



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE  
MORELOS

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS E INGENIERÍA

DISEÑO DE UN METAMATERIAL CON VELOCIDAD  
DE GRUPO CERO

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

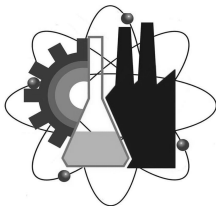
INGENIERO MECÁNICO

P R E S E N T A :

BRYAN MANJARREZ MONTAÑEZ

TUTOR

DR. RAFAEL ALBERTO MÉNDEZ SÁNCHEZ



CUERNAVACA, MORELOS. 2021



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MORELOS

**FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS e INGENIERÍA**

Programas educativos de calidad reconocidos por CIEES, CACEI Y CONACYT  
Certificada en la norma ISO 9001:2015



Facultad de Ciencias  
Químicas e Ingeniería

**FORMATO 4A**

**NOMBRAMIENTO COMITÉ REVISOR**

**DR. JESUS MARIO COLIN DE LA CRUZ**  
**DR. VICTOR MANUEL ZEZATTI FLORES**  
**DR. JOSE ALFREDO ARIZA ESPINOZA**  
**DR. RAFAEL ALBERTO MENDEZ SANCHEZ**  
**MTRO. ANDRÉS AGUILAR NEGRETE**  
**P R E S E N T E S**

Cuernavaca, Mor., a 21 de OCTUBRE del 2020.

Me permito comunicarles que han sido designados integrantes del **COMITÉ REVISOR** del trabajo de:

**TESIS**

Titulado:

**Diseño de un metamaterial con velocidad de grupo cero**

Que presenta el **C. MANJARREZ MONTAÑEZ BRYAN**

Del programa educativo de: **INGENIERÍA MECÁNICA**

**A T E N T A M E N T E**  
*Por una humanidad culta*

**DRA. VIRIDIANA AYDEÉ LEÓN HERNÁNDEZ**

**DIRECTORA**  
*(SE ANEXA FIRMA ELECTRÓNICA)*

**D I C T A M E N**

**DRA. VIRIDIANA AYDEÉ LEÓN HERNÁNDEZ**

**DIRECTORA DE LA FCQeI**

**P R E S E N T E**

En respuesta a su amable solicitud para emitir DICTAMEN sobre el trabajo que se menciona, me permito informarle que nuestro voto es:

VOTO	NOMBRE	FIRMA
*	DR. JESUS MARIO COLIN DE LA CRUZ	
*	DR. VICTOR MANUEL ZEZATTI FLORES	
*	DR. JOSE ALFREDO ARIZA ESPINOZA	
*	DR. RAFAEL ALBERTO MENDEZ SANCHEZ	
*	MTRO. ANDRES AGUILAR NEGRETE	

*\*Aprobado por el comité revisor, se anexan firmas electrónicas*

Av. Universidad 1001 Col. Chamilpa, Cuernavaca Morelos, México, 62209,  
Tel. (777) 329 70,00, Ext. 7039/ fcqei@uaem.mx



Una universidad de excelencia

RECTORÍA  
2017-2023



Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

**Sello electrónico**

**VIRIDIANA AYDEE LEON HERNANDEZ | Fecha:2020-10-22 19:22:22 | Firmante**

Gmnl0KXMyw9WM7Yv1XE4zHzCagmG5Vuj8PLT6xgJYEQbuyQFw36l/31O59eBjeS7yCpNlGnRDxs8zGjzp3CnAbBjksmv+7YoopKjM4slyjGgA178eZAc5sI3Ody9JrdPvne62  
BrtbW7H7BMDintN1B3FXQ73TYvgEaoOZANzXTA2Hp9UEvsUFd0n2nVywP0nNALBRl2xmCAXITl0xGdV2xOYa21ClBeYdj0wyAOGLN4kKkXyfecPORBxL1em/eFChMD+CDFsT  
63d9PF3KkgrhPBIRICJZkzBZmhjY0gj2mMqvoP7ghQRFIWKWY8tgAgXPqV52PImYxN++6KbAQ==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



y6T0XR

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/!UoQvK6huCJqgitZAQGpcmljB2M9i5zw>



Una universidad de excelencia

RECTORÍA  
2017-2023



Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

**Sello electrónico**

**JESUS MARIO COLIN DE LA CRUZ | Fecha:2020-10-25 11:51:51 | Firmante**

fsVh+wui1vGKO7k0LHjboCM6SVGX0D31BYWfWJbsEmhguPFQrq6jyJVUHLiKerT2H+e86nrIAO0TeuHwULPGnV+3fS10uPn+kArtzV7Ttem2h3EoOeYsD5SZCB70iXY5Srb87y7gIVL2SS0gZ4BH0wA48r8DXynPwxhPWelYOnQY8gjZGrUJC8Y85h+Cxvslc5nUXVbxirHnGstH9PhroXXa4z13dpRzITCJUOZzW6Ke4ZoiFuYJo6gonmzaB18r1wGrlyFRUmpICOfU+k85BQgEmUu9AbzTEWC7g/AOFC5ML1gY4FPJZVYlpkxST1EZWbopT8s4Q==

**ANDRES AGUILAR NEGRETE | Fecha:2020-10-26 19:08:59 | Firmante**

LcmHrCWGXpIpsa33Se5fHHDYiBxJvKf30p9mRB18v45X1Yc/3okS6purKzUuf9PYZngokIIMGoEghDbaHVAAnZco9240eM6u6uQs84RqHwU08eikra71aszKNYywsQcV0Ea8QiOosduWtkpRsk5FDnRQLdsnqlqghQmEz0f34kqxbIOG9NkNA939dnDgGydxWASHgWgMvYpC9X9V75jGnJAwcvruwg4dUZ6As30BvXy1NE+UJhWGKw3nC8HLNTj6mUG7UHesQwLg+jwZEx0BQuaWcO6UCpOifnWTZkz7R7WWhrJYJK0G8Rcdxp14YYLppVy7KTZz4UPJA6quA==

**RAFAEL ALBERTO MÉNDEZ SÁNCHEZ | Fecha:2020-10-29 11:26:35 | Firmante**

ivKb11KzpbDz+bAFozfN2K0XBOMU/kzAyR8EKdz8SpgQf0U08Gz0+sqjHYU+2AesabQX/FurkoM1txW2xySafidM6B4XBBIT2nslmwJ3lrHoXAc8D4R9uBw4s4vQRjCrzUWwY6GJgqtlPCSBxMg9eE2lqZkVWJlImTCahyhPPMJEDfifwXkWu+oSeX9zQc8/YTENOK2CR/JQXEMDaJolCC7AW8rxvT7J1LR9vUUKW1lyVnutP7PR0M7LiOw65BoWA5F3J8lp+Xgl/A9W8XMXHY1uam47Xne4N8hvX84TTqbcKcmFkzarIGi5trETxcqpk7jJDU0hFXZmZxQ==

**VICTOR MANUEL ZEZZATI FLORES | Fecha:2020-10-30 21:54:27 | Firmante**

LR5Lm/5kC4DG01dDzckmk14lwXhl+RgCXWapMyCD7kkE1wJnbAbzOjcfOWELExcvN9MdqPr/Rvz80rTxxp6PFk2Bc7WAXy3j4fP+PHhZ4RHV6ue0baaXapKXPzR/xMm0ytDC02WRhOcuHShyYXddHoZ4BOonm/CDTxsFs3HUnDIEQ+xp33ELPghREm/QXRp6esZMPdQy7DqkpwVig36KNiN8Nbn+rKsCvyDUunnu11CbHo8VuOjw6q5IEA1wfo/SuPv43pPRohrONfH+S8axZpX+3zO9X5Q1pnlc8R3QbUjq6BnzJdW/psBxcw8b94UvYKOEGLvL1w==

