aH} \right)^{3-2\nu_\phi}. \quad (2.101)$$

Haciendo uso de la Ec. (2.101) y de Ec. (2.89) el índice espectral queda

$$n_s - 1 = \frac{d}{d \ln k} \left(2 \ln \frac{H^2}{2\pi\dot{\phi}} + (3 - 2\nu_\phi) \ln k - (3 - 2\nu_\phi) \ln aH \right), \quad (2.102)$$

$$= 3 - 2\nu_\phi = 3 - 2 \left(\frac{3}{2} + 3\epsilon - \eta \right) = 2\eta - 6\epsilon \Rightarrow n_s = 1 + 2\eta - 6\epsilon,$$

donde se ha puesto a ν_ϕ en términos de los parámetros de *slow-roll*. A grandes escalas el índice espectral de una perturbación de curvatura tiene un valor aproximado de 0.96.

2.3.3. ¿Cómo se parametriza el espectro primordial de perturbaciones?

Generalmente el espectro de potencias de las fluctuaciones primordiales de curvatura se parametriza como:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \mathcal{A}_s \left(\frac{k}{k_0} \right)^{n_s-1}, \quad (2.103)$$

siendo una aproximación a una función de baja potencia.

Al hacer una expansión en serie de Taylor del índice espectral alrededor de k_0 se obtiene

$$n_s = n_s|_{k_0} + \alpha_s \ln \frac{k}{k_0} + \beta_s \left(\ln \frac{k}{k_0} \right)^2, \quad (2.104)$$

con

$$\alpha_s = \frac{1}{2} \left(\frac{dn_s}{d \ln k} \right) \Big|_{k_0}, \quad (2.105)$$

$$\beta_s = \frac{1}{6} \left(\frac{d^2 n_s}{d(\ln k)^2} \right) \Big|_{k_0}, \quad (2.106)$$

esta expresión es válida siempre que $\ln \frac{k}{k_0}$ sea pequeña.

Finalmente el espectro de potencias de las fluctuaciones primordiales de curvatura se escribe como

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \mathcal{A}_s \left(\frac{k}{k_0} \right)^{n_s-1+\frac{1}{2}\alpha_s \ln(\frac{k}{k_0})}, \quad (2.107)$$

donde el término $\frac{1}{2}\alpha_s \ln \frac{k}{k_0}$ es una parametrización de la amplitud de perturbaciones [6].

2.4. Fondo cósmico de microondas (CMB)

En esta sección se muestran matemáticamente las ecuaciones que describen o permiten una mejor comprensión de lo que se observa del Fondo Cósmico de Microondas o por sus siglas en inglés CMB. En toda esta sección se ha hecho uso de la referencia

[7].

La radiación es una manifestación de las perturbaciones primordiales debidas a inflación. Para entender dichas perturbaciones de fotones, se pueden hacer predicciones mediante el espectro de anisotropías haciendo uso de las ecuaciones de Einstein-Boltzmann.

Antes de la etapa de recombinación, los fotones estaban estrechamente acoplados tanto a electrones como a protones, lo cual permite que se puedan describir como un fluido único. Después de recombinación, los fotones fluyen libremente desde lo que se denomina superficie de última dispersión.

Las perturbaciones de los fotones crecen de manera más lenta que las perturbaciones de la materia, esto es debido a que la presión de los fotones es muy grande, lo cual hace que resista la tendencia al colapso y por lo tanto, las pequeñas perturbaciones formadas en inflación permanecen lineales hasta la época actual.

Para transformar dichas perturbaciones en predicciones del espectro de anisotropías, se necesita una solución más formal. Para los momentos de los fotones hoy $\Theta_l(\eta_0)$ en términos del monopolo y el dipolo ya que estos predominan en el límite de acoplamiento fuerte, dicha solución es la siguiente:

$$\begin{aligned} \Theta_l(k, \eta_0) \approx & [\Theta_0(k, \eta_*) + \Psi(k, \eta_*)] j_l[k(\eta_0 - \eta_0)] + \\ & 3\Theta_1(k, \eta_*) \left(j_{l-1}[k(\eta_0 - \eta_*)] - \frac{(l-1)j_l[k(\eta_0 - \eta_*)]}{k(\eta_0 - \eta_*)} \right) + \\ & \int_0^{\eta_0} d\eta e^{-\tau} [\dot{\Psi}(k, \eta) - \dot{\Phi}(k, \eta)] j_l[k(\eta_0 - \eta)], \end{aligned} \quad (2.108)$$

donde j_l es la función de Bessel esférica y se ha supuesto que recombinación tuvo lugar en un η_* y hasta el día de hoy en η_0 y τ es definida como la tasa de integración de un η a η_0 .

De la Ec. (2.108) se observa que para resolver las anisotropías al día de hoy únicamente se necesita conocer el monopolo (Θ_0), el dipolo (Θ_1) y el potencial (Ψ)

en recombinación.

Analizando más a detalle el término del monopolo, en especial la función Bessel esférica, esta determina la contribución de la anisotropía a una escala angular l^{-1} debida a una onda plana con un número de onda k . A escalas pequeñas se tiene

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} j_l(x) = \frac{1}{l} \left(\frac{x}{l} \right)^{l-\frac{1}{2}}, \quad (2.109)$$

y se puede ver que a escalas grandes de l , la función es muy pequeña si $x < l$, lo cual lleva a que $\Theta_l(k, \eta_0)$ es demasiado cercano a cero para $l > k\eta_0$.

Las perturbaciones que contribuyen son solo aquellas cuyo número de onda es del orden $l \sim k\eta_0$.

Como se habrá notado, la anisotropía final no sólo depende de Θ sino también de un potencial Ψ debido a que estos tuvieron que “escalar” barreras de potencial para poderlos ver hoy en día.

2.4.1. C'_ℓ s

La temperatura del Universo al día de hoy está dada por:

$$T(\bar{a}, \hat{p}, \eta) = T(\eta)[1 + \Theta(\bar{a}, \hat{p}, \eta)], \quad (2.110)$$

dicha expresión es conocida como **campo de temperatura**, donde el único control que se tiene sobre las anisotropías es la dependencia de la trayectoria de los fotones entrantes (\hat{p}), a medida que esta cambia produce cambios de temperatura, los cuales son lo que se observa del CMB. Dicha trayectoria está dada en coordenadas polares θ y ϕ , lo que nos lleva a poner la parte dependiente de \hat{p} de la Ec. (2.110) en términos de armónicos esféricos, obteniendo

$$\Theta(\bar{a}, \hat{p}, \eta) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}(\bar{x}, \eta) \mathcal{Y}_{\ell m}(\hat{p}), \quad (2.111)$$

donde los $\mathcal{Y}_{\ell m}$'s son los armónicos esféricos y toda la información del campo está contenida en las $a_{\ell m}$'s.

Para poder relacionar las $a_{\ell m}$'s con los Θ_{ℓ} 's se multiplican ambos lados de la ecuación anterior por los $\mathcal{Y}_{\ell m}$ y usando la ortogonalidad de estos es posible despejar a las $\mathcal{Y}_{\ell m}$'s obteniendo

$$a_{\ell m}(\bar{x}, \eta) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \exp(i\bar{k} \cdot \bar{x}) \int d\Omega \mathcal{Y}_{\ell m}^*(\hat{p}) \Theta(\bar{k}, \hat{p}, \eta), \quad (2.112)$$

donde se ha usado la transformada de Fourier ($\Theta(\bar{k})$).

Por otra parte se sabe que el valor medio de las $a_{\ell m}$'s es cero, mientras que su varianza será distinta de cero, es decir

$$\langle a_{\ell m} \rangle = 0, \quad (2.113)$$

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell m}^* \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} C_{\ell}, \quad (2.114)$$

donde a la varianza se le denomina C_{ℓ} . Por otra parte, mientras menos ℓ 's se midan (por ejemplo con $\ell = 2$, se miden cinco $a_{\ell m}$'s) se produce una incertidumbre en la información que se puede obtener, la cual sería mayor a bajas ℓ 's, a dicha incertidumbre se le denomina **varianza cósmica** (V.C.), la cual está dada por

$$\left(\frac{\Delta C_{\ell}}{C_{\ell}} \right)_{\text{v.c.}} = \sqrt{\frac{2}{2\ell + 1}}. \quad (2.115)$$

Entonces para obtener las C_{ℓ} 's se eleva al cuadrado la Ec. (2.112) y se toma el valor de expectación, para el cual es necesario calcular primero $\langle \Theta(\bar{k}, \hat{p}) \Theta^*(\bar{k}, \hat{p}) \rangle$, cabe aclarar que hay una dependencia con η , pero esta se ha tomado como implícita. Este valor de expectación depende de dos fenómenos: el primero se trata de la amplitud y fase de las perturbaciones, el cual se elige de una distribución gaussiana fijada en inflación y el segundo fenómeno aparece al transformar las perturbaciones en anisotropías, ya que se produce una dependencia con \hat{p} , por estas razones es conveniente separar estos dos fenómenos y escribir a esta distribución como $\delta \times (\Theta/\delta)$ donde Θ/δ

no depende de la amplitud inicial, entonces se obtiene:

$$\langle \Theta(\bar{k}, \hat{p}) \Theta^*(\bar{k}, \hat{p}) \rangle = \langle \delta(\bar{k}) \delta^*(\bar{k}') \rangle \frac{\Theta(\bar{k}, \hat{p}) \Theta^*(\bar{k}', \hat{p})}{\delta(\bar{k}) \delta^*(\bar{k}')}. \quad (2.116)$$

Por otra parte, para poner a la ecuación anterior en términos del espectro de potencias de materia se hace uso de la siguiente igualdad

$$\langle \delta(\bar{k}) \delta^*(\bar{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\bar{k} - \bar{k}') P(k), \quad (2.117)$$

la cual se introduce en la Ec. (2.116), obteniendo

$$\langle \Theta(\bar{k}, \hat{p}) \Theta^*(\bar{k}, \hat{p}) \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\bar{k} - \bar{k}') P(k) \frac{\Theta(\bar{k}, \hat{p}) \Theta^*(\bar{k}', \hat{p})}{\delta(\bar{k}) \delta^*(\bar{k}')}, \quad (2.118)$$

donde la evolución de δ y Θ depende sólo de \bar{k} y del producto punto de \hat{k} con \hat{p} .

