UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

Ecuaciones integrales singulares con coeficientes discontinuos

T E S I S
para obtener el Grado de
LICENCIADO EN CIENCIAS
área terminal en matemáticas

Presenta
Roberto Reyes Cabañas

Director de Tesis:
Dr.Yuriy Karlovych

CUERNAVACA, MORELOS DICIEMBRE 2020

Dedicado a la memoria de una gran mujer y matemática, la Dra. Masuma Atakishiyeva.
¡Gracias!

Introducción

En 1908, Plemelj resolvió el siguiente problema: encontrar dos funciones Φ^+, analítica en el interior de una curva simple cerrada Γ, y Φ^-, una función analítica en el exterior de la curva Γ, donde $\Phi^-(z)$ tiende a cero cuando $z \to \infty$ tal que $\Phi^+ - \Phi^- = f$ sobre Γ, donde f es una función con valores complejos en Γ. En la solución de este problema, obtenemos las fórmulas Sokhotski-Plemelj dadas por los valores límites de las funciones

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau \quad (t \in \Gamma),$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau \quad (t \in \Gamma).$$

Esto fue de mucha importancia en su solución del problema Riemann-Hilbert.

En esta solución intervienen las integrales singulares sobre Γ

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(s)}{s - z}ds \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma),$$

donde φ es una función sobre Γ, $\Phi(z)$ es la integral de tipo Cauchy y z está en el interior o exterior de Γ.

Cuando se habla de operadores integrales singulares, usualmente se tiene en mente los operadores de la forma

$$(K\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{k(t,s)}{t - s}\varphi(s)ds,$$

donde Γ es una curva rectificable, $k(t,s)$ es una función que es regular en cierto sentido y la integral es entendida en el sentido del valor principal de Cauchy. Bajo algunas hipótesis naturales estos operadores son representados en la forma $K = A + T_1$ o $K = B + T_2$, donde

$$(A\varphi)(t) = c(t)\varphi(t) + \frac{d(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t},$$

$$(B\varphi)(t) = c(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{d(\tau)\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t},$$

y T_1, T_2 son operadores compactos.

A estos operadores $A = cI + dS_\Gamma$ y $B = cI + S_\Gamma dI$, donde I es el operador identidad y

$$(S_\Gamma \varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau,$$

los llamaremos operadores integrales singulares sobre la curva Γ.

Ahora, usando las proyecciones $P_\Gamma = \frac{1}{2}(I + S_\Gamma)$ y $Q_\Gamma = \frac{1}{2}(I - S_\Gamma)$, podemos representar estos operadores A y B en la forma $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ y $B = P_\Gamma aI + Q_\Gamma bI$, donde $a = c + d$ y $b = c - d$. Estas funciones a, b las llamaremos los coeficientes de los operadores A y B.

En esta tesis se estudiará la invertibilidad y la invertibilidad lateral de estos operadores integrales singulares sobre una curva Γ cuando sus coeficientes son discontinuos de primera especie. En el primer capítulo trabajaremos con el operador S_Γ en el espacio $L_p(\Gamma, \rho)$, donde ρ es una función de peso dada por

$$\rho(t) = \prod_{k=1}^{m} |t - t_k|^{\beta_k},$$

donde $t_1, ..., t_m$ son diferentes puntos en Γ y $\beta_1, ..., \beta_m$ son números reales en el intervalo $(-1, p-1)$. En el capítulo 2 estudiaremos más acerca de las funciones Φ^+, Φ^- y las proyecciones P_Γ y Q_Γ. El capítulo 3 será dedicado a la inversión y la inversión lateral de estos operadores cuando los coeficientes son continuos tomando en cuenta la factorización de la función a/b. La teoría de Fredholm se introducirá en el capítulo 4. En el capítulo 5 tomaremos a Γ una curva cerrada no simple y se dará la forma en que se conectan los operadores A y B entre ellos y sus operadores adjuntos. Como una generalización del capítulo 3, se buscará una factorización generalizada de funciones medibles acotadas en el capítulo 6. Finalmente en el último capítulo se darán los criterios para la invertibilidad y la invertibilidad lateral de estos operadores y la forma de sus respectivas inversas.

Esta tesis se basa en el estudio de los libros [1] "*One−dimensional linear singular integral equations : I. Introduction*" y [2] "*One − dimensional linear equations : II. General theory and applications*" de I. Gohberg y N. Krupnik, donde los capítulos 1-4 son relacionados, respectivamente, con los capítulos 1-4 del libro [1], y los capítulos 5-7 de la tesis reflejan, respectivamente, los capítulos 7-9 del libro [2].

Índice general

1. El operador integral singular **7**

1.1. Espacios $L_p(\Gamma, \rho)$ . . . 8
1.2. Teoremas de interpolación . . . 9
1.3. Acotación del operador S_Γ en los espacios $L_p(\Gamma)$ . . . 10
1.4. Curvas no simples . . . 13
1.5. Operadores integrales en espacios ponderados L_p . . . 17
1.6. Curvas no acotadas . . . 21
1.7. El operador S_Γ^* . . . 22

2. Operadores invertibles de un lado **26**

2.1. Suma directa de subespacios . . . 26
2.2. El complemento directo . . . 27
2.3. Operadores lineales . . . 28
2.4. Proyecciones relacionadas con los operadores integrales singulares . . . 29
2.5. Operadores invertibles de un lado . . . 33
2.6. Operadores integrales singulares y operadores relacionados . . . 36
2.7. Operadores integrales singulares invertibles de un lado . . . 37

3. Operadores integrales singulares con coeficientes continuos **39**

3.1. El índice de una función continua . . . 39
3.2. Operadores integrales singulares con coeficientes racionales . . . 40
3.3. Factorización de funciones . . . 44
3.4. Factorización canónica en un álgebra de Banach conmutativa . . . 45
3.5. Prueba del teorema de factorización . . . 47
3.6. Operadores con coeficientes continuos . . . 49
3.7. Factorización generalizada de funciones continuas . . . 51

4. Operadores de Fredholm **55**

4.1. Operadores normalmente solubles . . . 55
4.2. La restricción de operadores normalmente solubles . . . 56
4.3. Perturbación de operadores normalmente solubles . . . 57
4.4. La solubilidad normal del operador adjunto . . . 57
4.5. Operadores invertibles generalizados . . . 58

4.6. Operadores de Fredholm 59
4.7. Regularización de operadores 61
4.8. Índice y traza 62
4.9. La estructura del conjunto de operadores de Fredholm 64
4.10. Operadores $\Phi_\pm$ 65

5. Teoremas generales en operadores integrales singulares 66
5.1. Cambio de curva 66
5.2. El principio de separación de singularidades 68
5.3. Una condición necesaria 70
5.4. Teoremas de conección entre operadores integrales singulares 71

6. La factorización generalizada de funciones medibles acotadas 74
6.1. Funciones que admiten una factorización generalizada con respecto a una curva en $L_p(\Gamma, \rho)$ 74
6.2. Factorización en el espacio $L_p(\Gamma, \rho)$ 75
6.3. Aplicación a la inversión de operadores integrales singulares 78

7. Operadores integrales singulares con coeficientes continuos por partes 80
7.1. Funciones no singulares y su índice 80
7.2. Criterio para la factorizabilidad de funciones potenciales 82
7.3. La inversión de operadores integrales singulares en una curva cerrada 86
7.4. Curvas compuestas 87

Capítulo 1

El operador integral singular

Tomaremos en cuenta los operadores integrales singulares de la forma

$$(S_\Gamma\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau.$$

Diremos que Γ es un *arco simple* si es una curva orientada, acotada, no cerrada y sin puntos en común con diferentes arcos tal que satisface la condición de Lyapunov. La última condición quiere decir que el ángulo $\Theta_\Gamma(t)$, $t \in \Gamma$, entre la tangente a la curva en el punto t y el eje real positivo satisfacen la condición de Hölder $|\Theta_\Gamma(t_1) - \Theta_\Gamma(t_2)| \leq C|t_1 - t_2|^\alpha$, para alguna constante C, donde $0 < \alpha < 1$. Si una curva Γ consiste de muchas curvas simples finitas $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$ que tienen en común un número finito de puntos, diremos que es una *curva no simple*. Los puntos en común serán llamados *singulares*. Debemos tomar en cuenta que si Γ_i y Γ_k tienen un punto en común, entonces $\Gamma_i \cup \Gamma_k$ es o bien de Lyapunov o las tangentes a la curva en ese punto singular no coinciden. Un punto se llama no singular si no es un punto común de ciertos arcos simples y orientados. Llamaremos a Γ una *curva cerrada* si separa la extensión del plano complejo $\mathbb{C}^\infty = \mathbb{C} \cup \infty$ en dos conjuntos F_Γ^+ y F_Γ^- tal que Γ es frontera de ambos conjuntos. Para mayor brevedad, asumiremos que $z = 0 \in F_\Gamma^+$ y $z = \infty \in F_\Gamma^-$. Denotaremos a $R(\Gamma)$ como el conjunto de todas funciones racionales que no tienen polos en la curva Γ, mientras que $R_\pm(\Gamma)$ será el conjunto de todas funciones racionales de los cuales sus polos son localizados en $F_\Gamma^\pm$. Una integral de la forma

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau \quad (t \in \Gamma)$$

entendida en el sentido del valor principal de Cauchy será referida como una integral singular a lo largo de la curva no simple Γ. El valor de esta integral será denotada por $(S_\Gamma\varphi)(t)$.

Teorema 1.1. *Sea Γ una curva cerrada no simple, $r_+ \in R_+(\Gamma)$, $r_- \in R_-(\Gamma)$ y $r_-(\infty) = 0$. Entonces las ecuaciones:*

$$(S_\Gamma r_+)(t) = r_+(t), \qquad (S_\Gamma r_-)(t) = -r_-(t)$$

se cumplen para cada punto no singular $t \in \Gamma$.

Demostración:
Sea $r_+ \in R^+(\Gamma)$, como la función $(r_+(\tau) - r_+(t))(\tau - t)^{-1}$ es holomorfa en F_Γ^+, tenemos

$$(S_\Gamma r_+)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{r_+(\tau) - r_+(t)}{\tau - t} d\tau + \frac{r_+(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{d\tau}{\tau - t} = r_+(t).$$

Ahora denotamos a $r(t) = (t - \alpha)^{-n}$, donde $\alpha \in F_\Gamma^+$ y n es un número natural. En este caso obtenemos que

$$\frac{r(\tau) - r(t)}{\tau - t} = -\sum_{k=0}^{n-1} (t-\alpha)^{k-n}(\tau - \alpha)^{-k-1}$$

y consecuentemente

$$(S_\Gamma r)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{r(\tau) - r(t)}{\tau - t} d\tau + \frac{r(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{d\tau}{\tau - t} = -2r(t) + r(t) = -r(t).$$

Ya que asumimos que $r_-(\infty) = 0$, la función $r_-(t)$ puede ser representada en la forma

$$r_-(t) = \sum_{m=1}^{N} \frac{A_m}{(t - \alpha_m)^{n_m}} \quad (\alpha_m \in F_\Gamma^+, \quad A_m = cte., n_m \in \mathbb{N}).$$

Más aún, $(S_\Gamma r_-)(t) = -r_-(t)$, donde t es un arbitrario punto no singular de la curva Γ. ∎

Denotaremos a $R_-^0(\Gamma)$ como el conjunto de todas las funciones de $R_-(\Gamma)$ que son cero en el infinito. Podemos notar que cada función $r \in R(\Gamma)$ puede ser representada de forma única como $r = r_- + r_+$, donde $r_+ \in R_+(\Gamma)$ y $r_- \in R_-^0(\Gamma)$, obteniendo la siguiente consecuencia.

Corolario 1.1. *Sea Γ una curva cerrada no simple, $r \in R(\Gamma)$, $r = r_- + r_+$ y $r_1 = r_- - r_+$, donde $r_+ \in R_+(\Gamma)$ y $r_- \in R_-^0(\Gamma)$. Entonces:*

$$(S_\Gamma r) = r_1(t), \qquad (S_\Gamma r_1) = r(t),$$

donde t es algún punto no singular en la curva Γ. En particular, en esos puntos

$$(S_\Gamma^2 r)(t) = r(t).$$

1.1. Espacios $L_p(\Gamma, \rho)$

Sea Γ una curva no simple, sean $t_1, ..., t_m$ diferentes puntos en Γ, $\beta_1, ..., \beta_m$ números reales y ρ una función definida por la ecuación

$$\rho(t) = \prod_{k=1}^{m} |t - t_k|^{\beta_k}.$$

Denotaremos a $L_p(\Gamma, \rho)$ como el espacio de Banach de funciones (clases de funciones) sumables en la curva Γ a la p-ésima potencia con peso ρ. La norma en $L_p(\Gamma, \rho)$ esta dada por

$$\|\varphi\|_{L_p(\Gamma,\rho)} := \left(\int_{\Gamma} |\varphi(t)|^p \rho(t) |dt| \right)^{1/p},$$

donde $|dt|$ es la diferencial de longitud de arco. Si los números β_k satisfacen la condición $\beta_k > -1 (k = 1, ..., m)$, entonces $\rho \in L_1(\Gamma)$ y, consecuentemente, cada función φ continua en Γ pertenece al espacio $L_p(\Gamma, \rho)$.

Teorema 1.2. *Sea $\beta_k > -1 (k = 1, ..., m)$. Entonces el conjunto de funciones que son continuas en Γ es denso en el espacio $L_p(\Gamma, \rho)$.*

Demostración:
Si $\varphi \in L_p(\Gamma, \rho)$, entonces $\varphi \cdot \rho^{1/p} \in L_p(\Gamma)$. Entonces la función $\varphi \cdot \rho^{1/p}$ puede ser aproximada en la norma del espacio $L_p(\Gamma)$ por funciones continuas φ_n que son cero en una vecindad de los puntos $t_1, ..., t_m$. La función $\psi_n = \varphi_n \rho^{-1/p}$ es continua en Γ y $\|\psi_n - \varphi\|_{L_p(\Gamma,\rho)} = \|\varphi_n \rho^{-1/p} - \varphi\|_{L_p(\Gamma)} = \|\varphi_n - \varphi \rho^{1/p}\|_{L_p(\Gamma)} \to 0$, cuando $n \to \infty$. ■

Corolario 1.2. *Si los números β_k satisfacen las condiciones*

$$\beta_k > -1 \quad (k = 1, ..., m),$$

entonces el conjunto $R(\Gamma)$ es denso en el espacio $L_p(\Gamma, \rho)$.

1.2. Teoremas de interpolación

Teorema 1.3. *Si el operador A es acotado en los espacios $L_{p_1}(\Gamma)$ y $L_{p_2}(\Gamma)$, entonces es acotado en los espacios $L_p(\Gamma)$ para todo p en el intervalo $p_1 < p < p_2$, donde $\|A\|_{L_p(\Gamma)} \leq \|A\|^t_{L_{p_1}(\Gamma)} \|A\|^{1-t}_{L_{p_2}(\Gamma)}$ con $t := p_1(p_2 - p)/[p(p_2 - p_1)]$.*

Teorema 1.4. *Sean h_1 y h_2 funciones medibles en Γ, y sea A un operador lineal que es acotado en los espacios $L_{p_1}(\Gamma, h_1)$ y $L_{p_2}(\Gamma, h_2)$. Entonces el operador A es acotado en los espacios $L_p(\Gamma, h)$, donde p es algún número en el intervalo $p_1 \leq p \leq p_2$, $h^{1/p} := h_1^{t/p_1} h_2^{(1-t)/p_2}$ y $t := p_1(p_2 - p)/[p(p_2 - p_1)]$. Más aún*

$$\|A\|_{L_p(\Gamma,h)} \leq \|A\|^t_{L_{p_1}(\Gamma,h_1)} \|A\|^{t-1}_{L_{p_2}(\Gamma,h_2)}.$$

1.3. Acotación del operador S_Γ en los espacios $L_p(\Gamma)$

Una curva cerrada orientada en el plano $\mathbb{C}$ que acota a un dominio simplemente conexo y que satisfaga la condición de Lyapunov, será denotada como una curva cerrada simple. El operador S_Γ es llamado el operador integral singular sobre Γ.

Teorema 1.5. *Sea Γ una curva cerrada simple. Si el número p satisface la condición $1 < p < \infty$, entonces el operador S_Γ de integración singular sobre la curva Γ es acotado en el espacio $L_p(\Gamma)$.*

Será necesario mostrar tres lemas para poder probar el anterior teorema.

Lema 1.1. *Sea $1 < p < \infty$ y sea $\boldsymbol{T}$ el círculo unitario con centro en el punto $z = 0$. Entonces el operador $S_0 = S_{\boldsymbol{T}}$ es acotado en el espacio $L_p(\boldsymbol{T})$. Además la estimación*

$$\| S_0 \|_{L_p(\Gamma)} \leq \begin{cases} \cot \frac{\pi}{2p} & si\ p = 2^n \ (n=1,2,\ldots), \\ \tan \frac{\pi}{2p} & si\ p = \frac{2^n}{2^n-1} \ (n=1,2,\ldots) \end{cases}$$

es válida.

Demostración:
Sea $\varphi_m(t) = t^m$ ($|t| = 1; m = 0, \pm 1, ...$). Del Teorema 1.1 tenemos la siguiente igualdad

$$(S_0\varphi_m)(t) = \begin{cases} \varphi_m(t) & \text{si } m \geq 0, \\ -\varphi_m(t) & \text{si } m < 0; \end{cases}$$

como el sistema $\{\varphi_m\}_{-\infty}^{+\infty}$ constituye una base ortogonal en el espacio $L_2(\mathbf{T})$, el operador S_0 definido en la cubierta lineal de esta base es acotado en $L_2(\mathbf{T})$, y $\|S_0\|_{L_2(\mathbf{T})} = 1$.
Sea $\varphi(t) := \sum_{k=-N}^{N} a_k t^k$ un polinomio trigonométrico, $\varphi_+(t) := \sum_{k=0}^{N} a_k t^k$ y $\varphi_-(t) := \sum_{k=-N}^{-1} a_k t^k$. Debido a que $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$ y $S_0\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$, el Teorema 1.1 implica

$$\varphi^2 + (S_0\varphi)^2 = 2(\varphi_+^2 + \varphi_-^2) = 2S_0(\varphi_+^2 - \varphi_-^2) = 2S_0(\varphi S_0\varphi),$$

por lo tanto $(S_0\varphi)^2 = 2S_0(\varphi S_0\varphi) - \varphi^2$. De esta igualdad tenemos

$$\|(S_0\varphi)^2\|_{L_p(\mathbf{T})} \leq \|2S_0(\varphi S_0\varphi)\|_{L_p(\mathbf{T})} + \|\varphi^2\|_{L_p(\mathbf{T})}.$$

Por virtud de $\|\varphi^2\|_{L_p(\mathbf{T})} = \|\varphi\|^2_{L_{2p}(\mathbf{T})}$ y $\|\varphi\psi\|_{L_p(\mathbf{T})} \leq \|\varphi\|_{L_{2p}(\mathbf{T})}\|\psi\|_{L_{2p}(\mathbf{T})}$, tenemos $\|S_0\varphi\|^2_{L_{2p}(\mathbf{T})} \leq 2\|S_0\|_{L_p(\mathbf{T})}\|\varphi\|_{L_{2p}(\mathbf{T})}\|S_0\varphi\|_{L_{2p}(\mathbf{T})} + \|\varphi\|^2_{L_{2p}(\mathbf{T})}$. Consecuentemente si el operador S_0 es acotado en el espacio $L_p(\mathbf{T})$, es cierta la desigualdad

$$\frac{\|S_0\varphi\|_{L_{2p}(\mathbf{T})}}{\|\varphi\|_{L_{2p}(\mathbf{T})}} \leq \|S_0\|_{L_p(\mathbf{T})} + \sqrt{1 + \|S_0\|^2_{L_p(\mathbf{T})}}.$$

Así el operador S_0 es acotado en el espacio $L_{2p}(\Gamma)$ y

$$\|S_0\|_{L_{2p}(\mathbf{T})} \leq \|S_0\|_{L_p(\mathbf{T})} + \sqrt{1 + \|S_0\|^2_{L_p(\mathbf{T})}}.$$

La última relación implica que el operador S_0 es acotado en todos los espacios $L_{2^n}(\mathbf{T}), n = 1, 2, ...,$ y

$$\|S_0\|_{L_{2^{n+1}}(\mathbf{T})} \leq \|S_0\|_{L_{2^n}(\mathbf{T})} + \sqrt{1 + \|S_0\|^2_{L_{2^n}(\mathbf{T})}}$$

Haciendo inducción sobre n se puede verificar la primer relación del lema. De este resultado y del primer teorema de interpolación obtenemos la acotación del operador S_0 en el espacio $L_p(\mathbf{T})$ para cualquier p en el intervalo $2 \leq p < \infty$.
Ahora tomamos un punto p del intervalo $1 < p < 2$ y $q := p(p-1)^{-1}$. Ya que para un par arbitrario de polinomios trigonométricos

$$\varphi(t) = \sum_{k=-N}^{N} \xi_k t^k, \qquad \psi(t) = \sum_{k=-N}^{N} \eta_k t^k$$

las igualdades

$$\int_{\mathbf{T}} \varphi(t)\overline{(S_0\psi)}(t)|dt| = 2\pi \sum_{k=-N}^{N} \varepsilon_k \xi_k \overline{\eta_k} = \int_{\mathbf{T}} (S_0\varphi)(t)\overline{\psi(t)}|dt|$$

son válidas con $\varepsilon_k = 1$ si $k \geq 0$ y $\varepsilon_k = -1$ para $k < 0$, entonces el operador adjunto S_0^* al operador S_0 (actuando en $L_q(\mathbf{T})$) coincide en $R(\mathbf{T})$ con el operador S_0 (actuando en $L_p(\mathbf{T})$). Esto implica la acotación del operador S_0 en el espacio $L_p(\mathbf{T})$, para cualquier p en el intervalo $1 < p \leq 2$. Adicionalmente, de la primer estimación concluimos que para $p = 2^n/(2^n - 1)$

$$\|S_0\|_{L_p(\mathbf{T})} \leq \tan \frac{\pi}{2p}. \quad \blacksquare$$

Lema 1.2. *Sea Γ una curva cerrada simple y $t = \beta(z)$ un mapeo conforme del disco unitario en el dominio F_Γ^+, el cual asumimos es delimitada y acotada por la curva Γ. Entonces la función*

$$k(\zeta, z) := \frac{\beta'(\zeta)}{\beta(z) - \beta(\zeta)} - \frac{1}{z - \zeta} \quad (|\zeta| = 1, \quad |z| \leq 1)$$

admite la estimación

$$|k(\zeta, z)| \leq \frac{c}{|\zeta - z|^\mu},$$

donde c y μ son constantes con $0 < \mu < 1$.

Demostración:
Sean $z, \zeta \in \mathbf{T}$; $z = e^{i\Theta_1}$, $\zeta = e^{i\Theta_0}$ y asumimos $\Theta_0 < \Theta_1$, sin pérdida de generalidad. Más aún, tomamos $\Theta_1 - \Theta_0 \leq \pi/2$. Consideremos $u := e^{i\Theta}$ $(\Theta_0 \leq \Theta \leq \Theta_1)$ y $r := |u - \zeta|$. Entonces $|du| = d\Theta = [\cos(\Theta - \Theta_0)/2]^{-1}dr \leq \sqrt{2}dr$. Como la curva Γ satisface la condición de Lyapunov, la derivada $\beta'(z)$ satisface la condición de Hölder en $\mathbf{T}$ con algún exponente

$\alpha(0 < \alpha < 1)$, es decir, $|\beta'(u) - \beta'(z)| \leq Mr^\alpha$. De esto se sigue que

$$|\beta(z) - \beta(\zeta) - \beta'(\zeta)(z - \zeta)| = \left| \int_\gamma (\beta'(u) - \beta'(\zeta))du \right| \leq M \int_0^{|\zeta - z|} r^\alpha \sqrt{2} dr = M_1 |z - \zeta|^{\alpha+1},$$

donde γ es el arco circular que conecta a los puntos z y ζ.
Una estimación análoga del paso anterior es obtenida para los puntos z, con $|z| < 1$, si definimos $u := \lambda z + (1 - \lambda)\zeta$ $(0 \leq \lambda \leq 1)$ y escogemos a γ como el segmento que une a z y ζ. La condición $\beta'(\zeta) \neq 0(\zeta \in \mathbf{T})$ se satisface por ser un mapeo conforme, y tenemos

$$\left| \frac{\beta(\zeta) - \beta(z)}{\zeta - z} \right| \geq M_2 > 0.$$

De las últimas dos ecuaciones se prueba el lema. ■

Lema 1.3. *Sea Γ una curva cerrada no simple y sea g una función holomorfa en el interior del dominio de F_Γ^+ y continua en cada punto $z \in \overline{F_\Gamma^+}$, con la posible excepción de muchos puntos finitos $t_1, ..., t_n \in \Gamma$. Más aún, sea g la función que satisface la desigualdad*

$$|g(z)| \leq \frac{M}{|z - t_k|^\mu}$$

en una vecindad de los puntos t_k $(k = 1, ..., n)$, donde M es una constante y $0 < \mu < 1$. Entonces

$$\int_\Gamma g(t)dt = 0.$$

Demostración:
Sea $\Gamma_\epsilon := \{t \in \Gamma : |t - t_k| > \epsilon, k = 1, ..., n\}$, $\hat{\gamma}_k = \{z \in \mathbb{C} : |z - t_k| = \epsilon\}$, $\gamma_k = \hat{\gamma}_k \cap F_\Gamma^+$, $\Gamma'_\epsilon := \Gamma_\epsilon \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup ... \cup \gamma_n$ y $\Gamma''_\epsilon := \Gamma \setminus \Gamma_\epsilon$, donde $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeño, así que cualquier círculo $\hat{\gamma}_k$ intersecta la curva Γ solo en dos puntos y todos los círculos están separados uno del otro.
La función g es holomorfa en el conjunto F'_ϵ que es limitado por la curva Γ'_ϵ y continua en $\overline{F'_\epsilon}$. Por lo tanto

$$\int_\Gamma g(t)dt = \int_{\Gamma'_\epsilon} g(t)dt + \int_{\Gamma''_\epsilon} g(t)dt - \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} g(t)dt = \int_{\Gamma''_\epsilon} g(t)dt - \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} g(t)dt.$$

Ya que la función g es sumable en $\Gamma, \Gamma''_\epsilon \subset \Gamma$ y la medida del conjunto Γ''_ϵ tiende a cero conforme $\epsilon \to 0$, entonces $\int_{\Gamma''_\epsilon} g(t)dt$ converge a cero conforme $\epsilon \to 0$. Usando la estimación en las hipótesis del lema se puede verificar que el segundo término del lado derecho converge a cero cuando $\epsilon \to 0$ lo que implica el resultado que queríamos obtener. ■

De estos lemas que acabamos de probar tenemos la siguiente regla de sustitución de variables

$$\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\beta(z)} = \int_{\mathbf{T}} \frac{\varphi(\beta(\zeta))\beta'(\zeta)d\zeta}{\beta(\zeta)-\beta(z)},$$

donde $\varphi \in R(\Gamma)$. Por los anteriores lemas, tenemos que

$$\int_{\mathbf{T}} \left(\frac{\beta'(\zeta)}{\beta(\zeta)-\beta(z)} - \frac{1}{\zeta - z} \right) d\zeta = 0$$

por lo que

$$\int_{\mathbf{T}} \frac{\beta'(\zeta)d\zeta}{\beta(\zeta)-\beta(z)} = \int_{\mathbf{T}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \pi i.$$

Esto implica

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\beta(z)} &= \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)-\varphi(\beta(z))}{\tau-\beta(z)} d\tau + \varphi(\beta(z))\pi i \\
&= \int_{\mathbf{T}} \frac{\varphi(\beta(\zeta))-\varphi(\beta(z))}{\beta(\zeta)-\beta(z)} \beta'(\zeta)d\zeta + \varphi(\beta(z)) \int_{\mathbf{T}} \frac{\beta'(\zeta)d\zeta}{\beta(\zeta)-\beta(z)} \\
&= \int_{\mathbf{T}} \frac{\varphi(\beta(\zeta))\beta'(\zeta)d\zeta}{\beta(\zeta)-\beta(z)}.
\end{aligned}$$

Para la demostración del Teorema 1.5, denotaremos a B como el operador lineal acotado que mapea el espacio $L_p(\Gamma)$ en el espacio $L_p(\mathbf{T})$ acorde a $(B\varphi)(z) := \varphi(\beta(z))$. Definimos $T := BS_\Gamma - S_0 B$ y $\varphi \in R(\Gamma)$. Así, usando las observaciones anteriores, tenemos

$$(T\varphi)(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbf{T}} \left(\frac{\beta'(\zeta)}{\beta(\zeta)-\beta(z)} - \frac{1}{\zeta - z} \right) \varphi(\beta(\zeta)) d\zeta.$$

De esto se sigue que el operador TB^{-1} es un operador integral con kernel $k(\zeta, z)$ permitiendo una estimación como en el Corolario 1.1. Es bien sabido que un operador integral con singularidad débil es acotado en el espacio $L_p(\mathbf{T})$. Ya que el operador S_0 es acotado en $L_p(\mathbf{T})$ y usando el Lema 1.2, tenemos que la ecuación $S_\Gamma = B^{-1}(TB^{-1} + S_0)B$ implica la acotación del operador S_Γ en el espacio $L_p(\Gamma)$. ■

Corolario 1.3. *Sea Γ un arco simple. Entonces el operador S_Γ de integración singular sobre Γ es acotado en el espacio $L_p(\Gamma)$, para cada p en el intervalo $1 < p < \infty$.*

1.4. Curvas no simples

Teorema 1.6. *El operador S_Γ a lo largo de la curva no simple Γ es lineal y acotado en el espacio $L_p(\Gamma)$ para cualquier p en el intervalo $1 < p < \infty$.*

Antes de probar este teorema, mostraremos 2 lemas.

Lema 1.4. *Sea Γ una curva que consiste de dos segmentos Γ_1 y Γ_2, que tienen como punto común a z_0. Entonces el operador $S_{\Gamma_1\Gamma_2}$ que mapea el espacio $L_p(\Gamma_1)$ en el espacio $L_p(\Gamma_2)$ $(1 < p < \infty)$ según la formula*

$$(S_{\Gamma_1,\Gamma_2}\varphi)(t) := \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (t \in \Gamma_2)$$

es un operador lineal acotado.

Demostración:
Sea $\varphi \in L_p(\Gamma_1)$ y $\psi \in L_q(\Gamma_2)$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$. Denotaremos con las misma letra φ y ψ a las funciones que son extendidas a cero fuera de Γ_1 y Γ_2 en los rayos originados en el punto z_0 y que contiene los segmentos Γ_1 y Γ_2, respectivamente. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $z_0 = 0$ y $\Gamma_1 \subset [0, +\infty]$. Sea σ el número complejo de tal forma que el rayo σy $(0 \leq y < \infty)$ contiene el segmento Γ_2. Entonces por el teorema de Fubini tenemos

$$\left| \int_{\Gamma_2} \overline{\psi(t)} |dt| \int_{\Gamma_1} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} \right| \leq |\sigma| \int_0^\infty dy \int_0^\infty \frac{|\psi(\sigma y)||\varphi(x)| dx}{|x - \sigma y|}$$
$$= |\sigma| \int_0^\infty dy \int_0^\infty \frac{|\psi(\sigma y)||\varphi(sy)| ds}{|s - \sigma|} = |\sigma| \int_0^\infty \frac{ds}{|s - \sigma|} \int_0^\infty |\psi(\sigma y)||\varphi(sy)| dy.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$\left| \int_{\Gamma_2} \overline{\psi(t)} |dt| \int_{\Gamma_1} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} \right| \leq |\sigma| \int_0^\infty \frac{ds}{|s - \sigma|} \left(\int_0^\infty |\varphi(sy)|^p dy \right)^{1/p} \left(\int_0^\infty |\psi(\sigma y)|^q dy \right)^{1/q},$$

es decir,

$$\left| \int_{\Gamma_2} \overline{\psi(t)} |dt| (S_{\Gamma_1\Gamma_2}\varphi)(t) \right| \leq |\sigma|^{1/p} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{1/p}|s - \sigma|} \|\varphi\|_{L_p(\Gamma_1)} \|\psi\|_{L_q(\Gamma_2)}.$$

De esto se sigue que el operador $S_{\Gamma_1\Gamma_2} : L_p(\Gamma_1) \to L_p(\Gamma_2)$ es acotado. ∎

Lema 1.5. *Sea z_0 el punto que divide a una curva no cerrada Γ en dos arcos simples Γ_1 y Γ_2 y asumimos que las tangentes de esos dos arcos no coinciden en el punto z_0. Entonces el operador*

$$(S_{\Gamma_1\Gamma_2})(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (t \in \Gamma_2)$$

de integración singular sobre Γ_1 es lineal y acotado como un operador de $L_p(\Gamma_1)$ en $L_p(\Gamma_2)$ para cualquier $1 < p < \infty$.