**JOSE ALFREDO ARIZA ESPINOZA | Fecha:2020-11-02 00:28:20 | Firmante**

xzVQUH6x8DtP79GsnWmzoltGOFGR4BNAVTGRjdgC5PxxK8YpRjdmCJW4Cp80zIUJ30aSCEKvOkksIO7p6ehcU0PEQ4uh1jI009RLVpy23qhdVYMeSU8eQ4Wxq+6jWAVV6DQ9UmLcxpl4kjhPEClv25315EMC43ZJnxv6ETObu7XD679+hsx9ptYzAm29f5PQmtK2YdxQW6DR+eqm6NjO/N4hRDzwbPEVjmDrZ1uitexXZd+yg8Uvd4CFN/bOXHuS4AAZ938LxE0EbladaE7iumFZSztfikPDZPr2+d95JwZa+ElwgtWob55saxQomsL7QR0nSw9+MIV+Mh1tw==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



MIDAQv

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/codmDP08zjLaSoZcx8QHETxSmpf9W3K>



Una universidad de excelencia

RECTORÍA  
2017-2023

# Dedicatoria

*Dedicado especialmente a mi madre quien es la persona más preciada y valiosa para mí, que sin su esfuerzo, tenacidad y confianza nada de esto hubiera sido posible, por apoyar mi sueños, caprichos y por nunca dejarme solo. Te amo mamá.*

# Agradecimientos

Gracias al proyecto PAPIIT-IN109318 de la DGAPA UNAM y también al proyecto 284096 de CONACYT ciencia básica. Al Centro Internacional de Ciencias A.C. por sus instalaciones para realizar esta tesis.

Al Dr. Rafael A. Méndez Sánchez y a todo el grupo de trabajo por su gran apoyo y conocimiento para realizar esta tesis.

Por supuesto quiero agradecer a mi familia, a Jorge Torres, a Toño, Armando, Reynaldo y Oswaldo por ayudarme y apoyarme en cualquier circunstancia, por siempre estar ahí.

También quiero agradecer a mi novia y a mis amigos Lorenzo, Hoguer, Ulises, Juan José, Alejandro, Alondra, Juan Palma, Miguel y Joshua por todo el tiempo juntos y por todas esas aventuras vividas y por todas las que están por venir.

# Justificación

El descubrimiento de nuevos fenómenos físicos que no se presentan en los materiales naturales es de gran interés debido a las aplicaciones tecnológicas que estos puedan tener. Por ello se crean los metamateriales, también llamados materiales artificiales. En la actualidad alrededor de todo el mundo diversos grupos reconocidos están trabajando en metamateriales, ya sean acústicos, térmicos, cuánticos, electromagnéticos, mecánicos, etc. Entonces el estudiar estos metamateriales está a la orden del día.

Los metamateriales con velocidad de grupo cero nos permitirían observar un paquete de ondas detenido en el metamaterial, es decir, que no se puede propagar a través del mismo, tal como sucede en los materiales naturales. Por lo que el alcance de este proyecto es el estudio de un fenómeno físico inexistente en los materiales naturales. Logrando diseñar un metamaterial mecánico que cumpla dicho fenómeno y probar así que en los metamateriales existe un gran futuro tecnológico.

# Objetivos

El objetivo general es diseñar un metamaterial con velocidad de grupo cero, utilizando el método de los elementos finitos.

**Los objetivos específicos son los siguientes:**

- Proponer un metamaterial mecánico que pueda tener una velocidad de grupo igual a cero.
- Obtener la estructura de bandas de metamateriales unidimensionales y bidimensionales.
- Cuantificar la velocidad de grupo del metamaterial diseñado.
- Comparar la velocidad obtenida con las velocidades de otros materiales estructurados similares.
- Diseñar un metamaterial finito para la corroboración de los resultados.



# Resumen

Los metamateriales están revolucionando el mundo de la tecnología, por su capacidad de manifestar fenómenos físicos inexistentes en la naturaleza, como lo es el índice de refracción negativo, la posibilidad de hacer un objeto invisible, tener un coeficiente de Poisson negativo, la ralentización de un paquete de ondas, entre muchos otros fenómenos más, ya sean térmicos, cuánticos, acústicos, mecánicos, electromagnéticos, etc. Existen dos grandes grupos para la clasificación de los metamateriales, uno es por su tipo de onda y el otro es por el tipo de fenómeno que presentan.

El metamaterial diseñado en esta tesis es uno que muestra el fenómeno de dispersión cero, cuya característica fundamental es tener una velocidad de grupo cero. Diseñado a partir de la periodicidad de una celda unitaria, una placa rectangular cuyo ancho y largo es de 101.6 mm y 96.6 mm respectivamente, conectados mediante vigas rectangulares de 5 mm de ancho y 2.5 mm de largo. El uso del método de los elementos finitos mediante el software COMSOL Multiphysics es implementado para la obtención de la estructura de bandas de una celda unitaria, que mediante las condiciones de frontera de Floquet, se replica infinitamente. Se varían los parámetros de longitud y espesor para obtener el comportamiento de las bandas como función de estos parámetros.

Por último, se diseña un metamaterial finito que permita corroborar los resultados, teniendo una solera con 36 celdas unitarias. Si las frecuencias propias del sistema finito están dentro del intervalo de frecuencia de la banda plana y se encuentran a menos de cuatro Hertz entre ellas, entonces se podrá concluir que existe una ralentización de un paquete de ondas que viaja a través del metamaterial.

# Índice general

Dedicatoria	I
Agradecimientos	II
Justificación	III
Objetivos	IV
Resumen	V
<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Marco teórico</b>	<b>6</b>
2.1. Estructuras cristalinas . . . . .	6
2.2. Definición de espacio recíproco . . . . .	8
2.3. Primera zona de Brillouin . . . . .	9
2.4. Teorema de Bloch . . . . .	10
2.5. Velocidades de fase y de grupo . . . . .	11
2.6. Teoría clásica de placas . . . . .	13
2.7. Método de los elementos finitos . . . . .	14
<b>3. Metodología</b>	<b>16</b>
3.1. Definición de la celda unitaria . . . . .	17
3.2. Simetrización de la geometría . . . . .	18
3.3. Condiciones de frontera (Floquet) . . . . .	20
<b>4. Resultados</b>	<b>23</b>
4.1. Estructura de bandas . . . . .	23
4.2. Forma del modo de vibrar . . . . .	27

4.3. Velocidad de grupo . . . . .	28
4.4. Velocidad de grupo con el conector en distinta posición . . . . .	29
4.5. Metamaterial finito . . . . .	32
4.6. Frecuencias propias del metamaterial finito . . . . .	32
<b>5. Conclusiones</b>	<b>40</b>
<b>A. Metamateriales</b>	<b>41</b>
A.1. Metamateriales con índice de refracción negativo . . . . .	41
A.2. Metamateriales de capa de invisibilidad . . . . .	42
A.3. Metamateriales con coeficiente de Poisson negativo . . . . .	44
<b>Bibliografía</b>	<b>45</b>

# Índice de figuras

1.1. Metamaterial con índice de refracción negativo, tomado de la referencia [2]. . . . .	3
1.2. Metamaterial de dispersión cero, tomado de la referencia [4]. . . . .	4
2.1. Composición de una estructura cristalina. . . . .	6
2.2. Vectores primitivos. . . . .	7
2.3. Celda de Wigner-Seitz. . . . .	7
2.4. Difracción de rayos X e imagen micrográfica electrónica del titanato de bario cúbico, tomado de la referencia [5]. . . . .	8
2.5. Zona de Brillouin para una red recíproca cuadrada. . . . .	9
2.6. Zona de Brillouin unidimensional. . . . .	9
2.7. Zona de Brillouin para una red cuadrada en dos dimensiones. . . . .	10
2.8. Pulso ondulatorio. . . . .	11
2.9. Velocidad de fase y velocidad de grupo. . . . .	13
2.10. Región de una placa delgada. . . . .	13
2.11. Discretización con un tamaño diferente en los elementos. . . . .	14
2.12. Uso del MEF en un Boeing 787. . . . .	15
3.1. Celda unitaria. . . . .	17
3.2. (a) 1. <sup>er</sup> Modo 2991 Hz. (b) 2. <sup>o</sup> Modo 4393 Hz. (c) 3. <sup>er</sup> Modo 5677 Hz. (d) 4. <sup>o</sup> Modo 7384 Hz. (e) 5. <sup>o</sup> Modo 7713 Hz. (f) 17. <sup>o</sup> Modo 19576 Hz. . . . .	17
3.3. Eje de simetría de la celda unitaria. . . . .	18
3.4. Discretización de un dominio. . . . .	19
3.5. Discretización simétrica a partir del eje de simetría. . . . .	19
3.6. Discretización simétrica. . . . .	20
3.7. Selección de condiciones periódicas de Floquet. . . . .	21
3.8. Barrido del vector de onda de $\Gamma - X$ . . . . .	21