Insertando estos resultados la ecuación para las C_ℓ 's queda como

$$C_\ell = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} P(k) \int d\Omega \mathcal{Y}_{\ell m}(\hat{p}) \frac{\Theta(k, \hat{k} \cdot \hat{p})}{\delta(k)} \int d\Omega' \mathcal{Y}_{\ell m}(\hat{p}') \frac{\Theta^*(k, \hat{k}' \cdot \hat{p}')}{\delta^*(k)}. \quad (2.119)$$

Por otra parte, para el ℓ -ésimo momento multipolar se tiene

$$\Theta_\ell \equiv \frac{1}{(-i)^\ell} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_\ell(\mu) \Theta(\mu), \quad (2.120)$$

donde \mathcal{P}_ℓ corresponde al polinomio de Legendre de orden ℓ . De la Ec.(2.120) se tiene para $\Theta(k, \hat{k} \cdot \hat{p})$ lo siguiente

$$\Theta(k, \hat{k} \cdot \hat{p}) = \sum_{\ell} (-i)^\ell (2\ell + 1) \mathcal{P}_\ell(\hat{k} \cdot \hat{p}) \Theta_\ell(k), \quad (2.121)$$

sustituyendo la Ec. (2.121) en la Ec. (2.119) y poniendo a $\Theta(k, \hat{k} \cdot \hat{p}')$ en términos de

los armónicos esféricos se obtiene

$$\begin{aligned}
C_\ell = & \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P(k) \sum_{\ell'\ell''} (-i)^{\ell'} (i)^{\ell''} (2\ell + 1) \frac{\Theta_{\ell'}(k) \Theta_{\ell''}^*(k)}{|\delta(k)|^2} \\
& \times \int d\Omega \mathcal{P}_{\ell'}(\hat{k} \cdot \hat{p}) \mathcal{Y}_{\ell m}^*(\hat{p}) \int d\Omega' \mathcal{P}_{\ell''}(\hat{k} \cdot \hat{p}') \mathcal{Y}_{\ell m}(\hat{p}'),
\end{aligned} \tag{2.122}$$

simplificando la ecuación anterior con algunas propiedades de las integrales, se obtiene

$$C_\ell = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 P(k) \left| \frac{\Theta_\ell(k)}{\delta(k)} \right|^2. \tag{2.123}$$

Esta definición como se verá más adelante sirve para entender y diferenciar los conjuntos de datos usados en la presente tesis ya que provienen de las observaciones del CMB hechas por el satélite Planck.

Capítulo 3

AGUJEROS NEGROS PRIMORDIALES

En este capítulo se hablará de algunas propiedades de los Agujeros Negros Primordiales, por sus siglas en inglés PBHs, también se muestran las restricciones a la abundancia de estos y posteriormente se analiza cómo se pueden obtener restricciones para parámetros propios de inflación como el índice espectral y el running (α_s o también conocido como n_{sk}) del cual hasta ahora no se tiene un valor establecido. Por último se obtiene una nueva restricción para dichos parámetros. Para una mejor comprensión en este capítulo se denota a la velocidad del sonido como c_s y a la velocidad de la luz como c .

3.1. Agujeros Negros Primordiales ¿qué son y cómo se forman?

Los **Agujeros Negros Primordiales** son un tipo de agujero negro que debió de haberse formado en el universo temprano a partir de inhomogeneidades primordiales [8].

En un universo dominado por radiación la ecuación de Friedmann se escribe como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{rad}, \quad (3.1)$$

y el radio de Hubble es

$$r_H = \frac{c}{H}, \quad (3.2)$$

con lo cual se obtiene:

$$r_H^3 = \left(\frac{8\pi G}{3} \rho_{rad} \right)^{-\frac{3}{2}} c^3, \quad (3.3)$$

de la ecuación para la densidad de radiación, se puede despejar la masa del horizonte e insertando el resultado de la Ec. (3.3) se obtiene

$$M_H = r_H^3 \rho_{rad} \frac{4}{3} \pi = \frac{c^3}{2 \left(\frac{8\pi G \rho_{rad}}{3} \right)^{\frac{1}{2}} G}, \quad (3.4)$$

por lo tanto la densidad es lo que determina completamente la masa del horizonte y escalan de manera inversa.

Por otra parte se tiene la fórmula para el radio de Schwarzschild, este describe el radio de un agujero negro, al tomar la masa del horizonte y sustituir la Ec. (3.4) se tiene

$$r_{Sch}^H = \frac{2M_H G}{c^2} = \frac{c}{\left(\frac{8\pi G \rho_{rad}}{3} \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.5)$$

Si se realiza el cociente entre el r_{Sch}^H y el r_H obtenidos, se encontrará que son lo mismo. Lo cual tiene una interpretación interesante, ya que al igual que la luz no puede salir de un agujero negro, una señal de luz externa no puede entrar al horizonte cosmológico debido a la expansión acelerada del Universo o visto de otra manera el horizonte cosmológico representa una región causalmente desconectada del exterior.

Ahora usando el radio de Schwarzschild de un agujero negro con una masa M se tiene:

$$\rho_{BH} = \frac{M}{\frac{4\pi}{3} r_{Sch}^3} = \frac{3c^6}{32\pi G^3 M^2}, \quad (3.6)$$

por lo tanto, se puede notar que para formar agujeros negros cada vez menos masivos se requiere de densidades cada vez mayores. Algunos ejemplos de esto son:

$$\begin{aligned}\rho(M = 1 \times 10^{15} \text{ g}) &= (7.49 \times 10^8 \text{ GeV})^4, \\ \rho(M = 1 \text{ g}) &= (2.37 \times 10^{16} \text{ GeV})^4.\end{aligned}$$

3.1.1. Formación de PBHs

Partiendo de la ecuación de evolución de perturbaciones de densidad

$$-\frac{d^2\Delta}{dt^2} - 2H\frac{d\Delta}{dt} = -\frac{c^2\omega}{a^2}\nabla_c^2\Delta - 4\pi G\bar{\rho}\Delta, \quad (3.7)$$

donde Δ se refiere a un contraste de densidad, es decir $\delta\rho/\rho$ y ∇_c es el gradiente comóvil.

Para una ecuación de onda se tiene

$$\Delta = \Delta_0 \exp [i(k_c \cdot \hat{r} - \mathcal{W}t)], \quad (3.8)$$

donde k_c se refiere al número de onda comóvil. En términos de la transformada de Fourier, la ecuación anterior queda

$$\Delta = \tilde{\Delta}(k, t) \exp (ik_c \cdot \hat{r}). \quad (3.9)$$

Sustituyendo la Ec. (3.9) en la Ec. (3.7) se tiene

$$\frac{d^2\tilde{\Delta}}{dt^2} + 2H\frac{d\tilde{\Delta}}{dt} = -\frac{c^2\omega}{a^2}k_c^2\tilde{\Delta} - 4\pi G\bar{\rho}\tilde{\Delta}, \quad (3.10)$$

donde el primer término a la derecha de la igualdad es debido a la presión y el segundo a la gravedad.

En un espacio estático la Ec. (3.10) tiene como solución

$$\tilde{\Delta} = \Delta_0 \exp [i(k_c \cdot \hat{r} - \mathcal{W}t)], \quad (3.11)$$

donde Δ_0 representa un contraste de densidad inicial. Sustituyendo la solución en la Ec. (3.10) se obtiene

$$-\mathcal{W}^2 \Delta_0 = -\frac{c^2 \omega}{a^2} k_c^2 \Delta_0 + 4\pi G \bar{\rho} \Delta_0. \quad (3.12)$$

Por otra parte, se tiene que el número de onda comóvil es $k_c = ak$, con lo que la Ec. (3.12) queda como

$$\mathcal{W}^2 = c^2 \omega k^2 - 4\pi G \hat{\rho}, \quad (3.13)$$

esta última ecuación es conocida como una relación de dispersión.

Cabe mencionar que el análisis presentado corresponde a una onda de densidad (o presión) propagándose en un medio homogéneo y estático, donde hay equilibrio entre la presión y la gravedad.

De la Ec. (3.13) se analizan tres casos, el primero corresponde a cuando $c_s^2 k^2 > 4\pi G \rho$, aquí la inhomogeneidad será estable; el segundo es cuando $c_s^2 k^2 < 4\pi G \rho$ en este caso la inhomogeneidad presenta una inestabilidad y el tercer caso se refiere a un punto de transición, el cual se presenta cuando

$$k_J = \frac{\sqrt{4\pi G \bar{\rho}}}{c_s} = \frac{2\pi}{\lambda_J}, \quad (3.14)$$

donde k_J representa el número de onda de Jeans y λ_J se refiere a la longitud de onda de Jeans. Esto es útil ya que permite saber las condiciones para la formación de PBHs.