Demostración:
Denotaremos por γ_1 y γ_2 a dos segmentos en las tangentes de los arcos Γ_1 y Γ_2 respectivamente, en el punto z_0. Sea $t = \beta(z)$ un mapeo inyectivo del polígono $\gamma := \gamma_1 \cup \gamma_2$ en la curva Γ. Como Γ_1 y Γ_2 satisfacen la condición de Lyapunov, la función β puede ser escogida de tal manera que

su derivada β' satisfaga la condición de Hölder en γ. Sea $B_k : L_p(\Gamma_k) \to L_p(\gamma_k) \quad (k=1,2)$ el operador definido por $(B_k\varphi)(z) := \varphi(\beta(z)), z \in \gamma_k$. Así el operador $T = B_2 S_{\Gamma_1\Gamma_2} B_1^{-1} - S_{\gamma_1\gamma_2}$ es un operador integral con kernel

$$k(z,\zeta) := \frac{1}{\pi i}\left(\frac{\beta'(\zeta)}{\beta(\zeta)-\beta(z)} - \frac{1}{\zeta - z}\right) \quad (z \in \gamma_2, \zeta \in \gamma_1).$$

Por el Lema 1.2, el kernel $k(z,\zeta)$ tiene una singularidad débil en el punto $\zeta = z$. Por lo que el operador T mapea el espacio $L_p(\gamma_1)$ en $L_p(\Gamma_2)$ y es acotado. Es suficiente con tomar la igualdad $S_{\Gamma_1\Gamma_2} = B_2^{-1}(T + S_{\gamma_1\gamma_2}B_1)$, como en el lema anterior, para completar la prueba de este lema. ■

Para la demostración del Teorema 1.6 tomaremos la curva Γ como la unión de muchos arcos simples finitos $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$ satisfaciendo la siguiente condición. Cada par de arcos Γ_j y Γ_k poseen no más de un punto en común que no es punto interior de alguno de los dos arcos. Si el arco $\Gamma_j \cup \Gamma_k$ no es Lyapunov, entonces las tangentes a Γ_j y Γ_k en el punto en común no coinciden. Denotaremos a $S_{\Gamma_j\Gamma_k}$ como el operador de integración singular sobre el arco Γ_j mapeando el espacio $L_p(\Gamma_j)$ en el espacio $L_p(\Gamma_k)$. Para $j = k$ podemos usar el Corolario 1.3 y así saber que es acotado. Si Γ_j y Γ_k tiene un punto en común y el arco $\Gamma_{jk} = \Gamma_j \cup \Gamma_k$ no es Lyapunov, entonces por el Lema 1.5 el operador $S_{\Gamma_j\Gamma_k}$ es acotado. Sea Γ_{jk} un arco de Lyapunov, el operador $S_{\Gamma_{jk}}$ es acotado en el espacio $L_p(\Gamma_{jk})$ por el Corolario 1.3. De la estimación

$$\|S_{\Gamma_j\Gamma_k}\varphi\|_{L_p(\Gamma_k)} \leq \|S_{\Gamma_{jk}}\hat{\varphi}\|_{L_p(\Gamma_{jk})} \leq \|S_{\Gamma_{jk}}\|\|\varphi\|_{L_p(\Gamma_j)},$$

donde $\hat{\varphi}$ es una extensión de la función $\varphi \in L_p(\Gamma_j)$ en la curva Γ_{jk} que es igual a cero en Γ_k, el operador $S_{\Gamma_j\Gamma_k}$ es acotado también en este caso. Si los arcos Γ_j y Γ_k no tienen puntos en común, entonces el operador $S_{\Gamma_j\Gamma_k}$ es un operador integral con kernel continuo, que también es acotado.
Sea χ_j la función característica del arco Γ_j. Entonces

$$\|\chi_k S_\Gamma \chi_j\|_{L_p(\Gamma)} \leq \|S_{\Gamma_j\Gamma_k}\|\|\varphi\|_{L_p(\Gamma)}.$$

Consecuentemente, el operador $\chi_k S_\Gamma \chi_j I$, es acotado en el espacio $L_p(\Gamma)$ porque de

$$S_\Gamma = \sum_{j,k=1}^{n} \chi_k S_\Gamma \chi_j I,$$

tenemos que el operador S_Γ es acotado en el espacio $L_p(\Gamma)$. ■

Teorema 1.7. *Para cualquier curva cerrada Γ y para cada p $(1 < p < \infty)$, la igualdad*

$$S_\Gamma^2\varphi = \varphi \quad (\varphi \in L_p(\Gamma))$$

es válida.

Este resultado se obtiene de la acotación del operador S y del Teorema 1.2.

Teorema 1.8. *Sea Γ una curva rectificable en el plano y sea $\Gamma(z_0, r)$ la parte de esta curva que está en el disco $B(z_0, r)$ de radio r con centro en el punto z_0. Si el operador S es acotado en el espacio $L_2(\Gamma)$, entonces*

$$\sup_{z\in\Gamma}\sup_{r>0}\frac{1}{r}|\Gamma(z,r)| < \infty.$$

Demostración:
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que Γ es un conjunto conexo y $0 < r < d/6$, donde $d = \sup\{|z-\zeta| : z, \zeta \in \Gamma\}$. Asumiremos por el contrario que el operador S_Γ es acotado en el espacio $L_2(\Gamma)$, pero

$$\sup_{z\in\Gamma}\sup_{0<r<d/6}\frac{1}{r}|\Gamma(z,r)| = \infty.$$

En este caso existe una $\zeta \in \Gamma$ y un número $\rho \in (0, d/6)$ tal que

$$\frac{1}{\rho}|\Gamma(\zeta,\rho)| > (32\|S_\Gamma\|_{L_2(\Gamma,\rho)})^2.$$

Colocando tres discos concéntricos con centro en el punto ζ y radios $\rho, 2\rho, 3\rho$ con dos líneas ortogonales que pasan por el punto ζ. Estas líneas rectas dividen el anillo $2\rho \le |z-\zeta| \le 3\rho$ (y el disco $|z-\zeta| \le \rho$) en cuatro conjuntos M_k (M^k, respectivamente) ($k = 1, 2, 3, 4$). Denotaremos Γ_k (Γ^k) la parte de la curva Γ que está en M_k (M^k, respectivamente). Como la curva Γ es conexa y $3\rho < d/2$, entonces $|\Gamma_1| + |\Gamma_2| + |\Gamma_3| + |\Gamma_4| \ge \rho$, es decir, para algún número m ($1 \le m \le 4$) tenemos que $|\Gamma_m| \ge \rho/4$. Más aún, para al menos un número n ($1 \le n \le 4$), $|\Gamma^n| \ge |\Gamma(\zeta,\rho)|/4$. Sea $\tau - t = |\tau - t|e^{i\alpha(\tau,t)}$, se puede notar que si $\tau \in \Gamma_m$ y $t \in \Gamma^n$, la función $\alpha(\tau, t)$ no excede $2\pi/3$. Sea μ el valor medio de la función $\alpha(\tau, t)$. Entonces

$$\cos(\alpha(\tau,t)-\mu) \ge \frac{1}{2}, \quad |\tau - t| \le 4\rho \quad (\tau \in \Gamma_m, t \in \Gamma^n).$$

Definimos la función $\varphi(t)$ como

$$\varphi(t) := \begin{cases} h^{-1}(t) & \text{si } t \in \Gamma_m, \\ 0 & \text{si } t \in \Gamma\backslash\Gamma_n, \end{cases}$$

donde $dt = h(t)|dt|$ sobre Γ.
Primero consideremos la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t}\right|^2 &= \left|\int_{\Gamma_m} \frac{e^{-i\alpha(\tau,t)}|d\tau|}{|\tau - t|}\right|^2 \\
&= \left(\int_{\Gamma_m} \frac{\cos\alpha(\tau,t)|d\tau|}{|\tau - t|}\right)^2 + \left(\int_{\Gamma_m} \frac{\sin\alpha(\tau,t)|d\tau|}{|\tau - t|}\right)^2 \\
&\geq \left(\int_{\Gamma_m} \frac{\cos(\alpha(\tau,t) - \mu)|d\tau|}{|\tau - t|}\right)^2 \geq \frac{1}{64\rho^2}|\Gamma_m|^2.
\end{aligned}$$

Tomando en cuenta esta estimación, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|S_\Gamma\varphi\|^2 = \int_\Gamma |dt|\left|\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t}\right|^2 &\geq \frac{|\Gamma_m|^2}{64\rho^2}\int_{\Gamma^n}|d\tau| = \frac{|\Gamma^n||\Gamma_m|^2}{64\rho^2} \\
= \frac{\|\varphi\|^2|\Gamma^n||\Gamma_m|}{64\rho^2} &\geq \frac{\|\varphi\|^2}{64\rho^2}\frac{\rho|\Gamma(\zeta,\rho)|}{16} > \|S_\Gamma\|^2\|\varphi\|^2.
\end{aligned}$$

Por lo cual hemos llegado a una contradicción. ■

Teorema 1.9. *Si la curva cerrada rectificable Γ tiene la propiedad de que el operador S_Γ es acotado en el espacio $L_{p_0}(\Gamma)$ para algún p_0 $(1 < p_0 < \infty)$, entonces es acotado en esta curva en el espacio $L_p(\Gamma)$, para arbitrario p $(1 < p < \infty)$.*

Demostración:
Análogamente al Lema 1.1 podemos obtener

$$\|S_\Gamma\|_{L_{2p_0}(\Gamma)} \leq \|S_\Gamma\|_{L_{p_0}(\Gamma)} + \sqrt{1 + \|S_\Gamma\|^2_{L_{p_0}(\Gamma)}}.$$

De aquí se sigue que el operador S_Γ es acotado en todos los espacios $L_{p_n}(\Gamma)$, con $p_n = 2^n p_0$. Para n grande pasamos al operador adjunto y depués hacemos uso de los teoremas de interpolación para los espacios $L_{p_n}(\Gamma)$ y $L_{q_n}(\Gamma)$ $(p_n^{-1} + q_n^{-1} = 1)$. ■

1.5. Operadores integrales en espacios ponderados L_p

Teorema 1.10. *Si los números $p, \beta_1, ..., \beta_n$ satisfacen las condiciones*

$$1 < p < \infty, \quad -1 < \beta_k < p - 1 \quad (k = 1, ..., n),$$

entonces el operador de integración singular S_Γ sobre la curva Γ es acotado en el espacio $L_p(\Gamma, \rho)$. Si la curva Γ es cerrada, tenemos que $S_\Gamma^2 = I$.

Antes de demostrar el teorema, primero se enunciarán dos lemas.

Lema 1.6. *Asumimos que $t_0 \in \Gamma$, $1 < p < \infty$, y sea α un número en el intervalo $-q^{-1} < \alpha < p^{-1}$, donde $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Entonces el operador B definido por la ecuación*

$$(B\varphi)(t) := \int_\Gamma \frac{|\tau - t_0|^\alpha - |t - t_0|^\alpha}{|t - t_0|^\alpha |\tau - t|} \varphi(\tau)|d\tau| \quad (t \in \Gamma)$$

es acotado en el espacio $L_p(\Gamma)$.

Demostración:
Sea $0 \leq \alpha < p^{-1}$ y sea δ un número que satisface la condición $\alpha(p-1) < p\delta < min(p-1, 1-\alpha)$. Para alguna función continua φ en Γ, tenemos la siguiente estimación

$$\begin{aligned} |(B\varphi)(t)| &\leq \int_\Gamma \frac{||\tau - t_0|^\alpha - |t - t_0|^\alpha|}{|t - t_0|^\alpha |\tau - t|} |\varphi(\tau)||d\tau| \\ &\leq \int_\Gamma \frac{|\varphi(\tau)||d\tau|}{|t - t_0|^\alpha |\tau - t|^{1-\alpha}} \\ &= \frac{1}{|t - t_0|^\alpha} \int_\Gamma \frac{|\tau - t_0|^\delta |\varphi(\tau)||d\tau|}{|\tau - t|^{1-\alpha} |\tau - t_0|^\delta} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{|t - t_0|^\alpha} \left(\int_\Gamma \frac{|\tau - t_0|^{\delta p} |\varphi(\tau)|^p |d\tau|}{|\tau - t|^{1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Gamma \frac{|d\tau|}{|\tau - t|^{1-\alpha} |\tau - t_0|^{\delta q}} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Se puede probar que para $\beta < 1, \gamma < 1$ y $\beta + \gamma > 1$, la sustitución $\tau - t = \zeta(t - t_0)$ nos da la desigualdad

$$\int_\Gamma \frac{|d\tau|}{|\tau - t|^\beta |\tau - t_0|^\gamma} \leq \frac{c}{|t - t_0|^{\beta + \gamma - 1}},$$

donde c es alguna constante. De la siguiente ecuación

$$|(B\varphi)(t)| \leq \frac{c_1}{|t - t_0|^{\delta + \frac{\alpha}{p}}} \left(\int_\Gamma \frac{|\tau - t_0|^{\delta p} |\varphi(\tau)|^p |d\tau|}{|\tau - t|^{1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \|B\varphi\|^p_{L_p(\Gamma)} &\leq c_2 \int_\Gamma \frac{|dt|}{|t - t_0|^{\alpha + \delta p}} \int_\Gamma \frac{|\tau - t_0|^{\delta p} |\varphi(\tau)|^p |d\tau|}{|\tau - t|^{1-\alpha}} \\ &= c_2 \int_\Gamma \frac{|\varphi(\tau)|^p |d\tau|}{|\tau - t_0|^{-\delta p}} \int_\Gamma \frac{|dt|}{|t - t_0|^{\alpha + \delta p} |\tau - t|^{1-\alpha}} \\ &\leq c_3 \|\varphi\|^p_{L_p(\Gamma)}, \end{aligned}$$

donde c_1, c_2, c_3 son ciertas constantes.
Ahora consideremos el caso cuando $-q^{-1} < \alpha < 0$. Sea $\beta = -\alpha$. Por lo anterior probado,

tenemos que el operador definido por

$$(C\psi)(t) := \int_\Gamma \frac{|\tau - t_0|^\beta - |t - t_0|^\beta}{|t - t_0|^\beta |\tau - t|} \psi(\tau)|d\tau|$$

es acotado en el espacio $L_q(\Gamma)$. Además podemos observar que el operador C^* que actúa en el espacio $L_p(\Gamma)$ coincide con el operador B, lo que implica su acotación en el espacio $L_p(\Gamma)$. ■

Lema 1.7. *Supongamos que $t_1, ..., t_n \in \Gamma$ y sean $p, \alpha_1, ..., \alpha_n$ números que satisfacen las condiciones*

$$1 < p < \infty, \quad -\frac{1}{q} < \alpha_k < \frac{1}{p} \quad (k = 1, ..., n; \quad p^{-1} + q^{-1} = 1).$$

Entonces el operador $A = h^{-1} S_\Gamma h I$, con $h := \prod_{k=1}^n |t - t_k|^{\alpha_k}$, es acotado en el espacio $L_p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$.

Demostración:
Sean $\gamma_k \in \Gamma$ los arcos que contienen a los puntos t_k $(k = 1, ..., n)$, pero no a los puntos t_j para $k \neq j$. Supongamos también que los arcos γ_k tienen distancia positiva de cada uno de los otros arcos. Sea $\gamma_0 = \Gamma \setminus \cup_{k=1}^n \gamma_k$ y R_k $(k = 1, ..., n)$ el operador definido por la ecuación $(R_k\varphi)(t) := \chi_k(t)\varphi(t)$, donde $\chi_k(t)$ es la función característica en el conjunto γ_k. El operador A puede ser representado en la forma

$$A = \left(\sum_{j=0}^n R_j \right) A \left(\sum_{k=0}^n R_k \right) = \sum_{j,k=0}^n R_j A R_k.$$

Para probar la acotación de A, se clasificará en 4 clases.
1.-Sea $j = k \neq 0$. El operador $R_k A R_k$ se puede representar en la forma $R_k A R_k = g A_k f I$, donde $A_k := |t - t_k|^{-\alpha_k} S_\Gamma |t - t_k|^{\alpha_k} I$, $g(t) := \chi_k(t) h^{-1} |t - t_k|^{\alpha_k}$ y $f(t) := \chi_k(t) h(t) |t - t_k|^{-\alpha_k}$. Por el Lema 1.6, podemos implicar la acotación del operador $B := A_k - S_\Gamma$ en el espacio $L_p(\Gamma)$. Del Teorema 1.6 tenemos que el operador A_k también es acotado en el espacio $L_p(\Gamma)$. Las funciones g y f también son acotados en Γ con lo que el operador $R_k A R_k$ es acotado.
2.-Supongamos que $k \neq j$ $(k \neq 0,\ j \neq 0)$. En este caso tenemos

$$|(R_j A R_k \varphi)(t)| = \frac{\chi_j(t)}{\pi h(t)} \left| \int_{\gamma_k} \frac{\varphi(\tau) h(\tau)}{\tau - t} d\tau \right| \leq \frac{\|\varphi\|_{L_p(\Gamma)} \|h\|_{L_q(\Gamma)}}{\pi d h(t)},$$

donde d es la distancia entre γ_j y γ_k. Por lo tanto, tenemos la estimación $\|R_j A R_k \varphi\|_{L_p(\Gamma)} \leq (\pi d)^{-1} \|h^{-1}\|_{L_p(\Gamma)} \|h\|_{L_p(\Gamma)} \|\varphi\|_{L_p(\Gamma)}$. Ya que $h \in L_q(\Gamma)$ y $h^{-1} \in L_p(\Gamma)$, el operador $R_j A R_k$ es acotado en el espacio $L_p(\Gamma)$.
3.-Sean $j \neq k$ y alguno de los dos igual a 0. Sea R el operador definido por $R_j + R_k$, tenemos $R_j A R_k = R_j R A R R_k$. La acotación del operador RAR es probada en el caso 1. Así el operador $R_j A R_k$ es acotado en el espacio $L_p(\Gamma)$.
4.-La acotación del operador $R_0 A R_0$ es resultado del Teorema 1.6. ■

Para la demostración del Teorema 1.10 será equivalente a decir que el operador $\rho^{\frac{1}{p}} S_\Gamma \rho^{-\frac{1}{p}} I$ es acotado en el espacio $L_p(\Gamma)$. Debido a las condiciones del teorema, la función $h := \rho^{-\frac{1}{p}}$ cumple la suposición del Lema 1.7 y más aún, el operador $\rho^{\frac{1}{p}} S_\Gamma \rho^{-\frac{1}{p}} I$ es acotado en el espacio $L_p(\Gamma)$. ■

Teorema 1.11. *Sean $p, \beta_1, ..., \beta_n$ números que satisfacen las siguientes condiciones, $1 < p < \infty$, $-1 < \beta_k < p - 1$ y sea $\rho(t) := \prod_{k=1}^n |t - t_k|^{\beta_k}$. Entonces el operador integral T definido de la forma $(T\varphi)(t) := \int_\Gamma k(\tau, t)\varphi(\tau) d\tau$, con kernel k de singularidad débil, es decir, $|k(\tau, t)| \leq c|\tau - t|^{-\mu}$ ($c = cte.$, $0 < \mu < 1$), es compacto en el espacio $L_p(\Gamma, \rho)$.*

Demostración:
Se mostrará que el operador $K = h^{-1}ThI$ es compacto en el espacio $L_p(\Gamma)$, donde h satisface las condiciones del Lema 1.7. Sea

$$k_n(\tau, t) := \begin{cases} k(\tau, t) & \text{si } |\tau - t| \geq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{si } |\tau - t| < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Denotaremos A, A_n y K_n como los operadores integrales con kernel $h^{-1}(t)k(\tau, t)h(\tau) - k(\tau, t)$, $h^{-1}(t)k_n(\tau, t)h(\tau) - k_n(\tau, t)$ y $h^{-1}(t)k_n(\tau, t)h(\tau)$, respectivamente. Ya que los kernels $k_n(\tau, t)$ son acotados, $h \in L_q(\Gamma)$ y $h^{-1} \in L_p(\Gamma)$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$, tenemos

$$\int_\Gamma |dt| \left(\int_\Gamma |h^{-1}(t)k_n(\tau, t)h(\tau)|^q |d\tau| \right)^{p-1} < \infty.$$

Así los operadores K_n son compactos en el espacio $L_p(\Gamma)$ y también se puede deducir la compacidad de los operadores A_n en el espacio $L_p(\Gamma)$. Ahora se mostrará que $lim_{n\to\infty} \|A - A_n\| = 0$. Para esto nombremos al conjunto $M_n = A - A_n$ y a $m_n(\tau, t)$ como el kernel del operador M_n. En el Lema 1.7 fue probado que el operador B, definido por la ecuación

$$(B\varphi)(t) := \int_\Gamma \left| \frac{h^{-1}(\tau)h(t)}{\tau - t} - \frac{1}{\tau - t} \right| \varphi(\tau) |d\tau|,$$

es acotado en el espacio $L_p(\Gamma)$. Denotaremos a $b(\tau, t)$ como el kernel de operador B. Ya que

$$|m_n(\tau, t)| \leq cn^{\mu - 1} b(\tau, t),$$

tenemos que $\|M_n\| \leq cn^{\mu-1}\|B\|$, lo que significa que $\|M_n\| \to 0$, cuando $n \to \infty$.
Esto nos prueba que el operador A es compacto en el espacio $L_p(\Gamma)$. Esto nos implica la compacidad del operador K. ■

Teorema 1.12. *Si la función a es continua en la curva Γ, entonces el operador*

$$T = aS_\Gamma - S_\Gamma aI$$

es compacto en el espacio $L_p(\Gamma, \rho)$.

Demostración:
Tomemos a una función racional sin polos en Γ. Entonces el operador $T = aS_\Gamma - S_\Gamma aI$ es un operador integral con kernel continuo. Esto es, el operador es compacto.
Para una función arbitraria, esta puede ser aproximada uniformemente por funciones racionales $a_n \in R(\Gamma)$, así la sucesión de operadores compactos $T_n := a_n S_\Gamma - S_\Gamma a_n I$ converge uniformemente al operador $T = aS_\Gamma - S_\Gamma aI$, es decir, el operador T es compacto. ■

1.6. Curvas no acotadas

Teorema 1.13. *Si los números $p, \beta, \beta_1, ..., \beta_n$ satisfacen las condiciones*

$$1 < p < \infty, \quad -1 < \beta_k < p-1 \quad (k = 1, ..., n), \quad -1 < \beta + \sum_{k=1}^{n} \beta_k < p-1,$$

entonces el operador integral singular $S_\mathbb{R}$ sobre el eje $\mathbb{R}$ es acotado en el espacio $L_p(\mathbb{R}, \rho)$.

Demostración:
Sean $\mathbf{T}$ el círculo unitario, $\zeta_k := (t_k+i)(t_k-i)^{-1}$ $(k = 1, ..., n)$, $\zeta_0 := 1$, $\beta_0 := p-2-\beta-\sum_{k=1}^{n} \beta_k$ y $h(\zeta) := \prod_{k=0}^{n} |\zeta - \zeta_k|^{\beta_k}$. Para probar que el operador B definido por

$$(B\varphi)(\zeta) := \frac{1}{\zeta - 1}\varphi\Big(i\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\Big)$$

es un operador lineal acotado que mapea el espacio $L_p(\mathbb{R}, \rho_0)$ en el espacio $L_p(\mathbf{T}, h)$, donde $\rho_0(t) := |t-i|^\beta \prod_{k=1}^{n} |t - t_k|^{\beta_k}$, tomaremos a $\varphi \in L_p(\mathbb{R}, \rho_0)$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \| B\varphi \|_{L_p(\mathbf{T},h)} &= \int_{\mathbf{T}} \Big|\varphi\Big(i\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\Big)\Big|^p h(\zeta)|\zeta - 1|^{-p}|d\zeta| \\ &\leq c\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\tau)|^p \rho_0(\tau)d\tau \\ &= c \| \varphi \|^p_{L_p(\mathbb{R},\rho_0)}, \end{aligned}$$

donde c es alguna constante. El operador B es invertible y además

$$(B^{-1}\psi)(t) = \frac{2i}{t-i}\psi\Big(\frac{t+i}{t-i}\Big).$$

Por el Teorema 1.10, el operador S_0 de integración singular sobre $\mathbf{T}$ es acotado en el espacio $L_p(\mathbf{T}, h)$. Más aún el operador $B^{-1}S_0B$ es acotado en el espacio $L_p(\mathbb{R}, \rho_0)$.
Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función arbitraria finita diferenciable, entonces

$$
\begin{aligned}
(B^{-1}S_0B\varphi)(t) &= \frac{2}{\pi(t-i)}\int_{\mathbf{T}}\frac{\varphi\left(i\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right)d\zeta}{(\zeta-1)(\zeta-\frac{t+i}{t-i})} \\
&= -\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} = -(S_{\mathbb{R}}\varphi)(t).
\end{aligned}
$$

La sustitución de la primera integral es justificada en (MUSSCHELISCHWILI,pág.41). Debemos notar que la función $\varphi[i(\zeta+1)/(\zeta-1)]$ es cero en una vecindad en el punto $\zeta = 1$. De la última igualdad se puede implicar la acotación de $S_{\mathbb{R}}$ en el espacio $L_p(\mathbb{R}, \rho_0)$. ■

Teorema 1.14. *Sea Γ una curva no acotada y no simple, y sean $t_1, ..., t_n$ diferentes puntos en Γ, asumimos que*

$$\rho(t) := |t|^{\beta}\prod_{k=1}^{n}|t-t_k|^{\beta_k},$$

donde $p, \beta, \beta_1, ..., \beta_n$ son números que satisfacen las condiciones

$$1 < p < \infty, \quad -1 < \beta_k < p-1 \quad (k = 1, ..., n), \quad -1 < \beta + \sum_{k=1}^{n}\beta_k < p-1,$$

entonces el operador S_Γ es acotado en el espacio $L_p(\Gamma, \rho)$.

1.7. El operador S_Γ^*

Llamaremos a S_Γ^* el operador adjunto al operador integral singular S_Γ. Sea Γ una curva no simple, $\varphi \in L_p(\Gamma, \rho)$ y $\psi \in L_q(\Gamma, \rho^{1-q})$, donde $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \varphi(t)\overline{\psi}(t)|dt| &= \int_\Gamma \varphi(t)\rho^{\frac{1}{p}}(t)\overline{\psi}(t)\rho^{\frac{-1}{p}}(t)|dt| \\
&\leq \| \varphi \|_{L_p(\Gamma,\rho)} \| \psi \|_{L_q(\Gamma,\rho^{1-q})} .
\end{aligned}
$$

La siguiente afirmación resulta del teorema de Riesz en su forma general de funcionales lineales acotadas en $L_p(\Gamma)$.
El espacio adjunto a $L_p(\Gamma, \rho)$ es el espacio $L_q(\Gamma, \rho^{1-q})$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$. Esto quiere decir que cada funcional lineal continua de $L_p^*(\Gamma, \rho)$ tiene la forma

$$\Psi(\varphi) = \int_\Gamma \varphi(t)\overline{\psi}(t)|dt| \quad (\varphi \in L_p(\Gamma, \rho)),$$

donde $\psi \in L_q(\Gamma, \rho^{1-q})$. Más aún,

$$\|\Psi\|_{L_p^*(\Gamma,\rho)} = \|\psi\|_{L_q(\Gamma,\rho^{1-q})}.$$

Debemos notar que si los números β_k, de la función de peso $\rho(t) = \prod_{k=1}^{n} |t - t_k|^{\beta_k}$, satisfacen la relación

$$-1 < \beta_k < p - 1 \quad (k = 1, ..., n),$$

entonces los números β_k, de la función de peso $\rho^{1-q}(t) = \prod_{k=1}^{n} |t - t_k|^{(1-q)\beta_k}$, satisfacen la siguiente relación

$$-1 < (1 - q)\beta_k < q - 1.$$

Ahora bien, si se satisfacen las dos desigualdades anteriores, entonces, por el Teorema 1.5, el operador S_Γ es acotado en el espacio $L_q(\Gamma, \rho^{1-q})$. Para cada $t \in \Gamma$ podemos denotar

$$dt = h_\Gamma(t)|dt|,$$

donde $h_\Gamma(t) := e^{i\Theta_\Gamma(t)}$ y $\Theta_\Gamma(t)$ es el ángulo de inclinación de la curva Γ en el punto t con respecto al lado positivo del eje x.

Teorema 1.15. *Sea Γ una curva no simple y sea $\rho(t)$ la función de peso que satisface $-1 < \beta_k < p - 1$ $(k = 1, ..., n)$. Entonces podemos relacionar el operador S_Γ^* con el operador S_Γ en el espacio $L_q(\Gamma, \rho^{1-q})$ por la ecuación*

$$S_\Gamma^* = -H_\Gamma S_\Gamma H_\Gamma,$$

donde H_Γ es un operador definido en el espacio $L_q(\Gamma, \rho^{1-q})$ por la relación

$$(H_\Gamma\varphi)(t) := \overline{h_\Gamma(t)\varphi(t)}.$$

Demostración:
Sean φ y $\psi \in R(\Gamma)$. Cambiando el orden de singularidad y las integrales ordinarias (MUSSCHELISCHWILI, pág. 105), tenemos

$$\begin{aligned}
(S_\Gamma\varphi, \psi) &= \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \overline{\psi}(t)|dt| \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \\
&= -\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \varphi(t)h_\Gamma(t)dt \int_\Gamma \frac{\overline{\psi}(\tau)h_\Gamma^{-1}(\tau)d\tau}{\tau - t} \\
&= -(\varphi, \overline{H_\Gamma S_\Gamma H_\Gamma\psi}).
\end{aligned}$$

Por lo que $S_\Gamma^*\psi = -H_\Gamma S_\Gamma H_\Gamma\psi$. ■

Teorema 1.16. *Sea Γ una curva compuesta. Si el operador S_Γ es autoadjunto en el espacio $L_2(\Gamma)$, entonces Γ es un círculo, una parte de un círculo o una parte de una línea recta.*

Demostración:
Asumiendo que $S_\Gamma = S_\Gamma^*$, tenemos la siguiente ecuación

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \left(\frac{1}{\tau - t} - \frac{h^{-1}(t)h^{-1}(\tau)}{\overline{\tau} - \overline{t}}\right)\varphi(\tau)d\tau = ((S_\Gamma - S_\Gamma^*)\varphi)(t) \equiv 0$$

para alguna función $\varphi \in L_2(\Gamma)$. Esto implica que

$$(\overline{\tau} - \overline{t})h(t)h(\tau) \equiv \tau - t.$$

Sea $t = t(s)$ la función identidad en Γ. Ya que $dt = h(t)ds$, tenemos que $h(t(s)) = t'(s)$. Y podemos reescribir $(\overline{\tau} - \overline{t})h(t)h(\tau) \equiv \tau - t$ de la siguiente forma

$$t'(s)t'(s_0) = \frac{t(s) - t(s_0)}{\overline{t(s)} - \overline{t(s_0)}}.$$

De esta ecuación obtenemos que la función $t(s)$ es infinitamente diferenciable. Ahora podemos derivar de ambos lados la siguiente identidad

$$(\overline{t(s_0)} - \overline{t(s)})t'(s)t'(s_0) = t(s_0) - t(s),$$

primero lo haremos con respecto a s y después con respecto a s_0. Así, obtenemos

$$\overline{t'(s)}t'(s)t'(s_0) - (\overline{t(s_0)} - \overline{t(s)})t''(s)t'(s_0) = t'(s)$$

y

$$\overline{t'(s_0)}t'(s)t'(s_0) + (\overline{t(s_0)} - \overline{t(s)})t'(s)t''(s_0) = t'(s_0).$$

Dado que $t'(s)\overline{t'(s)} \equiv 1$, si sumando las dos últimas ecuaciones tenemos que

$$(\overline{t(s_0)} - \overline{t(s)})(t'(s)t''(s_0) - t''(s)t'(s_0)) = 0.$$

Pero la función $t(s)$ no puede ser constante. De la siguiente ecuación

$$\frac{t''(s)}{t'(s)} = \frac{t''(s_0)}{t'(s_0)}$$

podemos observar que $\frac{t''(s)}{t'(s)}$ es constante $(= k)$. Esto nos da que $t(s) = ce^{ks} + c_1$ si $k \neq 0$. Con la consideración que $|t'(s)| \equiv 1$ obtenemos que $Re\ k = 0$, que implica que $t(s)$ es o bien un círculo o parte de él. Para $k = 0$ obtenemos la función $t = cs + c_1$. ■

Teorema 1.17. *Sea Γ una curva compuesta y S_Γ^* el operador adjunto de S_Γ (este último actuando en el espacio $L_p(\Gamma,\rho)$). Entonces el operador $T = S_\Gamma^* - S_\Gamma$, que actúa en el espacio $L_q(\Gamma, \rho^{1-q})$, es compacto.*

Demostración:
Para comenzar, sean Γ una curva simple cerrada, $\mathbf{T}$ el círculo unitario y $t = \beta(z)$ un mapeo uniforme del disco unitario en el dominio F_Γ^+. El operador S_Γ puede ser representado en

la forma $S_\Gamma = B^{-1}S_0B + T_1$, donde T_1 es un operador integral con singularidad débil, S_0 el operador integral singular en $\mathbf{T}$ y $(B\varphi)(z) := \varphi(\beta(z))$. Tomamos a $B^* = |dw/dt|B^{-1}$ y $(B^{-1})^* = |d\beta/dz|B$, donde $z = w(t)$ es la función inversa a $t = \beta(z)$. El operador T_1 es compacto por el Teorema 1.11, y por el Teorema 1.12 tenemos que el operador $S_0|\beta'|I - |\beta'|S_0$ es compacto. Finalmente notamos que $S_0^* = S_0$, ya que $\mathbf{T}$ es un círculo. Así,

$$\begin{aligned} S_\Gamma^* - S_\Gamma &= |w'|B^{-1}S_0|\beta'|B + T_1^* - B^{-1}S_0B - T_1 \\ &= |w'||\beta' \circ w|B^{-1}S_0B - B^{-1}S_0B + T_2 \\ &= T_2, \end{aligned}$$

donde $(\beta' \circ w)(t) := \beta'(w(t))$ y T_2 un operador compacto. Ahora consideremos cuando Γ es un arco simple. Sea $\hat{\Gamma}$ una curva cerrada simple que contiene a Γ, y sea $\chi(t)$ $(t \in \hat{\Gamma})$ la función característica en la curva Γ. El espacio $L_p(\Gamma, \rho)$ puede ser identificado de forma natural como el subespacio $\mathbf{N}$, que son todas las funciones que tienen la forma $\chi\hat{\varphi}(\hat{\varphi} \in L_p(\hat{\Gamma}, \rho))$. El subespacio $\mathbf{N}$ es invariante con respecto al operador $A = \chi S_{\hat{\Gamma}} \chi I$, y la restricción de A a $L_p(\Gamma, \rho)$ coincide con el operador S_Γ. Por lo probado anteriormente, tenemos que $A^* = \chi(S_\Gamma + T)\chi I$, donde T es un operador compacto. Esto implica la compacidad del operador $S_\Gamma^* - S_\Gamma$. Ahora pasamos al caso general, donde Γ es una curva compuesta que consiste de arcos simples y curvas cerradas simples $\Gamma_1, .., \Gamma_m$. Sea χ_j la función característica en la curva Γ_j y R_j el operador definido en el espacio $L_p(\Gamma, \rho)$ por la ecuación $R_j = \chi_j I$. Así $S_\Gamma = \sum_{j,k=1}^m R_j S_\Gamma R_k$. Los operadores $R_j S_\Gamma R_k$ $(j \neq k)$ son operadores integrales con kernel continuo, esto es, son compactos. La restricción del operador $R_j S_\Gamma R_j$ al espacio $L_p(\Gamma_j, \rho) = (R_j L_p(\Gamma, \rho))$ coincide con el operador S_{Γ_j}. Por lo anterior probado tenemos que $(R_j S_\Gamma R_j)^* = R_j S_\Gamma R_j + T_j$, donde T_j es un operador compacto. Así, podemos concluir que $S_\Gamma^* - S_\Gamma$ es compacto. ■

Capítulo 2

Operadores invertibles de un lado

2.1. Suma directa de subespacios

Sea B un espacio de Banach. Cualquier conjunto de B que contiene dos vectores y sus combinaciones lineales es llamado una variedad lineal. Una variedad lineal se dice que es un subespacio. El máximo número de vectores linealmente independientes en una variedad lineal es llamada la dimensión de $\mathcal{L}$ ($\dim \mathcal{L}$).

Sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ subespacios de B intersectados solo en el origen. Llamaremos *suma directa* de los subespacios $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ al conjunto de todos los vectores de la forma $x_1 + x_2$, donde x_1 y x_2 están en $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, respectivamente, y lo denotaremos como $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \dot{+} \mathcal{L}_2$.

Teorema 2.1. *Sea B un espacio de Banach y sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ dos de sus subespacios intersectados solo en el origen. Para que la suma directa $\mathcal{L}_1 \dot{+} \mathcal{L}_2$ sea un subespacio es necesario y suficiente que exista una constante $k > 0$ tal que*

$$\|x_1 + x_2\| \geq k(\|x_1\| + \|x_2\|) \quad (x_1 \in \mathcal{L}_1, \quad x_2 \in \mathcal{L}_2)$$

o equivalentemente,

$$\inf_{x_1 \in \mathcal{L}_1, x_2 \in \mathcal{L}_2, \|x_1\| + \|x_2\| = 1} \|x_1 + x_2\| > 0.$$

Demostración:
Suponiendo que $\|x_1 + x_2\| \geq k(\|x_1\| + \|x_2\|)$ se sigue que la convergencia de la sucesión $\{x_1^n + x_2^n\}_1^\infty$ implica la convergencia de las sucesiones $\{x_1^n\}_1^\infty$ y $\{x_2^n\}_1^\infty$. Se puede notar que la suma de los límites está en $\mathcal{L}_1 \dot{+} \mathcal{L}_2$ y es el límite de la sucesión $\{x_1^n + x_2^n\}_1^\infty$.

Ahora asumiremos que la suma directa $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \dot{+} \mathcal{L}_2$ es cerrada. Introduciendo la norma $\|x_1 + x_2\|_N := \|x_1\| + \|x_2\|$ en la suma directa, el espacio $\mathcal{L}_N = \mathcal{L}_1 \dot{+} \mathcal{L}_2$ es un espacio de Banach. El operador identidad I es un mapeo de $\mathcal{L}_N$ en $\mathcal{L}$. Entonces, para un arbitrario vector $x = x_1 + x_2$ $(x_1 \in \mathcal{L}_1,\ x_2 \in \mathcal{L}_2)$, tenemos

$$\|Ix\| = \|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| = \|x\|_N.$$

Ya que $\|I\|_{\mathcal{L}\to\mathcal{L}_N} \leq 1$, el operador I es un mapeo unívoco de $\mathcal{L}_N$ en $\mathcal{L}$. Consecuentemente, por el teorema de mapeos abiertos de Banach, el operador I es también acotado. Así, la desigualdad

$$\|I^{-1}x\|_N = \|x_1\| + \|x_2\| \leq \|I^{-1}\|_{\mathcal{L}\to\mathcal{L}_N} \cdot \|x_2 + x_2\|$$

se cumple para cualquier vector $x = x_1 + x_2$ $(x_1 \in \mathcal{L}_1,\ x_2 \in \mathcal{L}_2)$. Esto implica la primer desigualdad del teorema con $k := \|I^{-1}\|^{-1}_{\mathcal{L}\to\mathcal{L}_N}$. ■

Corolario 2.1. *Si alguno de los subespacios $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ es de dimensión finita, entonces la suma directa $\mathcal{L}_1 \dot{+} \mathcal{L}_2$ es cerrada.*

2.2. El complemento directo

Sea $\mathcal{L}$ un subespacio del espacio de Banach B. El subespacio de Banach $\mathcal{N}$ es llamado el complemento directo de $\mathcal{L}$ en B si $B = \mathcal{N} \dot{+} \mathcal{L}$. La suma directa no es definida unívocamente.

Teorema 2.2. *Cada subespacio con dimensión finita del espacio de Banach B tiene un complemento directo en B.*

Demostración:
Sea $\mathcal{L}$ un subespacio de dimensión finita en el espacio de Banach B. Denotaremos a $x_1, ..., x_k$ como una base de $\mathcal{L}$.

Sean $f_j(\in B^*)$ $(j = 1, ..., k)$ un sistema de funcionales lineales continuas biortogonales al sistema $\{x_j\}_1^k$, que significa que

$$f_p(x_q) = \delta_{pq} \quad (p, q = 1, ..., k).$$

Nombraremos a $\mathcal{N}$ el conjunto de todos los ceros comunes de las funcionales $\{f_j\}_1^k$. Este conjunto es un subespacio. La intersección $\mathcal{N} \cap \mathcal{L}$ consiste solo del origen. Adicionalmente, si el vector x es combinación lineal de los vectores x_j, es decir,

$$x = \sum_{j=1}^{k} \xi_j x_j,$$

y $f_j(x) = 0$ $(j = 1, ..., k)$, entonces $\xi_j = 0$ $(j = 1, ..., k)$ y $x = 0$.
Para arbitrario vector x de B formamos el vector

$$y = x - \sum_{j=1}^{k} f_j(x) x_j.$$

Si $f_j(y) = 0$ $(j = 1, ..., k)$, entonces $y \in \mathcal{N}$. Consecuentemente, B=$\mathcal{L} + \mathcal{N}$. ■

Sea $\mathcal{L}$ una variedad lineal en el espacio de Banach B. La dimensión del espacio cociente $B/\mathcal{L}$ es llamado la *codimensión* de la variedad lineal $\mathcal{L}$. La codimensión de $\mathcal{L}$ será denotada como $codim\mathcal{L} := \dim B/\mathcal{L}$.

Teorema 2.3. *Si el subespacio $\mathcal{L}$ del espacio de Banach B tiene dimensión finita, entonces tiene un complemento directo en B, donde la dimensión del complemento coincide con la codimensión de $\mathcal{L}$.*

Demostración:
Denotaremos a $X_1, ..., X_k$ una base del espacio cociente $B/\mathcal{L}$. Escogemos arbitrarios elementos x_j de las clases cocientes X_j $(j = 1, ..., k)$. El sistema $\{x_j\}_1^k$ es linealmente independiente y el único punto en el cual el subespacio $\mathcal{N}$, con base $\{x_j\}_1^k$, intersecta con $\mathcal{L}$ es el origen. Sea x un vector arbitrario de B, y sea X la clase cociente de $B/\mathcal{L}$ que contienen al vector x. El elemento X puede ser representado de la forma $X = \sum_{j=1}^{k} \xi_j X_j$, donde ξ_j $(j = 1, ..., k)$ son números complejos. Consecuentemente, el elemento $x - \sum_{j=1}^{k} \xi_j x_j$ pertenece al espacio $\mathcal{L}$. De esta manera, $B = \mathcal{L} \dot{+} \mathcal{N}$ y además $\dim \mathcal{N} = codim\mathcal{L}$. ■

Teorema 2.4. *Si la variedad lineal $\mathcal{L}$ del espacio de Banach B contiene un subespacio de codimensión finita, entonces $\mathcal{L}$ es un subespacio.*

Demostración.
Asumimos que $\mathcal{L}_1$ es un subespacio de codimensión finita que está contenido en la variedad lineal $\mathcal{L}$, y sea $\mathcal{N}_1$ un complemento directo de $\mathcal{L}_1$ en B. Denotaremos a $\mathcal{N}$ como la intersección $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{L}$.
Ya que $\mathcal{N}$ es una variedad lineal y sujeto a un subespacio de dimensión finita, entonces $\mathcal{N}$ es también un subespacio. Cada vector $x \in \mathcal{L}$ puede ser expresado en la forma $x = x_1 + y_1$, donde $x_1 \in \mathcal{N}_1$ y $y_1 \in \mathcal{L}_1$. Con la restricción $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}$, tenemos que $x_1 \in \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{L} = \mathcal{N}$. Esto es, $\mathcal{L} = \mathcal{N} + \mathcal{L}_1$. ■

Corolario 2.2. *Sean $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ $(\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2)$ dos subespacios del espacio de Banach B con $\dim \mathcal{L}_2/\mathcal{L}_1 < \infty$. Si la variedad lineal $\mathcal{L}$ satisface la condición*

$$\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_2,$$

entonces $\mathcal{L}$ es un subespacio.

2.3. Operadores lineales

Sean B_1 y B_2 espacios de Banach. Denotaremos a $L(B_1, B_2)$ como el espacio de Banach de todos los operadores lineales acotados que mapean B_1 en B_2 y denotaremos al espacio

$L(B,B)$ como $L(B)$. Como norma en $L(B_1,B_2)$ usaremos el operador norma.

A cada operador $A \in L(B_1,B_2)$ le asignaremos el subespacio $\ker A (\subseteq B_1)$, *el kernel del operador* A, como el conjunto de todas las soluciones a la ecuación homogénea $Ax = 0$ y la variedad lineal $imA (\subseteq B_2)$, *la imagen del operador* A, al conjunto de todos los valores del operador A.

El conjunto $B_2/\overline{imA}$ será referido como el *cokernel del operador* A. Cada complemento directo al subespacio $\overline{imA}$ también será llamado cokernel del operador A y lo denotaremos como *coker* A.

Se dice que el operador $A \in L(B_1,B_2)$ es invertible si existe $A^{-1} \in L(B_2,B_1)$ tal que $A^{-1}Ax = x$ $(x \in B_1)$ y $AA^{-1}x = x$ $(x \in B_2)$. Por el teorema del mapeo abierto, el operador A es invertible si y solo si

$$\ker A = 0 \quad y \quad im\, A = B_2.$$

El rango de $A \in L(B_1,B_2)$ lo entenderemos como la dimensión de su imagen y lo denotaremos como *rango* A, es decir,

$$rango\, A := dim\, imA.$$

2.4. Proyecciones relacionadas con los operadores integrales singulares

Un operador $P \in L(B)$ es una proyección si $P^2 = P$. El operador $Q = I - P$ también es una proyección si I es el operador indentidad en B y P es una proyección. En este caso el operador Q es la *proyección complementaria de* P. De esta manera P también es la proyección complementaria de Q y además $PQ = QP = 0$.

Sea B un espacio dividido en la suma directa de sus subespacios $\mathcal{L}$ y $\mathcal{N}$, y sea $x = x_1 + x_2$ $(x_1 \in \mathcal{L},\ x_2 \in \mathcal{N})$ un vector arbitrario de B. El operador definido por la ecuación $Px = x_1$ es una proyección en B, donde $im\, P = \mathcal{L}$ y $\ker P = \mathcal{N}$. En este caso, se dice que el operador P *proyecta el espacio* B *en* $\mathcal{L}$ *paralelamente a* $\mathcal{N}$.

Cada proyección P tiene tal estructura, es decir, es algún operador proyectando el espacio B en imP paralelamente a $\ker P$. De hecho, $imP = \ker(I-P)$, por lo que P es un subespacio. Más aún, $im\, P$ y $\ker P$ se intersectan solo en el origen y la suma directa es B. La ecuación $x = Px + (I-P)x$ nos da una descomposición deseada de un vector escogido arbitrariamente $x \in B$.

Sea Γ una curva cerrada no simple y $B := L_p(\Gamma,\rho)$, donde

$$\rho(t) := \prod_{k=1}^{n} |t-t_k|^{\beta_k} \quad (t_1,...,t_n \in \Gamma, \quad 1 < p < \infty, \quad -1 < \beta_k < p-1).$$

En el capítulo anterior fue probado que el operador S_Γ es acotado en el espacio $L_p(\Gamma,\rho)$ y $S_\Gamma^2 = I$. Esto implica que los operadores P_Γ y Q_Γ, definidos por las ecuaciones

$$P_\Gamma := \frac{1}{2}(I + S_\Gamma) \quad y \quad Q_\Gamma := \frac{1}{2}(I - S_\Gamma),$$

son proyecciones complementarias la una de la otra, donde $P_\Gamma - Q_\Gamma = S_\Gamma$. Definimos los subespacios $L_p^+(\Gamma,\rho)$ y $\overset{\circ}{L}{}_p^-(\Gamma,\rho)$ por las ecuaciones

$$L_p^+(\Gamma,\rho) := im\, P, \quad \overset{\circ}{L}{}_p^-(\Gamma,\rho) := im\, Q.$$

Asumiendo que $\varphi \in L_p(\Gamma,\rho)$, de la definición de función de peso ρ, se sigue que la función $\rho^{-1/p} \in L_q(\Gamma)$ $(p^{-1}+q^{-1}=1)$. Ya que $\varphi \cdot \rho^{1/p} \in L_p(\Gamma)$, entonces $\varphi \in L_1(\Gamma)$. Con ayuda de la función φ definimos la función

$$\Phi_\varphi(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau \quad (z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma).$$

Si asumimos que $z \in F_\Gamma^+$, entonces la función $\Phi_\varphi(z)$ es holomorfa en F_Γ^+ y tenemos en casi cualquier parte de Γ valores límite $\Phi_\varphi^+(t)$ cuando $z \to t$ a lo largo de los caminos no tangenciales que están en F_Γ^+(PRIVALOV,pág.139). Estos valores acotados pueden ser encontrados por la fórmula

$$\Phi_\varphi^+(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{\tau - t}d\tau,$$

en el cual, la integral es entendida como el valor principal de Cauchy. Así obtenemos que $\Phi_\varphi^+ = P\varphi$.

Teorema 2.5. *La siguiente ecuación es válida:*

$$L_p^+(\Gamma,\rho) = \{\Phi_\varphi^+ \,:\, \varphi \in L_p(\Gamma,\rho)\}.$$

Para que la función $\varphi(\in L_p(\Gamma,\rho))$ pertenezca a $L_p^+(\Gamma,\rho)$ es necesario y suficiente la relación $\Phi_\varphi^+ = \varphi$.

Análogamente, si suponemos que $z \in F_\Gamma^-$, la función Φ_φ^- es holomorfa en F_Γ^-, igual a cero en el infinito y tiene en casi todas partes de Γ valores acotados $\Phi_\varphi^-(t)$ cuando $z \to t$ a lo largo de caminos no tangenciales que se encuentran en F_Γ^-. Más aún, $\Phi_\varphi^- = Q_\Gamma\varphi$ y tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.6. *La siguiente ecuación es válida:*

$$\overset{\circ}{L}{}_p^-(\Gamma,\rho) = \{\Phi_\varphi^- \,:\, \varphi \in L_p(\Gamma,\rho)\}.$$

Para que la función $\varphi(\in L_p(\Gamma,\rho))$ pertenezca a $\overset{\circ}{L}{}_p^-(\Gamma,\rho)$ es necesario y suficiente la relación $\Phi_\varphi^- = \varphi$.

Sean $\varphi, f \in L_p(\Gamma,\rho)$. De las proyecciones P_Γ y Q_Γ se sigue que $\varphi \in L_p^+(\Gamma,\rho)$ ($f \in \overset{\circ}{L}{}_p^-(\Gamma,\rho)$) si y solo si $S_\Gamma\varphi = \varphi$ ($S_\Gamma f = -f$).

Del Teorema 1.1 podemos implicar que

$$R(\Gamma)\cap \overset{\circ}{L}{}_p^-(\Gamma,\rho) = R_-^0(\Gamma), \quad R(\Gamma)\cap L_p^+(\Gamma,\rho) = R_+(\Gamma)$$

y podemos concluir que los conjuntos $R_+(\Gamma)$ y $R_-^0(\Gamma)$ son densos en los espacios $L_p^+(\Gamma,\rho)$ y $\overset{\circ}{L_p^-}(\Gamma,\rho)$, respectivamente.

Sean $F_1^+, ..., F_m^+$ y $F_1^-, ..., F_k^-$ los componentes conexos de los conjuntos F_Γ^+ y F_Γ^-, respectivamente.

Teorema 2.7. *Para que la función φ de $L_p(\Gamma,\rho)$ pertenezca a $L_p^+(\Gamma,\rho)$ es necesario y suficiente que las condiciones*

$$\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-\alpha_j^-)^n} = 0 \quad (j = 1, ..., k; \quad n = 1, 2, ...)$$

se satisfagan, donde α_j^- son ciertos puntos en F_j^-.

Demostración:
Sea $\varphi \in L_p(\Gamma,\rho)$. La función Φ_φ es holomorfa en F_Γ^-, y en una vecindad del punto $z = \alpha_j^-$ puede ser expandida en serie

$$\Phi_\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-\alpha_j^-)^k}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-\alpha_j^-)^{k+1}}.$$

Si se satisfacen las condiciones del teorema, entonces $\Phi_\varphi(z) \equiv 0$ en F_Γ^-. Por lo que $Q_\Gamma\varphi = 0$ y $\varphi \in L_p^+(\Gamma,\rho)$.

Ahora supongamos que $\varphi \in L_p^+(\Gamma,\rho)$, tenemos que $Q_\Gamma\varphi = 0$. Consecuentemente, los valores acotados de la función Φ_φ cuando $z \to t$ ($z \in F_\Gamma^+$, $t \in \Gamma$) son igual a cero en casi cualquier lugar. Por el teorema de Lusin-Privalov (PRIVALOV,pp. 212-213), tenemos que $\Phi_\varphi(z) = 0$ para cada $z \in F_\Gamma^-$ y en particular en las vecindades del punto α_j^-, por lo que la última ecuación de expansión en series implica el resultado del teorema. ∎

De manera análoga obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.8. *Una condición necesaria y suficiente para que la función $\varphi(\in L_p(\Gamma,\rho))$ pertenezca al subespacio $\overset{\circ}{L_p^-}(\Gamma,\rho)$, son las validaciones de las condiciones*

$$\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-\alpha_j^+)^n} = 0 \quad (j = 1, ..., m; \quad n = 1, 2, ...),$$

donde α_j^+ son ciertos puntos de F_j^+.

Como consecuencia de este último teorema, obtenemos.

Corolario 2.3. *Sea Γ una curva cerrada simple y $0 \in F_\Gamma^+$. Para que la función $\varphi(\in L_p(\Gamma,\rho))$ pertenezca al subespacio $\overset{\circ}{L_p^-}$ es necesario y suficiente que las condiciones*

$$\int_\Gamma \varphi(t)t^{-n}dt = 0 \quad (n = 1, 2, ...)$$

se satisfagan.

Teorema 2.9. *Sea Γ una curva cerrada simple. Para que la función $\varphi(\in L_p(\Gamma,\rho))$ pertenezca al subespacio $L_p^+(\Gamma,\rho)$ es necesario y suficiente las validaciones de las condiciones*

$$\int_\Gamma \varphi(t)t^n dy = 0 \quad (n = 0, 1, ...).$$

Sea Γ una curva cerrada no simple. Definimos el subespacio $L_p^-(\Gamma,\rho)$ como

$$L_p^-(\Gamma,\rho) := \overset{\circ}{L}{}_p^-(\Gamma,\rho)\dot{+}span\{1\},$$

donde $span\{1\}$ es la cubierta lineal de $\varphi \equiv 1$. Si $\varphi \in L_p^-(\Gamma,\rho)$, entonces $\varphi = \varphi_1 + c$, donde $\varphi_1 \in \overset{\circ}{L}{}_p^-(\Gamma,\rho)$ y $c = constante$. La función φ será considerada como en un inicio definida en F_Γ^- por el arreglo $\varphi(z) = \varphi_1(z) + c$ $(z \in F_\Gamma^-)$.

Denotaremos a $L_\infty^+(\Gamma)$ y $L_\infty^-(\Gamma)$, respectivamente, como el conjunto de funciones φ que son holomorfas y acotadas en F_Γ^+ y F_Γ^-, respectivamente.

Si $\varphi \in L_\infty^\pm$ y $sup_{z\in F_\Gamma^\pm}|\varphi(z)| = M$. Por el teorema de Fatou (PRIVALOV, pág. 129), la función φ tiene en casi cualquier parte de Γ valores acotados $\varphi(t) = lim_{z\to t}\varphi(z)$ $(z \in F_\Gamma^\pm,\ t \in \Gamma)$ sobre cualquier camino no tangencial arbitrario perteneciente a $F_\Gamma^\pm$, donde $\varphi \in L_\infty(\Gamma)$ y $\|\varphi\|_{L_\infty(\Gamma)} = M$.

Teorema 2.10. *Las siguientes inclusiones son ciertas:*

$$L_\infty^+(\Gamma) \subset L_p^+(\Gamma,\rho), \quad L_\infty^-(\Gamma) \subset L_p^-(\Gamma,\rho).$$

Demostración:

Supongamos que $\varphi \in L_\infty^+(\Gamma)$, entonces, por la definición de peso ρ, tenemos que $\varphi \in L_p(\Gamma,\rho)$. Denotaremos a γ_m como una sucesión de curvas contenidas en F_Γ^+ y convergentes a Γ. Sea $\beta_m := F_\Gamma^+ \to F_{\gamma_m}^+$ un mapeo conforme que satisface la siguiente condición $\beta_m(t) \to t$ cuando $m \to \infty$ $(t \in \Gamma)$. Construimos las siguientes funciones $f_m := \varphi(\beta_m(t))(t-\alpha)^{-N}$, donde α es algún punto en F_Γ^- y N es un número natural. Ya que f_m es holomorfa en $\overline{F_\Gamma^+}$, obtenemos la relación

$$\int_\Gamma f_m(t)dt = 0.$$

La sucesión $\{f_m\}$ es uniformemente acotada y converge en casi todas partes en Γ a la función $\varphi(t)(t-\alpha)^{-N}$. Más aún, en la anterior relación obtenida podemos pasar al límite. En este sentido, las condiciones del Teorema 2.7 se satisfacen para la función φ, por lo que $\varphi \in L_p^+(\Gamma,\rho)$. Sea $\varphi \in L_\infty^-(\Gamma)$ y $\varphi_0 = \varphi - \varphi(\infty)$. De manera análoga a lo demostrado arriba, se puede probar que la función φ_0 satisface las condiciones del Teorema 2.8 lo que implica que $\varphi_0 \in \overset{\circ}{L}{}_p^-(\Gamma,\rho)$ por lo que $\varphi \in L_p^-(\Gamma,\rho)$. ■

Teorema 2.11. *Sean Γ una curva cerrada no simple, $a_+ \in L^+_\infty(\Gamma)$ y $a_- \in L^-_\infty(\Gamma)$. Entonces, para los operadores P_Γ y Q_Γ actuando en el espacio $L_p(\Gamma, \rho)$, las ecuaciones*

$$P_\Gamma a_+ P_\Gamma = a_+ P_\Gamma \quad y \quad Q_\Gamma a_- Q_\Gamma = a_- Q_\Gamma$$

son válidas.

Demostración:
Asumiendo que $r \in R(\Gamma)$, tenemos que $a_+ P_\Gamma(r) = a_+ r_+ \in L^+_\infty(\Gamma, \rho)$. Consecuentemente, $P_\Gamma a_+ P_\Gamma r = a_+ P_\Gamma r$, obteniendo así la primera ecuación. Si $a_- \in L^-_\infty(\Gamma)$, entonces $a_- Q_\Gamma r = a_- r_- \in L^-_\infty(\Gamma)$ y $a_-(\infty) r_-(\infty) = 0$, ya que $a_- Q_\Gamma r \in \overset{\circ}{L}{}^-_p(\Gamma, \rho)$. Esto implica $Q_\Gamma a_- Q_\Gamma r = a_- Q_\Gamma r$. Probando la segunda ecuación. ■

Denotaremos a $C^\pm(\Gamma)$ como el conjunto de todas las funciones holomorfas en $F^\pm_\Gamma$ y continuas en $\overline{F^\pm}$.

Teorema 2.12. *Sea Γ una curva cerrada no simple. Si la función $a_-(a_+)$ de $L_p(\Gamma, \rho)$ es holomorfa en $F^-_\Gamma(F^+_\Gamma)$ y continua en todos los puntos del conjunto $\overline{F^-_\Gamma}(\overline{F^+_\Gamma})$ excepto para muchos puntos finitos $t_1, ..., t_m$, en los cuales en una vecindad admite la estimación*

$$|a_\pm(z)| \leq \frac{k}{|z - t_k|^\mu},$$

donde k es alguna constante y $0 < \mu < 1$, entonces $a_\pm \in L^\pm_p(\Gamma, \rho)$.

Demostración:
Asumiendo que las condiciones del teorema se cumplen, se sigue que la función $a_+(t-\alpha_-)^{-N}$, donde N es un número natural y $\alpha_- \in F^-_\Gamma$, satisface las condiciones del Lema 1.3 del capítulo anterior. Consecuentemente,

$$\int_\Gamma a_+(t - \alpha_-)^{-N} dt = 0.$$

El Teorema 2.7 implica que $a_+ \in L^+_p(\Gamma, \rho)$. De manera similar, usando el lema mencionado anteriormente tenemos que

$$\int_\Gamma \frac{a_-(t) - a_-(\infty)}{(t - \alpha_+)^N} dt = 0 \quad (\alpha_+ \in F^+_\Gamma, N = 1, 2, ...).$$

Por el Teorema 2.8, tenemos que $a_- - a_-(\infty) \in \overset{\circ}{L}{}^-_p(\Gamma, \rho)$ y, más aún, $a_- \in L^-_p(\Gamma, \rho)$. ■

2.5. Operadores invertibles de un lado

Sean B_1 y B_2 dos espacios de Banach. El operador $A \in L(B_1, B_2)$ se dice que *es invertible por la izquierda* si existe un operador $B \in L(B_2, B_1)$ tal que $BA = I_1$. El operador B es llamado *la inversa izquierda* de A y es denotado por A^{-1}. El operador *inverso derecho* A^{-1} (de

$L(B_2, B_1)$) a A es definido por la ecuación $AA^{-1} = I_2$. Si el operador $A \in L(B_1, B_2)$ es invertible por la izquierda y por la derecha, entonces es invertible. Si el operador solo es invertible por un lado, entonces la inversa correspondiente no es única. Si el operador A es invertible solo por la izquierda, entonces todos los operadores de la forma $A^{-1} + \lambda(I - AA^{-1})$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ también son sus inversas izquierdas. De manera similar, si el operador A solo es invertible por la derecha, entonces todos los operadores de la forma $A^{-1} + \lambda(I - A^{-1}A)$ $(\lambda \in \mathbb{C})$, también son sus inversas derechas.

Sea $A \in L(B_1, B_2)$ un operador invertible por la izquierda y A^{-1} una inversa izquierda de A. Para el par A y A^{-1} asignamos el operador $\Lambda_A := AA^{-1} \in L(B_2)$.

El operador Λ_A es una proyección que mapea el espacio B_2 en el subespacio *im* A paralelamente a $\ker A^{-1}$.

Sea $A \in L(B_1, B_2)$ un operador invertible por la derecha y A^{-1} una inversa derecha de A. Para el par A y A^{-1} construimos el operador $\Pi_A := A^{-1}A \in L(B_1)$.

El operador Π_A es una proyección que mapea el espacio B_1 en el subespacio *im* A^{-1} paralelamente a $\ker A$.

Teorema 2.13. *Para que un operador $A \in L(B_1, B_2)$ sea invertible por la izquierda es necesario y suficiente las validaciones de las siguientes condiciones:*

1.− *La variedad lineal im A es un subespacio que tiene complemento directo.*

2.− $\ker A = \{0\}$.

Si las condiciones se cumplen y $A_0^{-1}(\in L(B_2, B_1))$ es uno de los operadores que son inversos izquierdos de A, entonces la forma general de las inversas izquierdas de A están dadas por $A_0^{-1}P$, donde P es una proyección arbitraria con la propiedad im $P =$ im A.

Demostración:

Las condiciones de necesidad se obtienen de las observaciones de arriba. Ahora probaremos la suficiencia. Si $A = A_1$ es considerado como un operador que mapea B_1 en *im* A, entonces tiene una inversa acotada, la cual denotaremos como A_1^{-1}. Denotaremos a P como una proyección que proyecta el espacio entero B_2 en *im* A. Consideremos el operador $A_0^{-1} = A_1^{-1}P$. Este operador está definido en todo el espacio B_2 y pertenece a $L(B_2, B_1)$, más aún,

$$A_0^{-1}A = A_1^{-1}PA = A_1^{-1}A = I_1.$$

Para una proyección R que satisface *im* $R =$ *im* A, tenemos la relación $PR = R$; el operador $A_0^{-1}R = A_1^{-1}R$ también es una inversa izquierda de A. Si A^{-1} es una arbitraria inversa izquierda de A, entonces puede ser representada en la forma $A_0^{-1}\Lambda_A$. ■

Corolario 2.4. *Si el operador $A \in L(B_1, B_2)$ es invertible por la izquierda, entonces*

$$\dim \text{ } coker\, A = \dim \ker A^{-1}.$$

Análogamente de las anteriores observaciones obtenemos los siguientes resultados.

Teorema 2.14. *Para que un operador $A \in L(B_1, B_2)$ sea invertible por la derecha es necesario y suficiente las validaciones de las condiciones:*

1.– *im* $A = B_2$

2.– *El subespacio* $\ker A$ *tiene un complemento directo en* B_1.

Si las condiciones se satisfacen y $A_0^{-1}(\in L(B_2, B_1))$ *es uno de los operadores que son inversos derechos de A, entonces la forma general de todos los operadores inversos derechos de A están dados por* PA_0^{-1}, *donde P es una proyección que satisface la condición* $\ker P = \ker A$.

Corolario 2.5. *Si el operador* $A \in L(B_1, B_2)$ *es invertible por la derecha, entonces*

$$\dim \ker A = \dim \textit{ coker } A^{-1}.$$

Sea $A \in L(B_1, B_2)$ un operador invertible por la izquierda y A^{-1} una inversa izquierda. Entonces la ecuación

$$Ax = y$$

es soluble si y solo si la condición

$$(I - \Lambda_A)y = 0$$

se satisface. Si la condición es válida, entonces el vector $x = A^{-1}y$ es la única solución de la ecuación $Ax = y$.

Si el operador $A \in L(B_1, B_2)$ es invertible por la derecha y A^{-1} es una inversa derecha, entonces el vector $x = A^{-1}y$ es una de las soluciones de la ecuación $Ax = y$, y el subespacio $\ker A$ coincide con el rango de la proyección $I - \Pi_A$.

Asumiendo que los operadores $A \in L(B_2, B_3)$ y $C \in L(B_0, B_1)$ son invertibles, y el operador $B(\in L(B_1, B_2))$ es invertible de un lado. Entonces, el operador $F = ABC$ es invertible del mismo lado, donde

$$\ker F = C^{-1} \ker B \quad y \quad \textit{coker } F = A \textit{ coker } B.$$

En particular

$$\dim \ker F = \dim \ker B \quad y \quad \dim \textit{ coker } F = \dim \textit{ coker } C.$$

Teorema 2.15. *Si el operador* $A \in L(B_1, B_2)$ *es invertible de un lado, entonces todos los operadores* $X \in L(B_1, B_2)$ *que satisfacen la condición*

$$\|X - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

son invertibles del mismo lado, donde

$$\dim \ker X = \dim \ker A \quad y \quad \dim \textit{ coker } X = \dim \textit{ coker } A.$$

Demostración:
Si el operador A es invertible por la izquierda, entonces el operador X puede ser representado en la forma $X = (I - B)A$, donde $B = (A - X)A^{-1}$. Ya que $\|B\| < 1$, el operador $I - B$ es invertible. Así, la afirmación resulta de la última observación. Análogamente si el operador A es invertible por la derecha, el operador X puede ser representado de la forma $X = A(I - C)$, donde $C = A^{-1}(A - X)$. El operador $I - C$ es invertible ya que $\|C\| < 1$. Consecuentemente, la afirmación resulta, de igual manera, de la última observación. ■

Corolario 2.6. *Sea G un conjunto conexo de operadores invertibles de un lado de $L(B_1, B_2)$. Si el conjunto G contiene el operador X_0 que es invertible por la izquierda (derecha), entonces todos los otros operadores X de G son invertibles por la izquierda (derecha), donde*

$$\dim \mathit{coker}\, X = \dim \mathit{coker}\, X_0 \quad (\dim \ker X = \dim \ker X_0).$$

2.6. Operadores integrales singulares y operadores relacionados

Sea Γ una curva no simple y sean c, d un par de funciones del espacio $L_\infty(\Gamma)$. Los operadores de la forma $A = cI + dS_\Gamma$ y $B = cI + S_\Gamma dI$ son referidos como *operadores integrales singulares sobre la curva* Γ. Tomando en cuenta el espacio $L_p(\Gamma, \rho)$, donde $1 < p < \infty$, y la función ρ definida como

$$\rho(t) = \prod_{k=1}^{n} |t - t_k|^{\beta_k},$$

que satisface las condiciones $-1 < \beta_k < p - 1$, los operadores A y B son lineales y acotados. Representaremos a estos operadores A y B de la siguiente forma:

$$A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma, \quad B = P_\Gamma aI + Q_\Gamma bI,$$

donde $a = c + d$, $b = c - d$, $P_\Gamma := \frac{1}{2}(I + S_\Gamma)$ y $Q_\Gamma := \frac{1}{2}(I - S_\Gamma)$. Las funciones a y b son llamados los *coeficientes* de los operadores A y B.

Los operadores adjuntos A^* y B^* de A y B, respectivamente, actúan en el espacio $L_q(\Gamma, \rho^{1-q})$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$ y tienen la forma

$$A^* = P_\Gamma^* \overline{a} I + Q_\Gamma^* \overline{b} I, \quad B^* = \overline{a} P_\Gamma^* + \overline{b} Q_\Gamma^*,$$

donde $P_\Gamma^* = H_\Gamma Q_\Gamma H_\Gamma$ y $Q_\Gamma^* = H_\Gamma P_\Gamma H_\Gamma$. Además para una función arbitraria $a \in L_\infty(\Gamma)$, tenemos la ecuación $H_\Gamma a H_\Gamma = \overline{a} I$. Por lo que tenemos

$$A^* = H_\Gamma(P_\Gamma bI + Q_\Gamma aI)H_\Gamma, \quad B^* = H_\Gamma(bP_\Gamma + aQ_\Gamma)H_\Gamma.$$

Asumiendo que $f, g \in C(\Gamma)$ y $a, b \in L_\infty(\Gamma)$, donde Γ es una curva cerrada no simple, entonces

$$(aP_\Gamma + bQ_\Gamma)(fP_\Gamma + gQ_\Gamma) = afP_\Gamma + bgQ_\Gamma + T,$$

donde T es un operador compacto. Esta igualdad se obtiene del Teorema 1.12, en la compactes del operador $cS_\Gamma - S_\Gamma cI$, donde c es una función arbitraria en Γ.