3.9. Estructura de bandas asociada a la estructura dada en la figura 3.8. . . . .	22
4.1. Parámetros $L$ y $h$ . . . . .	23
4.2. Estructura de bandas $L=50$ mm y $h=6.35$ mm. . . . .	24
4.3. Estructura de bandas $L=70$ mm y $h=6.35$ mm. . . . .	24
4.4. Estructura de bandas $L=95$ mm y $h=6.35$ mm. . . . .	24
4.5. Estructura de bandas $L=50$ mm y $h=9.525$ mm. . . . .	25
4.6. Estructura de bandas $L=70$ mm y $h=9.525$ mm. . . . .	25
4.7. Estructura de bandas de la celda unitaria. . . . .	26
4.8. Estructura de bandas $L=50$ mm y $h=12.7$ mm. . . . .	26
4.9. Estructura de bandas $L=70$ mm y $h=12.7$ mm. . . . .	26
4.10. Estructura de bandas $L=95$ mm y $h=12.7$ mm. . . . .	27
4.11. Forma del sólido, modo 17. . . . .	27
4.12. Banda plana estudiada. . . . .	28
4.13. Velocidad de grupo. . . . .	28
4.14. (a) Conector a 24.15 mm. (b) Conector a 28.98 mm. (c) Conector a 33.18 mm. . . . .	29
4.15. Velocidad de grupo con el conector a 24.15 mm. . . . .	30
4.16. Velocidad de grupo con el conector a 28.98 mm. . . . .	30
4.17. Velocidad de grupo con el conector a 33.81 mm. . . . .	30
4.18. Comparación de velocidades de grupo. . . . .	31
4.19. Metamaterial finito . . . . .	32
4.20. 1. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19587.867 Hz. . . . .	33
4.21. 2. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19587.862 Hz. . . . .	33
4.22. 3. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19589.293 Hz. . . . .	33
4.23. 4. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19590.164 Hz. . . . .	33
4.24. 5. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19591.462 Hz. . . . .	33
4.25. 6. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19593.157 Hz. . . . .	33
4.26. 7. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19595.238 Hz. . . . .	34
4.27. 8. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19597.699 Hz. . . . .	34
4.28. 9. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19600.539 Hz. . . . .	34
4.29. 10. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19603.753 Hz. . . . .	34
4.30. 11. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19607.337 Hz. . . . .	34
4.31. 12. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19611.286 Hz. . . . .	34
4.32. 13. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19615.591 Hz. . . . .	35
4.33. 14. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19620.242 Hz. . . . .	35
4.34. 15. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19625.227 Hz. . . . .	35

4.35.	16. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19630.529 Hz . . . . .	35
4.36.	17. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19636.129 Hz. . . . .	35
4.37.	18. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19642.001 Hz. . . . .	35
4.38.	19. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19648.117 Hz. . . . .	36
4.39.	20. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19654.443 Hz. . . . .	36
4.40.	21. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19660.938 Hz. . . . .	36
4.41.	22. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19667.557 Hz. . . . .	36
4.42.	23. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19674.249 Hz. . . . .	36
4.43.	24. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19680.954 Hz. . . . .	36
4.44.	25. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19687.610 Hz. . . . .	37
4.45.	26. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19694.146 Hz. . . . .	37
4.46.	27. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19700.490 Hz. . . . .	37
4.47.	28. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19706.562 Hz. . . . .	37
4.48.	29. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19712.284 Hz. . . . .	37
4.49.	30. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19717.574 Hz. . . . .	37
4.50.	31. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19722.353 Hz. . . . .	38
4.51.	32. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19726.546 Hz. . . . .	38
4.52.	33. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19730.083 Hz. . . . .	38
4.53.	34. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19732.902 Hz. . . . .	38
4.54.	35. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19734.954 Hz. . . . .	38
4.55.	36. <sup>a</sup> frecuencia propia a 19736.200 Hz. . . . .	38
4.56.	Acercamiento del 1. <sup>er</sup> Modo de vibrar. Metamaterial finito. . .	39
4.57.	Acercamiento del 13. <sup>er</sup> Modo de vibrar. Metamaterial finito. .	39
4.58.	Acercamiento del 28. <sup>o</sup> Modo de vibrar. Metamaterial finito. . .	39
A.1.	Índice de refracción negativo, tomado de la referencia [1]. . . .	42
A.2.	(a) Refracción positiva. (b) Refracción negativa. . . . .	42
A.3.	Objetos visibles. . . . .	43
A.4.	Objetos invisibles. . . . .	43
A.5.	Metamaterial invisible electromagnéticamente, tomado de la referencia [11]. . . . .	43
A.6.	(a) Coeficiente de Poisson positivo. (b) Coeficiente de Poisson negativo. . . . .	44

# Capítulo 1

## Introducción

Los materiales que existen en la naturaleza cuentan con propiedades físicas y químicas intrínsecas, como por ejemplo el módulo de Young, el coeficiente de corte, entre muchas otras más. Sin embargo a raíz de la búsqueda de nuevas propiedades que permitan encontrar nuevos fenómenos físicos dio raíz al nacimiento de los metamateriales. Estos metamateriales presentan propiedades que van más allá de las que se encuentran en la naturaleza. El físico ruso Víctor Georgievich Veselago, en 1967 [1], fue el primero en publicar un análisis teórico de materiales con índices negativos de permitividad  $\epsilon$  y permeabilidad  $\mu$ . A partir de ahí diversos científicos siguieron trabajando sobre los metamateriales. John Pendry fue el primero en descubrir el camino para hacer el primer material con índice de refracción negativo [2]. También, David R. Smith reportó la primer demostración experimental de metamateriales que respondían inusualmente a los campos electromagnéticos, resonadores de anillo dividido, apilados horizontalmente y con estructura de alambre delgado [3].

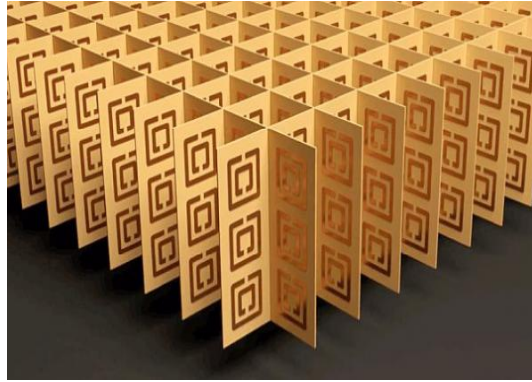


Figura 1.1: Metamaterial con índice de refracción negativo, tomado de la referencia [2].

Es así que, mediante la combinación de patrones geométricos periódicos, se pueden obtener materiales con propiedades que no se presentan en los materiales naturales. Es decir, a partir de materiales existentes en la naturaleza, se diseñan y crean materiales de tal manera que su forma geométrica sea más significativa que las mismas moléculas que lo conforman. Estos nuevos materiales algunos los denominan como materiales artificiales o metamateriales. En la actualidad existen una gran cantidad de aplicaciones de los metamateriales en la ciencia y la tecnología, permitiendo mejorar circuitos eléctricos, estructuras mecánicas, creación de antenas y diseño de todo tipo de tecnología. Ahora bien, existen dos grandes clasificaciones de los metamateriales, ya sea por el tipo de onda o por el tipo de fenómeno que presentan. En el primer caso hay metamateriales electromagnéticos, acústicos y mecánicos entre otros. En el segundo caso el índice de refracción negativo y las capas de invisibilidad son un tipo de clasificación por tipo de fenómeno. Sin embargo estos se pueden encontrar en óptica, en microondas o en acústica. En el apéndice A damos una clasificación de los metamateriales de acuerdo al tipo de fenómeno que presentan, se detallan los de índice de refracción negativo, los de capa de invisibilidad y los de coeficiente de Poisson negativo. Exceptuando los de dispersión cero que se da a continuación.