Debido a que en épocas tempranas dominaba radiación, la longitud de onda de Jeans sería la siguiente:

$$\lambda_J = c_s \left(\frac{3\pi}{8G\rho_{rad}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.15)$$

donde c_s es la velocidad del sonido, para la cual se sabe $c_s^2 = \omega c^2$, en el caso de radiación $\omega = \frac{1}{3}$. La escala de Jeans indica el tamaño mínimo de configuraciones que son gravitacionalmente inestables teniendo como resultado la siguiente relación entre

ambas. Por lo tanto la Ec. (3.15) queda

$$\lambda_J = c \left(\frac{3\pi^2}{3(8\pi G \rho_{rad})} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.16)$$

y si se sustituye en la ecuación anterior la Ec. (3.1) se obtiene

$$\lambda_J = \frac{c}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{H} \right) = c_s \left(\frac{\pi}{H} \right). \quad (3.17)$$

Partiendo de la definición del radio del horizonte, tomándolo de un tiempo inicial $t_0 = 0$ hasta un tiempo t se obtiene

$$r_H = ac \int_0^t \frac{1}{a(t)} dt = ac \int_0^a \frac{dt}{da} \frac{da}{a} = ac \int_0^a \frac{da}{a^2 H}. \quad (3.18)$$

Por otra parte, dado que nos encontramos en un universo dominado por radiación ($\omega = \frac{1}{3}$) se tiene, a partir de la ecuación de Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{rad} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+\omega)}, \quad (3.19)$$

entonces sustituyendo la Ec. (3.19) en la Ec. (3.18) se llega a

$$r_H = H_0^2 \Omega_{rad}^0 a^{-4}. \quad (3.20)$$

Si tomamos un tiempo inicial arbitrario se tiene que

$$H^2 = \rho_i = \left(\frac{a}{a_i} \right)^{-4} \frac{8\pi G}{3}, \Rightarrow H_i = \rho_i^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a_i}{a} \right)^2 \left(\frac{8\pi G}{3} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.21)$$

integrando de la misma manera que se hizo en la Ec. (3.18), sólo que esta vez tomando el tiempo inicial y usando el resultado de la Ec. (3.21) se obtiene,

$$r_H = ac \int_0^a \frac{da}{\left(\frac{8\pi G}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \rho_i^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^2 c}{H_i a_i^2}. \quad (3.22)$$

Por otra parte se tiene la siguiente relación

$$a = a_i \left(\frac{t}{t_i} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.23)$$

de la cual se puede obtener el parámetro de Hubble por definición, de la siguiente manera

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t}, \quad (3.24)$$

donde a está dada por la Ec. (3.23) y H_i por

$$H_i = \frac{1}{2} \frac{1}{t_i}, \quad (3.25)$$

y por tanto la Ec. (3.22) se escribe como

$$r_H = \frac{c}{H_i} \left(\frac{t}{t_i} \right). \quad (3.26)$$

Sustituyendo la Ec. (3.25) en la Ec. (3.26) se tiene que

$$r_H = \frac{ca_i^2(t/t_i)}{\frac{1}{2} \frac{1}{t_i} a_i^2} = 2ct. \quad (3.27)$$

Por otra parte, el radio de Jeans es el siguiente

$$r_J = \frac{\lambda_J}{2} = \frac{c}{2\sqrt{3}H} \pi, \quad (3.28)$$

y al escribir a H como $(2t)^{-1}$, en la Ec. (3.28) se obtiene

$$r_J = \frac{\pi}{\sqrt{3}} ct = 1.81 ct. \quad (3.29)$$

En particular para formar PBHs se requiere que se cumpla que

$$r_J < r_{BH} < r_H, \quad (3.30)$$

entonces de los resultados dados por las Ecs. (3.29) y (3.27) se puede ver que se cumple

la condición para que suceda el colapso gravitacional, lo cual implica $r_{pert} \sim 2ct = r_H$.

Una última condición requerida al momento del cruce del horizonte de Hubble es la siguiente

$$\omega = \delta_{crit} < \delta_{CH} = \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} < 1, \quad (3.31)$$

por lo tanto, los PBHs se forman cuando las perturbaciones son de amplitud δ suficientemente grande y del orden del horizonte. Por otra parte se sabe que la probabilidad de formar estructura requiere de una amplitud δ_{crit} (delta-crítica), la cual representa la fracción de materia en forma de objetos que colapsan cuando alcanzan este valor. Para PBHs $\delta_{crit} = \frac{1}{3}$ [6, 9].

Es importante mencionar que, como demostró Hawking, los PBHs no pueden crecer al mismo ritmo que el horizonte, esto es

$$\frac{dr_H}{dt} > \frac{dr_{SCH}}{dt}, \quad (3.32)$$

esto también fue demostrado con argumentos hidrodinámicos.

3.1.2. Masa de los PBHs respecto al horizonte.

La masa de un agujero negro primordial es muy parecida a la masa del horizonte:

$$M_{PBH} \sim M_H = \frac{4}{3}\pi\rho r_H^3, \quad (3.33)$$

partiendo de esto, se tiene [10]

$$M_H = \frac{4\pi\rho}{3} \left(\frac{c}{H}\right)^3 = \frac{H^2}{2G} \left(\frac{c}{H}\right)^3 = \frac{c^3 t}{G} \simeq 10^{15} \text{g} \left(\frac{t}{10^{-23} \text{s}}\right), \quad (3.34)$$

por ejemplo si un agujero negro primordial se forma durante radiación a un tiempo $t = 10^{-23} \text{s}$ este tendrá una masa alrededor de $M = 10^{15} \text{g}$.

Así que se asumirá que la masa de PBHs es una fracción fija f_M de la masa del horizonte, la cual tiene un valor $f_M \simeq \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ [9].

3.1.3. Radiación de Hawking

Los PBHs por ser pequeños y estables son los únicos que se evaporan por emisión de radiación de energía térmica, este proceso es llamado **radiación de Hawking**, el cual se desarrollará siguiendo la referencia [11].

Se tiene que la temperatura de un agujero negro es la siguiente

$$T_{BH} = \frac{\hbar c^3}{8\pi G K_B M} \approx \left(\frac{1.22 \times 10^{23} \text{ kg}}{M_{BH}} \right) \text{ K} = 6.169 \times 10^{-8} \text{ K} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-1}. \quad (3.35)$$

Esto hace que se evaporen completamente en un tiempo

$$t_{ev} = \frac{5120\pi G^2 M_0^3}{\hbar c^4}, \quad (3.36)$$

donde M_0 es la masa de un agujero negro.

Para demostrar esto por simplicidad se considera a un agujero negro de Schwarzschild que no gira, que no está cargado y que tiene una masa M .

El Radio de Schwarzschild está dado por

$$r_{Sch} = \frac{2GM}{c^2}, \quad (3.37)$$

y la aceleración debida a la gravedad en el horizonte de eventos es

$$g = \frac{GM}{r_{Sch}^2}. \quad (3.38)$$

Al sustituir la Ec.(3.37) en la Ec. (3.38) se obtiene

$$g = \frac{c^4}{\pi GM}. \quad (3.39)$$

La radiación de Hawking que presenta un espectro de cuerpo negro, el cual tiene una temperatura T , estará dado por

$$E = K_B T = \frac{\hbar}{2\pi c} g. \quad (3.40)$$

Sustituyendo el resultado obtenido por la Ec. (3.39) en la Ec. (3.40), se obtiene la temperatura de Hawking

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M K_B}. \quad (3.41)$$

Ahora, haciendo uso de la ley de energía de Stefan-Boltzmann, Ec. (3.42), de la constante de Stefan-Boltzmann, Ec. (3.43), del área de una esfera que tiene como radio r_{Sch} , Ec. (3.44), y tratando a un agujero negro como un cuerpo negro perfecto, es decir $\epsilon = 1$

$$P = A_s j^* = A_s \epsilon \sigma T^4, \quad (3.42)$$

$$\sigma = \frac{\pi^2 K_B^4}{60 \hbar^3 c^2}, \quad (3.43)$$

$$A_s = \frac{16\pi G^2 M^2}{c^4}, \quad (3.44)$$

se obtiene la derivación de la ley de energía de radiación de los agujeros negros de Stefan - Boltzmann - Schwarzschild - Hawking

$$P = \frac{\hbar c^6}{15,360\pi G^2 M^2}. \quad (3.45)$$

Por simplicidad para el siguiente análisis se define una constante de evaporación como $k_{ev} = \frac{\hbar c^6}{15,360\pi G}$. Por otro lado, la potencia es la tasa de pérdida de energía dada por

$$P = -\frac{dE}{dt} = \frac{k_{ev}}{M^2}, \quad (3.46)$$

y al utilizar la Ec. (3.45) en la definición anterior se obtiene

$$P = -\frac{dE}{dt} = -\frac{d}{dt}(Mc^2), \quad (3.47)$$

$$\Rightarrow -c^2 \frac{dM}{dt} = \frac{k_{ev}}{M^2} \Rightarrow M^2 dM = -\frac{k_{ev}}{c^2} dt.$$

Integrando desde una masa inicial M_0 hasta evaporarse por completo, tomando

que esto sucede en un tiempo inicial igual a cero hasta un tiempo de evaporación t_{ev} finalmente se logra obtener

$$\int_{M_0}^0 M^2 dM = -\frac{k_{ev}}{c^2} \int_0^{t_{ev}} dt \quad (3.48)$$

$$\Rightarrow t_{ev} = \frac{M_0^3 c^2}{3k_{ev}} = \left(\frac{c^2 M_0^3}{3} \right) \left(\frac{15,360\pi G^2}{\hbar c^6} \right) = \frac{5,120\pi G^2 M_0^3}{\hbar c^4}. \quad (3.49)$$

3.2. Relevancia cosmológica de los Agujeros Negros Primordiales.

Se define a la abundancia de PBHs como la fracción de la masa del Universo que entró en forma de PBH en una escala de masa M [6].

$$\beta(M_{PBH}) \equiv \left(\frac{\rho_{PBH}^i}{\rho_{crit}^i} \right), \quad (3.50)$$

donde i denota en valor inicial y ρ_{crit} es la densidad crítica [10, 9], en este caso la ρ_{crit}^i está dominada por radiación.

Si tomamos las perturbaciones iniciales como gaussianas, la distribución de probabilidad para un contraste de densidad:

$$P(\delta(R_M)) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(R_M)} \right) \exp\left(\frac{-\delta^2(R_M)}{2\sigma^2(R_M)} \right). \quad (3.51)$$

donde $\sigma(R_M)$ se refiere a la varianza de materia a una masa dada, la cual se definirá más adelante.