Sean $a, b \in L_\infty(\Gamma)$, $f_+ \in L_\infty^+(\Gamma)$ y $f_- \in L_\Gamma^-(\Gamma)$. Entonces

$$(aP_\Gamma + bQ_\Gamma)(f_+P_\Gamma + f_-Q_\Gamma) = af_+P_\Gamma + bf_-Q_\Gamma.$$

Esta última igualdad resulta del Teorema 2.11.

2.7. Operadores integrales singulares invertibles de un lado

Sea Γ una curva no simple. Sea $V_{n;\lambda}$ un operador definido por la ecuación

$$V_{n;\lambda} := (t-\lambda)^n P_\Gamma + Q_\Gamma,$$

donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Para algún número natural n, tenemos la ecuación

$$V_{n;\lambda} = V_{1;\lambda}^n,$$

más aún,

$$V_{-n;\lambda}V_{n;\lambda} = I \quad (n = 1, 2, ...)$$

para $\lambda \notin \Gamma$. Si $\lambda \in F_\Gamma^-$ los factores del lado izquierdo de la ecuación se pueden cambiar. Además tenemos que

$$\ker V_{-n;\lambda} = span\left\{(t-\lambda)^{n-1} - \frac{1}{t-\lambda}, (t-\lambda)^{n-2} - \frac{1}{(t-\lambda)^2}, ..., 1 - \frac{1}{(t-\lambda)^n}\right\}$$

para $n = 1, 2, ...$ y $\lambda \in F_\Gamma^+$. Esta ecuación se obtiene realmente cuando buscamos la solución φ de la ecuación $V_{-n;\lambda}\varphi = 0$ en la forma

$$P_\Gamma\varphi = c_0 + c_1(t-\lambda) + ... + c_{n-1}(t-\lambda)^{n-1} + (t-\lambda)^n\varphi_+(t),$$

donde $c_j \in \mathbb{C}$ y $\varphi_+ \in im\, P_\Gamma$.

Teorema 2.16. *El operador $V_{n;\lambda}$ $(n = \pm 1, \pm 2, ...)$ es invertible para $\lambda \in F_\Gamma^-$ e invertible por la izquierda para $\lambda \in F_\Gamma^+$ $(n = \pm 1, \pm 2, ...)$. En ambos casos el operador inverso izquierdo es igual a $V_{-n;\lambda}$. Para $n = 1, 2, ...$, las ecuaciones*

$$V_{n;\lambda} = V_{1;\lambda}^n$$

y

$$\ker V_{-n;\lambda} = span\left\{(t-\lambda)^{n-1} - \frac{1}{t-\lambda}, (t-\lambda)^{n-2} - \frac{1}{(t-\lambda)^2}, ..., 1 - \frac{1}{(t-\lambda)^n}\right\}$$

$(\lambda \in F_\Gamma^+)$ *son válidas. En particular,*

$$\dim \ker V_{-n;\lambda} = n \quad y \quad \dim \; coker \; V_{n;\lambda} = n$$

para $\lambda \in F_\Gamma^+$ *y* $n = 1, 2, ...$

Si $\lambda \in \Gamma$, *entonces los operadores* $V_{n;\lambda}$ $(n = \pm 1, \pm 2, ...)$ *no son invertibles de ningún lado.*

Demostración:
Es solo remarcar la prueba de la última afirmación del teorema, donde es suficiente estudiar solo el operador $V_{1;\lambda}$. Sea $\lambda = t_0 \in \Gamma$ y suponemos que $V_{1;t_0}$ es invertible. Entonces, por lo anterior probado, en cada vecindad del operador $V_{t_0} = (t - t_0)P_\Gamma + Q_\Gamma$ existe un operador V_Γ el cual es invertible de los dos lados. Lo último contradice el Teorema 2.15 declarando que el operador V_{t_0} es en toda una vecindad de t_0 invertible por el mismo lado que el punto t_0. ■

Teorema 2.17. *El operador*

$$W_{n;\lambda} = P_\Gamma + (1 - \lambda t^{-1})^n Q_\Gamma \quad (n = \pm 1, \pm 2, ...)$$

es invertible para $\lambda \in F_\Gamma^+$ *e invertible por la izquierda para* $\lambda \in F_\Gamma^-$, $n = 1, 2, ...$ *En ambos casos, el operador inverso de* $W_{n;\lambda}$ *es el operador*

$$W_{-n;\lambda} = P_\Gamma + (1 - \lambda t^{-1})^{-n} Q_\Gamma.$$

Para n=1,2,..., las ecuaciones

$$W_{n;\lambda} = W_{1;\lambda}^n$$

y

$$\ker W_{-n;\lambda} = span\{gt^{-1}, gt^{-2}, ..., gt^{-n}\} \quad (g(t) := \frac{t^n}{(t-\lambda)^n} - 1)$$

son válidas. En particular,

$$\dim \ker W_{-n;\lambda} = n \quad y \quad \dim coker \; W_{n;\lambda} = n$$

para $\lambda \in F_\Gamma^-$ *y* $n = 1, 2, ...$

Si $\lambda \in \Gamma$, *entonces el operador* $W_{n;\lambda}$ $(n = \pm 1, \pm 2, ...)$ *no es invertible por ningún lado.*

Capítulo 3

Operadores integrales singulares con coeficientes continuos

De ahora en adelante asumiremos que Γ es una curva cerrada y que el espacio $L_p(\Gamma, \rho)$ cumple las condiciones

$$1 < p < \infty, \quad \rho(t) = \prod_{k=1}^{n} |t - t_k|^{\beta_k}$$

y

$$-1 < \beta_k < p - 1 \quad (k = 1, 2, ..., n).$$

3.1. El índice de una función continua

Denotaremos a $C(\Gamma)$ como el álgebra de Banach de todas las funciones complejas continuas en Γ. Sea $a(t) \in C(\Gamma)$ y asumamos que $a(t)$ no es cero en ningún punto de Γ. Si Γ es una curva cerrada simple, entonces denotaremos a $[arg\ a(t)]_\Gamma$ como el incremento total de la función $arg\, a(t)$ cuando t toma valores sobre Γ. Si Γ consiste de varias curvas cerradas, entonces

$$[arg\, a(t)]_\Gamma := \sum_{j=1}^{n} [arg\, a(t)]_{\Gamma_j}.$$

El índice de una función a es un número entero definido por

$$ind\, a := \frac{1}{2\pi} [arg\, a(t)]_\Gamma,$$

además tiene la siguiente propiedad:

Sean $a_1, a_2 \in C(\Gamma)$ y $a_1 \cdot a_2 \neq 0$ $(t \in \Gamma)$. Entonces

$$ind\, a_1 a_2 = ind\, a_1 + ind\, a_2.$$

De esta ecuación podemos obtener que

$$ind\, \overline{a} = -ind\, a \quad y \quad ind\, a^n = n\, ind\, a \quad (n = 0, \pm 1, ...).$$

De esta propiedad, también se puede implicar que para cada función $a \in C(\Gamma)$ $(a(t) \neq 0)$ podemos encontrar un número n, así como un punto $\alpha \notin \Gamma$ tal que $ind\,(t-\alpha)^n a(t) = 0$.

Si la función $a(t)$ es continua y no es cero en Γ, entonces es proporcional a el límite de una función $a(z)$ que es meromorfa en F_Γ^+. Más aún, $ind\, a = N^+ - P^+$, donde N^+ y P^+ son el número de ceros y polos, respectivamente, de la función $a(z)$ en F_Γ^+ (tomando en cuenta sus multiplicidades). Similarmente, si a es meromorfa en F_Γ^-, entonces $ind\, a = N^- - P^-$, donde N^- y P^- son los ceros y polos, respectivamente, de la función $a(z)$ en F_Γ^-.

3.2. Operadores integrales singulares con coeficientes racionales

Sea $r = q_1/q_2$, donde q_1 y q_2 son polinomios. Denotaremos a todos los ceros (considerando sus multiplicidades) del polinomio q_1 como t_j^+ $(j = 1, 2, ..., k^+)$ y t_j^- $(j = 1, 2, ..., k^-)$ localizados en F_Γ^+ y F_Γ^-, respectivamente. Análogamente denotaremos τ_j^+ $(j = 1, 2, ..., l^+)$ y τ_j^- $(j = 1, 2, ..., l^-)$ los ceros del polinomio q_2 localizados en F_Γ^+ y F_Γ^-, respectivamente. Supongamos que la función r no tiene polos y ceros en la curva Γ. De esta manera, la función racional puede ser representada en la forma

$$r = r_- t^k r_+$$

con

$$r_-(t) := \alpha \frac{\prod_{n=1}^{k^+}(1 - t^{-1}t_n^+)}{\prod_{n=1}^{l^+}(1 - t^{-1}\tau_n^+)}; \quad r_+(t) := \frac{\prod_{n=1}^{k^-}(t - t_n^-)}{\prod_{n=1}^{l^-}(t - \tau_n^-)},$$

$k = k^+ - l^+$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Esta representación es referida como una *factorización de la función* r *con respecto a la curva* Γ. Notemos que $k = ind\, r$.

Teorema 3.1. *Sea* $A = r_1 P_\Gamma + r_2 Q_\Gamma$ *un operador con coeficientes* $r_1, r_2 \in R(\Gamma)$. *Para que el operador* A *sea invertible de un lado en el espacio* $L_p(\Gamma, \rho)$ *es necesario y suficiente las validaciones de las condiciones*

$$r_j(t) \neq 0 \quad (j = 1, 2; t \in \Gamma).$$

Si se satisfacen las anteriores condiciones, entonces el operador A *es invertible, solo es invertible por la izquierda o solo es invertible por la derecha, dependiendo de si el número*

$$k = ind\,(r_1/r_2)$$

es igual a cero, positivo o negativo.

Si las condiciones se satisfacen y la ecuación

$$r = r_- t^k r_+$$

es la factorización de la función $r = r_1/r_2$ *con respecto a* Γ, *entonces el operador inverso* A^{-1} *(inverso por el lado correspondiente) al operador* A *está dado por la ecuación*

$$A^{-1} = r_+^{-1} P_\Gamma t^{-k} P_\Gamma r_-^{-1} r_2^{-1} I + r_- Q_\Gamma t^{-k} P_\Gamma r_-^{-1} r_2^{-1} I + r_- Q_\Gamma r_-^{-1} r_2^{-1} I$$

o, equivalentemente, a la ecuación

$$A^{-1} = (r_+^{-1}P_\Gamma + r_-Q_\Gamma)(t^{-k}P_\Gamma + Q_\Gamma)r_-^{-1}r_2^{-1}I.$$

Demostración:
Supongamos que se satisfacen las condiciones $r_j(t) \neq 0$ $(j = 1, 2; t \in \Gamma)$ y $r = r_- t^k r_+$ es la factorización de la función $r = r_1/r_2$, entonces el operador A puede ser representado en la forma

$$A = r_2(r_- t^k r_+ P_\Gamma + Q_\Gamma) = r_2 r_-(t^k r_+ P_\Gamma + r_-^{-1}Q_\Gamma).$$

De la última observación del capítulo 2, en la sección 2.6, tenemos que

$$A = r_2 r_-(t^k P_\Gamma + Q_\Gamma)(r_+ P_\Gamma + r_-^{-1}Q_\Gamma).$$

Los operadores $r_2 r_- I$ y $r_+ P_\Gamma + r_-^{-1}Q_\Gamma$ son invertibles, donde

$$(r_2 r_- I)^{-1} = r_2^{-1}r_-^{-1}I, \quad (r_+ P_\Gamma + r_-^{-1}Q_\Gamma)^{-1} = r_+^{-1}P + r_- Q_\Gamma.$$

El operador $t^k P_\Gamma + Q_\Gamma$ es invertible solo por la izquierda para $k > 0$ y es solo invertible por la derecha para $k < 0$. La correspondiente inversa al operador es $t^{-k}P_\Gamma + Q_\Gamma$.

Aún queda por probar que la condición del teorema es también necesario solo para la invertibilidad de un lado del operador A.

Primero consideremos el caso cuando $r_2 = 1$. Supongamos que la función r_1 tiene un cero en algún punto $t_0 \in \Gamma$. Lo expresamos en la forma $r_1 = (t - t_0)s$ y $r_1 = (t^{-1} - t_0^{-1})q$. Para el operador $A = r_1 P_\Gamma + Q_\Gamma$, tenemos las ecuaciones

$$A = (sP_\Gamma + Q_\Gamma)((t - t_0)P_\Gamma + Q_\Gamma)$$

y

$$A = ((t^{-1} - t_0^{-1})P_\Gamma + Q_\Gamma)(P_\Gamma q P_\Gamma + (t^{-1} - t_0^{-1})Q_\Gamma q P_\Gamma + Q_\Gamma).$$

Si el operador A es invertible de algún lado, entonces por las ecuaciones obtenidas tenemos que al menos uno de los operadores $(t - t_0)P_\Gamma + Q_\Gamma$ o $(t^{-1} - t_0^{-1})P_\Gamma + Q_\Gamma$ es invertible de un lado. Lo cual contradice a los teoremas 2.16 y 2.17.

De manera similar se puede probar que si el operador tiene la forma $P_\Gamma + r_2 Q_\Gamma$ y es invertible de un lado, entonces r_2 no es cero en Γ.

Ahora el caso general. Sea $A = r_1 P_\Gamma + r_2 Q_\Gamma$ un operador invertible de un lado. Escogemos las funciones $\chi_1, \chi_2 \in R(\Gamma)$ de tal manera que las condiciones

$$\chi_1(t) \neq 0 \quad (t \in \Gamma), \quad \chi_2(t) \neq 0 \quad (t \in \Gamma),$$

$$\chi_1 r_1 \in R_+(\Gamma), \quad \chi_2 r_2 \in R_-(\Gamma)$$

se satisfagan. Bajo estas condiciones el operador A puede ser representado en dos formas

$$A = \chi_1^{-1}(P_\Gamma + \chi_1 r_2 Q_\Gamma)(\chi_1 r_1 P_\Gamma + Q_\Gamma)$$

y

$$A = \chi_2^{-1}(\chi_2 r_1 P_\Gamma + Q_\Gamma)(P_\Gamma + \chi_2 r_2 Q_\Gamma).$$

De las ecuaciones obtenidas, se sigue que si el operador A es invertible por la izquierda, entonces los operadores $\chi_2 r_1 P_\Gamma + Q_\Gamma$ y $P_\Gamma + \chi_1 r_2 Q_\Gamma$ son invertibles por la izquierda. Si el operador A es invertible por la derecha, entonces los operadores $P_\Gamma + \chi_2 r_2 Q_\Gamma$ y $\chi_1 r_1 P_\Gamma + Q_\Gamma$ también son invertibles por la derecha.

Por lo anterior probado, podemos deducir que las funciones r_1 y r_2 no son cero en Γ. ■

Teorema 3.2 *Sea A un operador que tiene la forma*

$$A = P_\Gamma r_1 I + Q_\Gamma r_2 I$$

con coeficientes r_1, $r_2 \in R(\Gamma)$. Para que el operador A sea invertible de un lado es necesario y suficiente las validaciones de las condiciones

$$r_j(t) \neq 0 \quad (t \in \Gamma, j = 1, 2).$$

Si las condiciones se satisfacen, entonces el operador A es invertible, solo es invertible por la derecha o solo es invertible por la izquierda, dependiendo de si el número

$$k = ind\, \frac{r_1}{r_2}$$

es igual a cero, negativo o positivo.

Si r_1 y r_2 no son cero en Γ y la ecuación

$$r = r_- t^k r_+$$

es la factorización de la función $r = r_1/r_2$ con respecto a la curva Γ, entonces el operador inverso A^{-1} de A, del lado correspondiente, está dado por la ecuación

$$A^{-1} = r_+^{-1} r_2^{-1}(P_\Gamma t^{-k} I + Q_\Gamma)(P_\Gamma r_-^{-1} I + Q_\Gamma r_+ I).$$

Demostración:

El argumento es similar al Teorema 3.1. Representamos el operador A en la forma

$$A = (P_\Gamma r_- I + Q_\Gamma r_+^{-1} I)(P_\Gamma t^k I + Q_\Gamma) r_+ r_2 I,$$

y similarmente podemos obtener la ecuaciones

$$(r_+ r_2 I)^{-1} = r_+^{-1} r_2^{-1} I, \quad (P_\Gamma r_- I + Q_\Gamma r_+^{-1} I)^{-1} = P_\Gamma r_-^{-1} I + Q_\Gamma r_+ I.$$

Aún queda por discutir la invertibilidad de un lado del operador $P_\Gamma t^k I + Q_\Gamma$.

Para probar la necesidad de la hipótesis del teorema, ahora tenemos las igualdades

$$P_\Gamma r_1 I + Q_\Gamma = (P_\Gamma (t^{-1} - t_0^{-1}) I + Q_\Gamma)(P_\Gamma q I + Q_\Gamma),$$

$$P_\Gamma r_1 I + Q_\Gamma = (P_\Gamma s P_\Gamma + P_\Gamma s Q_\Gamma (t-t_0)I + Q_\Gamma)(P_\Gamma (t-t_0)I + Q_\Gamma),$$

y las condiciones con respecto a las funciones χ_1 y χ_2 serían reemplazadas por

$$\chi_1 r_1 \in R_-(\Gamma), \quad \chi_2 r_2 \in R_+(\Gamma).$$

Finalmente las últimas representaciones del operador A serían cambiadas por

$$A = (P_\Gamma r_1 \chi_1 I + Q_\Gamma)(P_\Gamma + Q_\Gamma r_2 \chi_1 I)\chi_1^{-1} I$$

y

$$A = (P_\Gamma + Q_\Gamma r_2 \chi_2 I)(P_\Gamma r_1 \chi_2 I + Q_\Gamma)\chi_2^{-1} I. \quad \blacksquare$$

Teorema 3.3. *Sean las funciones r_1 y r_2 de $R(\Gamma)$ que no son cero en Γ, más aún, sea la ecuación*

$$r = r_- t^k r_+$$

la factorización de la función $r = r_1/r_2$.

Si $k < 0$, entonces

$$\ker(r_1 P_\Gamma + r_2 Q_\Gamma) = span\{g, gt, ..., gt^{|k|-1}\}$$

con

$$g := r_+^{-1} - r_- t^k.$$

Si $k > 0$, entonces

$$im(r_1 P_\Gamma + r_2 Q_\Gamma) = \{f \ : \ f = r_2 r_-(t^k \varphi_- + \varphi_+); \varphi_- \in im\, Q_\Gamma, \varphi_+ \in im\, P_\Gamma\}$$

y

$$coker(r_1 P_\Gamma + r_2 Q_\Gamma) = span\{r_2 r_-, r_2 r_- t, ..., r_2 r_- t^{k-1}\}.$$

Para $k > 0$ la ecuación

$$r_1 P_\Gamma \varphi + r_2 Q_\Gamma \varphi = f$$

es soluble si y solo si las condiciones

$$\int_\Gamma f(t) r_2^{-1}(t) r_-^{-1}(t) t^{-j} dt = 0 \quad (j = 1, 2, ..., k)$$

se satisfacen.

Demostración:
Como en la prueba del Teorema 3.1, el operador A puede ser expresado en la forma

$$A = r_2 r_-(t^k P_\Gamma + Q_\Gamma)(r_+ P_\Gamma + r_-^{-1} Q_\Gamma).$$

Para $k < 0$, tenemos

$$\ker A = (r_+^{-1} P_\Gamma + r_- Q_\Gamma) \ker(t^k P_\Gamma + Q_\Gamma),$$

entonces, por el Teorema 2.16,

$$\ker A = span\{g_1, g_2, ..., g_{|k|}\},$$

donde

$$g_j := (r_+^{-1} P_\Gamma + r_- Q_\Gamma)(t^{|k|-j} - t^{-j}) \quad (j = 1, 2, ..., |k|).$$

En el caso $k > 0$, la primer igualdad es consecuencia de la ecuación

$$im\, A = r_2 r_- im\, (t^k P_\Gamma + Q_\Gamma).$$

Ya que $im\, (t^k P_\Gamma + Q_\Gamma)$ consiste de todas las funciones $\varphi \in L_p(\Gamma, \rho)$ para las cuales $P_\Gamma \varphi$ tiene un cero de orden $\geq k$ en el punto $t = 0$, entonces la igualdad de la $im\, A$ implica la segunda igualdad del teorema. ■

Teorema 3.4. *Sean válidas las condiciones del Teorema 3.3.*
Si $k < 0$, entonces

$$\ker(P_\Gamma r_1 I + Q_\Gamma r_2 I) = span\{r_+^{-1} r_2^{-1}, r_+^{-1} r_2^{-1} t, ..., r_+^{-1} r_2^{-1} t^{|k|-1}\}.$$

Si $k > 0$, entonces el subespacio $im(P_\Gamma r_1 I + Q_\Gamma r_2 I)$ consiste de todas las funciones de la forma $P_\Gamma r_- P_\Gamma f + P_\Gamma r_+^{-1} P_\Gamma f$ para las cuales la función $P_\Gamma f - P_\Gamma(t^k Q_\Gamma f)$ tiene un cero de orden $\geq k$ en el punto $t = 0$. Más aún,

$$coker(P_\Gamma r_1 I + Q_\Gamma r_2 I) = span\{P_\Gamma r_-, P_\Gamma(r_- t), ..., P_\Gamma(r_- t^{k-1})\}.$$

La ecuación

$$P_\Gamma r_1 \varphi + Q_\Gamma r_2 \varphi = f$$

es soluble si y solo si las siguientes condiciones se satisfacen

$$\int_\Gamma f(t)(r_2(t) - r_1(t)) r_2^{-1}(t) r_-^{-1}(t) t^{-j} dt = 0 \quad (j = 1, 2, ..., k).$$

3.3. Factorización de funciones

De una manera más general entenderemos como *una factorización de la función $a \in C(\Gamma)$* con respecto a la curva Γ como la descomposición de un producto de tres factores

$$a = a_- t^k a_+\,,$$

donde k es un entero, $a_- \in C_-(\Gamma)$, $a_+ \in C_+(\Gamma)$ y

$$a_-(t) \neq 0 \quad (t \in F_\Gamma^-), \quad a_+(t) \neq 0 \quad (t \in F_\Gamma^+).$$

En esta definición el factor de en medio puede ser reemplazado por un factor de la forma

$$\left(\frac{t-t^{+}}{t-t^{-}}\right)^{k},$$

donde t^{+} es un punto en F_{Γ}^{+} y t^{-} es un punto de F_{Γ}^{-}. Esta forma es necesaria en el caso de que la curva Γ pase por el origen o sea no acotada.

Ya que el $ind\, a_{-} = ind\, a_{+} = 0$, el número k es definido unívocamente por la función a, y tenemos que $k = ind\, a$.

En el caso que $k = 0$, la factorización $a = a_{-}t^{k}a_{+} = a_{-}a_{+}$ es llamada *canónica.*

Sea $\mathcal{C}$ un álgebra de Banach que consiste de todas las funciones que son continuas en Γ y contiene todas las funciones de $R(\Gamma)$. Introducimos las siguientes notaciones:

$$\mathcal{C}_{+} := \mathcal{C} \cap C_{+}(\Gamma), \quad \mathcal{C}_{-} := \mathcal{C} \cap C_{-}(\Gamma), \quad \mathcal{C}_{-}^{0} := \mathcal{C} \cap C_{-}^{0}(\Gamma).$$

Dado el hecho de la relación

$$\sup_{x\in\mathcal{C}} \|x\|_{C(\Gamma)}/\|x\|_{\mathcal{C}} < \infty,$$

los conjuntos $\mathcal{C}_{\pm}, \mathcal{C}_{-}^{0}$ son subálgebras del álgebra $\mathcal{C}$. Asumamos que el álgebra tiene la siguiente propiedad: si la función $a \in \mathcal{C}$ no es cero en Γ, entonces $(1/a) \in \mathcal{C}$. Esta característica es conocida como *propiedad de invertibilidad*. Sea $\mathcal{C}$ un álgebra que tiene la propiedad de invertibilidad, entonces para $a_{+} \in \mathcal{C}_{+}$ y $a_{+}(t) \neq 0 \quad (t \in F_{\Gamma}^{+})$, $(1/a_{+}) \in \mathcal{C}_{+}$. Análogamente para $a_{-} \in \mathcal{C}_{-}$ y $a_{-}(t) \neq 0 \quad (t \in F_{\Gamma}^{-})$, $(1/a_{-}) \in \mathcal{C}_{-}$.

El álgebra $\mathcal{C}$ se dice que puede ser *descompuesto* si es la suma directa de sus subálgebras $\mathcal{C}_{+}$ y $\mathcal{C}_{-}^{0}$; $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{+}\dot{+}\mathcal{C}_{-}^{0}$.

Teorema 3.5. *Sea $\mathcal{C}$ un álgebra de Banach de funciones continuas en Γ que tiene la propiedad de invertibilidad. Para que el álgebra $\mathcal{C}$ sea descompuesta es necesario y suficiente que cualquier función a de $\mathcal{C}$ que no es cero en Γ admita la factorización $a = a_{-}t^{k}a_{+}$, con factores $a_{\pm} \in \mathcal{C}_{\pm}$.*

3.4. Factorización canónica en un álgebra de Banach conmutativa

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra con unidad e, y sean $\mathcal{A}_{-}$ y $\mathcal{A}_{+}$ las subálgebras del álgebra $\mathcal{A}$ tal que su suma directa es $\mathcal{A}$. Denotaremos a P como la proyección que proyecta $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}_{+}$ paralelamente a $\mathcal{A}_{-}$ y $Q = I - P$ la proyección de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}_{-}$.

Denotaremos a $G\mathcal{A}$ como el grupo de todos los elementos invertibles de $\mathcal{A}$. El conjunto $G\mathcal{A}$ es abierto ya que es la unión de conjuntos conexos abiertos G_{α}. El conjunto conexo G_{0} es el que contiene la unidad e.

Teorema 3.6. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa y sea G_α un conjunto del grupo $G\mathcal{A}$. Si algún elemento de G_α admite una factorización canónica, entonces cualquier elemento de este conjunto admite una factorización canónica. Cualquier elemento del conjunto G_0 permite una factorización canónica.*

Demostración:
Primero se probará la última afirmación del teorema. Sea a_1 un elemento arbitrario de G_0 y $a : [0,1] \to G_0$ una función continua que conecta los elemento e y a_1, $a(0) = e$, $a(1) = a_1$. Más aún, sea $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = 1$ una partición del intervalo $[0,1]$ tal que

$$\|a(t_j) - a(t_{j-1})\| < \left(\max_{0 \le t \le 1} \|a^{-1}(t)\| \right)^{-1} \quad (j = 1, ..., n).$$

En particular para el elemento $z_1 = -a(t_1) + e$, tenemos la estimación $\|z_1\| < 1$. Por lo que el elemento $\log a(t_1)$ definido por la fórmula

$$\log a(t_1) := \log(e - z_1) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_1^n}{n}$$

pertenece al álgebra $\mathcal{A}$ y $\exp(\log a(t_1)) = a(t_1)$. Con respecto a

$$a(t_{k+1}) = a(t_k)(e - z_{k+1}),$$

donde $z_{k+1} = -(a(t_k))^{-1}(a(t_{k+1}) - a(t_k))$ y $\|z_{k+1}\| < 1$ $(k = 1, 2, ..., n-1)$, $\log a(t_k)$ $(\in \mathcal{A})$ puede ser sucesivamente definido para todos los números $k = 1, 2, ..., n-1$ por la ecuación

$$\log a(t_{k+1}) := \log a(t_k) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_{k+1}^n}{n}.$$

Del mismo modo se puede verificar que

$$\exp(\log a(t_{k+1})) = \exp(\log a(t_k)) \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_{k+1}^n}{n} \right) = a(t_{k+1}).$$

En particular, tenemos que $\exp \log a_1 = a_1$.

Sea P la proyección que mapea $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}_+$ paralelamente a $\mathcal{A}_-$, y sea $Q = I - P$ su proyección complementaria. Ya que $\log a = P \log a + Q \log a$, tenemos que

$$a = \exp(P \log a) \exp(Q \log a).$$

Esta ecuación nos da una factorización canónica de la función a. De hecho, los elementos

$$x_+ := \exp(P \log a) - e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (P \log a)^n$$

y

$$x_- := \exp(Q \log a) - e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(Q \log a)^n$$

pertenecen a las álgebras $\mathcal{A}_+$ y $\mathcal{A}_-$, respectivamente. Más aún, los elementos $e + x_+ = \exp(P \log a)$ y $e + x_- = \exp(Q \log a)$ son invertibles, donde

$$(e + x_+)^{-1} - e = \exp(-P \log a) - e \in \mathcal{A}_+$$

y

$$(e + x_-)^{-1} - e = \exp(-Q \log a) - e \in \mathcal{A}_-.$$

La última afirmación del teorema ha sido probada.

Sea G_α un conjunto conexo de $G\mathcal{A}$ que contiene un elemento a_0 que permita una factorización canónica. Más aún, sea a_1 un elemento arbitrario de G_α. El elemento a_1 puede ser representado en la forma $a_1 = a_0 b$ con $b \in G_0$. Por lo que fue probado, el elemento b tiene una factorización canónica. Por lo que a_1 admite una factorización canónica también. ■

3.5. Prueba del teorema de factorización

Sea Γ la unión de curvas cerradas simples $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$ que son disjuntas por pares. Introducimos las funcionales $\mathcal{V}_j$ $(j = 1, 2, ..., n)$ definidas en el grupo $GC(\Gamma)$ por la ecuación

$$\mathcal{V}_j(a) := \frac{1}{2\pi}[arg\, a(t)]_{t \in \Gamma_j}.$$

Más aún, $\sum_{j=1}^{n} \mathcal{V}_j(a) = ind\, a$.

Lema 3.1. *Sea $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\Gamma)$ un álgebra de funciones continuas que tienen la propiedad de invertibilidad y contiene a $R(\Gamma)$. Para una arbitraria n-tupla de enteros $k_1, k_2, ..., k_n$, el conjunto $G_{k_1 k_2 ... k_n}$ definido por*

$$G_{k_1 k_2 ... k_n} = \{a \in G\mathcal{C} \; : \; \mathcal{V}_j(a) = k_j, \quad j = 1, 2, ..., n\}$$

es un conjunto conexo del grupo $G\mathcal{C}$. El elemento unidad está contenido en el conjunto $G_{00..,0}$. Más aún, tenemos la ecuación

$$G\mathcal{C}(\Gamma) = \bigcup_{k_1, k_2, ..., k_n} G_{k_1 k_2 ... k_n},$$

donde la unión es tomada sobre todas las n-tuplas de enteros $k_1, k_2, ..., k_n$.

Demostración:

Primero consideremos el caso cuando la curva Γ coincide con Γ_1. Sea a un elemento arbitrario de $G\mathcal{C}$ que puede ser conectado con el elemento unidad por una curva continua en $G\mathcal{C}$, es decir, existe una función $h : [0, 1] \to G\mathcal{C}$ tal que $h(0) = e$ $(e(t) = 1, \; t \in \Gamma_1)$ y $h(1) = a$. La función $\mathcal{V}_1(h(\mu))$ es una función continua en el intervalo $[0,1]$, tomando solo valores enteros. Por lo que es una función constante. En particular, $\mathcal{V}_1(a) = \mathcal{V}_1(1) = 0$. Ya que $a \in G_0$.

De igual manera, cada elemento $a \in G_0$ puede ser conectado con el elemento unidad por una curva continua en $G\mathcal{C}$. Sea r una función racional de G_0 que esté en una vecindad suficientemente pequeña del elemento a con respecto a la norma en $\mathcal{C}(\Gamma)$. Entonces todos los valores de la función continua $g : [0,1] \to \mathcal{C}$ definido por la ecuación $g(\lambda) := (1-\lambda)r + \lambda a$ $(0 \le \lambda \le 1)$ pertenecen a G_0, y tenemos que $\mathcal{V}_1 g(\lambda) = 0$ $(0 \le \lambda \le 1)$.

La función r es el producto de muchos factores finitos de la forma

$$(1 - t^{-1}\alpha^+)^{\pm 1}, \quad (t - \alpha^-)^{\pm 1} \quad (\alpha^{\pm} \in F_{\Gamma}^{\pm}).$$

Cualquiera de estos elementos puede ser conectado con el elemento unidad por una curva continua completamente perteneciente a $R(\Gamma) \cap G_0$.

Ahora, sea a una función arbitraria de $G\mathcal{C}$. Todas las funciones de $G\mathcal{C}$ que pueden ser conectadas con a por una curva continua en $G\mathcal{C}$ pertenece al conjunto

$$G_k = \{x \in G\mathcal{C} \ : \ \mathcal{V}_1(x) = k\},$$

donde $k = \mathcal{V}_1(a)$. De la validación de la ecuación

$$G_k = (t - t_1)^k G_0$$

con t_1 en el interior del dominio que es acotado por la curva Γ_1, resulta que G_k es un conjunto conexo del grupo $G\mathcal{C}$. Todos los conjuntos G_k $(k = 0, \pm 1, ...)$ son diferentes y tenemos que

$$G\mathcal{C} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} G_k.$$

Procediendo al caso general cuando Γ consiste de n curvas cerradas simples disjuntas $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$. Denotaremos a $\mathcal{C}_j$ $(j = 1, 2, ..., n)$ como el subálgebra del álgebra $\mathcal{C}$ que consiste de todas las funciones que son cero en las curva Γ_k $(k \neq j)$. El álgebra $\mathcal{C}$ es la suma directa de todas las subálgebras $\mathcal{C}_j$, y cualquier álgebra $\mathcal{C}_j$ puede ser considerada como alguna álgebra $\mathcal{C}(\Gamma_j)$. Por lo que tenemos

$$G\mathcal{C} = G\mathcal{C}(\Gamma_1) \dot{+} G\mathcal{C}(\Gamma_2) \dot{+} ... \dot{+} G\mathcal{C}(\Gamma_n),$$

donde cada componente conectado de $G\mathcal{C}$ es también una suma directa consistente de n conjuntos conexos del grupo $G\mathcal{C}(\Gamma_j)$ $(j = 1, 2, ..., n)$. Por esto y lo anterior probado tenemos como resultado la segunda ecuación del lema. ■

Demostración del teorema 3.5.
Sea $\mathcal{C}$ un álgebra que se puede descomponer, y sea a un elemento de $G\mathcal{C}$. Podemos escoger una función racional $r \in R(\Gamma) \cap G\mathcal{C}(\Gamma)$ tal que

$$[arg\, r(t)a(t)]_{t \in \Gamma_j} = 0,$$

donde $\Gamma_j (\in \Gamma)$ es una curva cerrada arbitraria. Por el Lema 3.1, la función ra pertenece al conjunto $G_{00..,0}$ que contiene el elemento unidad. Consecuentemente, el elemento ra admite una factorización canónica con factores (y sus inverso) en el grupo $G\mathcal{C}(\Gamma)$. La función r tiene una factorización con coeficientes racionales. Por lo que el producto ra admite una factorización con las propiedades deseadas.