Se han diseñado metamateriales para ondas electromagnéticas que presentan una velocidad de grupo cero. Esto quiere decir que en estos metamateriales se puede lograr una velocidad cero de un paquete de ondas que viaja a través del material. Lo sorprendente de crear un metamaterial de dispersión cero es que mediante él, se puede detener un paquete de ondas o lograr una ralentización para el procesamiento de la señal, permitiendo así insertar una mayor cantidad de información. Una manera de lograr este fenómeno lo encontraron Kathryn H. Matlack et al [4]. Mediante el acoplamiento perturbativo de celdas unitarias cuadradas (ver figura 1.2). Ellos estudiaron numéricamente el acoplamiento de placas cuadradas mediante pequeñas vigas. Estas vigas se conectan en diferentes puntos para lograr una cancelación de la transmisión de energía a través de ellas. Es así como se espera la obtención de una banda completamente plana cuya velocidad de grupo sea cero.

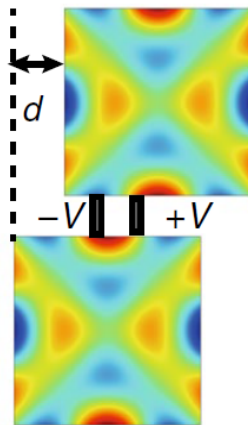


Figura 1.2: Metamaterial de dispersión cero, tomado de la referencia [4].

En esta tesis nos enfocamos a diseñar un metamaterial elástico con dispersión cero o velocidad de grupo cero. El metamaterial consta de placas delgadas rectangulares unidas por pequeñas vigas. Hacemos uso del método numérico de los elementos finitos para la obtención de la estructura de bandas de una celda unitaria repetida periódicamente y luego para un cristal finito. La estructura de esta tesis consta de los siguientes capítulos: el capítulo 2 contiene el marco teórico, describiendo las estructuras cristalinas, la definición del espacio recíproco, la primera zona de Brillouin, el teorema

de Bloch, las velocidades de fase y de grupo, la teoría clásica de placas y el método de los elementos finitos. En el capítulo 3 se describe la metodología utilizada para obtener los objetivos buscados, la definición de la celda unitaria, la simetrización de la geometría y de la malla así como las condiciones de frontera del sistema. Los resultados forman el capítulo 4, las diferentes estructuras de bandas bajo diversos valores de los parámetros de la geometría, la forma del modo de vibrar, la velocidad de grupo obtenida, la comparación de las velocidades de grupo con las vigas en distinta posición, el diseño del metamaterial finito constituido por 36 celdas unitarias y por último sus 36 frecuencias propias. El quinto capítulo expresa las conclusiones de esta tesis.

# Capítulo 2

## Marco teórico

### 2.1. Estructuras cristalinas

Los cristales están formados por una repetición regular de celdas unitarias idénticas. Cuando el cristal crece en un medio uniforme, durante el crecimiento, su forma permanece inalterada como si se fueran añadiendo continuamente más celdas unitarias idénticas.

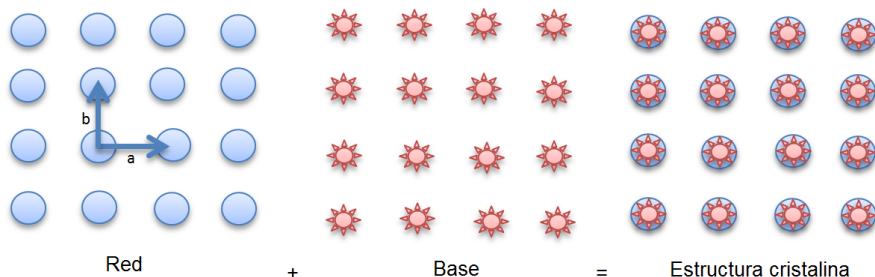


Figura 2.1: Composición de una estructura cristalina.

Ahora se sabe que estas celdas unitarias son átomos. Por lo que podemos concluir que los cristales son una disposición periódica de átomos en tres dimensiones. Una estructura cristalina debe contener una red y una base como se da en la figura 2.1, la red se define como los puntos ordenados en el espacio, y la base es la unidad con la cual se llenan los puntos de la red, estos pueden ser iones, átomos o moléculas.

Los vectores primitivos de una estructura cristalina se denotan como  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$ , como se muestra en la figura 2.2.

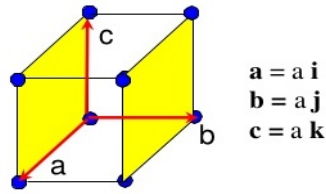


Figura 2.2: Vectores primitivos.

La selección de los vectores primitivos de la red no es única, sin embargo esta debe cumplir con la definición del vector de red la cual se expresa como

$$r_n = n_1 \mathbf{a} + n_2 \mathbf{b} + n_3 \mathbf{c} \quad \forall \quad n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}. \quad (2.1)$$

Ahora bien, existen operaciones de traslación, reflexión y rotación para los vectores primitivos. Mediante estas operaciones se crean las únicas cinco redes bidimensionales y las catorce tridimensionales. Estas se pueden encontrar fácilmente en las referencias [5] y [6]. La celda primitiva, también conocida como la celda unitaria, la compone el paralelepípedo definido por los vectores primitivos  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$ . Esta celda llenará todo el espacio cuando se le somete a operaciones de traslación apropiadas. Lo importante de definir la celda unitaria es que en ella se contiene el volumen mínimo, definido por la expresión

$$V_c = |\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}|. \quad (2.2)$$

Otra manera de elegir la celda unitaria es mediante el método de Wigner-Seitz, esta consiste en unir un punto de la red con todos los que lo rodean, trazar líneas o planos perpendiculares a aquellas uniones que pasan por un punto medio, es así como el volumen mínimo que queda encerrado en la figura es la celda unitaria de Wigner-Seitz. Ver figura 2.3.

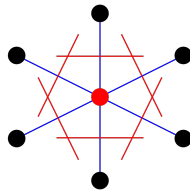


Figura 2.3: Celda de Wigner-Seitz.

## 2.2. Definición de espacio recíproco

Consideramos la expresión  $\Delta k = h\mathbf{A} + k\mathbf{B} + l\mathbf{C}$  donde  $h$ ,  $k$  y  $l$  son enteros de las ecuaciones de Laue que relacionan las ondas entrantes a las ondas salientes en el proceso de difracción por una red cristalina y  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  son los vectores recíprocos expresados de la manera

$$\mathbf{A} = 2\pi \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \quad \mathbf{B} = 2\pi \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}} \quad y \quad \mathbf{C} = 2\pi \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}. \quad (2.3)$$

Es igual de importante visualizar la red recíproca como la red real del cristal, ya que cada estructura cristalina está asociada con ambas redes. Un diagrama de difracción de un cristal es un mapa de su red recíproca, en contraste con una imagen microscópica que es un mapa de la estructura real del cristal, ver figura 2.4, ambas mantienen una fuerte relación con las expresiones anteriores, siendo que si giramos el cristal ambas redes, la real y la recíproca girarán.

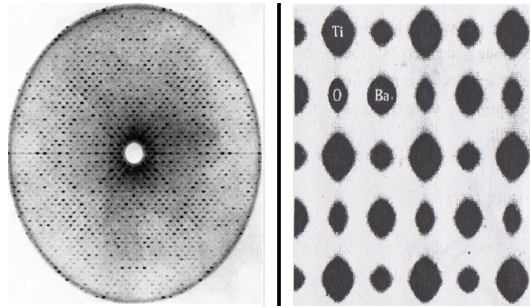


Figura 2.4: Difracción de rayos X e imagen micrográfica electrónica del titanato de bario cúbico, tomado de la referencia [5].