Utilizando la teoría de Press-Schechter, se calcula la abundancia inicial de PBHs como:

$$\beta(M_{PBH}) = 2f_M \int_{\delta_{crit}}^1 P(\delta(R_M)) d\delta(R_M) \sim f_M \operatorname{erfc} \left(\frac{\delta_{crit}}{\sqrt{2}\sigma(R_M)} \right), \quad (3.52)$$

la cual permite calcular la relación entre la abundancia inicial de PBHs y la varianza

de materia a una masa dada [10].

Por otro lado, la varianza de masa se escribe como:

$$\sigma^2(R) = \int_0^\infty \exp(-k^2 R^2) \mathcal{P}_\delta(k) \frac{dk}{k}. \quad (3.53)$$

Para traducir esto al espectro de potencias de curvatura, se utiliza la correspondencia:

$$\mathcal{P}_\delta(k) = \frac{16}{3} \left(\frac{k}{aH} \right)^2 j_i^2 \left(\frac{k}{\sqrt{3}aH} \right) \mathcal{P}_\mathcal{R}(k), \quad (3.54)$$

insertando la ecuación anterior en la Ec. (3.53) y al fijar $R = \frac{1}{aH}$ se tiene

$$\sigma^2(R) = \frac{16}{3} \int_0^\infty \exp(-k^2 R^2) (kR)^2 j_i^2 \left(\frac{kR}{\sqrt{3}} \right) \mathcal{P}_\mathcal{R}(k) \frac{dk}{k}, \quad (3.55)$$

donde j_i es la función Bessel esférica y \mathcal{R} es la perturbación primordial de curvatura con lo cual la integral está dominada alrededor de $k \sim R^{-1}$ [10].

A continuación se describen cotas observacionales a $\beta(M)$ en el extremo de bajas masas, todas estas son cotas teóricas dado que la evaporación de PBHs aún no ha sido contrastada experimentalmente.

3.2.1. *Relíquias.*

Lo último que quedaría después de evaporarse un PBH es una partícula supersimétrica la más ligera del modelo estándar o una reliquia del tamaño de la masa de Planck. Si estas son estables pasan a ser componentes de la materia oscura fría, con la restricción de no exceder la densidad de materia oscura observada [10].

3.2.1.1. *Relíquias del tamaño de la masa de Planck.*

Si los PBHs al evaporarse dejan reliquias estables del tamaño de la masa de Planck y el recalentamiento es producido a una temperatura T_R , entonces para que cumplan

con la condición de tener menor densidad crítica de materia oscura se impone [12]

$$\beta(M) < 1.0257 \times 10^{-28} k^{-1} \left(\frac{M}{M_{pl}} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (3.56)$$

para un rango de masa

$$\left(\frac{T_R}{T_{pl}} \right)^{-2} < \left(\frac{M}{M_{pl}} \right) < 10^{11} k^{\frac{2}{5}}. \quad (3.57)$$

3.2.1.2. *Partícula supersimétrica*

Para no exceder la densidad de materia oscura observada en la actualidad se tiene la siguiente restricción:

$$\beta(M) \leq 1.2821 \times 10^{-18} \left(\frac{M}{10^{-11} g} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{m_{LSP}}{100 GeV} \right)^{-1}, \quad (3.58)$$

para masas,

$$M \leq 10^{11} \left(\frac{m_{LSP}}{100 GeV} \right)^{-1}, \quad (3.59)$$

la cual al depender de la masa de la partícula supersimétrica, se tendrá una incertidumbre considerable [12].

3.2.2. *Derivación de cotas.*

Se usarán estas restricciones para transformarlas a restricciones del espectro de potencias de curvatura primordial mediante la siguiente equivalencia

$$\left(\frac{M}{M_{eq}} \right) = f_M \left(\frac{g_{eq}}{g} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{k_{eq}}{k} \right)^2, \quad (3.60)$$

donde $M_{eq} = 1.3 \times 10^{49} (\Omega_m^0 \hbar^2)^{-2}$ g, $g_{eq} \simeq 3$, $k_{eq} = 0.07 \Omega_m^0 \hbar^2 \text{Mpc}^{-1}$ y $g = 106.75$, k es el número de onda asociado a las perturbaciones de masa M [10].

3.2.3. ¿Cómo podemos restringir el parámetro α_s ?

El objetivo de esta tesis es restringir el parámetro α_s (n_{sk}) con las restricciones a la abundancia de agujeros negros primordiales tomando en cuenta las restricciones antes vistas e incluyendo la cantidad de la materia oscura que hay hoy en día. Además se acotarán y, en el mejor de los casos, se excluirán modelos inflacionarios.

Partiendo de las Ecs. (3.57) y (3.59) con un rango de masas tanto para reliquias del tamaño de la masa de Planck como para partículas supersimétricas, transformándolas a través de la Ec. (3.60) a números de onda, con ellas se obtuvo el radio R . Por otro lado, del mismo rango de masas se obtuvieron restricciones a la abundancia de PBHs, Ecs. (3.56) y (3.58), que nos dan a su vez restricciones a la varianza, Ec. (3.52). Conociendo todo esto, se obtienen restricciones al espectro de potencias primordial mediante la Ec. (3.55), teniendo finalmente restricciones al running (α_s) depejándolo de la Ec. (2.107).

Siguiendo este procedimiento, realizado computacionalmente en PYTHON (para más detalle sobre el código creado se sugiere ver el Apéndice A) se obtiene la ecuación de la recta sobre la cual el parámetro α_s adquiere valores que violan las restricciones a la abundancia de PBHs.

Para obtener la recta más restrictiva, se tomó el valor mínimo del espectro de potencias, en este caso es $\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = 0.01454475$ al cual le corresponde el valor más grande del número de onda, el cual es $k = 1.92981156 \times 10^{22}$. La ecuación de la recta es:

$$\alpha_s = -0.03679n_s + 0.04744, \quad (3.61)$$

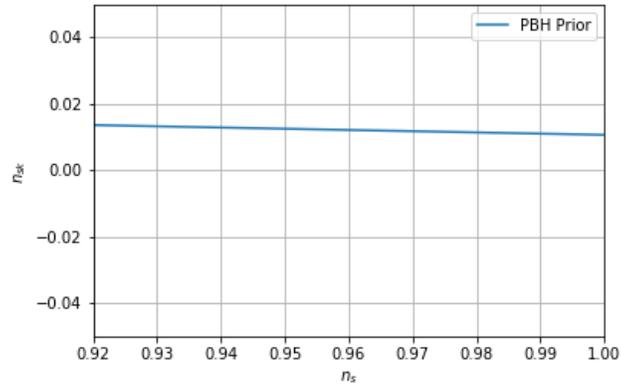


Figura 3.1: Restricción al running con los agujeros negros primordiales.

la cual restringirá los posteriors del parámetro α_s de Planck 2015, ver. Fig. (3.2).

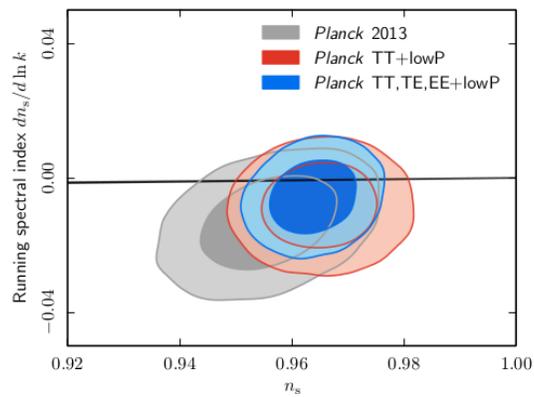


Figura 3.2: Resultados reportados por el satélite Planck en 2015 para los parámetros n_s y α_s . [13]

El objetivo es que esta recta acote/restrinja el running α_s como se muestra en la Fig. (3.3), es decir, que todos los puntos que están por encima de dicha recta no se tomen en cuenta.

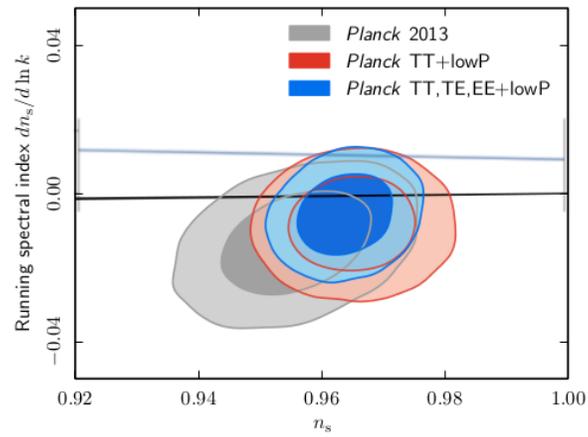


Figura 3.3: Zona de restricción esperada. La línea azul muestra la restricción impuesta por los agujeros negros primordiales.

Esto se hará usando estadística Bayesiana y mediante cadenas de Markov se recorrerá el espacio de parámetros a través de los métodos de Monte Carlo, en especial usando el algoritmo Metropolis-Hastings, lo cual explica más a detalle en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

METODOLOGÍA

En este capítulo se menciona el teorema de Bayes y cómo se hace uso de este, al igual que la manera en que se samplea el espacio de parámetros mediante el método de Monte Carlo, el cual hace uso del algoritmo Metropolis-Hasting. Por otra parte, se explica brevemente el paquete MONTE PYTHON y las modificaciones que se hicieron al likelihood de PLANCK para llevar a cabo el objetivo de esta tesis.