Ahora queremos probar la necesidad de las condiciones del teorema. Suponemos que cada función de la forma exp $f(f \in \mathcal{C})$ admite una factorización canónica

$$\exp\, f = f_- f_+ \quad (f_-(\infty) = 1).$$

Como antes, asumimos que la curva Γ consiste de curvas cerradas simples $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$ y que

$$\mathcal{V}_j = \frac{1}{2\pi}[arg\, a(t)]_{t\in\Gamma_j} \quad (j = 1, 2, ..., n).$$

Las ecuaciones

$$\mathcal{V}_j(\exp\, f) = 0 \quad (j = 1, 2, ..., n)$$

nos muestran que las igualdades

$$\mathcal{V}_j(f_\pm) = 0 \quad (j = 1, 2, ..., n)$$

se satisfacen también.

Primero consideremos el caso cuando la curva Γ_k acota un dominio simplemente conexo F_k que está completamente contenido en F_Γ^+ o F_Γ^-. Si $F_k \subset F_\Gamma^+$, entonces $\mathcal{V}_k(f_+) = 0$. De la factorización canónica tenemos que $\mathcal{V}_k(f_+) = -\mathcal{V}_k(f_-)$, por lo que $\mathcal{V}_k(f_-) = 0$. Más aún, las igualdades $\mathcal{V}_j(f_\pm) = 0$ han sido probadas para toda j tales que Γ_j acota un dominio el cual está completamente contenido en F_Γ^+ o F_Γ^-.

Ahora suponemos que la curva Γ_m acota un dominio F_m^+ en tal sentido que todas las curvas Γ_j contenidas en F_Γ^+, que a su vez, acotan dominios que son enteramente contenidos ya sea en F_Γ^+ o en F_Γ^-. En este caso también $\mathcal{V}_m(f_\pm) = 0$. Procediendo este razonamiento, podemos probar la validez de las ecuaciones $\mathcal{V}_j(f_\pm) = 0$. De la factorización canónica tenemos que

$$f = \log\, f_- + \log\, f_+.$$

Considerando las condiciones $\mathcal{V}_j(f_\pm) = 0$, las funciones $\log f_\pm$ son continuas. Repitiendo las condiciones de la prueba del Teorema 3.6, tenemos que $\log f_+ \in \mathcal{C}_+$ y $\log f_- \in \mathcal{C}_-$. Consecuentemente, el álgebra $\mathcal{C}$ se puede descomponer. ■

3.6. Operadores con coeficientes continuos

Teorema 3.7. *Sean $a, b \in C(\Gamma)$. Para que el operador $A := aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ sea invertible al menos de un lado en el espacio $L_p(\Gamma, \rho)$ es necesario y suficiente la validez de las condiciones*

$$a(t) \neq 0, \quad y \quad b(t) \neq 0 \quad (t \in \Gamma).$$

Si las condiciones se satisfacen, entonces el operador A es invertible, solo es invertible por la izquierda o solo es invertible por la derecha, dependiendo de si el número

$$k := ind\, \frac{a}{b}$$

es igual a cero, positivo o negativo, respectivamente.

Demostración:
Sean $a, b \in C(\Gamma)$ que no son cero en Γ. Escogemos una función racional $r \in R(\Gamma)$ que aproxime suficientemente bien a la función $c = \frac{a}{b}$. Esto es, la función c tiene la forma $c = r(1+m)$, donde $m \in C(\Gamma)$ y

$$\max_{t\in\Gamma} |m(t)| < \frac{1}{\|P_\Gamma\|}.$$

Ya que $\|P_\Gamma\| \geq 1$, tenemos que $ind\,(1+m) = 0$ y $ind\, c = ind\, r$. Sea

$$r = r_- t^k r_+$$

la factorización de la función r con respecto a la curva Γ. Consideremos el caso cuando $k \geq 0$. Reescribiendo el operador A como

$$A = br_-[t^k r_+(1+m)P_\Gamma + r_-^{-1}Q_\Gamma] = br_-((1+m)P_\Gamma + Q_\Gamma)(t^k r_+ P_\Gamma + r_-^{-1}Q_\Gamma),$$

el operador A puede ser representado en la forma

$$A = br_-(I + mP_\Gamma)(r_+P_\Gamma + r_-^{-1}Q_\Gamma)(t^kP_\Gamma + Q_\Gamma).$$

Como $\|mP_\Gamma\| < 1$, el operador $I + mP_\Gamma$ es invertible y

$$(I + mP_\Gamma)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(mP_\Gamma)^j.$$

El operador $r_+P_\Gamma + r_-^{-1}Q_\Gamma$ es invertible, donde

$$(r_+P_\Gamma + r_-^{-1}Q_\Gamma)^{-1} = r_+^{-1}P_\Gamma + r_-Q_\Gamma.$$

El operador $t^kP_\Gamma + Q_\Gamma$ es invertible por la izquierda con

$$(t^kP_\Gamma + Q_\Gamma)^{-1} = t^{-k}P_\Gamma + Q_\Gamma.$$

Por lo que, si $k = 0$, entonces el operador A es invertible y tenemos

$$A^{-1} = (r_+^{-1}P_\Gamma + r_-Q_\Gamma)\sum_{j=0}^{\infty}(-mP_\Gamma)^j b^{-1} r_-^{-1} I.$$

Para $k > 0$, el operador A solo invertible por la izquierda y

$$A^{-1} = (t^{-k}P_\Gamma + Q_\Gamma)(r_+^{-1}P_\Gamma) + r_-Q_\Gamma)\sum_{j=0}^{\infty}(-mP_\Gamma)^j b^{-1} r_-^{-1} I.$$

Ahora tomando el caso cuando $k < 0$. Consideremos el operador $B = at^{-k}P_\Gamma + b_\Gamma Q_\Gamma$. Tomando en cuenta que $ind\,(at^{-k}/b) = 0$ y por lo que fue probado, el operador B es invertible.

Ya que el operador B se puede representar en la forma $B = A(t^{-k}P_\Gamma + Q_\Gamma)$, el operador A es invertible por la derecha, y tenemos $A^{-1} = (t^{-k}P_\Gamma + Q_\Gamma)B^{-1}$ o

$$A^{-1} = (t^{-k}P_\Gamma + Q_\Gamma)(r_+^{-1}P_\Gamma + r_-Q_\Gamma)\sum_{j=0}^{\infty}(-mP_\Gamma)^j b^{-1}r_-^{-1}I.$$

La necesidad del teorema será probada indirectamente. Supongamos que el operador A es invertible al menos de un lado y al menos una de las funciones a y b tienen un cero en Γ. Asumiendo que r_1 y r_2 son funciones racionales que pertenecen a $R(\Gamma)$, tales que aproximan las funciones a y b, respectivamente, con suficiente exactitud en la norma $C(\Gamma)$, las funciones r_1 y r_2 se pueden escoger de tal manera que al menos una tenga un cero en Γ. El operador $r_1P_\Gamma + r_2Q_\Gamma$ está suficientemente cerca del operador A. Por lo que también es invertible por lo menos de un lado. Lo cual contradice el Teorema 3.1. ■

3.7. Factorización generalizada de funciones continuas

Diremos que una función $a \in GL_\infty(\Gamma)$ admite una *factorización generalizada con respecto a la curva* Γ, si la función a puede ser representada como un producto

$$a = a_- t^k a_+,$$

donde k es un entero y tanto a_- como a_+ son funciones que tienen las siguientes propiedades:

1) $a_-, a_-^{-1} \in L_p^-(\Gamma)$ y $a_+, a_+^{-1} \in L_p^+(\Gamma)$ para cada p $(1 < p < \infty)$.
2) El operador $a_+^{-1}P_\Gamma a_-^{-1}I$ es acotado en el espacio $L_p(\Gamma)$ para cualquier p $(1 < p < \infty)$.

Teorema 3.8. *Cualquier función $a \in GC(\Gamma)$ permite una factorización generalizada con respecto a la curva Γ, donde $k = ind\, a$.*

Demostración:
Sea m una función de $C(\Gamma)$ que satisface la condición

$$\max_{t\in\Gamma}|m(t)| < \min_{p_1\le r\le p_2}\left\{\|P_\Gamma\|^{-1}_{L_r(\Gamma)}, \|Q_\Gamma\|^{-1}_{L_r(\Gamma)}\right\},$$

donde p_1 y p_2 son un par de números para los cuales $p_1 < p_2$, $p_1^{-1} + p_2^{-1} < 1$, entonces los operadores $I + P_\Gamma mI$ y $I + Q_\Gamma mI$ son invertibles en cualquiera de los espacios $L_r(\Gamma)$ $(p_1 \le r \le p_2)$.
Sean

$$x := (I + P_\Gamma mI)^{-1}1 \quad y \quad y := (I + Q_\Gamma mI)^{-1}1,$$

las funciones x y y pertenecen al espacio $L_{p_2}(\Gamma)$. De las ecuaciones $x + P_\Gamma(mx) = 1$ y $y + Q_\Gamma(my) = 1$ obtenemos que $x \in L_{p_2}^+(\Gamma)$, $y \in L_{p_2}^-(\Gamma)$, $(1+m)x = z_-$ y $(1+m)y = z_+$, donde $z_\pm \in L_{p_2}^\pm(\Gamma)$. Las últimas dos ecuaciones implican la relación $z_+x = yz_-$. De aquí se sigue que ambos lados de la ecuación son constantes. Teniendo aún en cuenta que $z_-(\infty) = y(\infty) = 1$, obtenemos $z_+x = yz_- = 1$. También, tenemos la relación

$$1 + m = z_-z_+,$$

en la cual z_-,$1/z_- \in L^-_{p_2}(\Gamma)$; $z_+, 1/z_+ \in L^+_{p_2}(\Gamma)$. Ahora queremos verificar que el operador $H := z_+P_\Gamma z_-^{-1}I$ es acotado en todos los espacios $L_r(\Gamma)$ $(p_1 < r < p_2)$.

Sea $f = f_+ + f_-$, donde $f_+ \in L^+_r(\Gamma)$ y $f_- \in \overset{\circ}{L}{}^-_r(\Gamma)$. Entonces, $(Hf)(t) = z_+P_\Gamma z_-^{-1}f_+$. Por lo que es suficiente mostrar que el operador $H|L^+_r(\Gamma)$ (H restringido a $L^+_r(\Gamma)$) es acotado. Supongamos que $f_+ \in L^+_r(\Gamma)$ $(p_1 < r < p_2)$, y sea $\varphi_+(\in L^+_r(\Gamma))$ una solución de la ecuación

$$\varphi + P_\Gamma m\varphi_+ = f_+.$$

Esta ecuación puede ser reescrita en la forma

$$(1 + m)\varphi_+ + \varphi_- = f_+,$$

donde φ_- es alguna función que pertenece a $\overset{\circ}{L}{}^-_r(\Gamma)$. De la relación $1 + m = z_-z+$ tenemos

$$z_+\varphi_+ + z_-^{-1}\varphi_- = z_-^{-1}f_+.$$

Más aún, la función $z_+\varphi_+$ pertenece a $L^+_s(\Gamma)$ y la función $z_-^{-1}\varphi_-$ pertenece a $\overset{\circ}{L}{}^-_s(\Gamma)$ para cierto número $s > 1$. Proyectando ambos lados de la última ecuación tenemos

$$\varphi_+ = z_+^{-1}P_\Gamma z_-^{-1}f_+ + Hf_+.$$

Por lo que

$$H = (I + P_\Gamma mI)^{-1}|L^+_r(\Gamma).$$

Ahora, sea a una función arbitraria de $GC(\Gamma)$. Escogemos una función racional $r_0 \in R(\Gamma)$ tal que la función $m = ar_0^{-1} - 1$ satisface la condición inicial de la prueba. Así, $ind\ r_0 = ind\ a(= k)$. Sea

$$r_0 = r_-t^kr_+$$

que representa una factorización de r_0 con respecto a la curva Γ. De esta factorización y de la relación $m + 1 = z_-z_+$, se sigue que

$$a = a_-t^ka_+,$$

donde $a_- = r_-z_-$ y $a_+ = r_+z_+$. El operador

$$a_+^{-1}P_\Gamma a_-^{-1}I = r_+^{-1}(z_+^{-1}P_\Gamma z_-^{-1})r_-^{-1}I$$

es acotado en todos los espacios $L_r(\Gamma)$, $(p_1 < r < p_2)$, donde la funciones a_- y a_-^{-1} pertenecen a $L^-_{p_2}(\Gamma)$ y a_+ y a_+^{-1} son elementos de $L^+_{p_2}(\Gamma)$. Más aún, los factores $a_\pm$ satisfacen las condiciones 1) y 2) de arriba para valores $p_1 \leq r \leq p_2$.

Ahora se intentará mostrar que las funciones $a_\pm$ satisfacen las condiciones 1) y 2) para cada $r\,(1 < r < \infty)$. Sea $\tilde{p}_1(> 1)$ un número arbitrario menor que p_1 y sea $\tilde{p}_2 > p_2$, donde

$\tilde{p}_1^{-1} + \tilde{p}_2^{-1} < 1$ y $\tilde{p}_1 < r < \tilde{p}_2$. Por lo anterior probado, existe una factorización $\tilde{a} = \tilde{a}_- t^{\tilde{k}} \tilde{a}_+$ con factores $\tilde{a}_\pm$ que satisfacen las condiciones 1) y 2) para $\tilde{p}_1 < r < \tilde{p}_2$. Además, podemos notar que $\tilde{k} = k$ y que $a_- = c_1 \tilde{a}_-$ y $a_+ = c_2 \tilde{a}_+$, donde c_1 y c_2 son constantes complejas. Por lo que los factores $a_\pm$ satisfacen las condiciones 1) y 2) para $\tilde{p}_1 < r < \tilde{p}_2$ también. ■

Teorema 3.9. *Sean a y b que pertenecen a $GC(\Gamma)$, $k = ind\, a/b$ y la ecuación*

$$\frac{a}{b} = c_- t^k c_+$$

una factorización generalizada de la función a/b. Entonces el operador inverso de $aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ del lado correspondiente está dado por la ecuación

$$(aP_\Gamma + bQ_\Gamma)^{-1} = (t^{-k} P_\Gamma + Q_\Gamma)(c_+^{-1} P_\Gamma c_-^{-1} + ab^{-1} t^{-k} c_+^{-1} Q_\Gamma c_-^{-1}) b^{-1} I.$$

Para $k < 0$ tenemos que

$$\ker(aP_\Gamma + bQ_\Gamma) = \{g, gt, ..., gt^{|k|-1}\},$$

donde $g := c_+^{-1} - c_- t^k$.
Para $k > 0$,

$$coker\ (aP_\Gamma + bQ_\Gamma) = span\{bc_-, bc_- t, ..., bc_- t^{k-1}\}.$$

En el caso $k > 0$, la ecuación $aP_\Gamma \varphi + bQ_\Gamma \varphi = f$ es soluble si y solo si las condiciones

$$\int_\Gamma f(t) b^{-1}(t) c_-^{-1}(t) t^{-j} dt = 0 \quad (j = 1, 2, ..., k)$$

se satisfacen.

Demostración:
Para comenzar, consideremos el caso $k = 0$. Por lo que se demostró en el Teorema 3.7, el operador $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ es invertible

$$A^{-1} = (c_+^{-1} P_\Gamma c_-^{-1} I + ab^{-1} c_+^{-1} Q_\Gamma c_- I) b^{-1} I.$$

Sea B el operador definido por la parte derecha de esta ecuación. Notemos que el operador $c_+^{-1} Q_\Gamma c_-^{-1} = a^{-1} bI - c_+^{-1} P_\Gamma c_-^{-1}$ es acotado simultáneamente con el operador $c_+^{-1} P_\Gamma c_-^{-1}$. Consecuentemente, la ecuación $A^{-1} = B$ define un operador acotado.
El operador B puede ser escrito en la forma

$$B = (c_+^{-1} P_\Gamma c_-^{-1} I + c_- Q_\Gamma c_-^{-1} I) b^{-1} I.$$

Sea r una función racional arbitraria de $C(\Gamma)$. Entonces

$$(c_+^{-1} P_\Gamma c_-^{-1} + c_- Q_\Gamma c_-^{-1})(c_- c_+ P_\Gamma + Q_\Gamma) r = (c_+^{-1} P_\Gamma + c_- Q_\Gamma)(c_+ r_+ + c_-^{-1} r_-).$$

Ya que $c_+ r_+ \in L_p^+(\Gamma, \rho)$ y $c_-^{-1} r_- \in \overset{\circ}{L}{}_p^-(\Gamma, \rho)$, se tiene que

$$(c_+^{-1} P_\Gamma c_-^{-1} + c_- Q_\Gamma c_-^{-1})(c_- c_+ P_\Gamma + Q_\Gamma) r = r,$$

esto implica que $BAr = r$. Más aún, el operador B es la inversa al operador A.
Si $k > 0$, el operador $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ se puede expresar en la forma

$$A = b(ab^{-1} t^{-k} P_\Gamma + Q_\Gamma)(t^k P_\Gamma + Q_\Gamma).$$

Por lo anterior probado, el operador A^{-1} que es el inverso por la izquierda de A tiene la forma enunciada en el teorema.
Para una función racional arbitraria $r \in C(\Gamma)$, la ecuación

$$b^{-1} c_-^{-1} (aP_\Gamma + bQ_\Gamma)(c_+^{-1} P_\Gamma + c_- Q_\Gamma) r = (t^k P_\Gamma + Q_\Gamma) r$$

es válida. Para $k < 0$, tenemos

$$\ker(aP_\Gamma + bQ_\Gamma) = (c_+^{-1} P_\Gamma c_- Q_\Gamma) \ker(t^k P_\Gamma + Q_\Gamma).$$

Por lo que la tercera ecuación del teorema resulta del Teorema 3.3.
La última afirmación será probada de manera más general adelante. ■

De este teorema podemos reescribir el operador inverso de $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ como

$$(aP_\Gamma + bQ_\Gamma)^{-1} = x(a^{-1} P_\Gamma + b^{-1} Q_\Gamma) x^{-1}$$

con $x = bc_-$.
Si $A = gI + hS_\Gamma$ $(g, h \in C(\Gamma))$, $g^2(t) - h^2(t) \neq 0$ en Γ y si la ecuación

$$\frac{g+h}{g-h} = c_- t^k c_+$$

es una factorización generalizada de la ecuación $(g+h)(g-h)^{-1}$, entonces uno de los operadores inversos de A (del lado correspondiente) está dado por la ecuación

$$(gI + hS_\Gamma)^{-1} = \frac{g}{g^2 - h^2} I - \frac{h}{g^2 - h^2} x S_\Gamma x^{-1} I,$$

donde $x = (g-h)c_-$.

Capítulo 4

Operadores de Fredholm

4.1. Operadores normalmente solubles

Sean B_1, B_2 espacios de dimensión finita, la condición $f(y) = 0$ con $f \in \ker A^*$ y $y \in B_2$, para el operador $A \in L(B_1, B_2)$, son una condición necesaria para la solubilidad de la ecuación $Ax = y$.

Lema 4.1. *Sea $A \in L(B_1, B_2)$ y $\mathcal{Z}$ el espacio de todos los vectores $y \in B_2$ que satisfacen $f(y) = 0$ para todas las funcionales $f \in \ker A^*$. Entonces la variedad lineal $im\ A$ es denso en $\mathcal{Z}$.*

Demostración:
Para todos los vectores $y \in im\, A$ y todas las funcionales $f \in \ker\ A^*$, tenemos $f(y) = f(Ax) = (A^* f)(x) = 0$. Consecuentemente, $im\ A \subset \mathcal{Z}$.
Supongamos que la cerradura de la variedad lineal $im\, A$ es una parte propia de $\mathcal{Z}$. Sea x_0 un vector de $\mathcal{Z}$ que no pertenece al subespacio $\overline{im\ A}$. Por el teorema de Hahn-Banach existe una funcional $\chi \in B_2^*$ tal que $\chi(x_0) \neq 0$ y $\chi(im\ A) = 0$. Entonces $\chi \in \ker A^*$. Ya que $\chi(\mathcal{Z}^*) = 0$. Esto contradice la condición $\chi(x_0) \neq 0$. $\blacksquare$

El operador $A \in L(B_1, B_2)$ se dice que es *normalmente soluble* siempre que la ecuación $Ax = y$ $(x \in B_1, y \in B_2)$ sea soluble si y solo si la condición $f(y) = 0$ se satisface para cada funcional $f \in \ker A^*$.

Teorema 4.1. *Para que el operador $A \in L(B_1, B_2)$ sea normalmente soluble es necesario y suficiente que la variedad lineal $im\ A$ sea cerrada.*

Sea $A \in L(B_1, B_2)$. Denotaremos a $\mathbf{A}$ como el operador que mapea el espacio cociente $B_1/\ker A$ en el subespacio $\overline{im\ A}$ de acuerdo a la regla $\mathbf{Ax} := Ax$, donde $\mathbf{x}$ es la clase cociente de $B_1/\ker A$ que contiene al elemento $x \in B_1$. Por lo que $\mathbf{A}$ pertenece a $L(B_1/\ker A, \overline{im\ A})$ y $\|\mathbf{A}\| = \|A\|$.

Teorema 4.2. *Para que el operador A sea normalmente soluble es necesario y suficiente la invertibilidad del operador $\boldsymbol{A}$.*

Para el operador $A \in L(B_1, B_2)$ introducimos la cantidad k_A que es igual a $\|\mathbf{A}^{-1}\|$ si el operador $\mathbf{A}$ es invertible e ∞ de lo contrario. Podemos ver que en ambos casos tenemos la ecuación

$$k_A = \sup_{y \in im\ A, \|y\|=1} \inf_{Ax=y, x \in B_1} \|x\|$$

ya que

$$\sup_{y \in im\ A, \|y\|=1} \|\mathbf{A}^{-1} y\| = \sup_{y \in im\ A, \|y\|=1, Ax=y} \|\mathbf{x}\| = \sup_{y \in im\ A, \|y\|=1} \inf_{Ax=y, x \in B_1} \|x\|.$$

Teorema 4.3. *La relación $k_A < \infty$ es necesaria y suficiente para que el operador $A \in L(B_1, B_2)$ sea normalmente soluble.*

4.2. La restricción de operadores normalmente solubles

Si el operador $A \in L(B_1, B_2)$ es normalmente soluble, entonces la restricción $A|\mathcal{N}$ a un subespacio $\mathcal{N} \subset B_1$, no es normalmente soluble en general.

Teorema 4.4. *Sea $A \in L(B_1, B_2)$ un operador normalmente soluble y $\mathcal{N}$ un subespacio de B_1. Para que la restricción $A|\mathcal{N}$ del operador A al subespacio $\mathcal{N}$ sea normalmente soluble es necesario y suficiente que la suma $\mathcal{N} + \ker A$ sea un subespacio cerrado.*

Demostración:
Supongamos que el operador $A|\mathcal{N}$ es normalmente soluble. Queremos demostrar que la variedad lineal $\mathcal{N} + \ker A$ es cerrada. Sea $y_n = x_n + z_n$ ($x_n \in \mathcal{N}$, $z_n \in \ker A$; $n = 1, 2, ...$) una sucesión de vectores que convergen al vector y. Como $\lim Ay_n = \lim Ax_n = Ay$, por el Teorema 4.1, tenemos que $Ay \in A|\mathcal{N}$. Por lo que existe un vector $y_0 \in \mathcal{N}$ tal que $Ay_0 = Ay$. Tomando en cuenta que $y - y_0 \in \ker A$, obtenemos que $y \in \mathcal{N} + \ker A$.

Ahora pasamos a la prueba de la suficiencia. Sea la suma $\mathcal{N} + \ker A$ cerrada. Denotaremos a A_1 como la restricción del operador A al subespacio $\mathcal{N} + \ker A$. De los cuantificadores tenemos que $k_{A_1} \leq k_A$. Ya que $k_A < \infty$, tenemos que $k_{A_1} < \infty$. Por lo que el operador A_1 es normalmente soluble. ■

Corolario 4.1. *Sea $A \in L(B_1, B_2)$ un operador normalmente soluble y $\mathcal{N}$ un subespacio de codimensión finita. Entonces el operador $A|\mathcal{N}$ es normalmente soluble.*

Corolario 4.2. *Asumamos que $A \in L(B_1, B_2)$, y $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_2$ son subespacios de B_1. Si $\dim \mathcal{N}_1/\mathcal{N}_2 < \infty$, entonces la solubilidad normal de uno de los operadores $A|\mathcal{N}_1$ y $A|\mathcal{N}_2$ implica la solubilidad normal del otro.*

Corolario 4.3. *Sean B_1, B_2 y B_3 espacios de Banach y $A \in L(B_1, B_2)$, $B \in L(B_2, B_3)$ operadores normalmente solubles. Una condición necesaria y suficiente para que el operador BA sea normalmente soluble es la cerradura de la suma $im\, A + \ker B$. En particular, en el caso $\dim \ker B < \infty$ el operador BA es normalmente soluble.*

4.3. Perturbación de operadores normalmente solubles

Sea $A \in L(B_1, B_2)$ un operador normalmente soluble arbitrario y K un operador con dimensión finita de $L(B_1, B_2)$. Entonces el operador $B = A + K$ es normalmente soluble también. Además, la siguiente ecuación es cierta

$$B|\ker K = A|\ker K.$$

Teorema 4.5. *Sea el operador $K \in L(B_1, B_2)$ que tiene la siguiente propiedad: para cualquier operador normalmente soluble $A \in L(B_1, B_2)$ el operador $A+K$ es normalmente soluble. Entonces el operador K es de dimensión finita.*

Demostración:
Sea el operador K que cumple las condiciones del teorema. La solubilidad normal del operador cero implica la solubilidad normal del operador K. Suponiendo que el operador K es de dimensión infinita, debería existir un operador compacto de dimensión infinita T que es definido en el subespacio $im\, K$. En este caso el operador $(I + T)K$ con I el operador identidad definido en el subespacio $im\, K$ debería ser normalmente soluble. Por lo que, dado las suposiciones del teorema, el operador $TK = (I + T)K - K$ debería ser normalmente soluble también. Lo último, de cualquier manera, es imposible, porque TK es un operador compacto de dimensión infinita. ■

Teorema 4.6. *Sea $A \in L(B_1, B_2)$ un operador normalmente soluble y sea $T \in L(B_1, B_2)$ un operador compacto que satisface una de las condiciones*

$$\dim \ker A/(\ker T \cap \ker A) < \infty$$

o

$$\dim \overline{im\, T}/(im\, A \cap \overline{im\, T}) < \infty.$$

Entonces el operador $A + T$ es normalmente soluble.

4.4. La solubilidad normal del operador adjunto

Teorema 4.7. *Si el operador $A \in L(B_1, B_2)$ es normalmente soluble, entonces el conjunto $im A^*$ es cerrado y consiste de todas las funcionales $f \in B_1^*$ que cumplen la condición $f(x) = 0$ para cada $x \in \ker A$.*

Teorema 4.8. *El operador $A \in L(B_1, B_2)$ es normalmente soluble si y solo si el operador $A^* \in L(B_2^*, B_1^*)$ es normalmente soluble. Más aún, tenemos la ecuación $k_A = k_{A^*}$.*

4.5. Operadores invertibles generalizados

Un operador $A \in L(B_1, B_2)$ se dice que es *invertible generalizado* si podemos encontrar un operador $B \in L(B_2, B_1)$ tal que

$$ABA = A.$$

El operador B será referido como el *operador invertible generalizado* de A y lo denotaremos como $B = A^{(-1)}$.

Lema 4.2. *Sea $A \in L(B_1, B_2)$ un operador invertible generalizado. Entonces los operadores $P_1 := AA^{(-1)}$ y $P_2 := A^{(-1)}A$ son proyecciones, donde*

$$im\ A = im\ P_1 \quad y \quad \ker A = \ker P_2.$$

Demostración:

$$P_1^2 = AA^{(-1)}AA^{(-1)} = AA^{(-1)} = P_1$$

y

$$P_2^2 = A^{(-1)}AA^{(-1)}A = A^{(-1)}A = P_2.$$

Además

$$im\ A \supseteq im\ AA^{(-1)} \supseteq im\ AA^{(-1)}A = im\ A$$

y

$$\ker A \subseteq \ker A^{(-1)}A \subseteq \ker AA^{(-1)}A = \ker A. \quad \blacksquare$$

Teorema 4.9. *Para que el operador $A \in L(B_1, B_2)$ sea invertible generalizado es necesario y suficiente que tenga las siguientes tres propiedades:*
1.- A es normalmente soluble.
2.- El subespacio $\ker A$ tiene un complemento directo en B_1.
3.- El subespacio $im\ A$ tiene un complemento directo en B_2.

Demostración:
La necesidad de las condiciones del teorema se obtienen del Lema 4.2. Se probrará la suficiencia. Sea $\mathcal{L}$ el complemento directo al subespacio $\ker A$ en B_1 y $\mathcal{N}$ el complemento directo a $im\ A$ en B_2. El operador $A|\mathcal{L}$ considerado como un operador que mapea $\mathcal{L}$ en $im\ A$, es invertible. Denotaremos a $B \in L(im\ A, \mathcal{L})$ como el operador para el cual $BA|\mathcal{L} = I|\mathcal{L}$ y $AB|im\ A = I|im\ A$. Sea P que representa la proyección que proyecta B_2 en $im\ A$ paralelamente a $\mathcal{N}$. Considerando el operador $A^{(-1)} := BP \in L(B_2, B_1)$, obtenemos la ecuación $AA^{(-1)}A = ABPA = ABA$. $\blacksquare$

Teorema 4.10. *Sea $A \in L(B_1, B_2)$ un operador invertible generalizado y $K \in L(B_1, B_2)$ un operador de dimensión finita. Entonces el operador $A+K$ es invertible generalizado, donde*

$$(A+K)^{(-1)} = A^{(-1)} - [A^{(-1)}(A+K) - I]K_1^{(-1)}[(A+K)A^{(-1)} - I].$$

Aquí $K_1^{(-1)}$ denota una inversa generalizada al operador de dimensión finita

$$K_1 := (A+K)A^{(-1)}(A+K) - (A+K).$$

Antes de probar este teorema se enunciará un lema.

Lema 4.3. *Si para un operador $X \in L(B_1, B_2)$ existe un operador $Y \in L(B_2, B_1)$ tal que para el operador $Z := XYX - X$ es invertible generalizado, entonces el operador X es también invertible generalizado, donde*

$$X^{(-1)} = Y - (YX - I)Z^{(-1)}(XY - I).$$

Aquí $Z^{(-1)}$ es el operador inverso generalizado a Z.

Demostración:

$$XX^{(-1)}X = XYX - ZZ^{(-1)}Z = Z - Z + X = X. \quad \blacksquare$$

Demostración del Teorema 4.10. Sea $A^{(-1)}$ un operador inverso generalizado de A. Podemos ver que el operador

$$K_1 = (A+K)A^{(-1)}(A+K) - (A+K)$$

es de dimensión finita. Consecuentemente, podemos aplicar el Lema 4.3 a $X = A + K$, $Y = A^{(-1)}$ y $Z = K_1$. $\blacksquare$

4.6. Operadores de Fredholm

Un operador $A \in L(B_1, B_2)$ es llamado *operador de Fredholm* (operador de Noether, Φ-operador) si es normalmente soluble y los números $\dim \ker A$ y $\dim \mathit{coker}\, A$ son finitos. El siguiente número es referido como el índice del operador $A \in L(B_1, B_2)$

$$\mathit{Ind}\, A := \dim \ker A - \dim \mathit{coker}\, A.$$

Un operador $A \in L(B_1, B_2)$ invertible por la izquierda (derecha) es de Fredholm si y solo si $\dim \mathit{coker}\, A < \infty$ ($\dim \ker A < \infty$).

Denotaremos a $\Phi(B_1, B_2)$ como el conjunto de todos los operadores de Fredholm que pertenecen a $L(B_1, B_2)$.

Teorema 4.11. *Si $A \in \Phi(B_1, B_2)$ y $B \in \Phi(B_2, B_3)$, entonces*

$$BA \in \Phi(B_1, B_3)$$

y

$$\mathit{Ind}\, BA = \mathit{Ind}\, B + \mathit{Ind}\, A.$$

Demostración:
El operador BA es normalmente soluble por el Corolario 4.3. Adicionalmente, tenemos

$$\dim\ker BA \leq \dim\ker B + \dim\ker A < \infty$$

y

$$\dim \mathit{coker}\ BA \leq \dim \mathit{coker}\ B + \dim \mathit{coker}\ A < \infty.$$

Por lo que $BA \in \Phi(B_1, B_3)$. Ahora, denotaremos a $\mathcal{L}_1$ como la intersección de los subespacios $im\ A$ y $\ker B$. Entonces

$$\dim\ker BA = \dim\ker A + \dim\ker \mathcal{L}_1.$$

El subespacio $\ker B$ puede ser representado en la forma de una suma directa de los subespacios $\mathcal{L}_1$ y algún subespacio $\mathcal{L}_2$. El espacio B_2 puede ser representado en la forma $B_2 = im\ A \dot{+} \mathcal{L}_2 \dot{+} \mathcal{L}_3$, donde $\mathcal{L}_3$ es un espacio de dimensión finita. Más aún,

$$\dim \mathit{coker}\ A = \dim \mathcal{L}_2 + \dim \mathcal{L}_3.$$

Dado que $\dim\ker B = \dim \mathcal{L}_1 + \dim \mathcal{L}_2$, tenemos

$$\mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_1 = -\dim\ker B + \dim \mathit{coker}\ A.$$

De la descomposición $B_2 = im\ A \dot{+} \mathcal{L}_2 \dot{+} \mathcal{L}_3$ obtenemos que $im\ B = im\ BA \dot{+} B\mathcal{L}_3$. Por lo que

$$\dim \mathit{coker}\ BA = \dim \mathit{coker}\ B + \dim \mathcal{L}_3.$$

Comparando esta ecuación con la ecuación de $\dim\ker BA$, tenemos

$$Ind\ BA = \dim\ker BA - \dim \mathit{coker}\ BA$$

$$= \dim\ker A + \dim \mathcal{L}_1 - \dim \mathit{coker}\ B - \dim \mathcal{L}_3$$

$$= \dim\ker A + \dim\ker B - \dim \mathit{coker}\ B - \dim \mathit{coker}\ A. \qquad \blacksquare$$

Teorema 4.12. *Para un operador $A \in L(B_1, B_2)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1.- El operador A es un operador de Fredholm.