Los vectores de la red real tienen dimensiones de longitud mientras que los vectores de la red recíproca tienen valores del inverso de la longitud. Es así que la expresión para los vectores recíprocos de una red es

$$\mathbf{G} = h\mathbf{A} + k\mathbf{B} + l\mathbf{C}. \quad (2.4)$$

## 2.3. Primera zona de Brillouin

Una zona de Brillouin se define como una celda unitaria de Wigner-Seitz en la red recíproca. Ver Figura 2.5.

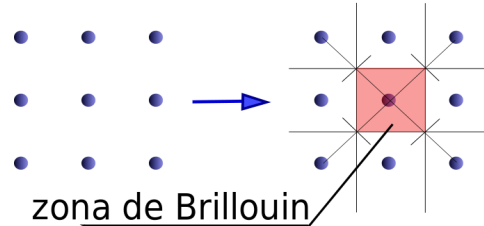


Figura 2.5: Zona de Brillouin para una red recíproca cuadrada.

El termino primer zona de Brillouin refiere al menor volumen limitado por planos que son perpendiculares y que bisecan los vectores de la red recíproca dibujados a partir del origen. En una red lineal, los límites de la primer zona de Brillouin están a  $k = \frac{\pi}{a}$ , donde  $a = |\mathbf{a}|$  que es la dimensión primitiva de la red cristalina, ver figura 2.6. También se puede escribir como  $\Gamma$  ubicado en el origen y  $X$  ubicado en  $k = \frac{\pi}{a}$  que es el límite de la celda unitaria.

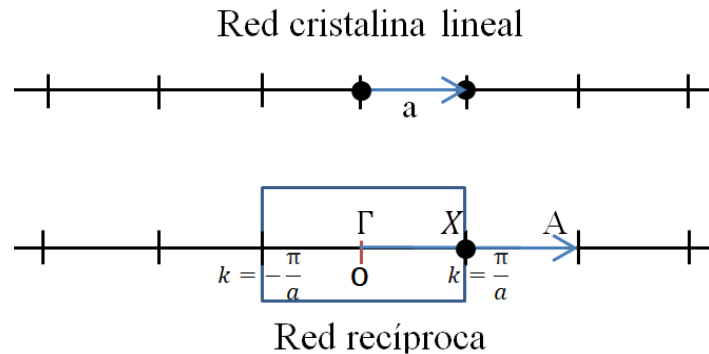


Figura 2.6: Zona de Brillouin unidimensional.

El vector base en la red recíproca es  $A$ , de longitud  $\frac{2\pi}{a}$ . Los vectores más cortos de la red recíproca son  $A$  y  $-A$ . Las perpendiculares que los bisecan forman la primera zona de Brillouin y están situados en  $k = \pm \frac{\pi}{a}$ .

Como complemento en la figura 2.7 se muestra en color rojo la primera zona de Brillouin para dos dimensiones de una red cuadrada.

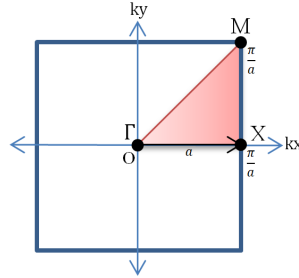


Figura 2.7: Zona de Brillouin para una red cuadrada en dos dimensiones.

## 2.4. Teorema de Bloch

El teorema de Bloch fue descrito por el físico suizo Felix Bloch y describe el movimiento de los electrones en un sólido basándose en la idea de que este último posee una estructura microscópica periódica. A partir de esta hipótesis, el teorema establece de qué forma deben ser las funciones de onda de los electrones. Además, permite tratar el movimiento de todos los electrones analizando únicamente el movimiento de un solo electrón, basándose en las siguientes hipótesis:

- Los átomos del cristal forman una estructura periódica y ocupan las posiciones de una red de Bravais denotadas por el vector  $r$ .
- Debido al ordenamiento de los átomos, el potencial del cristal es una función periódica que cumple  $U(r + R) = U(r)$  para todo vector de traslación  $R$  de la red.
- Los electrones son independientes, no interactúan entre sí y cada uno satisface la ecuación de Schrödinger para un potencial periódico.

Entonces el teorema de Bloch establece que los autoestados  $\psi$  de un electrón vienen dados por el producto de una onda plana y una función periódica en  $R$  llamada función de Bloch, es decir

$$\psi_k(r) = e^{ikr} u_k(r), \quad (2.5)$$

donde  $k$  representa el vector de onda y  $u_k(r)$  la función de Bloch. Esta puede ser una función periódica cualquiera, cuya periodicidad  $R$  sea la misma que la de la red cristalina. La función de Bloch viene determinada por la resolución de la ecuación de Schrödinger, pero no es indispensable saber la forma analítica de esta función para abordar el tratamiento de un sólido, por lo que haciendo uso de su periodicidad se tiene que  $u_k(r + R) = u_k(r)$  de modo que la ecuación anterior se puede reescribir de la forma

$$\psi_k(r + R) = e^{ikR}\psi_k(r). \quad (2.6)$$

## 2.5. Velocidades de fase y de grupo

Consideremos una onda armónica de frecuencia angular  $\omega$  y número de onda  $k$ , que se puede describir mediante

$$\xi = A \sin(kx - \omega t). \quad (2.7)$$

Una onda armónica continua también es conocida como un tren de ondas de longitud infinita, esta tiene una sola longitud de onda y una sola frecuencia. La cantidad  $v = \frac{\omega}{k}$  se denomina velocidad de fase y es la velocidad de la onda; esta velocidad no es necesariamente la velocidad que observamos al analizar un movimiento ondulatorio, ya que esta onda no es adecuada para transmitir una señal porque tiene tamaño infinito. Para transmitir una señal necesitamos una onda empiece en un cierto instante y termine en un cierto tiempo más tarde. Esto significa que la onda debe tener una forma similar a la indicada en la figura 2.8.

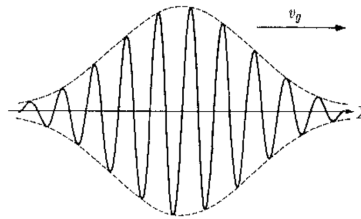


Figura 2.8: Pulso ondulatorio.

La forma de onda que se ve en la figura 2.8, se denomina un pulso o paquete de ondas. Si medimos una velocidad en que se trasmite una señal,



estamos implicando esencialmente la velocidad con que viaja este pulso. A primera vista podríamos decir que esta velocidad es justamente la velocidad de fase, ya que esta es la velocidad de propagación de las ondas. Sin embargo, aquí entra un factor importante. El pulso representado en la figura 2.8 no es armónico, ya que su amplitud no es constante a lo largo del eje  $x$ . En un medio no dispersivo todas las componentes de Fourier del pulso viajan con la misma velocidad, pero en un medio dispersivo, cada componente de Fourier tiene su propia velocidad de propagación. A continuación seguiremos la metodología de la referencia [7] para la obtención de la velocidad grupo. Consideremos el caso simple en que el pulso se puede separar en dos frecuencias  $\omega$  y  $\omega'$  que son casi iguales, de modo que  $\omega' - \omega$  es muy pequeña y que sus amplitudes son iguales. Entonces tomando una onda sinusoidal, tenemos

$$\begin{aligned}\xi &= A\text{sen}(kx - \omega t) + A\text{sen}(k'x - \omega' t) \\ &= A[\text{sen}(kx - \omega t) + \text{sen}(k'x - \omega' t)] \\ &= 2A\cos\frac{1}{2}[(k' - k)x - (\omega' - \omega)t]\text{sen}\frac{1}{2}[(k' + k)x - (\omega' + \omega)t].\end{aligned}\quad (2.8)$$

Como  $\omega$  y  $\omega'$  son casi iguales así como también  $k$  y  $k'$ , podemos reemplazar  $\frac{1}{2}(\omega' + \omega)$  por  $\omega$  y  $\frac{1}{2}(k' + k)$  por  $k$ , de modo que lo podemos reescribir como

$$\xi = 2A\cos\frac{1}{2}[(k' - k)x - (\omega' - \omega)t]\text{sen}(kx - \omega t).\quad (2.9)$$