4.1. Estadística Bayesiana

El teorema de Bayes describe la probabilidad condicional de que se cumpla un evento H dado que se observen datos D que podrían estar relacionados con el evento [14]

$$P(H|D) = \frac{P(D|H)P(H)}{P(D)}, \quad (4.1)$$

donde

- $P(H)$ es llamado **prior**, debido a su nombre en inglés *predictive and marginal likelihood*. Este representa el grado de conocimiento o ignorancia sobre la verdad de la hipótesis después de analizar los datos.
- $P(D|H)$ es nuestra función **likelihood**, también es llamada función de verosimilitud o función de probabilidad y esta representa el grado de confiabilidad. Si se asume que las mediciones se distribuyen entorno a un valor real la función

está dada por

$$P(H) \propto \exp \left[\frac{-\chi^2(H)}{2} \right].$$

Al maximizar la función de densidad es equivalente a minimizar la función χ^2 .

- $P(H|D)$ es conocido como **posterior**, el cual respresenta la verdad de nuestra hipótesis de datos.
- $P(D)$ es una constante de normalización, la cual no depende de manera explícita de la hipótesis. Se le da el nombre de evidencia.

Para encontrar el mejor ajuste de los parámetros de los datos observados del CMB se debe maximizar el *likelihood*, el cual se expresa en forma de gaussiana de la siguiente manera

$$P(D|H) = \mathcal{L}(D|H) = \frac{1}{(2\pi)^n \text{Det}|\mathbf{C}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left(-\frac{1}{2} \chi^2 \right), \quad (4.2)$$

donde la χ^2 será la relación de los picos observacionales del CMB.

4.2. Cadenas de Markov

Las cadenas de Markov son una secuencia de variables aleatorias x_0, x_1, \dots con valores en un conjunto S dados los valores a partir de un momento n , los subsecuentes x_{n+1}, x_{n+2}, \dots dependen de los x_0, \dots, x_n sólo a través del estado actual x_n [15]. En pocas palabras son una serie de pasos o saltos dados, en este caso dentro del espacio de parámetros para el cual se evalúa la función likelihood.

Dichas cadenas se llevan a cabo a través de los métodos de Monte Carlo, los cuales son algoritmos computacionales basados en el muestreo aleatorio del espacio de parámetros. En este trabajo se emplea el método *Metropolis-Hastings* el cual se describe a continuación.

4.2.1. *Algoritmo Metropolis-Hasting*

En este algoritmo se define el logaritmo de la función likelihood (**Loglike**), el tamaño del paso entre cada punto, el número de pasos totales que dará la cadena y para saber la cantidad de pasos aceptados se hace uso de un contador, obteniendo así una tasa de aceptación.

La cadena comienza generando un número aleatorio para luego definir los puntos nuevos al sumar el valor inicial o el valor del paso anterior (según sea el caso) con un nuevo número aleatorio multiplicado por el tamaño del paso para derivar un nuevo Loglike con respecto a los puntos obtenidos en dicho paso.

La cadena corre dentro de un ciclo *for*, en el cual mediante condicionales se imponen las restricciones cosmológicas para que la cadena no de un paso "prohibido", dentro de cada condicional se pone un criterio para aceptar o rechazar algún paso: se le resta el nuevo valor del Loglike al valor del paso anterior; si el valor de la resta es mayor a cero entonces se acepta el número y se define como 1, de lo contrario se toma la exponencial de dicha resta, este valor se compara con un número aleatorio entre cero y uno, si es mayor a dicho valor aleatorio se agrega el nuevo punto a la cadena y si esto no sucede se agrega a la cadena el valor del paso inicial (o anterior). Si no se cumple ninguna de las restricciones cosmológicas, entonces se toma el valor del paso inicial (o anterior) [14].

Este algoritmo permite samplear todo el espacio de parámetros y obtener las regiones de mayor probabilidad, en caso de tener una probabilidad propia de una variable aleatoria, las distribuciones de probabilidad son gaussianas, con este supuesto las regiones de mayor probabilidad acumulada hasta el 68 % (95 %) representa una región de confianza de 1σ (2σ), las figuras que se presentan más adelante muestran dichas regiones de confianza. Por otra parte el criterio de convergencia usado fue el de Gelman-Rubin el cual requiere que $R - 1 < 10^{-3}$ donde R es el factor de reducción de escala, el cual relaciona las inferencias agrupadas [16].

4.3. Monte Python

Para llevar a cabo el análisis de los datos observacionales se utilizó del programa MONTE PYTHON el cual es un paquete de muestreo de MCMC (Markov chain Monte Carlo) escrito en Python [17], este es utilizado para la inferencia de parámetros en cosmología a través del algoritmo Metropolis-Hastings [18]. MONTE PYTHON está conectado con el programa CLASS (Cosmic Linear Anisotropy Solving System) el cual se encarga de resolver las ecuaciones de Boltzmann [19].

Por otra parte, MONTE PYTHON clasifica los parámetros de la siguiente manera [20]:

- **Parámetros cosmo.** Estos parámetros son usados por CLASS.
- **Parámetros nuisance.** Estos parámetros son usados para calcular las probabilidades.
- **Parámetros derived.** Estos parámetros no son variados directamente por el algoritmo pero pueden ser calculados dados los parámetros anteriores.

Este permite agregar datos experimentales de manera sencilla, sólo basta con modificar el archivo `.param`. También se pueden agregar parámetros, sin embargo para poder hacerlo se necesita declararlo en CLASS o verificar si este ya lo tiene por default [20].

4.3.1. *Parámetros calculados*

Los conjuntos de datos probados en la presente tesis fueron PLANCK LITE y FULL PLANCK, la diferencia entre estos son la cantidad de parámetros *nuisance* como se puede ver en las Figs. (4.1) y (4.2). En FULL PLANCK se especifican los valores de dichos parámetros lo cual entre otras cosas conlleva un mayor tiempo de procesamiento computacional.

Por otra parte los datos usados en este trabajo fueron:

- Para PLANCK LITE se usaron *Planck high- ℓ lite* y *Planck low- ℓ* .

- Para FULL PLANCK se usaron *Planck high- ℓ* y *Planck low- ℓ* .

La diferencia que existe con *Planck high- ℓ* y *Planck low- ℓ* es el rango de las C_ℓ 's que abarcan; *Planck high- ℓ* toma ℓ 's en un rango de $30 \leq \ell \leq 2508$ mientras que *Planck low- ℓ* se refiere a $\ell < 30$ [21].

```
# Cosmological parameters list
data.parameters['omega_b'] = [ 2.222, 2.1, 2.35, 0.023, 0.01, 'cosmo']
data.parameters['omega_cdm'] = [0.1197, 0.11, 0.13, 0.0022, 1, 'cosmo']
data.parameters['ln10*theta_s'] = [1.04085, 1.038, 1.046, 0.00047, 1, 'cosmo']
data.parameters['ln10*(10)A_s'] = [3.089, 2.9, 4.5, 0.036, 1, 'cosmo']
data.parameters['n_s'] = [0.9655, 0.93, 1, 0.0062, 1, 'cosmo']
data.parameters['tau_reio'] = [0.078, 0.04, 0.12, 0.019, 1, 'cosmo']
data.parameters['alpha_s'] = [-0.0084, -0.04, 0.04, 0.0082, 1, 'cosmo']

# Nuisance parameter list, same call, except the name does not have to be a class name
data.parameters['A_ctb_217'] = [ 61, 0, 200, 7, 1, 'nuisance']
data.parameters['clb_index'] = [ -1.3, -1.3, -1.3, 0, 1, 'nuisance']
data.parameters['klsz_ctb'] = [ 0.13, 0, 1, 0.3, 1, 'nuisance']
data.parameters['A_sz'] = [ 6.86, 0, 10, 1.9, 1, 'nuisance']
data.parameters['ps_A_100_100'] = [ 222.9, 0, 400, 30, 1, 'nuisance']
data.parameters['ps_A_143_143'] = [ 38, 0, 400, 8, 1, 'nuisance']
data.parameters['ps_A_143_217'] = [ 35.2, 0, 400, 10, 1, 'nuisance']
data.parameters['ps_A_217_217'] = [ 102.6, 0, 400, 11, 1, 'nuisance']
data.parameters['ksz_norm'] = [ 9, 0, 10, 4.2, 1, 'nuisance']
data.parameters['gal545_A_100'] = [ 6.75, 0, 50, 1.8, 1, 'nuisance']
data.parameters['gal545_A_143'] = [ 9.41, 0, 50, 1.8, 1, 'nuisance']
data.parameters['gal545_A_143_217'] = [ 19.28, 0, 100, 4.2, 1, 'nuisance']
data.parameters['gal545_A_217'] = [ 81.7, 0, 400, 7.9, 1, 'nuisance']
data.parameters['calib_100'] = [ 998.59, 0, 3000, 0.73, 0.001, 'nuisance']
data.parameters['calib_217'] = [ 995.89, 0, 3000, 1.4, 0.001, 'nuisance']
data.parameters['A_planck'] = [100.028, 90, 110, 0.25, 0.01, 'nuisance']
```

Figura 4.1: Parámetros calculados con FULL PLANCK.

```
# Cosmological parameters list
data.parameters['omega_b'] = [ 2.222, 2.1, 2.35, 0.023, 0.01, 'cosmo']
data.parameters['omega_cdm'] = [0.1197, 0.11, 0.13, 0.0022, 1, 'cosmo']
data.parameters['ln10*theta_s'] = [1.04085, 1.038, 1.046, 0.00047, 1, 'cosmo']
data.parameters['ln10*(10)A_s'] = [3.089, 3.04, 3.12, 0.036, 1, 'cosmo']
data.parameters['n_s'] = [0.9655, 0.93, 1, 0.0062, 1, 'cosmo']
data.parameters['tau_reio'] = [0.078, 0.04, 0.12, 0.019, 1, 'cosmo']
data.parameters['alpha_s'] = [-0.0084, -0.04, 0.04, 0.0082, 1, 'cosmo']

# Nuisance parameter list, same call, except the name does not have to be a class name
data.parameters['A_planck'] = [100.028, 90, 110, 0.25, 0.01, 'nuisance']
```

Figura 4.2: Parámetros calculados con PLANCK LITE.