2.- El operador A puede ser representado en la forma $A = D + T$, donde D es un operador de Fredholm invertible de un lado de $L(B_1, B_2)$ y T es un operador compacto.

3.- El operador A puede ser representado en la forma $A = D + K$, donde D es un operador de Fredholm invertible de un lado de $L(B_1, B_2)$ y K es un operador de dimensión finita.

Demostración:
La afirmación 3) $\Rightarrow$ 2) es directa. Para la afirmación 2) $\Rightarrow$ 1), sin pérdida de generalidad podemos decir que el operador D es invertible por la derecha. Entonces el operador $A = D(I + D^{-1}T)$, de acuerdo a el Teorema 4.11, es un operador de Fredholm, ya que de la teoría

de Riesz-Schauder tenemos que los operadores de la forma $I + T$, donde T es un operador compacto de $L(B)$, son operadores de Fredholm.

Ahora para probar por completo el teorema, se demostrará la afirmación 1) $\Rightarrow$ 3). Sea $\{y_1, ..., y_n\}$ una base del subespacio *coker* A y $\{x_1, ..., x_m\}$ una base del subespacio $\ker A$. Denotaremos a $\{f_1, ..., f_m\}$ un sistema de funcionales de B_1^* para los cuales $f_j(x_k) = \delta_{jk}$ $(j, k = 1, 2, ..., m)$. Más aún, construimos el operador K de dimensión finita por el arreglo

$$Kx := \sum_{j=1}^{\text{mín}(n,m)} f_j(x) y_j \quad (x \in B_1)$$

y definimos el operador $D := A - K$. De manera sencilla podemos ver que

$$im\, D = im\, A \dot{+} im\, K.$$

Para $n \leq m$, tenemos que $im\, D = B_2$ y, para $n > m$, $codim\, im\, D = n - m$. Más aún, de la ecuación $D = A - K$ se sigue que, para $n < m$,

$$\ker D = span\{x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_m\},$$

mientras que para $n \geq m$, tenemos que $\ker D = \{0\}$. ■

4.7. Regularización de operadores

Diremos que el operador $A \in L(B_1, B_2)$ *admite una regularización* si existe un operador $M \in L(B_2, B_1)$ tal que cualquiera de los operadores $AM - I$ y $MA - I$ es compacto. El operador M se dice que es un *regularizador* de A.

Teorema 4.13. *Para que el operador $A \in L(B_1, B_2)$ sea de Fredholm es necesario y suficiente que admita una regularización.*

Demostración:
Sea M un regularizador de A, es decir, $MA = I + T_1$ y $AM = I + T_2$, donde T_1 y T_2 son compactos. Ya que

$$im\, A \supseteq im\, AM = im\, (I + T_2),$$

entonces, por el Teorema 2.4, el operador A es normalmente soluble. De las mismas relaciones se sigue que

$$\dim coker\, A \leq \dim coker(I + T_2) < \infty$$

y

$$\ker A \subseteq \ker MA = \ker(I + T_1),$$

por lo que

$$\dim \ker A \leq \dim \ker(MA) < \infty.$$

Consecuentemente, A es un operador de Fredholm.

Pasamos a la suficiencia, sea A un operador de Fredholm. Entonces, por el Teorema 4.9, el operador A es invertible generalizado. Denotaremos a $A^{(-1)} \in L(B_2, B_1)$ como una de las inversas generalizadas de A. Del Lema 4.2, tenemos

$$rango(AA^{(-1)} - I) = \dim coker\ A$$

y

$$rango(A^{(-1)}A - I) = \dim \ker A.$$

De aquí, concluimos que el operador $A^{(-1)}$ es un regularizador de A. ■

4.8. Índice y traza

Sea K un operador de dimensión finita de $L(B)$, y sean $\lambda_1, ..., \lambda_n$ todos sus eigenvalores distintos de cero. Entenderemos la *traza de un operador* K como la suma de todos sus eigenvalores. La traza el operador K será denotada por $tr\ K := \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$.

Proposición 1. *Para dos operadores de rango finito arbitrarios* K_1 *y* K_2*, tenemos la ecuación*

$$tr(K_1 + K_2) = tr\ K_1 + tr\ K_2.$$

Sean $\mathcal{L} := \ker K_1 \cap \ker K_2$ y $\mathcal{M} := im K_1 + im K_2$. Denotaremos a $\mathcal{Z}$ como un complemento directo de $\mathcal{M} \cap \mathcal{L}$ en $\mathcal{L}$, y a $\mathcal{N}$ como un complemento directo de $\mathcal{Z}$ en el espacio entero B que contiene a $\mathcal{M}$.

$$K_j\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}, \quad \mathcal{Z} \subseteq \ker K_j \quad (j = 1, 2)$$

y por lo tanto $tr\, K_j = tr\, K_j|\mathcal{N}$ $(j = 1, 2)$ y $tr\,(K_1 + K_2) = tr\,(k_1 + K_2)|\mathcal{N}$. Como $\dim \mathcal{N} < \infty$, la ecuación de la Proposición 1 resulta de las correspondientes ecuaciones para matrices.

Proposición 2. *Si un operador de rango finito* $K \in L(B)$ *es representado en la forma*

$$Kx = \sum_{j=1}^{m} f_j(x) y_j \quad (x \in B),$$

entonces

$$tr\ K = \sum_{j=1}^{m} f_j(y_j).$$

De hecho, considerando la Proposición 1 es suficiente mostrando la validez para el caso $m = 1$. El operador K_1 definido por $K_1 x := f_1(x) y_1$ tiene el eigenvalor $\lambda_1 = f_1(y_1)$. Consecuentemente $tr\ K_1 = f_1(y_1)$.

Proposición 3. *Sea K un operador de rango finito de $L(B_1, B_2)$ y $A \in L(B_2, B_1)$. Entonces*

$$tr\ AK = tr\ KA.$$

Si el operador K es representado como en la Proposición 2, entonces tenemos

$$AKx = \sum_{j=1}^{m} f_j(x)Ay_j \quad y \quad KAx = \sum_{j=1}^{m} f_j(Ax)y_j.$$

Y de la Proposición 2 tenemos

$$tr\ AK = \sum_{j=1}^{m} f_j(Ay_j) \quad y \quad tr\ KA = \sum_{j=1}^{m} f_j(Ay_j).$$

Teorema 4.14. *Sea el operador A un elemento de $\Phi(B_1, B_2)$ y sea $M \in L(B_2, B_1)$ un regularizador de A tal que los operadores $MA - I_1$ y $AM - I_2$ tienen rango finito. Entonces*

$$ind\ A = tr(I_1 - MA) - tr(I_2 - AM).$$

Demostración:
Primero consideremos el caso cuando el operador $M = A^{(-1)}$ es una inversa generalizada de A. Del Lema 4.2, tenemos

$$A^{(-1)}A = I_1 - P_1, \quad AA^{(-1)} = I_2 - P_2,$$

donde $I_1 - P_1$ es una proyección en el subespacio $\ker A$, mientras que $I_2 - P_2$ es una proyección en el subespacio $im\ A$. Por lo que

$$tr(I_1 - A^{(-1)}A) = \dim im\ P_1 = \dim \ker A$$

y

$$tr(I_2 - AA^{(-1)}) = \dim im\ P_2 = \dim coker\ A.$$

Más aún, en este caso se ha probado la ecuación del teorema. Ahora tomemos M arbitrario. En este caso el operador $(M - A^{(-1)})A$ tiene rango finito. Por lo que el operador $(M - A^{(-1)})|im\,A$ también tiene rango finito. De la relación $\dim coker\,A < \infty$, el operador $M - A^{(-1)}$ tiene rango finito. Por la Proposición 3, tenemos

$$tr(M - A^{(-1)})A = tr\ A(M - A^{(-1)}),$$

por lo que

$$tr(I_1 - A^{(-1)}A) - tr(I_1 - MA) = tr(I_2 - AA^{(-1)}) - tr(I_2 - AM).$$

Esto implica

$$tr(I_1 - A^{(-1)}A) - tr(I_2 - AA^{(-1)}) = tr(I_1 - MA) - tr(I_2 - AM). \quad \blacksquare$$

4.9. La estructura del conjunto de operadores de Fredholm

Proposición 1. *Sea el operador $A \in GL(B)$, para el cual existe una curva continua $\lambda(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ en el plano $\mathbb{C}$ conectando el punto $\lambda_1 = 0$ con el punto λ_2 del dominio $|\lambda| > \|A\|$ y que no intersecta con el espectro de A. Entonces el operador A está contenido en el conjunto conexo $G_0(= G_0L(B))$ del grupo $GL(B)$ el cual también contiene el operador identidad.*

Proposición 2. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Entonces el grupo $GL(\mathcal{H})$ es conexo.*

Proposición 3. *Sea B un espacio de Banach y $\mathcal{L}$ un subespacio con codimensión finita. El grupo $GL(B)$ es conexo si y solo si el grupo $GL(\mathcal{L})$ es conexo.*

Proposición 4. *Asumamos que B_1 y B_2 son dos espacios de Banach, y para los cuales existe al menos un operador de Fredholm A en $L(B_1, B_2)$. El grupo $GL(B_1)$ es conexo si y solo si el grupo $GL(B_2)$ es conexo.*

Teorema 4.15. *Si uno de los grupos $GL(B_1)$ o $GL(B_2)$ es conexo, entonces el conjunto de todos los operadores de $\Phi(B_1, B_2)$ tienen un mismo índice que constituye un componente conexo.*

Demostración:
Este teorema solo tiene sentido si el conjunto $\Phi(B_1, B_2)$ es no vacío. De la Proposición 4, tenemos que ambos grupos, $GL(B_1)$ y $GL(B_2)$, son conexos. Denotaremos a $\Phi_k(B_1, B_2)$ como el conjunto de todos los operadores de $\Phi(B_1, B_2)$ que tienen su índice igual a k.

Sea D un operador fijo invertible de un lado de $\Phi_k(B_1, B_2)$ y D^{-1} su inversa. Como $Ind\ D^{-1} = -Ind\ D = -k$, tenemos que $Ind\ AD^{-1} = 0$. Por el Teorema 4.12, podemos representar el operador AD^{-1} en la forma $AD^{-1} = B + K$, donde $B \in GL(B_2)$ y K es un operador de dimensión finita. Por hipótesis, existe una función continua $F : [0, 1] \to GL(B_2)$ tal que

$$F(0) = B \quad y \quad F(1) = I.$$

Suponiendo que el operador D es invertible por la izquierda, consideremos la función

$$H(\lambda) := (F(\lambda) + (1 - \lambda)K)D \quad (0 \leq \lambda \leq 1).$$

Esta función es continua y todos sus valores pertenecen a $\Phi_k(B_1, B_2)$. Más aún, $H(0) = A$ y $H(1) = D$.

Consideremos el caso donde D es invertible por la derecha. Sea D^{-1} una inversa derecha de D. Entonces tenemos que $D^{-1}D = I + K_0$, donde K_0 es un operador de dimensión finita. Construimos una familia de operadores $H_1(\lambda)$ $(0 \leq \lambda \leq 1)$ definido por las igualdades

$$H_1(\lambda) := A(I + 2\lambda K_0) \quad \left(0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}\right)$$

y

$$H_1(\lambda) = (F(2\lambda - 1) + 2(1 - \lambda)K)D \quad \left(\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1\right).$$

La función H_1 mapea el intervalo $[0,1]$ continuamente en $\Phi_k(B_1, B_2)$, donde

$$H_1(0) = A, \quad H_1\left(\frac{1}{2}\right) = AD^{-1}D, \quad y \quad H_1(1) = D. \quad \blacksquare$$

4.10. Operadores $\Phi_{\pm}$

Un operador $A \in L(B_1, B_2)$ se dice que es un Φ_+-operador si es normalmente soluble y el número $\dim\ker A$ es finito, mientras que $\dim \mathit{coker}\ A$ es infinito. Un operador $A \in L(B_1, B_2)$ se dice que es un Φ_--operador si es normalmente soluble y

$$\dim\ker A = \infty, \quad \dim \mathit{coker}\ A < \infty.$$

El conjunto de todos los Φ_+-operadores de $L(B_1, B_2)$ se denotará como $\Phi_+(B_1, B_2)$, de manera similar $\Phi_-(B_1, B_2)$ será el conjunto de todos los Φ_--operadores de $L(B_1, B_2)$. Si un operador A pertenece a $\Phi_+(B_1, B_2)$, entonces $A^* \in \Phi_-(B_2^*, B_1^*)$. Si $A^* \in \Phi_-(B_2^*, B_1^*)$ implica que $A \in \Phi_+(B_1, B_2)$. Así, bajo estas hipótesis, la siguiente ecuación es válida

$$\dim\ker A = \dim \mathit{coker}\ A^*.$$

Capítulo 5

Teoremas generales en operadores integrales singulares

5.1. Cambio de curva

Sean Γ y $\tilde{\Gamma}$ curvas no simples con $\Gamma \subset \tilde{\Gamma}$. El espacio $L_p(\tilde{\Gamma}, \rho)$ se puede identificar con la suma directa de los subespacios $L_p(\Gamma, \rho)$ y $L_p(\tilde{\Gamma} \backslash \Gamma, \rho)$. Denotaremos a R_1 como el operador proyección del espacio $L_p(\tilde{\Gamma}, \rho)$ en el espacio $L_p(\Gamma, \rho)$ paralelamente a $L_p(\tilde{\Gamma} \backslash \Gamma, \rho)$, y R_2 su proyección complementaria.

Teorema 5.1. *Sean $\tilde{a}, \tilde{b} \in L_\infty(\tilde{\Gamma})$ y $a := \tilde{a}|\Gamma, b := \tilde{b}|\Gamma$. Si*

$$\tilde{a} = \tilde{b} = 1 \quad (t \in \tilde{\Gamma} \backslash \Gamma),$$

entonces el operador $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ es la restricción del operador $\tilde{A} = \tilde{a}P_{\tilde{\Gamma}} + \tilde{b}Q_{\tilde{\Gamma}}$ a $L_p(\Gamma, \rho)$,

$$A = \tilde{A}|L_p(\Gamma, \rho).$$

También tenemos la igualdad

$$\tilde{A} = (I + R_1\tilde{A}R_2)(AR_1 + R_2),$$

donde el operador $I + R_1\tilde{A}R_2$ es invertible.

Demostración:
Para R_2 tenemos que

$$R_2\tilde{A} = R_2\tilde{a}P_{\tilde{\Gamma}} + R_2\tilde{b}Q_{\tilde{\Gamma}} = R_2P_{\tilde{\Gamma}} + R_2Q_{\tilde{\Gamma}} = R_2$$

por lo que

$$\tilde{A} = (R_1 + R_2)\tilde{A} = R_1\tilde{A} + R_2.$$

Esto implica, en particular, que $R_1\tilde{A}R_1 = \tilde{A}R_1 = AR_1$ y que el espacio $L_p(\Gamma,\rho)$ es invariante para A, obteniendo así la primer implicación. Más aún, muestra que

$$\tilde{A} = R_1\tilde{A}R_1 + R_1\tilde{A}R_2 + R_2 = (I + R_1\tilde{A}R_2)(R_1\tilde{A}R_1 + R_2),$$

obteniendo la segunda implicación. Además,

$$(I + R_1\tilde{A}R_2)^{-1} = I - R_1\tilde{A}R_2. \qquad \blacksquare$$

Teorema 5.2. *Sean $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$ curvas no simples con intersecciones vacías por pares, y sean $a, b \in L_\infty(\Gamma)$ con $\Gamma = \Gamma_1 \cup ... \cup \Gamma_n$. Entonces el operador $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ es un Φ-operador si y solo si cada uno de los operadores $A_j = a_jP_{\Gamma_j} + b_jQ_{\Gamma_j}$ con $a_j = a|\Gamma_j$ y $b_j = b|\Gamma_j$ es un Φ-operador.*

El operador A es un $\Phi_+(\Phi_-)$-operador si y solo si todos los operadores A_j son $\Phi_+(\Phi_-)$-operadores o Φ-operadores con al menos uno de ellos un $\Phi_+(\Phi_-)$-operador. En cada caso

$$Ind\,(aP_\Gamma + bQ_\Gamma) = \sum_{j=1}^{n} Ind(a_jP_\Gamma + b_jQ_\Gamma).$$

Demostración:
Podemos identificar el espacio $L_p(\Gamma,\rho)$ con la suma directa $L_p(\Gamma_1,\rho)\dot{+}...\dot{+}L_p(\Gamma_n,\rho)$. Sea R_k $(k = 1, ..., n)$ el operador proyección que proyecta el espacio $L_p(\Gamma,\rho)$ en el espacio $L_p(\Gamma_k,\rho)$ paralelamente a la suma directa de los otros subespacios $L_p(\Gamma_j,\rho)$ $(j = 1, ..., n, j \neq k)$. Como $R_1\dot{+}...\dot{+}R_n = I$, podemos escribir el operador A en la forma

$$A = \sum_{j,k=1}^{n} R_jAR_k.$$

Podemos observar que

$$R_jAR_j = A_jR_j \quad y \quad R_jAR_k = \frac{1}{2}(a_j - b_j)R_jS_{\Gamma_k} \quad (j \neq k).$$

Ya que las curvas Γ_j $(j = 1, ..., n)$ son consideradas disjuntas por pares, los operadores R_jAR_k son compactos para toda $j \neq k$. Por lo que

$$A = \sum_{j=1}^{n} A_jR_j + T,$$

donde T es compacto. Pero el operador $A_1R_1 + ... + A_jR_j$ es , en principio, la suma directa de los operadores A_jR_j actuando en $L_p(\Gamma_j,\rho)$. Este hecho nos da la afirmación del teorema. $\blacksquare$

5.2. El principio de separación de singularidades

Sea a una función en $L_\infty(\Gamma)$. El subconjunto cerrado más pequeño de la curva Γ en cuyo complemento la función a es continua será llamado el *soporte de singularidad* de la función a. Lo denotaremos como $\triangle(a)$.

Teorema 5.3. *Supongamos que el soporte de singularidad $\triangle(a)$ de la función $a \in GL_\infty(\Gamma)$ consiste de n arcos cerrados disjuntos por pares $\gamma_1, ..., \gamma_n$, y sean $a_j \in GL_\infty(\Gamma)$ $(j = 1, ..., n)$ funciones que poseen las siguientes propiedades:*

1) La función a_j es continua en la curva $\Gamma\backslash\gamma_j$ $(j = 1, ..., n)$;

2) $a_j(t) = a(t)$ si $t \in \gamma_j$.

Entonces el operador $aP_\Gamma + Q_\Gamma$ es un Φ-operador si y solo si cada uno de los operadores $a_jP_\Gamma+Q_\Gamma$ es un Φ-operador, y el operador $aP_\Gamma+Q_\Gamma$ es un $\Phi_+(\Phi_-)$-operador si y solo si todos los operadores $a_jP_\Gamma + Q_\Gamma$ $(j = 1, ..., n)$ son $\Phi_+(\Phi_-)$-operadores o Φ-operadores con al menos uno de ellos un $\Phi_+(\Phi_-)$-operador. En cada caso

$$Ind(aP_\Gamma + Q_\Gamma) = \sum_{j=1}^{n} Ind(a_jP_\Gamma + Q_\Gamma) - ind\, a_0,$$

donde a_0 es la función en $GC(\Gamma)$ definida por

$$a_0 = aa_1^{-1}a_2^{-1}...a_n^{-1}.$$

Antes de probar este teorema se enunciarán dos lemas.

Lema 5.1. *Sean $a_1, ..., a_n$ funciones en $L_\infty(\Gamma)$ con soportes singulares disjuntos por pares. Entonces el operador*

$$P_\Gamma\tilde{a}P_\Gamma - P_\Gamma a_1P_\Gamma P_\Gamma a_2P_\Gamma...P_\Gamma a_nP_\Gamma \quad (\tilde{a} := a_1...a_n)$$

es compacto en $L_p(\Gamma, \rho)$.

Demostración:
Sin pérdida de generalidad, asumiremos que $n = 2$. En el primer caso si las funciones a_1, a_2 son continuas, la afirmación del lema es consecuencia del Teorema 1.12.

Ahora consideremos el caso general. En esta situación, el conjunto $\triangle(a_1)$ está en el complemento del conjunto cerrado $\triangle(a_2)$. Este complemento consiste de muchos arcos abiertos finitos o contables disjuntos por pares que cubren el conjunto cerrado $\triangle(a_1)$. Elegimos una subcubierta finita $\{\delta_j\}_1^r$ de esta cubierta y escogemos arcos abiertos γ_j y $\triangle_j$ para los cuales siempre es posible

$$\triangle(a_1) \cap \delta_j \subset \gamma_j, \quad \overline{\gamma_j} \subset \triangle_j, \quad \overline{\triangle_j} \subset \delta_j \quad (j = 1, 2, ..., r).$$

Tomamos

$$\gamma := \bigcup_{j=1}^{n} \gamma_j (\supset \triangle(a_1)) \quad y \quad \triangle := \bigcup_{j=1}^{n} \triangle_j.$$

Por lo cual existe una función $b \in C(\Gamma)$ que coincide con la función a_2 en γ y para el cual difiere de a_2 en cada punto de la frontera de $\overline{\triangle}$.

Ahora, consideremos dos funciones $c_1(t)$ y $c_2(t)$ $(t \in \Gamma)$, donde la primer función satisface las condiciones

$$c_1 \in C(\Gamma), \quad c_1(t) = a_2(t) - b(t) \quad (t \in \triangle), \quad c_1(t) \neq 0 \quad (t \in \Gamma \backslash \triangle),$$

mientras que la segunda función está definida por

$$c_2(t) := \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \triangle \\ (a_2(t) - b(t))/c_1(t) & \text{si } t \in \Gamma \backslash \triangle. \end{cases}$$

Debido a la elección especial de las funciones c_1 y c_2, tenemos que $a_2 - b = c_1 c_2$ y, por lo tanto, $a_1 a_2 = a_1 c_1 c_2 + a_1 b$. Ya que la función c_1 es cero en $\triangle(a_1)$, la función $a_1 c_1$ es continua en Γ y por lo cual

$$P_\Gamma a_1 c_1 c_2 P_\Gamma = P_\Gamma a_1 c_1 P_\Gamma c_2 P_\Gamma + T_1$$

para algún operador compacto T_1. Tomando en cuenta la continuidad de c_1, obtenemos además que

$$P_\Gamma a_1 c_1 P_\Gamma = P_\Gamma a_1 P_\Gamma c_1 P_\Gamma + T_2 \quad y \quad P_\Gamma c_1 P_\Gamma c_2 P_\Gamma = P_\Gamma c_1 c_2 P_\Gamma + T_3$$

con operadores compactos T_2 y T_3. Las anteriores identidades y

$$P_\Gamma a_1 b P_\Gamma = P_\Gamma a_1 P_\Gamma b P_\Gamma + T_4$$

implican que

$$\begin{aligned} P_\Gamma \tilde{a} P_\Gamma &= P_\Gamma a_1 c_1 c_2 P_\Gamma + P_\Gamma a_1 b P_\Gamma \\ &= P_\Gamma a_1 P_\Gamma (P_\Gamma c_1 c_2 P_\Gamma + P_\Gamma b P_\Gamma) + T_5, \end{aligned}$$

donde T_4 y T_5 son ciertos operadores compactos. Por lo tanto

$$P_\Gamma \tilde{a} P_\Gamma = P_\Gamma a_1 P_\Gamma P_\Gamma a_2 P_\Gamma + T_5. \qquad \blacksquare$$

Lema 5.2. *Si el soporte de singularidad de las funciones a_1 y $a_2 \in L_\infty(\Gamma)$ son disjuntos, entonces el operador $P_\Gamma a_1 P_\Gamma a_2 P_\Gamma - P_\Gamma a_2 P_\Gamma a_1 P_\Gamma$ es compacto*

Esta es una consecuencia inmediata del Lema 5.1.

Prueba del teorema 5.3. Definimos la función a_0 como

$$a_0 := a a_1^{-1} ... a_n^{-1}.$$

Notemos que $a_0 \in C(\Gamma)$. Tomando

$$A := P_\Gamma a P_\Gamma + Q_\Gamma \quad y \quad A_j := P_\Gamma a_j P_\Gamma + Q_\Gamma \quad (j = 0, 1, ..., n)$$

obtenemos que

$$A = A_0 A_1 ... A_n + T,$$

donde T es compacto. Esta igualdad en combinación con el Lema 5.1, el Lema 5.2 y el Teorema 4.11 nos da la validación del Teorema 5.3 si el operador $aP_\Gamma + Q_\Gamma$ es reemplazado por A y los operadores $a_j P_\Gamma + Q_\Gamma$ son reemplazados por A_j. $\blacksquare$

5.3. Una condición necesaria

Teorema 5.4. *Sean Γ una curva cerrada no simple y $a \in L_\infty(\Gamma)$. Si el operador $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ es un Φ, Φ_+ o Φ_--operador en $L_p(\Gamma, \rho)$, entonces*

$$ess \inf_{t\in\Gamma} |a(t)| > 0, \quad ess \inf_{t\in\Gamma} |b(t)| > 0.$$

También se obtiene una afirmación análoga para el operador $B = P_\Gamma aI + Q_\Gamma bI$.

Se mostrará un lema antes de probar el teorema.

Lema 5.3. *Sea Γ una curva cerrada no simple el cual acota el conjunto abierto F_Γ^+, y sea $c \in L_\infty(\Gamma)$ una función tal que, para ciertos subconjuntos γ_1, γ_2 de Γ de medida positiva,*

$$c(t) = 0 \quad si \quad t \in \gamma_1 \quad y \quad c(t) \neq 0 \quad si \quad t \in \gamma_2.$$

Supongamos además que la medida de la intersección de γ_2 con el límite de cada conjunto conexo de F_Γ^+ es positiva. Entonces para A, igual a cualquiera de los dos operadores $cP_\Gamma + Q_\Gamma$ o $P_\Gamma + cQ_\Gamma$,

$$\dim\ker A = \dim\ker A^* = 0.$$

Demostración:
Sean $F_1, ..., F_n$ el conjunto de todos los conjuntos conexos (no necesariamente diferentes) de F_Γ^+ y $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$ sus límites. Supongamos que están enumeradas de tal manera que satisfacen las siguientes dos propiedades: $mes(\gamma_1 \cap \Gamma_1) > 0$, y los puntos en F_j y F_{j+1} se pueden unir mediante una línea recta la cual intersecta la curva Γ solo en los límites de Γ_j y Γ_{j+1}. Para cada vector $\varphi_0 \in \ker(cP_\Gamma + Q_\Gamma)$ y para todos los $t \in \gamma_1 \cap \Gamma_1$ se tiene que $(Q_\Gamma\varphi_0)(t) = 0$. Así, el teorema de Lusin-Privalov (PRIVALOV,pág. 232) implica que $(Q_\Gamma\varphi_0)(t) = 0$ para $t \in \Gamma_1$. Ya que Γ_2 está contenida en el límite de la región, donde la función $Q_\Gamma\varphi_0$ es cero, tenemos $\varphi_0(t) = 0$ para $t \in \Gamma_2$ repitiendo el mismo argumento anterior. Repitiendo este procedimiento llegamos a que $\varphi_0 = 0$.

Análogamente, se puede mostrar que $\ker(P_\Gamma + cQ_\Gamma) = 0$. El operador $A^* = (cP_\Gamma + Q_\Gamma)^*$ se puede reescribir en la forma $A^* = H_\Gamma(P_\Gamma + cQ_\Gamma)H_\Gamma$, donde H_Γ está definida como en la sección 7 del capítulo 1. Más aún, tenemos que $(P_\Gamma + Q_\Gamma cI) = (I + Q_\Gamma cP_\Gamma)(P_\Gamma + cQ_\Gamma)(I - P_\Gamma cQ_\Gamma)$, donde los factores externos del lado derecho son invertibles: $(I + Q_\Gamma cP_\Gamma)^{-1} = (I - Q_\Gamma cP_\Gamma)$. Así, por lo anterior, $\dim\ker(cP_\Gamma + Q_\Gamma)^* = 0$. Análogamente, $\dim\ker(P_\Gamma + cQ_\Gamma)^* = 0$. ∎

Prueba del Teorema 5.4. Comencemos tomando el caso cuando Γ es una curva cerrada no simple. Supongamos que el operador es un Φ o $\Phi_\pm$-operador y que una de las condiciones no se cumple, sin pérdida de generalidad tomemos $ess \inf |a(t)| = 0$. Ahora definimos las funciones a_1 y b_1 como

$$a_1(t) := \begin{cases} a(t) & \text{si } |a(t)| \geq \epsilon \\ 0 & \text{si } |a(t)| < \epsilon \end{cases} \quad y \quad b_1(t) := \begin{cases} b(t) & \text{si } |b(t)| \geq \epsilon \\ \epsilon & \text{si } |b(t)| < \epsilon \end{cases},$$

donde ϵ es un número suficientemente pequeño. Además tenemos que $|a(t) - a_1(t)| < \epsilon$ y $|b(t) - b_1(t)| < \epsilon$ para cada $t \in \Gamma$.

Sea $A_1 = a_1 P_\Gamma + b_1 Q_\Gamma$. La estimación

$$\|A - A_1\| < 2\epsilon(\|P_\Gamma\| + \|Q_\Gamma\|)$$

muestra que A_1 es un Φ o $\Phi_\pm$-operador cuando ϵ es suficientemente pequeño.

Ahora tomamos $c := a_1/b_1$ y $D := cP_\Gamma + Q_\Gamma$. De nuestra suposición, el conjunto $\gamma_1 = \{t \in \Gamma : c(t) = 0\}$ tiene medida positiva, y ya que D es un Φ o $\Phi_\pm$-operador, la intersección del conjunto $\gamma_2 = \{t \in \Gamma : c(t) \neq 0\}$ y cada una de las curvas Γ_j es de medida positiva también. Así, por el Lema 5.3, tenemos que $\dim \ker D = \dim \mathit{coker}\, D = 0$, del cual se sigue su invertibilidad.

Sea φ_0 la solución a la ecuación $D\varphi_0 = 1$. Ya que $c(t) = 0$ si $t \in \gamma_1$, la ecuación $cP_\Gamma\varphi_0 = 1 - Q_\Gamma\varphi_0$ implica que $1 - (Q_\Gamma\varphi_0)(t) = 0$ en γ_1, y del teorema de Lusin-Privalov tenemos que $1 - (Q_\Gamma\varphi_0)(t) = 0$ en Γ_1. Repitiendo el argumento de la prueba anterior tenemos que $1 - (Q_\Gamma\varphi_0)(z) = 0$ para toda $z \in F_\Gamma^-$. Pero esto contradice que $(Q_\Gamma\varphi_0)(\infty) = 0$, lo cual termina la prueba para el caso de una curva cerrada.

Si Γ es una curva no simple arbitraria completamos Γ a una curva cerrada no simple $\tilde{\Gamma}$ y consideramos las funciones $\tilde{a}(t)$ y $\tilde{b}(t)$ $(t \in \tilde{\Gamma})$ las cuales coinciden con a y b en Γ, respectivamente, y que son cero en $\tilde{\Gamma}\backslash\Gamma$. Del Teorema 5.1 inferimos que $\tilde{a}P_{\tilde{\Gamma}} + \tilde{b}Q_{\tilde{\Gamma}}$ es un Φ o $\Phi_\pm$-operador en $L_p(\tilde{\Gamma}\rho)$ y por lo mostrado anteriormente tenemos que

$$ess \inf_{t\in\tilde{\Gamma}} |\tilde{a}(t)| > 0, \quad ess \inf_{t\in\tilde{\Gamma}} |\tilde{b}(t) > 0,$$

lo cual implica el resultado del teorema. ■

5.4. Teoremas de conección entre operadores integrales singulares

Esta sección será para relacionar los operadores $aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ y $P_\Gamma aI + Q_\Gamma bI$.

Teorema 5.5. *Sea Γ una curva cerrada no simple y sean $a, b \in GL_\infty(\Gamma)$. Entonces los operadores $A := aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ y $B := P_\Gamma aI + Q_\Gamma bI$ son relacionados por la igualdad*

$$D_1(aP_\Gamma + bQ_\Gamma)D_2 = P_\Gamma aI + Q_\Gamma bI$$

con los operadores invertible D_1 y D_2 definidos por

$$D_1 := (I + P_\Gamma ab^{-1}Q_\Gamma)b^{-1}I \quad y \quad D_2 := (I - Q_\Gamma ab^{-1}P_\Gamma)bI.$$

Demostración:
El operador A puede ser representado en la forma

$$A = b(ab^{-1}P_\Gamma + Q_\Gamma) = b(P_\Gamma ab^{-1}P_\Gamma + Q_\Gamma)(I + Q_\Gamma ab^{-1}P_\Gamma),$$

y para el operador B tenemos

$$B = (P_\Gamma ab^{-1}I + Q_\Gamma)bI = (P_\Gamma ab^{-1}Q_\Gamma + I)(P_\Gamma ab^{-1}P_\Gamma + Q_\Gamma)bI.$$

Los operador $bI, I + Q_\Gamma ab^{-1}P_\Gamma$ y $I + P_\Gamma ab^{-1}Q_\Gamma$ son invertibles con

$$(I + Q_\Gamma ab^{-1}P_\Gamma)^{-1} = I - Q_\Gamma ab^{-1}P_\Gamma$$

y

$$(I + P_\Gamma ab^{-1}Q_\Gamma)^{-1} = I - P_\Gamma ab^{-1}Q_\Gamma.$$

Así, por las descomposiciones de los operadores A y B, tenemos que

$$\begin{aligned} P_\Gamma ab^{-1}P_\Gamma + Q_\Gamma &= b^{-1}(aP_\Gamma + bQ_\Gamma)(I - Q_\Gamma ab^{-1}P_\Gamma) \\ &= (I - P_\Gamma ab^{-1}Q_\Gamma)(P_\Gamma aI + Q_\Gamma bI)b^{-1}I. \end{aligned}$$

Lo cual prueba el teorema. ■

Teorema 5.6. *Sea Γ una curva cerrada no simple y sean $a, b \in GL_\infty(\Gamma)$. Entonces los operadores $A := aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ y $B := a^{-1}P_\Gamma + b^{-1}Q_\Gamma$ actuando en $L_p(\Gamma, \rho)$ y en su espacio dual $L_q(\Gamma, \rho^{1-q})$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$, respectivamente, son relacionados por la igualdad*

$$A^* = D_3 B D_4,$$

donde

$$\begin{aligned} D_3 &:= H_\Gamma(I + P_\Gamma a^{-1}bQ_\Gamma)bI, \\ D_4 &:= (I - Q_\Gamma a^{-1}bP_\Gamma)aH_\Gamma, \end{aligned}$$

y H_Γ se refiere al operador invertible definido por $(H_\Gamma\varphi)(t) := \overline{h_\Gamma(t)\varphi(t)}$ (ver sección 1.7).