La ecuación anterior representa un movimiento ondulatorio que no es armónico, como el que se ve en la figura 2.8. La modulación del movimiento está dada por el factor

$$2A\cos\frac{1}{2}[(k' - k)x - (\omega' - \omega)t].\quad (2.10)$$

La velocidad en que se propaga una onda cuya amplitud no sea constante, es decir que no sea armónica, se denomina velocidad de grupo, y corresponde a la envolvente del pulso como se ve en la figura 2.9, las líneas punteadas corresponden a la velocidad de grupo de ese pulso. Esta velocidad se describe de la manera siguiente

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \approx \frac{\omega' - \omega}{k' - k}.\quad (2.11)$$

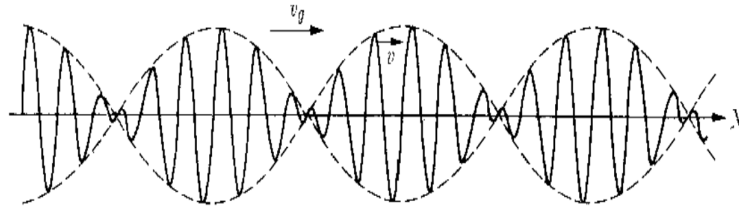


Figura 2.9: Velocidad de fase y velocidad de grupo.

## 2.6. Teoría clásica de placas

Una placa es el análogo bidimensional de una viga. Por ello se puede considerar el movimiento elástico bidimensional, donde los momentos de flexión y fuerzas de corte transversales son activadas como en una viga. La cinemática básica de la teoría clásica de placas delgadas es la misma que en la teoría de Bernoulli-Euler para vigas solo que extendida a dos dimensiones. La propagación de ondas planas, cargas transitorias y la reflexión de una onda pueden ser descritas por la teoría clásica de placas, también conocida como la teoría de Kirchhoff-Love. Consideremos una placa de espesor  $h$  y de superficie infinita en el plano  $x$ - $y$ , como se muestra en la figura 2.10.

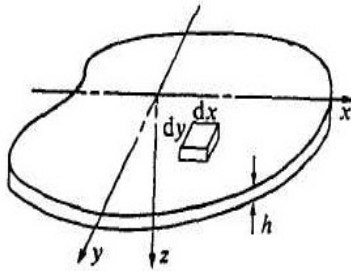


Figura 2.10: Región de una placa delgada.

Entonces la ecuación que describe el movimiento flexional de una placa como se ve en la figura 2.10, está demostrada en la referencia [8] y es

$$\nabla^2 D \nabla^2 w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.12)$$

donde  $\rho =$  densidad,  $w =$  desplazamiento flexional en la dirección  $z$ ,  $\nu =$  coeficiente de Poisson y  $D$  la rigidez flexional dada por  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ . Si el espesor  $h$  de la placa es constante entonces se puede escribir como

$$D\nabla^4 w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (2.13)$$

## 2.7. Método de los elementos finitos

El método de los elementos finitos (FEM), del inglés *finite element method*, es un procedimiento numérico que permite resolver problemas de la ingeniería y la física. En este procedimiento el medio continuo se divide en un número finito de subdominios denominados *elementos finitos*. Estos elementos están interconectados por una serie de puntos denominados *nodos*; a este procedimiento también se le conoce como discretización.

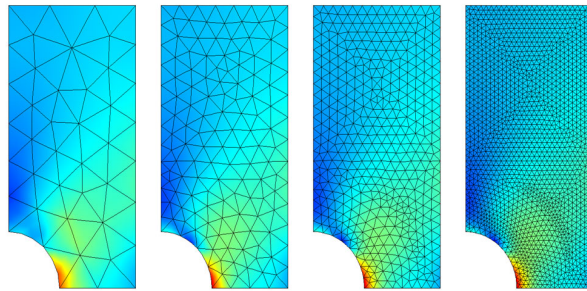


Figura 2.11: Discretización con un tamaño diferente en los elementos.

Existen muchos tipos de elementos para realizar la discretización, tanto para elementos en dos dimensiones como para piezas tridimensionales; como por ejemplo triángulos y polígonos para el caso de elementos bidimensionales y cubos, tetraedros, hexaedros para las piezas tridimensionales. El conjunto de elementos finitos y de nodos que representan aproximadamente la geometría del sólido se denomina *malla de elementos finitos*. De acuerdo con estas relaciones de conectividad se relaciona el valor de un conjunto de incógnitas, definidas en cada nodo y denominadas grados de libertad. El grupo de relaciones entre el valor de una determinada variable entre los nodos se puede escribir en forma de un sistema de ecuaciones lineales. La matriz de dicho sistema de ecuaciones se llama matriz de rigidez del sistema y el número

de ecuaciones de dicho sistema es proporcional al número de nodos. Una propiedad importante del método es la convergencia; si se consideran particiones de elementos finitos sucesivamente más finas, la solución numérica calculada converge rápidamente hacia la solución exacta del sistema de ecuaciones. En la actualidad los softwares de simulación computacional están evolucionando y mejorando los análisis con base en el método, siendo utilizados para el diseño de aviones, automóviles, barcos, celulares, etc. Promoviendo la mejora en la selección de los tipos de malla y de la generación misma, así como en las técnicas de modelado y en la forma de presentar los resultados. En la figura 2.12, tomada de la referencia [9] se muestra un ejemplo de la simulación de diferentes materiales en un Boeing 787.

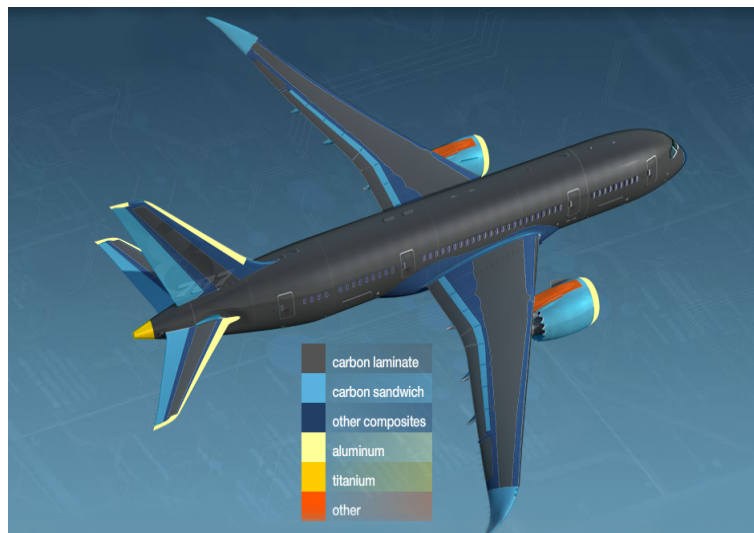


Figura 2.12: Uso del MEF en un Boeing 787.

# Capítulo 3

## Metodología

Existen diversos métodos para la solución de problemas en la ingeniería. Como vimos en el capítulo anterior el método de los elementos finitos, es un método numérico que nos permite resolver ecuaciones diferenciales parciales muy complejas. Esto se logra mediante la discretización del medio que se está estudiando. La integración de las soluciones de todos los elementos de la discretización da como resultado la solución general de las ecuaciones. Es así como diversas compañías de software CAD han desarrollado paquetes complementarios que permiten el uso de este método para sistemas muy complejos, desde el diseño de aviones, edificios, procesos biológicos, nuevos materiales etc. El software que utilizaremos para este análisis lleva el nombre de COMSOL Multiphysics, este se encuentra con una licencia original dentro del grupo de ondas y materiales a cargo del Dr. Rafael A. Méndez Sánchez. En dicho software, diseñaremos la celda unitaria, discretizaremos la misma y ejecutaremos un estudio en el dominio de la frecuencia.