Cabe decir que para el caso del parámetro α_s (el cual es un parámetro *cosmo*) no fue necesario declararlo en CLASS ya que este existe dentro de dicho programa, sólo fue necesario declararlo como *alpha_s* en el archivo *.param* dentro de MONTE PYTHON y se fijaron los valores con base en los datos de PLANCK 2015 [13] para ambos conjuntos de datos sampleados.

4.3.2. Restricciones a valores a priori en parámetros de inflación

Para implementar la restricción obtenida de la abundancia de PBHs resumida en la ecuación de la recta Ec.(3.61), se modificó el *likelihood* de MONTE PYTHON

(el cual se encuentra en la carpeta `montepython` de dicho programa) imponiendo la ecuación de la recta en forma de condicional como se muestra en la Fig. (4.3).

```
# add prior on nuisance parameters
lkl = self.add_nuisance_prior(lkl, data)
test = cosmo.get_current_derived_parameters(['alpha_s', 'n_s'])
alphas = test['alpha_s']
ns = test['n_s']
if (alphas + 0.03679*ns) > 0.04744 : lkl=-1000000000000

return lkl
```

Figura 4.3: Líneas de código de la restricción añadida.

Este condicional lo que hace es tomar el valor fuera de la zona que restringe la recta y le da un valor al Loglike muy negativo de manera que no se tome dicho punto en la cadena.

En la siguiente sección se discutirán los resultados obtenidos para ambos conjuntos de datos presentados y en específico para los parámetros n_s y α_s que desde un inicio fueron de interés para esta tesis.

Capítulo 5

RESULTADOS

En este capítulo se mencionan las particularidades que se presentaron en el muestreo de cada conjunto de datos, también se muestran las gráficas obtenidas de cada uno de estos para los parámetros de inflación de interés tanto sin la restricción como con la restricción y sus respectivas tablas de valores y por último se hace un análisis de los datos obtenidos.

5.1. *Particularidades del muestreo*

- PLANCK LITE

Tanto para el muestreo sin la restricción como con la restricción se pusieron cuatro cadenas de 200,000 puntos cada una, se interrumpió el proceso hasta que se alcanzó una tasa de aceptación con 600,904 puntos (sin la restricción) mientras que con la restricción fue de 601,701 puntos.

- FULL PLANCK

- Sin usar restricción se pusieron seis cadenas de 100,000 puntos cada una, es decir 600,000 puntos en total.
- Con restricción se pusieron seis cadenas de 200,000 puntos, interrumpiendo el proceso con 600,945 puntos en total.

Cabe recordar que para ambos conjuntos de datos se cumplió el criterio de convergencia de Gelman-Rubin, lo cual garantiza la convergencia de las cadenas.

5.2. Resultados para el muestreo de DATOS LITE

| Parámetro | Mejor ajuste | media $\pm\sigma$ | Min. al 95 % | Max. al 95 % |
|------------|--------------|---------------------------------|--------------|--------------|
| n_s | 0.9632 | $0.9644^{+0.0061}_{-0.0062}$ | 0.952 | 0.9767 |
| α_s | -0.007639 | $-0.004998^{+0.0072}_{-0.0075}$ | -0.01997 | 0.00976 |

Tabla 5.1: Resultados obtenidos usando PLANCK LITE sin restricción de PBHs.

| Parámetro | Mejor ajuste | media $\pm\sigma$ | Min. al 95 % | Max. al 95 % |
|------------|--------------|--------------------------------|--------------|--------------|
| n_s | 0.9651 | $0.9643^{+0.0061}_{-0.0061}$ | 0.9521 | 0.9764 |
| α_s | -0.006086 | $-0.005229^{+0.0074}_{-0.007}$ | -0.01895 | 0.008946 |

Tabla 5.2: Resultados obtenidos usando PLANCK LITE con restricción de PBHs.

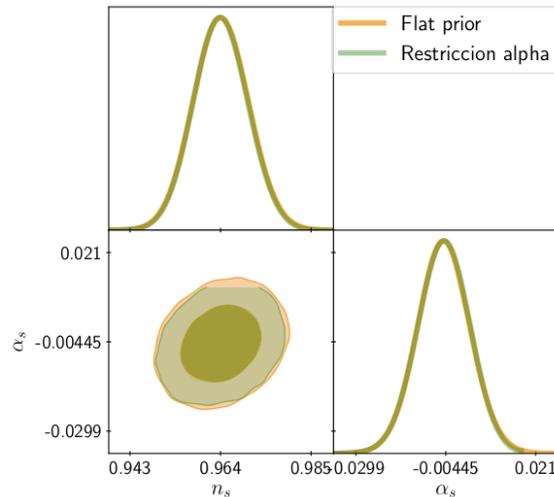


Figura 5.1: Gráficas de los resultados obtenidos con PLANCK LITE. La zona más oscura muestra el 68 % y la tenue el 95 % de la probabilidad acumulada.

Para el conjunto de DATOS LITE al comparar ambas tablas se puede ver una reducción en el valor del mejor ajuste para ambos parámetros (n_s y α_s), mientras que

en el valor medio con sus respectivos valores de confianza se muestra una reducción para el valor máximo del parámetro α_s . Por otro lado, a 2σ se observa una reducción del parámetro α_s así como un aumento en su valor mínimo. Esto corresponde a una reducción efectiva en el área de la región de confianza del plano n_s - α_s . Este resultado se discute más adelante en la sección 5.4.

5.3. Resultados para el sampleo de DATOS FULL

| Parámetro | Mejor ajuste | media $\pm\sigma$ | Min. al 95 % | Max. al 95 % |
|------------|--------------|---------------------------------|--------------|--------------|
| n_s | 0.9595 | $0.9649^{+0.0063}_{-0.0061}$ | 0.9525 | 0.9777 |
| α_s | -0.01192 | $-0.007271^{+0.0082}_{-0.0082}$ | -0.0236 | 0.008901 |

Tabla 5.3: Resultados obtenidos usando FULL PLANCK sin restricción de PBHs.

| Parámetro | Mejor ajuste | media $\pm\sigma$ | Min. al 95 % | Max. al 95 % |
|------------|--------------|--------------------------------|--------------|--------------|
| n_s | 0.9634 | $0.9644^{+0.0064}_{-0.0059}$ | 0.9523 | 0.9768 |
| α_s | -0.01162 | $-0.007682^{+0.008}_{-0.0078}$ | -0.02295 | 0.007871 |

Tabla 5.4: Resultados obtenidos usando FULL PLANCK con restricción de PBHs.

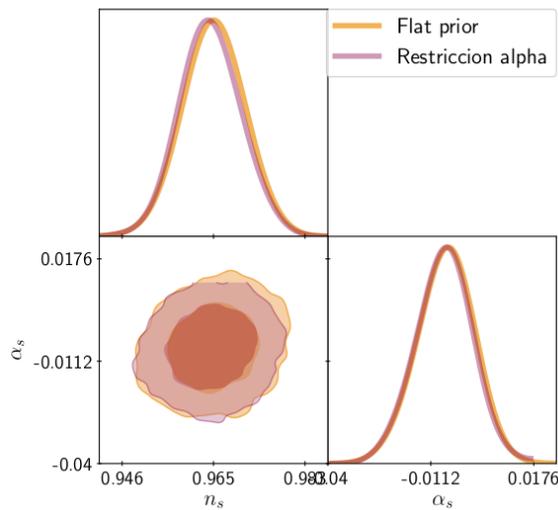


Figura 5.2: Gráficas de los resultados obtenidos con FULL PLANCK. La zona más oscura muestra el 68% y la tenue el 95% de la probabilidad acumulada.

Para el conjunto de DATOS FULL, al comparar ambas tablas no se ve un cambio apreciable en el mejor ajuste, sin embargo para los demás datos (la media, los mínimos y máximos al 95 %) se nota una disminución pequeña pero consistente, mostrando una tendencia a valores más negativos del parámetro α_s .

5.4. Análisis de resultados

Se impusieron restricciones a parámetros inflacionarios como el índice espectral (n_s) y el running (α_s) a partir de restricciones a la abundancia de Agujeros Negros Primordiales (PBHs) obteniendo una región prohibida delimitada por la Ec. (3.61).

Usando los datos de PLANCK 2015 y mediante un análisis bayesiano para el parámetro α_s se obtuvo como resultado que la restricción reduce tanto el valor esperado de dicho parámetro como su intervalo de confianza. Para un mejor análisis de los resultados se calculó el test **figure of merit** (FoM) el cual cuantifica el área del plano $n_s - \alpha_s$ que abarca el 95 % de los puntos aceptados en las cadenas. Formalmente, la FoM se define como el inverso del determinante de la matriz de covarianza en el plano de los parámetros (en este caso el plano $n_s - \alpha_s$). Dado que estos parámetros están poco correlacionados el FoM se puede aproximar como:

$$\text{FoM}^{(n_s - \alpha_s)} \equiv (\text{Det}(\mathbf{C}))^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{6.17\pi}{A_{95}}, \quad (5.1)$$

donde \mathbf{C} es la matriz de covarianza y A_{95} es el área de la región del 95 % de convergencia [22].

Esto se hizo tomando los valores en las tablas y aproximando dicha área a un cuadrado en ambos casos. Como resultado de dicho análisis se obtuvo una mejoría en el $\text{FoM}^{(n_s - \alpha_s)}$ donde para el conjunto de DATOS LITE se tiene que el cociente de la FoM con restricción sobre la FoM sin restricción es:

$$\frac{\text{FoM}_{C.Rest}^{(n_s - \alpha_s)}}{\text{FoM}_{S.Rest}^{(n_s - \alpha_s)}} = 1.08, \quad (5.2)$$

mientras que para el conjunto de DATOS FULL el cociente de ambas cantidades es de

1.04. Lo anterior indica una disminución de los valores aceptables en el espacio de parámetros n_s - α_s con la restricción a la abundancia de PBHs.