Corolario 5.1. *Sea Γ una curva arbitraria no simple. Entonces el operador $aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ $(a, b \in GL_\infty(\Gamma))$ es un Φ_-, Φ_+ o Φ-operador en $L_p(\Gamma, \rho)$ si y solo si el operador $a^{-1}P_\Gamma + b^{-1}Q_\Gamma$ es un Φ_-, Φ_+ o Φ-operador en el espacio dual $L_q(\Gamma, \rho^{1-q})$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$. Si el operador $aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ admite una regularización por la izquierda (derecha) en $L_p(\Gamma, \rho)$, entonces el operador $a^{-1}P_\Gamma + b^{-1}Q_\Gamma$ admite una regularización por la derecha (izquierda) en $L_q(\Gamma, \rho^{1-q})$. Más aún,*

$$\dim \ker(aP_\Gamma + bQ_\Gamma)|L_p(\Gamma, \rho) = \dim coker(a^{-1}P_\Gamma + b^{-1}Q_\Gamma)|L_q(\Gamma, \rho^{1-q}).$$

Teorema 5.7. *Sea $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ un operador de Fredholm. Entonces A es invertible de un lado, el operador $at^kP_\Gamma + bQ_\Gamma$ con $k := Ind\, A$ es invertible de los dos lados, y la inversa de un lado de A está dado como $(t^kP_\Gamma + Q_\Gamma)(at^kP_\Gamma + bQ_\Gamma)^{-1}$. Más aún, en el caso $k > 0$ tenemos que*

$$\ker(aP_\Gamma + bQ_\Gamma) = span\,\{g, gt, ..., gt^{k-1}\},$$

donde $g := P_\Gamma\varphi - t^{-k}(1 - Q_\Gamma\varphi)$ *y* φ *es la solución a la ecuación*

$$at^k P_\Gamma\varphi + bQ_\Gamma\varphi = b.$$

Demostración:
La primera afirmación puede ser verificada con los resultados anteriores. Para el siguiente resultado tenemos que

$$(aP_\Gamma + bQ_\Gamma)(gt^j) = t^{j-k}(at^k P_\Gamma\varphi + bQ_\Gamma\varphi - b) = 0 \quad (j = 0, ..., k-1),$$

de lo cual se sigue que *span* $\{g, gt, ..., gt^{k-1}\} \subseteq \ker(aP_\Gamma + bQ_\Gamma)$. Tomando en cuenta la independencia lineal de las funciones $g, gt, ..., gt^{k-1}$ y la igualdad $\dim\ker(aP_\Gamma + bQ_\Gamma) = k$, tenemos que $\ker(aP_\Gamma + bQ_\Gamma) =$ *span* $\{g, gt, ..., gt^{k-1}\}$. $\blacksquare$

Capítulo 6

La factorización generalizada de funciones medibles acotadas

En este capítulo introduciremos un nuevo concepto de factorización: *la factorización generalizada de funciones con respecto a la curva* Γ *en el espacio* $L_p(\Gamma,\rho)$. Así, generalizaremos los resultados anteriores al caso de funciones en $GL_\infty(\Gamma)$, ya que aquí no todas las funciones admiten una factorización generalizada con respecto a una curva cerrada Γ.

Sea Γ una curva cerrada no simple que acota el conjunto F_Γ^+ ($0 \in F_\Gamma^+$). Una *factorización generalizada de la función* $a \in L_\infty(\Gamma)$ *con respecto a la curva* Γ *en el espacio* $L_p(\Gamma,\rho)$ es una representación en la forma

$$a(t) = a_-(t)t^k a_+(t),$$

donde k es un entero y los factores $a_\pm$ satisfacen las siguientes condiciones

1.- $a_- \in L_p^-(\Gamma,\rho)$, $a_+ \in L_q^+(\Gamma,\rho^{1-q})$, $a_-^{-1} \in L_q^-(\Gamma,\rho^{1-q})$ y $a_+^{-1} \in L_p^+(\Gamma,\rho)$.

2.- El operador $a_+^{-1}P_\Gamma a_-^{-1}I$ es acotado en $L_p(\Gamma,\rho)$.

6.1. Funciones que admiten una factorización generalizada con respecto a una curva en $L_p(\Gamma,\rho)$

Teorema 6.1. *Sea* a *una función medible con valores reales definida en una curva cerrada* Γ *que satisface las condiciones*

$$0 < ess\inf_{t\in\Gamma} a(t) \quad y \quad ess\sup_{t\in\Gamma} a(t) < \infty.$$

Entonces la función a *permite una factorización* $a = a_-a_+$ *con los factores*

$$a_+ := \exp(P_\Gamma \ln a) \quad y \quad a_- := \exp(Q_\Gamma \ln a).$$

Así, $a_+^{\pm1} \in L_\infty^+(\Gamma)$ *y* $a_-^{\pm1} \in L_\infty^-(\Gamma)$.

Demostración:
De (PRIVALOV,pp. 137-139) sabemos que las funciones $a_+^{\pm 1}$ y $a_-^{\pm 1}$ son en casi todas partes los valores límites de la función

$$F(z) := \exp\left(\pm\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\ln a(\tau)}{\tau - z}d\tau\right)$$

en F_Γ^+ y F_Γ^-, respectivamente.

Sea $\Gamma_k(\subset \Gamma)$ una curva cerrada simple que divide el plano en las regiones F_k^+ y F_k^-, y definimos

$$u_k(z) := Re\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k} \frac{\ln a(\tau)}{\tau - z}d\tau\right).$$

Ya que $\ln a(\tau)$ es esencialmente acotado y una función de valores reales en Γ_k, la función $u_k(z)$ prueba ser armónica en cada una de las regiones F_k^+ y F_k^- y, más aún, $u_k(\infty) = 0$ y $|u_k(z)| \leq cte$ $(z \in \mathbb{C})$ (ver PRIVALOV,pp. 82 y 188). Por lo que, la función

$$u(z) = Re\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\ln a(\tau}{\tau - z}d\tau\right)$$

es acotada en ambas regiones F_Γ^+ y F_Γ^-. Esto a su vez, implica que las funciones $a_+^{\pm 1}$ $(a_-^{\pm 1})$ son holomorfas y acotadas en F_Γ^+ (F_Γ^-), y por lo que finalmente tenemos

$$a_+^{\pm 1} \in L_\infty^+(\Gamma) \quad y \quad a_-^{\pm 1} \in L_\infty^-(\Gamma). \qquad \blacksquare$$

Teorema 6.2. *Sea a una función arbitraria en $L_\infty(\Gamma)$ y sea $b \in L_\infty(\Gamma)$ una función con valores reales que satisface*

$$ess \inf_{t\in\Gamma} b(t) > 0.$$

Entonces la factorizabilidad de la función ab y la función a con respecto a Γ en $L_p(\Gamma,\rho)$ son equivalentes. Si la función a admite una factorización, entonces

$$ind\, ab|L_p(\Gamma,\rho) = ind\, a|L_p(\Gamma,\rho).$$

Demostración:
Por el teorema anterior la función b es factorizable en $b = b_-b_+$ con factores $b_\pm$ distinguidos por $b_+^{\pm 1} \in L_\infty^+(\Gamma)$ y $b_-^{\pm 1} \in L_\infty^-(\Gamma)$. Sea $a = a_-t^ka_+$ una factorización de a con respecto a la curva Γ en $L_p(\Gamma,\rho)$. Entonces, evidentemente, la ecuación $ab = g_-t^kg_+$ con $g_- := a_-b_-$ y $g_+ := a_+b_+$ es una factorización de ab con respecto a la curva Γ en $L_p(\Gamma,\rho)$. $\blacksquare$

6.2. Factorización en el espacio $L_p(\Gamma,\rho)$

En esta sección se presentarán criterios para la factorizabilidad de funciones en $L_\infty(\Gamma)$ con respecto a la curva Γ.

Teorema 6.3. *La función $a \in L_\infty(\Gamma)$ admite una factorización en $L_p(\Gamma,\rho)$ si y solo si el operador $A = aP_\Gamma + Q_\Gamma$ es de Fredholm en $L_p(\Gamma,\rho)$. Si A es un operador de Fredholm entonces ind $a|L_p(\Gamma,\rho) = -Ind\ A|L_p(\Gamma,\rho)$.*

Demostración:
Primero asumimos que la función a tiene una factorización $a = a_+a_-$ en $L_p(\Gamma,\rho)$ con $ind\, a|L_p(\Gamma,\rho) = 0$ y consideramos el operador $B := (a_+^{-1}P_\Gamma + a_-Q_\Gamma)a_-^{-1}I$. Podemos notar que B es el operador inverso de A.

Sea $r \in R(\Gamma)$ una función racional arbitraria. Por la definición de factorización, tenemos que $a_-^{-1}r \in L_q(\Gamma,\rho^{1-q})$, $a_+^{-1} \in L_p^+(\Gamma,\rho)$ y $a_- \in L_p^-(\Gamma,\rho)$. En consecuencia, $a_+^{-1}P_\Gamma a_-^{-1}r \in L_1^+(\Gamma)$ y $a_-Q_\Gamma a_-^{-1}r \in \overset{\circ}{L}{}_1^-(\Gamma)$. Por lo que, los operadores $a_+^{-1}P_\Gamma a_-^{-1}I$ y $a_-Q_\Gamma a_-^{-1}I = I - aa_+^{-1}P_\Gamma a_-^{-1}I$ son acotados en $L_p(\Gamma,\rho)$, más aún, concluimos que $a_+^{-1}P_\Gamma a_- r \in L_p^+(\Gamma,\rho)$ y $a_-Q_\Gamma a_-^{-1}r \in \overset{\circ}{L}{}_p^-(\Gamma,\rho)$. Por lo que tenemos la siguiente identidad

$$\begin{aligned} ABr &= (aP_\Gamma + Q_\Gamma)(a_+^{-1}P_\Gamma a_-^{-1} + a_-Q_\Gamma a_-^{-1})r \\ &= aa_+^{-1}P_\Gamma a_-^{-1}r + a_-Q_\Gamma a_-^{-1}r = r. \end{aligned}$$

Análogamente, las inclusiones $a_+P_\Gamma r \in L_q^+(\Gamma,\rho^{1-q})$ y $a_-^{-1}Q_\Gamma r \in \overset{\circ}{L}{}_q^-(\Gamma,\rho^{1-q})$ implican que $BAr = (a_+^{-1}P_\Gamma + a_-Q_\Gamma)(a_+P_\Gamma + a_-^{-1}Q_\Gamma)r = r$.

Tomando en cuenta la acotación del operador $B = I + (1-a)a_+^{-1}P_\Gamma a_-^{-1}I$ en $L_p(\Gamma,\rho)$ tenemos que el operador A es invertible, y B es su inversa.

Ahora consideremos el caso cuando k es un entero arbitrario. En este caso la función at^{-k} admite una factorización $at^{-k} = a_-a_+$, y por lo anterior mostrado, el operador $at^{-k}P_\Gamma + Q_\Gamma$ es invertible en el espacio $L_p(\Gamma,\rho)$. Si $k > 0$ entonces el operador A puede ser reescrito en la forma $A = (at^{-k}P_\Gamma + Q_\Gamma)(t^kP_\Gamma + Q_\Gamma)$. Ya que $t^kP_\Gamma + Q_\Gamma$ es un operador de Fredholm con índice $-k$ el operador A es de Fredholm con índice $-k$ también. En el caso $k < 0$ consideramos la igualdad $at^{-k}P_\Gamma + Q_\Gamma = A(t^{-k}P_\Gamma + Q_\Gamma)$. El operador $at^{-k}P_\Gamma + Q_\Gamma$ es invertible en $L_p(\Gamma,\rho)$ y el operador $t^{-k}P_\Gamma + Q_\Gamma$ es de Fredholm con índice k. Por lo que, el operador A debe ser de Fredholm con índice $-k$ lo cual prueba la necesidad de las condiciones del teorema.

Para la suficiencia, asumiremos que el operador $A = aP_\Gamma + Q_\Gamma$ es un operador de Fredholm con índice $-k$. Entonces, por el Teorema 5.7, el operador $C := at^{-k}P_\Gamma + Q_\Gamma$ es invertible en $L_p(\Gamma,\rho)$ y, por el Teorema 5.4, $a \in GL_\infty(\Gamma)$. El Corolario 5.1 nos dice que el operador $a^{-1}t^kP_\Gamma + Q_\Gamma$ es invertible en $L_q(\Gamma,\rho^{1-q})$.

Sean $\varphi_0 \in L_p(\Gamma,\rho)$ y $\phi_0 \in L_q(\Gamma,\rho^{1-q})$ las soluciones a las ecuaciones $(cP_\Gamma + Q_\Gamma)\varphi = 1$ y $(c^{-1}P_\Gamma + Q_\Gamma)\phi = 1$ con $c := at^{-k}$. Entonces, $cP_\Gamma\varphi_0 = 1 - Q_\Gamma\varphi_0$ y $c^{-1}P_\Gamma\phi_0 = 1 - Q_\Gamma\phi_0$ y consecuentemente,

$$(P_\Gamma\varphi_0)(P_\Gamma\phi_0) = (1 - Q_\Gamma\varphi_0)(1 - Q_\Gamma\phi_0).$$

La función $(1-Q_\Gamma\varphi_0)(1-Q_\Gamma\phi_0)-1$ pertenece al subespacio $\overset{\circ}{L}{}_1^-(\Gamma)$ mientras que $(P_\Gamma\varphi_0)(P_\Gamma\phi_0)-1$ está contenida en $L_1^+(\Gamma)$. Ya que $L_1^+(\Gamma) \cap \overset{\circ}{L}{}_1^-(\Gamma) = \{0\}$ concluimos que $(P_\Gamma\varphi_0)(P_\Gamma\phi_0) = (1 - Q_\Gamma\varphi_0)(1 - Q_\Gamma\phi_0) = 1$. Ahora, tomando $a_+ := P_\Gamma\phi_0$ y $a_- := 1 - Q_\Gamma\varphi_0$ nos da $c = a_+a_-$ y, por lo que, $a = a_+t^ka_-$. Podemos notar que las funciones $a_+ = P_\Gamma\phi_0$, $a_- = 1 - Q_\Gamma\varphi_0$,

$a_+^{-1} = P_\Gamma\varphi_0$ y $a_-^{-1} = 1 - Q_\Gamma\phi_0$ satisfacen las condiciones de una factorización generalizada mostradas al inicio de este capítulo.

Por último veremos la acotación del operador $a_+^{-1}P_\Gamma a_-^{-1}I$ en $L_p(\Gamma,\rho)$. Sin pérdida de generalidad, asumimos que $|c(t)| \leq m < 1$ y consideramos los operadores $C = cP_\Gamma + Q_\Gamma$ y $B = (a_+^{-1}P_\Gamma + a_-Q_\Gamma)a_-^{-1}I$.

Por lo anterior, podemos ver que se tiene la igualdad $BC\varphi = \varphi$ para cada función $\varphi \in L_p(\Gamma,\rho)$. Así, el operador $B = C^{-1}$ es acotado en el espacio $L_p(\Gamma,\rho)$, y ya que este operador puede ser reescrito como $B = I + (1-c)a_+^{-1}P_\Gamma a_-^{-1}I$, se sigue la acotación del operador $a_+^{-1}P_\Gamma a_-^{-1}$ en $L_p(\Gamma,\rho)$. ■

Como una consecuencia de los teoremas 5.2 y 6.3, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.4. *Sea Γ una curva cerrada no simple que es la unión de curvas cerradas no simples disjuntas por parejas $\Gamma_1,...,\Gamma_n$ y sea $a \in L_\infty(\Gamma)$. Entonces la función a admite una factorización generalizada con respecto a Γ en $L_p(\Gamma,\rho)$ si y solo si cada una de las funciones $a|\Gamma_j (j = 1,...,n)$ tienen una factorización generalizada con respecto a la curva Γ_j en el espacio $L_p(\Gamma_j,\rho)$. Si la función a admite una factorización generalizada, entonces*

$$ind\, a|L_p(\Gamma,\rho) = \sum_{j=1}^{n} ind\, (a|\Gamma_j)|L(_p\Gamma_j,\rho).$$

Teorema 6.5. *Sea $a \in L_\infty(\Gamma)$ y sea $b \in GC(\Gamma)$. La factorizabilidad de a en $L_p(\Gamma,\rho)$ es equivalente a la factorizabilidad de ab en $L_p(\Gamma,\rho)$.*

Si la función a admite una factorización en $L_p(\Gamma,\rho)$ y si

$$a = a_-t^{k_1}a_+, \qquad b = b_-t^{k_2}b_+$$

son la factorización de a en $L_p(\Gamma,\rho)$ y la factorización generalizada de la función b, respectivamente, entonces la igualdad

$$ab = a_-b_-t^{k_1+k_2}a_+b_+$$

es una factorización de la función ab en $L_p(\Gamma,\rho)$.

Demostración:
Dada la continuidad de la función b en Γ, el operador $abP_\Gamma + Q_\Gamma - (aP_\Gamma + Q_\Gamma)(bP_\Gamma + Q_\Gamma)$ es compacto en $L_p(\Gamma,\rho)$. Como el operador $bP_\Gamma + Q_\Gamma$ es de Fredholm concluimos que $abP_\Gamma + Q_\Gamma$ es de Fredholm si y solo si el operador $aP_\Gamma + Q_\Gamma$ lo es. Tomando en cuenta el Teorema 6.3, esto prueba la primera afirmación del teorema.

Ahora, sea $ab = c_-t^mc_+$ una factorización generalizada de la función ab en $L_p(\Gamma,\rho)$, entonces tenemos que $a_-b_-t^{k_1+k_2}a_+b_+ = c_-t^mc_+$, y la definición de factorización generalizada implica que $(a_+b_+)^{\pm1}$, $c_+^{\pm1} \in L_r^+(\Gamma)$ y $(a_-b_-)^{\pm1}$, $c_-^{\pm1} \in L_r^-(\Gamma)$ para alguna $r > 1$. De aquí, concluimos que $k_1 + k_2 = m$, $a_-b_- = \lambda c_-$ y $a_+b_+ = \lambda^{-1}c_+$ con cierta constante λ, esto por lo visto en la Sección 3.7. ■

6.3. Aplicación a la inversión de operadores integrales singulares

Como consecuencia de algunos resultados anteriores, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 6.6. *Sea Γ una curva cerrada arbitraria y sean $a, b \in L_\infty(\Gamma)$. Si el operador $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ es un Φ-operador o un $\Phi_\pm$-operador en $L_p(\Gamma, \rho)$, entonces las condiciones*

$$a \in GL_\infty(\Gamma) \quad y \quad b \in GL_\infty(\Gamma)$$

se satisfacen.

Sean $a, b \in GL_\infty(\Gamma)$. Entonces el operador A es un Φ-operador si y solo si la función ab^{-1} admite una factorización generalizada con respecto a la curva Γ en el espacio $L_p(\Gamma, \rho)$. Si A es un Φ-operador, entonces $Ind\, A = -ind\, ab^{-1}|L_p(\Gamma, \rho)$. Además, si la función ab^{-1} es factorizable generalizado con respecto a la curva Γ en $L_p(\Gamma, \rho)$, $ab^{-1} = c_- t^k c_+$ con $k = indab^{-1}|L_p(\Gamma, \rho)$, entonces A es invertible por los dos lados, por la derecha o por la izquierda en $L_p(\Gamma, \rho)$, dependiendo de si el número k es igual a cero, negativo o positivo, respectivamente. En cualquier caso el operador inverso (de un lado) está dado por

$$(aP_\Gamma + bQ_\Gamma)^{-1} = (t^{-k}P_\Gamma + Q_\Gamma)(c_+^{-1}P_\Gamma c_-^{-1} + ab^{-1}t^{-k}c_+^{-1}Q_\Gamma c_-^{-1})b^{-1}I.$$

Este teorema también es válido para el operador $P_\Gamma aI + Q_\Gamma bI$ y en este caso tenemos que

$$(P_\Gamma aI + Q_\Gamma bI)^{-1} = b^{-1}(c_+^{-1}P_\Gamma c_- I + c_+^{-1}Q_\Gamma c_-^{-1}t^{-k}ab^{-1}I)(P_\Gamma t^{-k}I + Q_\Gamma).$$

Teorema 6.7. *Sean $a, b \in GL_\infty(\Gamma)$ y asumimos que la función $c = ab^{-1}$ posee la factorización $c = c_- t^k c_+$ en $L_p(\Gamma, \rho)$. Entonces, si $k = ind\, c|L_p(\Gamma, \rho) < 0$,*

$$\ker(aP_\Gamma + bQ_\Gamma) = span\{g, gt, ..., gt^{|k|-1}\},$$

con $g := c_+^{-1} - c_- t^k$.

En el caso $k > 0$ se tiene que

$$coker\ (aP_\Gamma + bQ_\Gamma) = span\{bc_-, bc_-t, ..., bc_-t^{k-1}\},$$

y la ecuación $aP_\Gamma\varphi + bQ_\Gamma\varphi = f$ es soluble si y solo si

$$\int_\Gamma f(t)b^{-1}(t)c_-^{-1}(t)t^{-j}dt = 0 \quad (j = 1, ..., k).$$

Demostración:
Primero definimos

$$\varphi_K := gt^K (= c_+^{-1}t^K - c_- t^{k+K}).$$

Entonces, $P_\Gamma\varphi_K = c_+^{-1}t^K$ y $Q_\Gamma\varphi_K = -c_-t^{k+K}$ de lo cual se sigue que $cP_\Gamma\varphi_K + Q_\Gamma\varphi_K = 0$ y, así, $\{g, gt, ..., gt^{k-1}\} \subseteq \ker A$. Tomando en cuenta la igualdad $\dim\ker A = |k|$ se demuestra la primera afirmación.

Ahora sea $k > 0$. La meta es construir una base del subespacio $\ker A^*$. Primero recordemos que $A^* = H_\Gamma(P_\Gamma bI + Q_\Gamma aI)H_\Gamma$, donde el operador H_Γ esta definido por $(H_\Gamma\varphi)(t) := \overline{h_\Gamma(t)\varphi(t)}$.

Consideremos las funciones $y_j := H_\Gamma(c_-^{-1}b^{-1}t^{-j})$ $(j = 1, ..., k)$. Estas funciones satisfacen las ecuaciones $H_\Gamma A^* y_j = (P_\Gamma b + Q_\Gamma a)c_-^{-1}b^{-1}t^{-j} = P_\Gamma c_-^{-1}t^{-j} + Q_\Gamma c_+ t^{k-j} = 0$ y así tenemos que $span\{y_1, ..., y_k\} \subseteq \ker A^*$. Por medio de la igualdad $\ker A^* = k$ encontramos que

$$span\{y_1, ..., y_k\} = \ker A^*.$$

El operador A es normalmente soluble. Así, tenemos la inclusión $f \in im\ A$ si y solo si $f \in L_p(\Gamma, \rho)$ y

$$\int_\Gamma f(t)\overline{y_j(t)}|dt| = 0 \quad (j = 1, ..., k).$$

Ya que $\overline{y_j(t)}|dt| = h(t)b^{-1}c_-^{-1}t^{-j}|dt| = b^{-1}c_-^{-1}t^{-j}dt$, la anterior condición coincide con la última condición del teorema.

Ahora definimos $x_j := bc_-t^j$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$. Entonces

$$\int_\Gamma x_j(t)b^{-1}(t)c_-^{-1}(t)t^{-1-j}dt = \int_\Gamma \frac{dt}{t} \neq 0$$

y consecuentemente $x_j \notin im\ A$. Como $\dim coker\ A = k$ obtenemos la segunda ecuación del teorema. ■

Análogamente para el operador $P_\Gamma aI + Q_\Gamma bI$ tenemos

$$\ker(P_\Gamma aI + Q_\Gamma bI) = span\{b^{-1}c_+^{-1}, b^{-1}c_+^{-1}t, ..., b^{-1}c_+^{-1}t^{-k-1}\},$$

$$coker\ (P_\Gamma aI + Q_\Gamma bI) = span\{g^{-1}, g^{-1}t, ..., g^{-1}t^{k-1}\}$$

con $g := c_-^{-1} - c_+t^k$, y para la última condición tenemos

$$\int_\Gamma f(t)(c_-^{-1}(t) - c_+(t)t^k)t^{-j}dt = 0 \quad (j = 1, ..., k).$$

Capítulo 7

Operadores integrales singulares con coeficientes continuos por partes

7.1. Funciones no singulares y su índice

Sea Γ una curva cerrada sin intersecciones. Denotaremos a $PC(\Gamma)$ como todas las clases de funciones a en $L_\infty(\Gamma)$ que tienen las siguientes propiedades:

1.- La función a es continua en Γ con la posible excepción de muchos puntos finitos.

2.- Los límites

$$a(t_0+0) = \lim_{\substack{t\to t_0 \\ t\succ t_0}} a(t) \quad y \quad a(t_0-0) = \lim_{\substack{t\to t_0 \\ t\prec t_0}} a(t)$$

existen en cada punto t_0 de discontinuidad de a y son finitos. $t \prec t_0$ significa que el punto t está localizado antes de t_0 con respecto a la orientación de la curva Γ.

3.- En ningún punto de discontinuidad se tiene que $a(t_0-0) = a(t_0)$.

Para un par de números (z_1, z_2) en el plano complejo $\mathbb{C}$ y un número δ en el intervalo $(0, \pi)$, le designaremos $l(z_1, z_2; \delta)$ como el arco que conecta el punto z_1 a z_2 y siendo distinguido por la siguiente propiedad.

Para cualquier punto $z\,(z \neq z_1, z_2)$ del arco $l(z_1, z_2; \delta)$ uno puede ver la línea recta entre z_1 y z_2 bajo el ángulo δ, y recorriendo el arco $l(z_1, z_2; \delta)$ de z_1 a z_2 la línea recta que conecta a z_1 con z_2 está del lado izquierdo.

Ahora, para el número δ en el intervalo $(\pi, 2\pi)$ definimos $l(z_1, z_2; \delta) = l(z_2, z_1; 2\pi - \delta)$ y a $l(z_1, z_2; \pi)$ la línea recta entre z_1 y z_2. El arco $l(0, 1; \delta)(0 < \delta < \pi)$ puede ser analíticamente representado en la forma paramétrica

$$z = \frac{\sin(\theta\mu)}{\sin(\theta)} e^{i\theta(\mu-1)}\ (0 \leq \mu \leq 1),$$

donde $\theta = \pi - \delta$, y la representación paramétrica del arco $l(z_1, z_2; \delta)$ $(0 < \delta < \pi)$ es

$$z = z_1 + (z_2 - z_1) f_\delta(\mu),$$

donde $f_\delta(\mu) = (\sin(\theta\mu)/\sin(\theta))e^{i\theta(\mu-1)}$.

Para $\pi < \delta < 2\pi$ la representación paramétrica del arco $l(z_1, z_2; \delta)$ está dada por

$$z = z_2 + (z_1 - z_2)(1 - f_\delta(\mu)).$$

Consideremos la función $\rho(t) = \prod_{j=1}^{m} |t - t_j|^{\beta_j}$ (ver Sección 1.5), a cada función $a \in PC(\Gamma)$ asociamos la función $a^{p,\rho} : \Gamma \times [0,1] \to \mathbb{C}$, la cual es definida por

$$a^{p,\rho}(t,\mu) := a(t+0)f(t,\mu) + a(t)(1 - f(t,\mu))$$

$(t \in \Gamma, 0 \leq \mu \leq 1)$, donde $f(t,\mu) := f_{\delta(t)}(\mu)$ y

$$\delta(t) := \begin{cases} \frac{2\pi}{p} & \text{si } t \in \Gamma \setminus \{t_1, ..., t_m\} \\ \frac{2\pi(1+\beta_k)}{p} & \text{si } t = t_k \ (k = 1, ..., m). \end{cases}$$

Denotaremos a $W_{p,\rho}(a)$ la curva plana que resulta del rango de la función a añadiendo los arcos $l(a(\tau_k), a(\tau_k + 0); \delta(\tau_k))$ para todos los puntos τ_k $(k = 1, ..., m)$ de discontinuidad de a. La curva $W_{p,\rho}(a)$ coincide con el rango de la función $a^{p,\rho}$ y la orientación es de $a(\tau_k)$ a $a(\tau_k + 0)$.

Una función $a(\in PC(\Gamma))$ será llamada $\{p,\rho\}$-no singular si la curva $W_{p,\rho}(a)$ no contiene el origen. Si la función a es $\{p,\rho\}$-no singular, entonces el número de enrollamientos de la curva $W_{p,\rho}(a)$ alrededor del punto $z = 0$ es llamado su $\{p,\rho\}$-índice(o $ind\ a^{p,\rho}$). Si a es una función continua en Γ y $a(t) \neq 0$ $(t \in \Gamma)$, entonces $ind\ a^{p,\rho} = ind\ a$, pero si a es discontinua entonces su $\{p,\rho\}$-índice depende de p y ρ.

Teorema 7.1. *Si las dos funciones $\{p,\rho\}$-no singulares a y b no tienen puntos de discontinuidad en común, entonces su producto $c = ab$ es también $\{p,\rho\}$-no singular, y*

$$ind\ c^{p,\rho} = ind\ a^{p,\rho} + ind\ b^{p,\rho}.$$

Demostración:
Primero tenemos que la siguiente ecuación es cierta

$$c^{p,\rho}(t,\mu) - a^{p,\rho}(t,\mu)b^{p,\rho}(t,\mu) = (a(t+0) - a(t))(b(t+0) - b(t))f(t,\mu)(1 - f(t,\mu)).$$

Por lo que, si las funciones $\{p,\rho\}$-no singulares a y b no tienen discontinuidades en común entonces $c^{p,\rho} = a^{p,\rho}b^{p,\rho}$ de lo cual se sigue que $c^{p,\rho}(t,\mu) \neq 0$ $(t \in \Gamma,\ 0 \leq \mu \leq 1)$ y tenemos el último resultado del teorema. ■

Para el caso $\rho(t) \equiv 1$ se llamará una *función p-no singular.*

Teorema 7.2. *Las siguientes dos condiciones son necesarias y suficientes para la* $\{p, \rho\}$*-no singularidad de la función a:*

1.- $a(t \pm 0) \neq 0$ *para todos los puntos* $t \in \Gamma$*;*

2.- En cualquier punto de discontinuidad t_k *de a, el cociente* $a(t_k)/a(t_k+0)$ *puede ser escrito como* $\exp(i\gamma_k)$*, donde* $\delta(t_k) - 2\pi < Re\,\gamma_k < \delta(t_k)$*.*

Demostración:
Notemos que la primer condición es necesaria. Por lo que asumiremos que esta condición se satisface. El cociente $a(t_k)/a(t_k+0)$ puede ser expresado en la forma $\exp(i\gamma_k)$ con $\delta(t_k)-2\pi < Re\,\gamma_k \leq \delta(t_k)$. Podemos notar que el arco $l(a(t_k), a(t_k+0); \delta(t_k))$ contiene el punto $z = 0$ si y solo si $Re\,\gamma_k = \delta(t_k)$. Por lo tanto, una función a que está sujeta a la condición $a(t \pm 0) \neq 0$ $(t \in \Gamma)$ es $\{p, \rho\}$-no singular si y solo si $Re\,\gamma_k \neq \delta(t_k)$. ■

7.2. Criterio para la factorizabilidad de funciones potenciales

Primero supongamos Γ una curva cerrada simple, un punto $z_0 \in F_\Gamma^+$, γ un número complejo y $\Psi_0(z)$ una rama de la función $(z - z_0)^\gamma$ en el plano complejo $\mathbb{C}$ con un corte de z_0 a ∞ intersectando la curva Γ en un solo punto t_0. Esta función es continua en cada punto $t \in \Gamma$ excepto, posiblemente, en t_0; $\Psi_0(t \pm 0) \neq 0$ $(t \in \Gamma)$ y

$$\frac{\Psi_0(t_0)}{\Psi_0(t_0+0)} = \exp(2\pi i\gamma).$$

Teorema 7.3. *La función* Ψ_0 *es* $\{p, \rho\}$*-no singular si y solo si la diferencia* $Re\,\gamma - \delta(t_0)/2\pi$ *no es entero. Si esta condición se satisface y si* κ *es el entero que satisface*

$$0 < \kappa + \delta(t_0)/2\pi - Re\,\gamma < 1$$

entonces ind $\Psi_0^{p,\rho} = \kappa$*.*

Demostración:
Del Teorema 7.2 y de la igualdad $\Psi_0(t_0)/\Psi_0(t_0+0) = \exp(2\pi i\gamma)$ tenemos la primer afirmación del teorema.

Ahora definimos $\gamma' = \gamma - \kappa = \alpha + \beta i$; entonces $\Psi_0(t) = (t - z_0)^{\gamma'}(t - z_0)^\kappa$. De lo cual tenemos que la función $(t - z_0)^\kappa$ es continua en Γ, y su índice es igual a κ. Así, por el Teorema 7.2, es suficiente probar que el índice de $(t - z_0)^{\gamma'}$ sea 0. Si el punto t recorre Γ comenzando en el punto t_0, entonces el incremento en el argumento de la función a asciende a $2\pi\alpha$ y por lo tanto

$$ind\ a^{p,\rho} = \alpha + \frac{1}{2\pi}[arg\ a^{p,\rho}(t_0, \mu)]_{0\leq\mu\leq 1}.$$

De $a^{p,\rho}(t, \mu) = a(t_0+0)\{f(t_0, \mu) + \exp(2\pi i\gamma')(1 - f(t_0, \mu))\}$ y $f(t_0, 0) = 0$, $f(t_0, 1) = 1$ encontramos que $[arg\ a^{p,\rho}(t_0, \mu)]_{0\leq\mu\leq 1} = -2\pi\alpha$, y por lo tanto $ind\,a^{p,\rho} = 0$. ■

Sea Γ una curva cerrada. Para cada punto $\tau \in \Gamma$ y cada número complejo γ asociamos cierta función $\Psi_{\tau,\gamma}$, que ahora definiremos. Si τ_k es un punto en la curva cerrada simple $\Gamma_k(\subset \Gamma)$, entonces denotaremos por $\Psi_{\tau_k,\gamma}$ la función continua en cada punto $t \neq \tau_k$ definida por

$$\Psi_{\tau_k,\gamma}(t) := \begin{cases} (t - z_k)^{\epsilon\gamma} & \text{si } t \in \Gamma_k \\ 1 & \text{si } t \in \Gamma \setminus \Gamma_k, \end{cases}$$

donde $\epsilon = 1$ si Γ_k es orientada en la dirección positiva, y $\epsilon = -1$ de otra manera. Asumimos que el punto z_k pertenece a F_Γ^+ si $\epsilon = 1$ y a F_Γ^- si $\epsilon = -1$, y escogida de tal manera que la recta entre los puntos τ_k y z_k se encuentre la curva Γ en un solo punto, esto es τ_k.