### 3.1. Definición de la celda unitaria

La celda unitaria es una placa rectangular cuyas dimensiones se ven en la figura 3.1. Esta está compuesta por una placa rectangular y se pueden observar unas pequeñas salientes o voladeros que conectan una celda con otra. Así se logra la periodicidad para emular un material unidimensional. El material de la placa rectangular y de las salientes es aluminio.

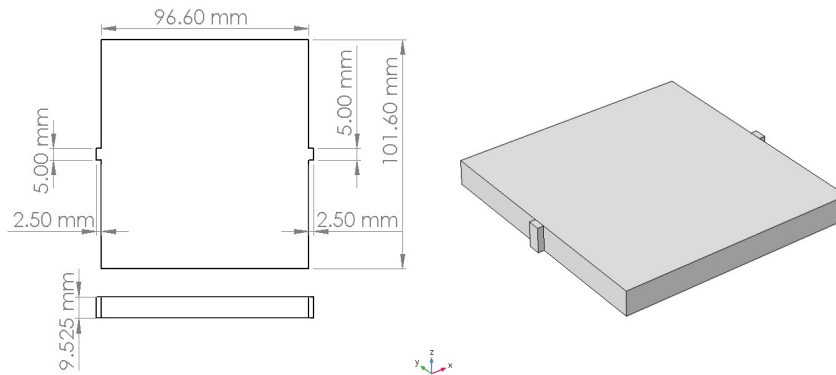


Figura 3.1: Celda unitaria.

La selección de la geometría rectangular se debió a que ya existen estudios realizados en el dominio de la frecuencia, los cuales permiten conocer una gran cantidad de modos de vibrar. En la imagen 3.2 se ilustran sólo 6 de ellos, para una placa cuadrada de 50 mm y 6 mm de espesor.

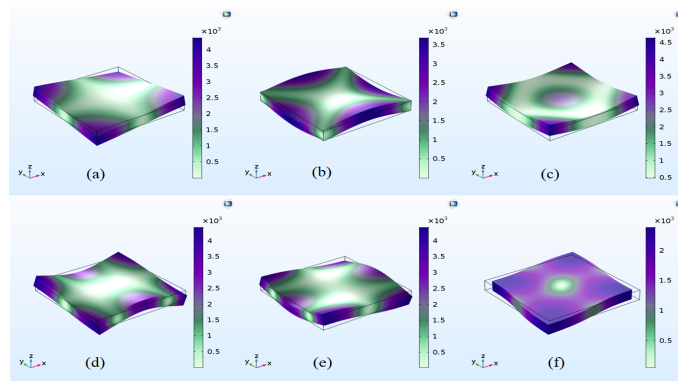


Figura 3.2: (a) 1.<sup>er</sup> Modo 2991 Hz. (b) 2.<sup>o</sup> Modo 4393 Hz. (c) 3.<sup>er</sup> Modo 5677 Hz. (d) 4.<sup>o</sup> Modo 7384 Hz. (e) 5.<sup>o</sup> Modo 7713 Hz. (f) 17.<sup>o</sup> Modo 19576 Hz.

Es así que mediante esos estudios realizados se identificó que el modo 17 reúne los requisitos en los cuales se cumple que el valor mínimo de desplazamiento se encuentra en el extremo central de la placa. Es así que mediante los conectores se entrelaza una placa a otra placa esperando así el mínimo desplazamiento en esos puntos. Ahora bien el proceso no fue fácil, la obtención de una banda plana dentro de una brecha es un proceso que pareciese trivial, pero costó una gran cantidad de simulaciones en la cuales se variaron parámetros de la longitud de la celda unitaria, el espesor de la placa y la posición del mismo conector. En el capítulo 4 se muestran los diferentes casos que se analizaron variando los parámetros mencionados anteriormente.

## 3.2. Simetrización de la geometría

El proceso de la simetrización consiste en seccionar la geometría de tal manera que exista un eje de simetría entre dos cuerpos, como se muestra en la figura 3.3.

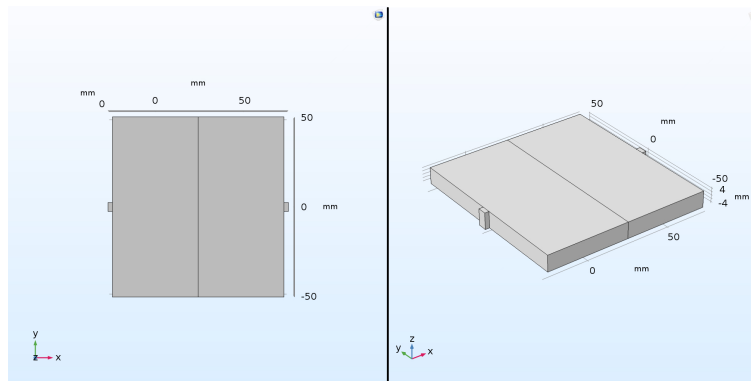


Figura 3.3: Eje de simetría de la celda unitaria.

La finalidad es lograr que el mallado sea simétrico, es decir que cada elemento de la malla de un lado tenga un elemento simétricamente en el otro lado de la placa, ver figura 3.4.

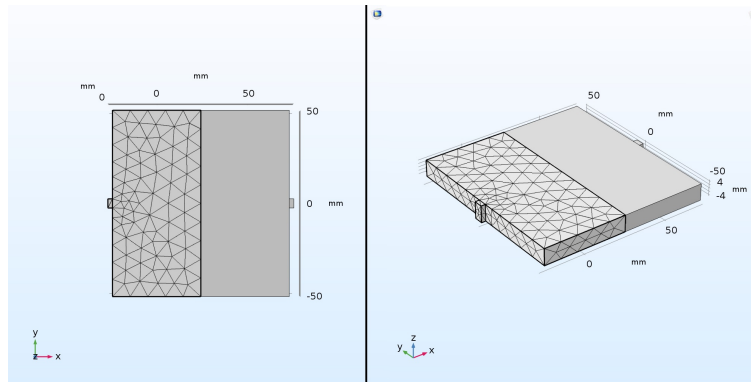


Figura 3.4: Discretización de un dominio.

La finalidad de replicar un dominio ya mallado y partido por el eje de simetría es lograr una reflexión perfecta teniendo la posición de elementos reflejada con respecto al eje de simetría, ver figura 3.5. Esta operación se logra utilizando la función *copy domain* que esta disponible dentro de la interfaz de *mesh* en el software.

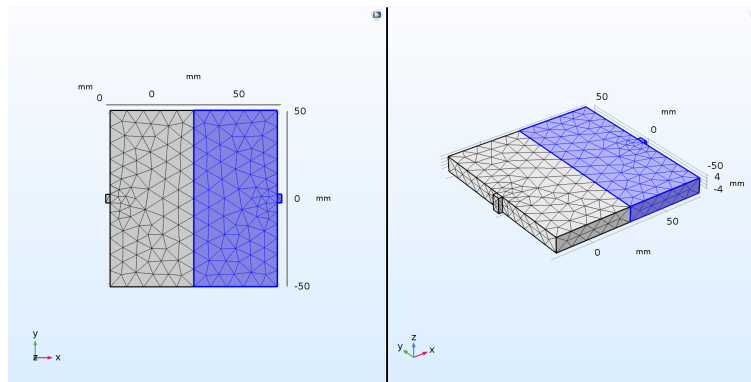


Figura 3.5: Discretización simétrica a partir del eje de simetría.

El resultado de una correcta discretización debe contar con todas las características mencionadas anteriormente al igual que debe ser notada incluso a simple vista, así como se muestra en la figura 3.6.



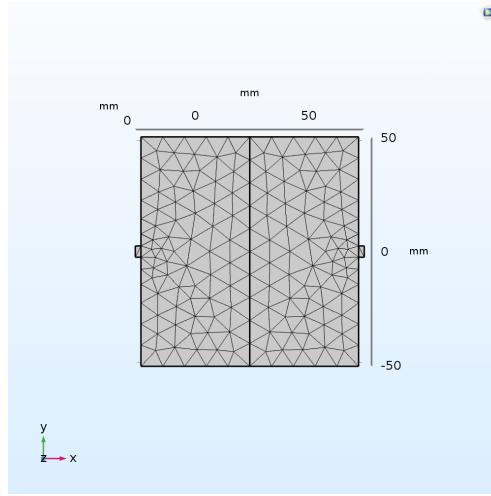


Figura 3.6: Discretización simétrica.