Capítulo 6

CONCLUSIONES

En este trabajo se obtuvo una nueva restricción a parámetros propios del paradigma inflacionario a partir de las restricciones a la abundancia de Agujeros Negros Primordiales (PBHs). Dicha restricción se obtuvo a partir de la menor cota al espectro de potencias primordial en el extremo de baja masa, donde la abundancia de PBHs está restringida por las reliquias del tamaño de la masa de Planck, producto de su evaporación.

La restricción resumida en la Ec. (3.61) fue adaptada al paquete MONTE PYTHON que samplea cadenas de Markov, en el espacio de parámetros de modelos `cosmo` a partir de datos de la radiación cósmica de fondo (CMB) obtenidos del satélite Planck. Este ejercicio implica una modificación del paquete no desarrollada anteriormente y descrita en el capítulo 4.

Para samplear el espacio de parámetros se usaron dos conjuntos de datos distintos de los cuales se notó un mayor impacto de los parámetros con el conjunto PLANCK LITE lo cual se puede ver en la tablas. Más aún, en la sección 5.4 se muestra la mejoría en la determinación de los parámetros n_s y α_s en términos de la prueba estadística Figure of Merit (FoM). Esta prueba demuestra que con la restricción hay una mejoría del 8% con los DATOS LITE y del 4% con los DATOS FULL.

Como consecuencia del análisis presentado se puede decir que las restricciones a la abundancia de PBHs sirven para restringir a los parámetros que describen inflación lo que prueba nuestra hipótesis inicial.

A futuro, será posible repetir el análisis con extensiones como las siguientes

1. Mejorar el análisis con el conjunto completo de datos que incluya el espectro de polarización y posiblemente otros experimentos que prueben al espectro en escalas más bajas (ℓ 's mayores).
2. Cotas menos restrictivas a partir de observaciones para PBHs de otras masas. Es decir, cotas a partir de las restricciones de la partícula Supersimétrica más ligera, y cotas a partir de distorsiones espectrales del CMB [10].
3. Restricciones combinadas al parámetro α_s y a β_s (*running of the running of the spectral index*), a partir de las mismas cotas observacionales utilizadas en este trabajo. Dado que el parámetro extra β_s provee mayor libertad al cambio en la amplitud del espectro primordial, es posible encontrar restricciones más fuertes a partir de la abundancia de PBHs.

Bibliografía

- [1] M. Roos, *Introduction to Cosmology*. Wiley, 4 ed., 2015.
- [2] A. Liddle and D. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. Cambridge University Press, 2000.
- [3] J. Dekdebrun, “*Cosmological Inflation*,” Master’s thesis, Universiteit van Amsterdam, 2010.
- [4] A. Riotto, “Inflation and the theory of cosmological perturbations,” *ICTP Lect. Notes Ser.*, vol. 14, pp. 317–413, 2003.
- [5] A. Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology*. Wiley, 2 ed., 2003.
- [6] A. M. Green, “Pitfalls of a power-law parametrization of the primordial power spectrum for primordial black hole formation,” *Phys. Rev.*, vol. D98, no. 2, p. 023529, 2018.
- [7] S. Dodelson, *Modern Cosmology*. Academic Press, 2005.
- [8] “Primordial black hole.” https://en.wikipedia.org/wiki/Primordial_black_hole.
- [9] A. S. Josan, A. M. Green, and K. A. Malik, “Generalised constraints on the curvature perturbation from primordial black holes,” *Phys. Rev.*, vol. D79, p. 103520, 2009.
- [10] R. Emami and G. Smoot, “Observational Constraints on the Primordial Curvature Power Spectrum,” *JCAP*, vol. 1801, no. 01, p. 007, 2018.

- [11] “Hawking radiation.” https://en.wikipedia.org/wiki/Hawking_radiation.
- [12] B. J. Carr, K. Kohri, Y. Sendouda, and J. Yokoyama, “New cosmological constraints on primordial black holes,” *Phys. Rev.*, vol. D81, p. 104019, 2010.
- [13] P. A. R. Ade *et al.*, “Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation,” *Astron. Astrophys.*, vol. 594, p. A20, 2016.
- [14] F. Pizaña and F. Lizcano, *Cosmología con supernovas tipo Ia*.
- [15] R. Serfozo, *Basics of Applied Stochastic Processes*. Springer, 2009.
- [16] S. P. Brooks and A. Gelman, “General methods for monitoring convergence of iterative simulations,” *Journal of Computational and Graphical Statistics*, vol. 7, no. 4, pp. 434–455, 1998.
- [17] T. Brinckmann and J. Lesgourgues, “MontePython 3: boosted MCMC sampler and other features,” 2018.
- [18] B. Audren, J. Lesgourgues, K. Benabed, and S. Prunet, “Conservative Constraints on Early Cosmology: an illustration of the Monte Python cosmological parameter inference code,” *JCAP*, vol. 1302, p. 001, 2013.
- [19] J. Lesgourgues, “The Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS) I: Overview,” 2011.
- [20] B. Audren, *Monte Python documentation*, 2015.
- [21] “2015 CMB spectra and likelihood code.” https://wiki.cosmos.esa.int/planckpla2015/index.php/CMB_spectrum_%26_Likelihood_Code.
- [22] D. Huterer, “The Accelerating Universe,” pp. 321–353, 2010.

Apéndice A

Obtención de Cotas

```
In [1]: 1 import numpy as np
        2 import scipy.special as special
        3 from scipy.special import erfcinv
        4 import matplotlib.pyplot as plt
        5 import math as mt
        6 %matplotlib inline
```

Figura A.1: Paquetería usada en Python.

```
In [2]: 1 LogM = np.arange(1.,11.,0.5)
        2 print LogM
        3 logmlin=np.linspace(1,11,12)
        4 print logmlin

[ 1.  1.5  2.  2.5  3.  3.5  4.  4.5  5.  5.5  6.  6.5  7.  7.5
  8.  8.5  9.  9.5 10. 10.5]
[ 1.  1.90909091  2.81818182  3.72727273  4.63636364  5.54545455
  6.45454545  7.36363636  8.27272727  9.18181818 10.09090909 11.]
```

Figura A.2: Para simular el logaritmo de las masas, se creo un arreglo que va del uno al once, tomando espacios de 0.5, esto fue tomando en cuenta un rango que esté en ambos casos, tanto para masas del tamaño de Planck como de una partícula supersimétrica (LSP).

```
In [3]: 1 ##Planck
        2 f = lambda M:(3.6697e-23)*((10**(M))**(3./2.))
        3 beta = f(LogM)
        4 beta

Out[3]: array([1.16046103e-21, 6.52575195e-21, 3.66970000e-20, 2.06362396e-19,
               1.16046103e-18, 6.52575195e-18, 3.66970000e-17, 2.06362396e-16,
               1.16046103e-15, 6.52575195e-15, 3.66970000e-14, 2.06362396e-13,
               1.16046103e-12, 6.52575195e-12, 3.66970000e-11, 2.06362396e-10,
               1.16046103e-09, 6.52575195e-09, 3.66970000e-08, 2.06362396e-07])
```

Figura A.3: Se evaluó el logaritmo de las masas en fórmula de la abundancia de Agujeros Negros Primordiales para reliquias del tamaño de la masa de Planck.

```
In [4]: 1 ##LSP Leptón-Tauón
2 f2 = Lambda M: (1.7725e-11)*((10**(M))**(-1/2.))
3 beta2 = f2(LogM)
4 beta2

Out[4]: array([5.60513715e-12, 3.15200025e-12, 1.77250000e-12, 9.96749999e-13,
5.60513715e-13, 3.15200025e-13, 1.77250000e-13, 9.96749999e-14,
5.60513715e-14, 3.15200025e-14, 1.77250000e-14, 9.96749999e-15,
5.60513715e-15, 3.15200025e-15, 1.77250000e-15, 9.96749999e-16,
5.60513715e-16, 3.15200025e-16, 1.77250000e-16, 9.96749999e-17])
```

Figura A.4: Se evaluó el logaritmo de las masas en fórmula de la abundancia de Agujeros negros primordiales para reliquias del tamaño de la masa de una partícula supersimétrica.

```
In [5]: 1 ## Pmax Planck
2 Pmax = Lambda betas: (1/(3*((2)**(1/2.))*erfcinv(betas*((3)**(3/2.))))**2)/0.08665
3 P_pl = Pmax(beta)
4 P_pl

Out[5]: array([0.01454475, 0.01513089, 0.01576596, 0.01645632, 0.0172095 ,
0.01803442, 0.01894181, 0.01994461, 0.02105863, 0.02230333,
0.023703 , 0.02528831, 0.02709854, 0.02918481, 0.03161494,
0.03448077, 0.03790978, 0.04208409, 0.04727308, 0.05389217])
```

Figura A.5: Se evaluaron los resultados obtenidos de las abundancias para masas de Planck, en la función del espectro de potencias.

```
In [6]: 1 ## Pmax LSP
2 P_lsp = Pmax(beta2)
3 P_lsp

Out[6]: array([0.02898842, 0.02826812, 0.02758241, 0.02692889, 0.02630534,
0.02570976, 0.02514032, 0.02459535, 0.02407331, 0.0235728 ,
0.0230925 , 0.02263124, 0.02218789, 0.02176146, 0.02135098,
0.02095559, 0.02057448, 0.02020688, 0.01985209, 0.01950947])
```

Figura A.6: Se evaluaron los resultados obtenidos de las abundancias para masas de LSP, en la función del espectro de potencias.

```
In [9]: 1 betamin = np.minimum(np.log10(beta), np.log10(beta2))
2 betamin

Out[9]: array([-20.93536944, -20.18536944, -19.43536944, -18.68536944,
-17.93536944, -17.18536944, -16.43536944, -15.68536944,
-14.93536944, -14.18536944, -13.75141376, -14.00141376,
-14.25141376, -14.50141376, -14.75141376, -15.00141376,
-15.25141376, -15.50141376, -15.75141376, -16.00141376])
```