Teorema 7.4. *Sean $\rho(t) = \prod_{k=1}^m |t-t_k|^{\beta_k}$ y $\Psi = \Psi_{t_1,\gamma_1}...\Psi_{t_n,\gamma_n}$ $(n \leq m)$. Para la $\{p,\rho\}$-no singularidad de la función Ψ es necesario y suficiente que ninguno de los números*

$$v_k := (1 + \beta_k)/p - Re\ \gamma_k \quad (k = 1, ..., n)$$

sea entero. Si esta condición se satisface y si $\kappa_1, ..., \kappa_n$ son enteros que satisfacen las desigualdades $0 < \kappa_k + v_k < 1$, entonces ind $\Psi^{p,\rho} = \kappa_1 + ... + \kappa_n$.

Demostración:
Repitiendo los argumentos del Teorema 7.3, tenemos que Ψ_{t_k,γ_k} es $\{p,\rho\}$-no singular si y solo si v_k no es entero y además *ind* $\Psi^{p,\rho}_{t_k,\gamma_k} = \kappa_k$. Ya que las funciones Ψ_{t_k,γ_k} no tiene discontinuidades en común, por el Teorema 7.1 se prueba este teorema. ■

Sea Γ una curva cerrada simple y sea $\Psi_{\tau,\gamma} = (t - z_0)^\gamma$. Definimos

$$\Psi^+_{\tau,\gamma} := (t-\tau)^\gamma \quad y \quad \Psi^-_{\tau,\gamma} := \left(\frac{t-\tau}{t-z_0}\right)^{-\gamma},$$

donde $\Psi^-_{\tau,\gamma}$ denota la rama de esta función que es holomorfa en el plano complejo excepto para el corte a lo largo de la línea recta que une a z_0 con τ e igual a uno en infinito, y $\Psi^+_{\tau,\gamma}$ es la rama de esta función que es holomorfa en el plano complejo excepto en el rayo que comienza en τ y se va al infinito sin pasar por la región F^+_Γ. Más aún, suponemos que estas ramas son escogida de tal manera que tenemos la igualdad $\Psi_{\tau,\gamma} = \Psi^+_{\tau,\gamma}\Psi^-_{\tau,\gamma}$.

Teorema 7.5. *Sea $t_1 \in \Gamma$ y*

$$\frac{1+\beta_1}{p} - 1 < Re\ \gamma < \frac{1+\beta_1}{p}.$$

Entonces la función $\Psi_{t_1,\gamma}$ admite la factorización $\Psi_{t_1,\gamma} = \Psi^+_{t_1,\gamma}\Psi^-_{t_1,\gamma}$ en el espacio $L_p(\Gamma,\rho)$ con

$$\rho(t) := \prod_{k=1}^m |t-t_k|^{\beta_k} \quad (1 < p < \infty,\ -1 < \beta_k < p-1,\ t_k \in \Gamma).$$

Demostración:
Las funciones $(\Psi^+_{t_1,\gamma})^{\pm 1}$ y $(\Psi^-_{t_1,\gamma})^{\pm 1}$ son holomorfas en F^+_Γ y F^-_Γ, respectivamente. Son continuas en cada punto $t \neq t_1$ de la curva Γ, y en una vecindad de t_1 tenemos la desigualdad

$$|(\Psi^{\pm}_{t_1,\gamma}(z))^{\pm 1}| \leq \frac{C}{|z-t_1|^{|Re\,\gamma|}} \quad (C = constante).$$

Podemos notar que $|Re\,\gamma| < 1$, y más aún, tenemos

$$(\Psi^+_{t_1,\gamma})^{-1}, \Psi^-_{t_1,\gamma} \in L_p(\Gamma,\rho); \quad \Psi^+_{t_1,\gamma}, (\Psi^-_{t_1,\gamma})^{-1} \in L_q(\Gamma,\rho^{1-q}).$$

Así, el Teorema 2.12 implica que

$$(\Psi^+_{t_1,\gamma})^{-1} \in L^+_p(\Gamma,\rho); \quad \Psi^-_{t_1,\gamma} \in L^-_p(\Gamma,\rho);$$

$$\Psi^+_{t_1,\gamma} \in L^+_q(\Gamma,\rho^{1-q}); \quad (\Psi^-_{t_1,\gamma})^{-1} \in L^-_q(\Gamma,\rho^{1-q}).$$

La acotación del operador $(\Psi^+_{t_1,\gamma})^{-1} P_\Gamma (\Psi^-_{t_1,\gamma})^{-1}$ se sigue del Teorema 1.10. ■

Ahora tomamos el caso cuando Γ es una curva cerrada que consiste de muchas curvas cerradas simples disjuntas por pares. Sea $\Gamma_k (\subset \Gamma)$ una curva cerrada simple que contiene el punto t_k, y denotamos a F_k la región acotada en el plano complejo por Γ_k. Más aún, tomamos

$$\Psi^+_{t_k,\gamma}(t) := \begin{cases} (t-t_k)^\gamma & \text{si } t \in \Gamma'_k, \\ \left(\frac{t-t_k}{t-z_k}\right)^\gamma & \text{si } t \in \Gamma \setminus \Gamma'_k, \end{cases}$$

$$\Psi^-_{t_k,\gamma}(t) := \begin{cases} (t-t_k)^{-\gamma} & \text{si } t \in \Gamma''_k, \\ \left(\frac{t-t_k}{t-z_k}\right)^{-\gamma} & \text{si } t \in \Gamma \setminus \Gamma''_k, \end{cases}$$

donde $\Gamma'_k := \Gamma_k \cup (\Gamma \cap F_k)$, $\Gamma''_k := \Gamma \cap F_k$ en el caso de que Γ_k está orientada en contra de las manecillas de reloj, y $\Gamma'_k := \Gamma \cap F_k$, $\Gamma''_k := \Gamma_k \cup (\Gamma \cap F_k)$ de otra manera. Las ramas de la función son escogidas como antes.

Teorema 7.6. *La función $\Psi = \Psi_{t_1,\gamma_1}...\Psi_{t_n,\gamma_n}$ es factorizable en $L_p(\Gamma,\rho)$ si y solo si es $\{p,\rho\}$-no singular. Si la función Ψ es $\{p,\rho\}$-no singular entonces su factorización en $L_p(\Gamma,\rho)$ es de la forma*

$$\Psi = \Psi_- t^\kappa \Psi_+$$

con

$$\kappa = ind\ \Psi^{p,\rho},$$

$$\Psi_+ := \Psi^+_{t_1,\gamma'_1}...\Psi^+_{t_n,\gamma'_n} f^+_1...f^+_n, \quad \Psi_- := \Psi^-_{t_1,\gamma'_1}...\Psi^-_{t_n,\gamma'_n} f^-_1...f^-_n,$$

$$\gamma'_k := \gamma_k - \kappa_k, \quad \kappa_k := ind\ \Psi^{p,\rho}_{t_k,\gamma_k} \quad (k = 1,...,n),$$

y

$$f^+_k(t) := \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \Gamma'_k, \\ (t-z_k)^{-\kappa_k} & \text{si } t \in \Gamma \setminus \Gamma'_k, \end{cases}$$

$$f_k^-(t) := \begin{cases} t^{-\kappa_k} & \text{si } t \in \Gamma_k'', \\ \left(\frac{t-z_k}{t}\right)^{+\kappa_k} & \text{si } t \in \Gamma \setminus \Gamma_k''. \end{cases}$$

Demostración:
Supongamos que la función Ψ es $\{p, \rho\}$-no singular. Ya que las funciones Ψ_{t_k,γ_k} no tienen discontinuidades en común, por el Teorema 7.1, tenemos que cada una de las funciones Ψ_{t_k,γ_k} es $\{p, \rho\}$-no singular y que $\kappa = \kappa_1 + ... + \kappa_n$.

Por el Teorema 7.4, los números $\gamma_k' := \gamma_k - \kappa_k$ satisfacen las condiciones

$$\frac{1+\beta_k}{p} - 1 < Re\ \gamma_k' < \frac{1+\beta_n}{p}.$$

Repitiendo la prueba del Teorema 7.5 se puede mostrar que la función $\Psi_0 = \Psi_{t_1,\gamma_1}...\Psi_{t_n,\gamma_n}$ admite la factorización $\Psi_0 = \Psi_0^-\Psi_0^+$ en $L_p(\Gamma, \rho)$ con los factores

$$\Psi_0^- = \Psi_{t_1,\gamma_1'}^-...\Psi_{t_n,\gamma_n'}^-, \quad \Psi_0^+ = \Psi_{t_1,\gamma_1'}^+...\Psi_{t_n,\gamma_n'}^+.$$

La función $f = \Psi_{t_1,\kappa_1}...\Psi_{t_n,\kappa_n}$ es continua en Γ. Recordando un poco del Capítulo 3 la igualdad $f = f_- t^\kappa f_+$ con $f_- := f_1^-...f_n^-$ y $f_+ := f_1^+...f_n^+$ nos da una factorización de f. Ya que los factores $f_\pm$ y $f_\pm^{-1}$ son acotados en Γ, la igualdad $\Psi = \Psi_- t^\kappa \Psi_+$ con $\Psi_- = \Psi_0^- f_-$ y $\Psi_+ = \Psi_0^+ f_+$ describe una factorización de la función Ψ en $L_p(\Gamma, \rho)$. Esto prueba solo la suficiencia de este teorema.

Teorema 7.7. *El operador $A = \Psi P_\Gamma + Q_\Gamma$ es normalmente soluble en el espacio $L_p(\Gamma, \rho)$ si y solo si la función Ψ es $\{p, \rho\}$-no singular. Si la función Ψ es $\{p, \rho\}$-no singular, entonces A es un operador de Fredholm con índice $Ind\ A = -ind\ \Psi^{p,\rho}$.*

Demostración:
La suficiencia del teorema se sigue del Teorema 6.3 y de la factorizabilidad de la función $\{p, \rho\}$-no singular Ψ en $L_p(\Gamma, \rho)$ que fue mostrada en el Teorema 7.6.

La necesidad será probada indirectamente. Sea $A = \Psi P_\Gamma + Q_\Gamma$ un operador normalmente soluble en $L_p(\Gamma, \rho)$ y asumimos que existen un par de números $(\beta, \gamma) \in \{(\beta_1, \gamma_1), ..., (\beta_n, \gamma_n)\}$ tales que la diferencia $\delta := (1+\beta)/p - Re\ \gamma$ es un entero. Por definición, sean $\beta = \beta_1$y $\gamma = \gamma_1$. Primero verifiquemos que la función del operador $A(\epsilon_1, ..., \epsilon_n) := \Psi_{t_1,\gamma_1+\epsilon_1}...\Psi_{t_n,\gamma_n+\epsilon_n} P_\Gamma + Q_\Gamma$ es continua en el punto $(0, ..., 0)$.

Sea $t_0 \in \Gamma$ y sea Γ° una curva que resulta de Γ por "*separar*" el punto t_0 en dos puntos t_0^+ y t_0^-. Para cada $\gamma_0 \in \mathbb{C}$ se puede considerar la función $\Psi_{t_0,\gamma_0}(t_0^\pm) := \Psi_{t_0,\gamma_0}(t_0 \pm 0)$. Análogamente, pensamos de la función $\Psi_{t_0,\gamma_0+\epsilon}(t)$ como una función continua dependiendo de los dos parámetros t y ϵ $(t \in \Gamma^\circ, 0 \le \epsilon \le \epsilon_0)$ para alguna constante positiva ϵ_0. Dada la continuidad uniforme de la función $\Psi_{t_0,\gamma_0+\epsilon}(t)$ en $\Gamma^\circ \times [0, \epsilon_0]$ tenemos la igualdad

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sup_{t \in \Gamma} |\Psi_{t_0,\gamma_0+\epsilon}(t) - \Psi_{t_0,\gamma_0}(t)| = 0,$$

y se sigue que

$$\lim_{\substack{\epsilon_j \to 0 \\ j=1,\dots,n}} \sup_{t\in\Gamma} |\Psi_{t_1,\gamma_1+\epsilon_1}(t)...\Psi_{t_n,\gamma_n+\epsilon_n}(t) - \Psi_{t_1,\gamma_1}(t)...\Psi_{t_n,\gamma_n}(t)| = 0.$$

En vista de que

$$\|A(\epsilon_1,...,\epsilon_n) - A(0,...,0)\| \le \sup_{t\in\Gamma} |\Psi_{t_1,\gamma_1+\epsilon_1}(t)...\Psi_{t_n,\gamma_n+\epsilon_n}(t) - \Psi_{t_1,\gamma_1}(t)...\Psi_{t_n,\gamma_n}(t)| \cdot \|P_\Gamma\|,$$

la función del operador $A(\epsilon_1,...,\epsilon_n)$ es continua en el punto $(0,...,0)$.

Por lo que asumimos, el operador $A(= A(0,...,0))$ es normalmente soluble. Más aún, tenemos que $\Psi(t \pm 0) \neq 0$ $(t \in \Gamma)$. Por lo que, uno de los números $\dim ker\ A$ o $\dim coker\ A$ debe ser igual a cero, y, consecuentemente, el operador A es un Φ o $\Phi_\pm$-operador. Ahora el teorema de estabilidad del índice implica la existencia de números positivos suficientemente pequeños $\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n$ que satisfacen las siguientes condiciones.

1.- Los operadores $A_1 := A(\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n)$ y $A_2 := A(-\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n)$ son Φ o $\Phi_\pm$-operadores.

2.-$Ind\ A_1 = Ind\ A_2 = Ind\ A$.

3.- Los números $(1 + \beta_k)/p - Re\ \gamma_k - \epsilon_k$ no son enteros.

Sean $\delta_k := (1 + \beta_k)/p - Re\ \gamma_k$ $(k = 2, ..., n)$ y $\delta^\pm := (1 + \beta_1)/p - Re\ (\gamma_1 \pm \epsilon_1)$, y sean $\kappa^\pm, \kappa_1, ..., \kappa_n$ los enteros que satisface $0 < \kappa^\pm + \delta^\pm < 1$ y $0 < \kappa_k + \delta_k < 1$ $(k = 2, ..., n)$. Ya que $\delta^+ < \delta < \delta^-$ y δ es un entero, se tiene que $\kappa^+ \neq \kappa^-$. Esto implica que $\kappa' \neq \kappa''$, donde $\kappa' := \kappa^+ + \kappa_2 + ... + \kappa_n$ y $\kappa'' := \kappa^- + \kappa_2 + ... + \kappa_n$. Pero mostramos que $Ind\ A_1 = -\kappa'$ y $Ind\ A_2 = -\kappa''$, contradiciendo la igualdad $Ind\ A_1 = Ind\ A_2$. ■

De los teoremas 6.3 y 7.7 podemos obtener la necesidad de las condiciones del Teorema 7.6.

7.3. La inversión de operadores integrales singulares en una curva cerrada

Teorema 7.8. *Sea Γ una curva cerrada, $\rho(t) := \prod_{k=1}^m |t - t_k|^{\beta_k}$ $(-1 < \beta_k < p - 1,\ k = 1, ..., m)$, y sean $a, b \in PC(\Gamma)$. Entonces el operador $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ es al menos invertible de un lado en $L_p(\Gamma, \rho)$ si y solo si la condición*

$$a(t + 0)b(t)f(t, \mu) + a(t)b(t + 0)(1 - f(t, \mu)) \neq 0 \quad (t \in \Gamma, 0 \le \mu \le 1)$$

se satisface. Si esta condición se cumple y definimos $c := a/b$, entonces el operador A es invertible, solo es invertible por la izquierda o solo es invertible por la derecha dependiendo de si el número $\kappa = ind\, c^{p,\rho}$ es igual a cero, positivo o negativo, respectivamente. Si $\kappa > 0$ entonces $\dim coker\ A = \kappa$, y si $\kappa < 0$ entonces $\dim ker\ A = -\kappa$.

Demostración:
Supongamos que la condición del teorema se cumple. Como $f(t, 0) = 0$ y $f(t, 1) = 1$, tenemos

que $a(t\pm0)b(t\pm0) \neq 0$ $(t \in \Gamma)$. Sea $c := a/b$, y sean $t_1, ..., t_n$ todos los puntos de discontinuidad de c. Entonces, por la condición del teorema, implicamos además que $c^{p,\rho}(t,\mu) \neq 0$ $(t \in \Gamma, 0 \leq \mu \leq 1)$ y, por lo tanto, la función c es $\{p,\rho\}$- no singular. Del Teorema 7.2 sabemos que podemos escribir el cociente $c(t_k)/c(t_k+0)$ como $\exp(2\pi i\gamma_k)$ con $\delta(t_k)/2\pi - 1 < Re\ \gamma_k < \delta(t_k)/2\pi$.

Sea $\Psi = \Psi_{t_1,\gamma_1} ... \Psi_{t_n,\gamma_n}$. Ya que $c(t_k)/c(t_k+0) = \Psi(t_k)/\Psi(t_k+0)$ $(k = 1, ..., n)$, la función $d := c/\Psi$ es continua en Γ. Más aún, la igualdad $c = d\Psi$ implica que la función Ψ es $\{p,\rho\}$-no singular y que $ind\ c = ind\ d + ind\ \Psi^{p,\rho}$. Del Teorema 6.5 y 7.6 podemos concluir que la función c es factorizable en $L_p(\Gamma,\rho)$ y que $ind\ c|L_p(\Gamma,\rho) = ind\ d + ind\ \Psi^{p,\rho}$. Por el Teorema 6.3, se sigue la suficiencia de la condición del teorema. Para la necesidad primero se probará una proposición.

Proposición 7.1. *Sean $a, b \in PC(\Gamma)$ con Γ una curva cerrada. Si el operador $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ es un Φ o $\Phi_\pm$-operador, entonces las funciones a y b están sujetas a la condición*

$$a(t+0)b(t)f(t,\mu) + a(t)b(t+0)(1 - f(t,\mu)) \neq 0 \quad (t \in \Gamma, 0 \leq \mu \leq 1).$$

Demostración:
Supongamos que A es bien un Φ o $\Phi_\pm$-operador. Del Teorema 5.4 tenemos que $a(t\pm0) \neq 0$ y $b(t\pm0) \neq 0$ $(t \in \Gamma)$. La función $c = a/b$ puede ser representada en la forma $c = \Psi d$ con la función d continua en Γ y $\Psi = \Psi_{t_1,\gamma_1} ... \Psi_{t_n,\gamma_n}$. Con esta representación podemos escribir el operador A como

$$A = b(\Psi P_\Gamma + Q_\Gamma)(dP_\Gamma + Q_\Gamma) + T$$

con cierto operador compacto T. Ya que la función d es continua y no es cero en Γ, el operador $dP_\Gamma + Q_\Gamma$ es un Φ-operador. Esto implica que $\Psi P_\Gamma + Q_\Gamma$ es un Φ o $\Phi_\pm$-operador. Pero entonces, por el Teorema 7.7, la función Ψ es $\{p,\rho\}$-no singular, y esto conduce a la $\{p,\rho\}$-no singularidad de la función c. Por lo que se satisface la condición de la proposición. ■

Para terminar la prueba del Teorema 7.8 también consideramos el Teorema 5.5.

7.4. Curvas compuestas

Primero consideremos Γ una curva compuesta, la completamos a una curva cerrada $\tilde{\Gamma}$, y extendemos los coeficientes a y $b(\in PC(\Gamma))$ del operador integral singular $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ a las funciones $\tilde{a}$ y $\tilde{b}$ definidas en $\tilde{\Gamma}$ por

$$\tilde{a}(t) := \begin{cases} a(t) & \text{si } t \in \Gamma \\ 1 & \text{si } t \in \tilde{\Gamma} \setminus \Gamma \end{cases}, \qquad \tilde{b}(t) := \begin{cases} b(t) & \text{si } t \in \Gamma \\ 1 & \text{si } t \in \tilde{\Gamma} \setminus \Gamma. \end{cases}$$

Aplicando los resultados anteriores al operador $\tilde{A} = \tilde{a}P_{\tilde{\Gamma}} + \tilde{b}Q_{\tilde{\Gamma}}$ con coeficientes $\tilde{a}$ y $\tilde{b}$ en $PC(\tilde{\Gamma})$, por el Teorema 7.1, obtenemos los correspondientes resultados para el operador A

actuando en el espacio $L_p(\Gamma,\rho)$. Para hacer esto asumimos que $0 \notin \Gamma$ y que la curva $\tilde{\Gamma}$ es escogida de tal manera que el punto $z=0$ pertenece a la región $F^+_{\tilde{\Gamma}}$ que es acotada por $\tilde{\Gamma}$.

Desde ahora asumiremos que las funciones en $PC(\Gamma)$ (Γ una curva compuesta) son continuas en los puntos finales de los arcos no cerrados de la curva Γ. Denotaremos a $\tau_1,...,\tau_m$ y $\tau_{m+1},...,\tau_{2m}$ los puntos de inicio y final de todos los arcos no cerrados de la curva Γ, repectivamente. Para cada función $a \in PC(\Gamma)$, número p y peso ρ asociamos la función $a^{p,\rho} = a^{p,\rho}(t,\mu)$ definida por las siguientes igualdades:

Si el punto t es diferente de cada uno de los puntos $\tau_1,...,\tau_{2m}$ de Γ, entonces

$$a^{p,\rho}(t,\mu) := a(t+0)f(t,\mu) + a(t)(1-f(t,\mu)) \qquad (0 \le \mu \le 1),$$

donde $f(t,\mu) := f_{\delta(t)}(\mu)$ definida como antes; de otra manera, si t coincide con alguno de los puntos finales, entonces

$$a^{p,\rho}(\tau_k,\mu) = a(\tau_k)f(\tau_k,\mu) + 1 - f(\tau_k,\mu) \quad (k=1,...,m)$$

y

$$a^{p,\rho}(\tau_k,\mu) = a(\tau_k,\mu)(1-f(\tau_k,\mu)) + f(\tau_k,\mu) \quad (k=m+1,...,2m).$$

El rango de la función $a^{p,\rho}$ $(t \in \Gamma, 0 \le \mu \le 1)$ coincide con el rango de la función $\tilde{a}^{p,\rho}(t \in \tilde{\Gamma}, 0 \le \mu \le 1)$, con la función $\tilde{a}$ definida en la curva cerrada $\tilde{\Gamma}$.

En el caso de una curva compuesta Γ, llamaremos a una función a en $PC(\Gamma)$ $\{p,\rho\}$-no singular si $a^{p,\rho}(t,\mu) \neq 0$ $(t \in \Gamma, 0 \le \mu \le 1)$. Si a es una función $\{p,\rho\}$-no singular, entonces el número

$$ind\ a^{p,\rho} := ind\ \tilde{a}^{p,\rho}$$

es referido como su $\{p,\rho\}$-índice.

Del Teorema 5.1 y el Teorema 7.8 tenemos el siguiente teorema.

Teorema 7.9. *Sea Γ una curva compuesta y sean $a,b \in PC(\Gamma)$. Entonces el operador $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ $(P_\Gamma aI + Q_\Gamma bI)$ es invertible al menos de un lado en $L_p(\Gamma,\rho)$ si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1.- $a(t+0)b(t)f(t,\mu)+a(t)b(t+0)(1-f(t,\mu)) \neq 0$ $\qquad (t \in \Gamma \setminus \{\tau_1,...,\tau_{2m}\})$,

2.- $a(\tau_k)f(\tau_k,\mu)+b(\tau_k)(1-f(\tau_k,\mu)) \neq 0$ $\qquad (k=1,...,m)$,

3.- $a(\tau_k)(1-f(\tau_k,\mu))+b(\tau_k)f(\tau_k,\mu) \neq 0$ $\qquad (k=m+1,...,2m)$.

Si estas condiciones se satisfacen y si $c := a/b$, entonces el operador A es invertible, solo es invertible por la izquierda o solo es invertible por la derecha dependiendo de si el número $\kappa = ind\ c^{p,\rho}$ es cero, positivo o negativo, respectivamente. Si $\kappa > 0$, entonces $\dim coker\ A = \kappa$, por el otro lado si $\kappa < 0$ implica que $\dim\ker A = |\kappa|$.

Sean $a \in L_\infty(\Gamma)$, $b \in GL_\infty(\Gamma)$ y supongamos que $c := a/b$ es una función $\{p,\rho\}$-no singular en $PC(\Gamma)$. Entonces la función $\tilde{c}$ es $\{p,\rho\}$-no singular en la curva cerrada $\tilde{\Gamma}$ y, por lo tanto, admite una factorización $\tilde{c} = \tilde{c}_- t^\kappa \tilde{c}_+$ en $L_p(\tilde{\Gamma},\rho)$, donde $\kappa = ind\ c^{p,\rho}$. Los operadores $\tilde{A} = \tilde{a}P_{\tilde{\Gamma}} + \tilde{b}Q_{\tilde{\Gamma}}$ y $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ son invertibles al menos de un lado. Más aún, por el Teorema

6.7 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 7.10. *Sean Γ una curva compuesta, $a \in L_\infty(\Gamma)$, $b \in GL_\infty(\Gamma)$ y suponemos que la función $c := a/b$ es $\{p,\rho\}$-no singular con $\kappa := ind\ c^{p,\rho}$. Entonces las inversas, al menos de un lado, A^{-1} y B^{-1} de los operadores $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ y $B = P_\Gamma aI + Q_\Gamma bI$ están dados por*

$$A^{-1} = c_- a^{-1}(bP_\Gamma + aQ_\Gamma)b^{-1}c_-^{-1}I, \qquad B^{-1} = b^{-1}c_+^{-1}(P_\Gamma b + Q_\Gamma a)^{-1}c_+ I,$$

donde $c_\pm$ denota la restricción en Γ de los términos $\tilde{c}_\pm$ en la factorización $\tilde{c} = \tilde{c}_- t^\kappa \tilde{c}_+$ de la función $\tilde{c}$ en el espacio $L_p(\tilde{\Gamma},\rho)$.

Si $\kappa < 0$ entonces

$$\ker A = span\{g, gt, ..., gt^{-\kappa-1}\} \quad y \quad \ker B = span\{h, ht, ..., ht^{-\kappa-1}\}$$

con $g := c_+^{-1} - c_- t^\kappa$ y $h := c_+^{-1}b^{-1}$.

En el caso $\kappa > 0$ tenemos

$$coker\ A = span\{bc_-, bc_-t, ..., bc_-t^{\kappa-1}\},$$

$$coker\ B = span\{d^{-1}, d^{-1}t, ..., d^{-1}t^{\kappa-1}\},$$

donde $d = c_-^{-1} - c_+ t^\kappa$.

La ecuación $A\varphi = f$ es soluble si y solo si las condiciones

$$\int_\Gamma f(t)b^{-1}(t)c_-^{-1}(t)t^{-j}dt = 0 \quad (j = 1, ..., \kappa)$$

se satisfacen; en el otro caso para la solubilidad de $B\varphi = f$ es necesario y suficiente que

$$\int_\Gamma f(t)d(t)t^{-j}dt = 0 \quad (j = 1, ..., \kappa).$$

Teorema 7.11. *Sean $a, b \in PC(\Gamma)$. Entonces el operador $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ ($A = P_\Gamma aI + Q_\Gamma bI$) es un Φ o $\Phi_\pm$-operador en el espacio $L_p(\Gamma,\rho)$ si y solo si las 3 condiciones del Teorema 7.9 se satisfacen. Si esas condiciones se satisfacen, entonces A es de hecho un Φ-operador y $Ind\ A = -ind\ c^{p,\rho}$ con $c = a/b$.*

Demostración:
La suficiencia de las condiciones del teorema se siguen del Teorema 7.9 y las necesidades son una consecuencia de la Proposición 7.1 así como del Teorema 7.1. ■

Bibliografía

[1] Gohberg, I., & Krupnik, N. (1992). *One-Dimensional Linear Singular Integral Equations: I. Introduction.*(Vol.53). Berlin: Birkhäuser.

[2] Gohberg, I., & Krupnik, N. (1992). *One-Dimensional Linear Singular Integral Equations: II. General Theory and Applications.*(Vol.54). Berlin: Birkhäuser.

[3] Muss'cheLISCHWILI, N.I. (1965). *Singuläre Integralgleichungen.* Berlin: Akademie-Verlag.

[4] Privalov, I.I. (1956). *Randeigenschaften analytischer Funktionen.* Berlin: Deutscher Verlag der Wissenchaften.

VOTOS DE APROBATORIOS

Secretaria ejecutiva del Instituto de Investigación en Ciencias Básicas Aplicadas de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos.
P r e s e n t e .

Por medio de la presente le informamos que después de revisar la versión escrita de la tesis que realizó el C. **REYES CABAÑAS ROBERTO** con número de matrícula **20164010946** cuyo título es:

"Ecuaciones integrales singulares con coeficientes discontinuos"

Consideramos que **SI** reúne los méritos que son necesarios para continuar los trámites para obtener el título de **Licenciado Ciencias Área Terminal en Matemáticas.**

Cuernavaca, Mor a 13 de mayo del 2021

Atentamente
Por una universidad culta

Se adiciona página con la e-firma UAEM de los siguientes:

DRA. MASUMA ATAKISHIYEVA	**PRESIDENTE**
DRA. GENNADIY BURLAK	**SECRETARIO**
DR. YURI KARLOVICH	**VOCAL**
DR. ROGELIO VÁLDEZ DELGADO	**PRIMER SUPLENTE**
DR. ANTONIO DANIEL RIVERA LÓPEZ	**SEGUNDO SUPLENTE**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

Sello electrónico

GENNADIY BURLAK | Fecha:2021-05-13 15:08:42 | Firmante
pvMb5VpielhYX5HaCJV92e7kWzS11055Y7VneEwGWiy836KMW9yqMXekSEQ6+Dx39b5oyN+QRCupIy4L1BYXvOYa7ZPjCVf3BpblGspB9wAorewasgmAhyEOu29kgwQDRm6T05pbOYBQovpPly9Kez724+mND0HpqxzEu+Ja3RvA2QM7tf9tgrdWp5tO/lOo/akS8p4rFmI+ZBmefK/3eW9Z8YE3KKx6MJhSIi+LAHrOeyKkJ/YfiSBZiQgzeqZEUT9nM6eEMWjMGOmXzeb0SgeEBA4RFjZL7r1JfNz6/YZq4aPvHHXGHMiwmwnBElsHWFPQyayoYIvZgQBJMTAQ7Q==

YURIY KARLOVYCH | Fecha:2021-05-13 17:16:58 | Firmante
MsAt9rpopsxkL6qE+aTRytqICai73k0dVb6yg4iZR6ixJHP/5BV52kq3b6VPw/ssHyIC3PqtkhcpHznUcFoinqCvBMaCkE+eGsJjyCq1Ex1IDmqOqvsPRsQNFbBO/v6bvj+ZPajUImg5T+GwcK2Ein9GNjygvVs5xSn/vrqGnuoREgtEkaFjv+myp4kqGXQZexKRX7qMVGIlzCrl8pYmz1MflRcaT9lVIAATus8lcHCrJBFHCojL03AXSCXYvcR8wW+2M1jveQrVUkbtp7G2h5Mw2FlolXHtjKTiDYg3z5JNAN8etph0yduugUf3stDX+KO6qSJ37HsqAZnzPyp1Rg==

MASUMA ATAKISHIYEVA | Fecha:2021-05-13 18:51:55 | Firmante
mO0deXXyT+IVntu8k3NNFKQ66UXz+iyqkuZ72yCkFZtq+MAN+Nww6A42MH2U5Xh//Fh8IycsmrVJvDuGMGbu9lluxNHLn0e9DJmmCSy4vaCPCNg1aYVG6qmr0PYucULlvISWMz6IDbi9OBIBxZMfUjNNDkkv+wXIqJ2xzwi7P2wysRsyyFWtZwuGcEPWqeAfBKrElPzYfSmxGgyAX9I4T5ceFQmkV3XWvqsrUzzXjbfmsZU7KmNVxjBhLhaHnwpuwb3F52qyETHg9TkqwpyHG1cQCeqgvd7M11UAIbPn8rNVk6MjiZ6U1q7cj/vduLqTP4imQqOhbOcF4fy5c9RHsA==

ANTONIO DANIEL RIVERA LOPEZ | Fecha:2021-06-03 10:01:29 | Firmante
qlypvUnNKvdVroWmNk/tG2dVB7VXpjK5+uuDpCMcObmY20kp5+NeX8bW+/Z60vQwGlwsDhB++QbCgkRifHYdOmIWnnQo4Uamf7QN/ZCipa9HC54A/de50AsT/iSkQaRXlZgRBLP4peKJmd/GydW7V8raB2DzfkPMjY0vpUGtBcPlOgnL4NndY2yXDPrWMXRog+pNJVDggOt0y3Fm3785xenmHsLZKSMuLA1OzLClOCzW7r8uWQl976V+wARTdTJJbtxt0WIHfZG3FraPCnoextfbJJBkyVye1oLYqoyC9wGuZwQPjBWH/n57ntLiU+QfiCO4oFRC3vB1367pPC6lXg==

ROGELIO VALDEZ DELGADO | Fecha:2021-06-29 13:59:07 | Firmante
CaAiX6GEYAqWWXO7x3ZraPKsNU2g3D/oU/WMKK/IYin7Ez7RMWYeRtq/R+7SN8hEvDc7q+uWhM4F9oYRd9jmlfjRKcYhRoCkInY60Acj+0WUIvA7Pidm8nvS745XBNxNUPnn7RWOz0637kO6ZoVpgmBT/OgdrXVjAllxsCLPKbiQACOV4a5VZHUQXDlkMERFdyVYb1VO8MKkd1h8ix4ClMpiedNDTz6x7stG4P6CSyoI3CJ0IzxBEo0cG6GNDq1+ScuBZGuna61VafVn8uVaAaGUeuEXiY7l6qhAfUnzMQwXAcydBUfVD+8zB7PE1II3OceP9q9kXwjlSIpccSDwYw==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:

1HmWPK

https://efirma.uaem.mx/noRepudio/JeeUeePpgzEN3MACqnt2XIHEwtWg4Mbx