Figura A.7: De ambos arreglos de los logaritmos de las abundancias, se tomaron los mínimos.

```
In [11]: 1 #pmin = np.minimum(np.log10(P_pl), np.log10(P_lsp))
2 #pmin
3 bmin = np.minimum((beta), (beta2))
4 Pcota = Pmax(bmin)
5 Pcota

Out[11]: array([0.01454475, 0.01513089, 0.01576596, 0.01645632, 0.0172095 ,
0.01803442, 0.01894181, 0.01994461, 0.02105863, 0.02230333,
0.0230925 , 0.02263124, 0.02218789, 0.02176146, 0.02135098,
0.02095559, 0.02057448, 0.02020688, 0.01985209, 0.01950947])
```

Figura A.8: Los mínimos se evaluaron en la función para el espectro de potencias.

```
In [13]: 1 K = Lambda k: (6.1026e22)*((10**(k))**(-1./2.))
          2 rangek = K(LogM)
          3 rangek
Out[13]: array([[1.92981156e+22, 1.08521279e+22, 6.10260000e+21, 3.43174417e+21,
                1.92981156e+21, 1.08521279e+21, 6.10260000e+20, 3.43174417e+20,
                1.92981156e+20, 1.08521279e+20, 6.10260000e+19, 3.43174417e+19,
                1.92981156e+19, 1.08521279e+19, 6.10260000e+18, 3.43174417e+18,
                1.92981156e+18, 1.08521279e+18, 6.10260000e+17, 3.43174417e+17])
```

Figura A.9: Se evaluaron los logaritmos de las masas en la función que se tiene para el número de onda.

```
In [17]: 1 n_sk = ((logps/log_k) - 0.04)*(2/log_k)
          2 n_sk
Out[17]: array([0.00917856, 0.00941958, 0.00967009, 0.00993062, 0.01020179,
                0.01048425, 0.0107787 , 0.01108594, 0.01140685, 0.01174239,
                0.0120715 , 0.01236539, 0.01267042, 0.01298716, 0.01331617,
                0.01365809, 0.01401357, 0.01438331, 0.01476807, 0.01516865])
```

Figura A.10: Se evaluaron los logaritmos del número de onda y del espectro en la función para el running (α_s).

A.0.1. Ecuación de la recta

```
In [2]: 1 ns = np.arange(0.92,1.005,0.005)
          2 print ns
[0.92 0.925 0.93 0.935 0.94 0.945 0.95 0.955 0.96 0.965 0.97 0.975
 0.98 0.985 0.99 0.995 1. ]
```

Figura A.11: Se creó un arreglo que tomara el mismo intervalo que la gráfica de Planck 2015.

```
In [3]: 1 f = Lambda ns:(0.0368)*(1.2892 - ns)
          2 nsk = f(ns)
          3 nsk
Out[3]: array([0.01358656, 0.01340256, 0.01321856, 0.01303456, 0.01285056,
                0.01266656, 0.01248256, 0.01229856, 0.01211456, 0.01193056,
                0.01174656, 0.01156256, 0.01137856, 0.01119456, 0.01101056,
                0.01082656, 0.01064256])
```

Figura A.12: Se evaluó el arreglo del índice espectral en la fórmula que se tenía para el α_s .

```
In [6]: 1 from scipy import stats
        2 import numpy as np

In [7]: 1 y = nsk
        2 x = ns

In [8]: 1 slope, intercept, r_value, p_value, std_err = stats.linregress(x,y)

In [9]: 1 print "pendiente:", slope
pendiente: -0.03679999999999999

In [10]: 1 print "intersección:", intercept
intersección: 0.04744255999999998
```

Figura A.13: Finalmente se usó este código para conocer la pendiente y la abscisa, obteniendo finalmente la recta.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS



INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS



Control Escolar de Licenciatura

VOTOS DE APROBATORIOS

Secretaria ejecutiva del Instituto de Investigación en Ciencias Básicas Aplicadas de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos.
P r e s e n t e .

Por medio de la presente le informamos que después de revisar la versión escrita de la tesis que realizó la C. **SAMARIO NAVA SOFÍA DEL PILAR** con número de matrícula **20154013195** cuyo título es:

“Restricciones a modelos Inflacionarios con Agujeros Negros Primordiales”

Consideramos que **SI** reúne los méritos que son necesarios para continuar los trámites para obtener el título de **Licenciado Ciencias Área Terminal en Física**

Cuernavaca, Mor a 22 de febrero del 2021

Atentamente
Por una universidad culta

Se adiciona página con la e-firma UAEM de los siguientes:

DR. ROLANDO PÉREZ ÁLVAREZ
DR. RAÚL SALGADO GARCÍA
DRA. ARIADNA MONTIEL ARENAS
DR. JUAN CARLOS HIDALGO CUELLAR
DR. JUAN CARLOS DEGOLLADO DAZA

PRESIDENTE
SECRETARIO
VOCAL
PRIMER SUPLENTE
SEGUNDO SUPLENTE



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

Sello electrónico

ROLANDO PEREZ ALVAREZ | Fecha:2021-02-22 10:18:11 | Firmante

RYq9FnXm9ZiarUN6vCtrE94GC1x/J8CMtzWx8SZmMPn1FPtUFUDapD6Po2AQR34fHpMzvCpWVAG2sRkD/vQTwf0Q1TcXgrdGBuFmDpK8qyh00szhftTzJgJHU3/DgNDJmsV
SXclJlp87ptKJkrEYHWoX4DijwvRb4Hh897rJ8telhigr05Y/JdyX8JMD1afo5Q75813FLAKwk7UPmEVnBOrt1GnzNwjrLtuq8v6VT3pSPzt26aA8TGYZRw+g0i2VeepY5c+mF6BF
OP+u23P4GuypQbRKL3sVFz70HYzON014kfG5A86pdiD0qu5OySA5JYKcc41Qn/8JOZ77XhQ==

RAUL SALGADO GARCIA | Fecha:2021-02-22 10:27:49 | Firmante

ISSZ/TG4OkL7SEu1FTBtJkhlSKPFubDmiQd4ykAcw57feCXIE4llcR7XxglHhuUL5MDNLfvoL3D8HTMhfmXGax4dul26+n8+mRaKCSzZrtqXZ77sTzaASYowXwXC46pw1b7fva7P
TZJ8vt2CHRy5pkl4/dAFW2OMGd+3o9Rg+T70fc97pXuyaYZ5Hf50yC996ZGDJmMI4RdMtjoeddqW9SimVz5Qb6xvNm+mwwSGsGITozUilAWIHKHx9r/NtspX986ZSxMAGsg1jfQ2
28v4PJa85VUB9U1YV3vxR5+TbHuX8b+DaUI6/ReuE2TB/dyOB0fgTuM8WFJ7JvNomK5onA==

ARIADNA MONTIEL ARENAS | Fecha:2021-02-22 15:55:31 | Firmante

b5sUKkWIUXyGM00UZcVMNxmhfqk4+QbRzMeokMS9r/QPORKua5t4t9neyFyRnvszsmDwAISvsmAwW8ZSHDJBVORNRJUegJ39BfTtYJqbdJ5C3PaiwCXD3axQjgyZ8te++PB
MfxBLUYZONH9TW9daae64MLG96zqJ+Ezqk0P17cETAZ2PCVDSk/BzKy5PjB8veoSBmK/QKP0Ahyxb+9Sbel2FLm4zKjdeGlzuE5odRekiKfOwYIFE1fvBagKPfhXA5ILHFR
EMzqVkJokbPJ8JHRO+Cad0bEqae2qUsQpZo+ynMfyFLQ8QQzoc+efONxUE736Mka407XMgnnuQ==

JUAN CARLOS HIDALGO CUELLAR | Fecha:2021-02-22 17:02:07 | Firmante

g4gEd4gf7CRIJB53fcYYZGujNTps6Wlu0PY+uLZ88Bdx8Dzc1qGc+HCexvVBOI9X8Q2kuMfrJoMhLFrsVoVd+AJRoBveKAJFA/o4f3gu9656Mc3WLHkkG1SBe2tPVNBcWALjKQx
78/6yMgZVygZISBI5m3870ZiMKgk8MJQx0PacHHBt4wb2HpBHnQJ5X3BfQ0Na5yXv3UKXEB343Bh8pG1AY49zUEloCkhpG6qoiSWy8w6nDATbYeGOYzwDuyyFnKqgVxU+3Yk
bJHBSPTJZKDJcncJBaCa92oUfFanZ6a5EQP7z8OQ5Ajz/Niwm5TBEI8M1cP3+cCl/nfwY6F2baQ==

JUAN CARLOS DEGOLLADO DAZA | Fecha:2021-02-22 17:43:11 | Firmante

K7p1wW+3Srhai2cvkMqqfPwgNJP66oZ6HbLV3OJJ3aFuH3Zrp7LbavGaHzQ6/eub5yCpPxAy5aolYmS8aND+korjk1UqT0z5H8a+UzAn8NpwxrWqhipbylo+Vog9JQuX8gkxNoWjf
Pc7AG9DEUWocSUrpmlVqD5DhDMv/43XHAzabqaCb9PWcXgFuOMB5/qpTsoAIMX5Rlel5FhaHNci111vt6pXNKwFM0jCaEMA7dF5MgLT82MoLZED2bhVnMo6Jr0FdKcoZCN
hsSIDVor1ydpbd1KqDgh7MOGQIE8nvXqMdmZ4W30iyIglRLK7sg/eCyYsP1rGIENFUHNkCr6A==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o
escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



kqfiS2

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/5tozfOEovA0mEiRQ7Vc9boK3AVbvwnZx>