Es así como obtenemos resultados simétricos en los modos de vibrar que se presentarán.

### 3.3. Condiciones de frontera (Floquet)

Calcular la respuesta a la frecuencia que sufre un sistema requiere un análisis sobre la celda unitaria con condiciones de frontera de Bloch, las cuales simulan el crecimiento periódico de la celda infinitamente. Es suficiente abarcar un “pequeño” rango de vectores de onda que cubren la zona irreducible de Brillouin. Para estructuras unidimensionales la zona irreducible de Brillouin se extiende de  $\Gamma$  a  $X$ . La condición de frontera de Bloch conocida también como condición de frontera de Floquet en 1D, limita el desplazamiento al borde de una celda de la estructura periódica. Esta condición se encuentran en la referencia [10] y es

$$u_{destino} = \exp[-ik \cdot (r_{destino} - r_{origen})]u_{origen}, \quad (3.1)$$

donde  $k$  es el vector de onda. El origen y el destino se aplican una vez en las caras de los bordes salientes de la celda unitaria, del lado izquierdo y derecho. En la figura 3.7 la selección de dichas caras está de color azul.

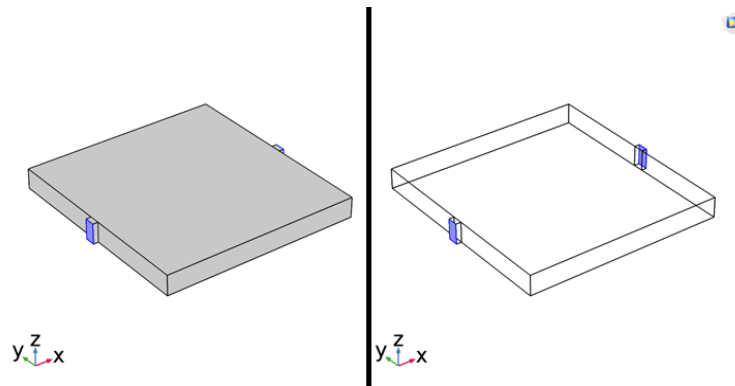


Figura 3.7: Selección de condiciones periódicas de Floquet.

Configuramos el estudio “frecuencias propias” con un barrido paramétrico que involucra un parámetro,  $k$ , que varía de 0 a 1. Aquí se define un número de onda que abarca el borde  $\Gamma - X$  de la zona irreducible de Brillouin. Ver figura 3.8.

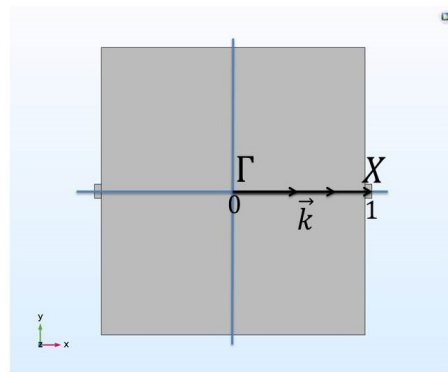


Figura 3.8: Barrido del vector de onda de  $\Gamma - X$ .

Para cada parámetro de  $k$  cuyo valor inicia en 0.01 hasta llegar a 1, resolvemos 30 frecuencias naturales. En seguida graficamos las frecuencias de propagación de onda en cada valor de  $k$ , cuyo resultado es una relación de dispersión o también conocida como estructura de bandas (ver figura 3.9).

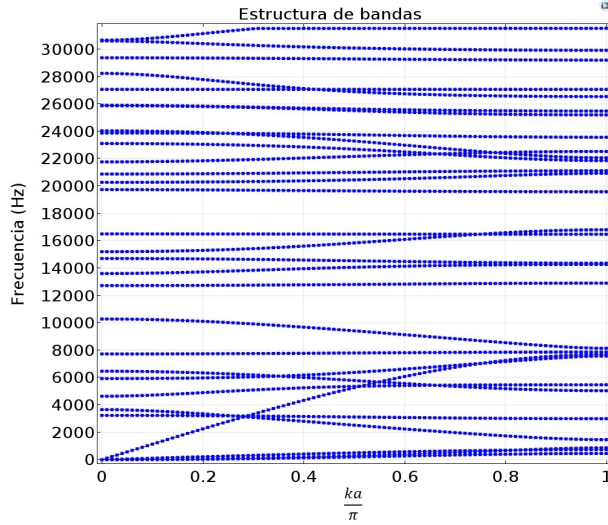


Figura 3.9: Estructura de bandas asociada a la estructura dada en la figura 3.8.

De esta gráfica nosotros podemos obtener la velocidad de grupo de la siguiente manera. Observe que el eje x esta en unidades de  $\frac{a}{\pi}$ , donde  $a$  es la longitud total de la celda unitaria. Entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{df}{d\frac{ka}{\pi}} &= \frac{\pi}{a} \frac{df}{dk}, \\
 &= \frac{2\pi}{2a} \frac{df}{dk}, \\
 &= \frac{1}{2a} \frac{d\omega}{dk}.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Por lo tanto

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = 2a \frac{df}{d\frac{ka}{\pi}}. \tag{3.3}$$

# Capítulo 4

## Resultados

### 4.1. Estructura de bandas

La función barrido paramétrico (*parametric sweep*) en el software COM-SOL Multiphysics permitió realizar el estudio mientras automáticamente cambiaba los valores designados de longitud, espesor y posición del conector. A continuación en la figuras 4.2 a 4.10 se muestran algunas de las combinaciones realizadas, en la parte izquierda de la figura está la vista isométrica de la celda unitaria, en la parte central su estructura de bandas y al costado derecho un zoom en donde se puede observar la banda de interés, en el eje  $x$ ,  $k' = \frac{ka}{\pi}$ . El estudio se configuró para 20 frecuencias propias y 20 valores de  $k$ . El parámetro  $L$  es el que cambiará, que es la longitud de los lados del cuadrado y el parámetro  $h$  es el espesor de la placa. Ver figura 4.1. Debido al acercamiento en las vistas isométricas de las imágenes 4.2 a 4.10, pareciera que el espesor es diferente, pero esto es debido simplemente al acercamiento que existe en cada una de ellas.

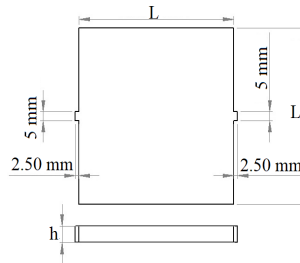


Figura 4.1: Parámetros  $L$  y  $h$ .

En la figura 4.2 podemos observar que la banda de interés se encuentra alrededor de los 39 kHz, además se cruza con otras bandas, lo cual nos impediría observar el fenómeno buscado, la figura 4.3 tiene la banda de interés aislada en 27.89 kHz pero no completamente plana y la figura 4.4 es completamente descartada al tener una pendiente alta y juntarse con otra banda.

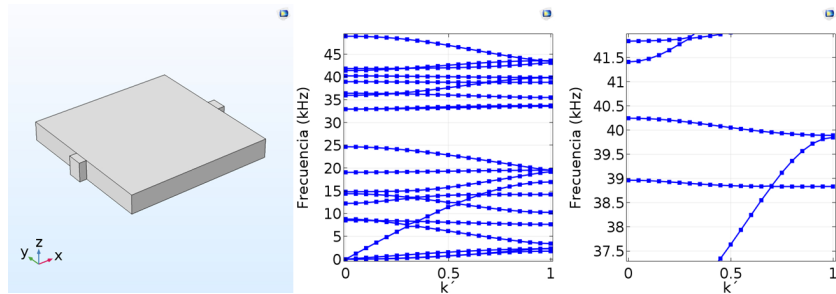


Figura 4.2: Estructura de bandas  $L=50$  mm y  $h=6.35$  mm.

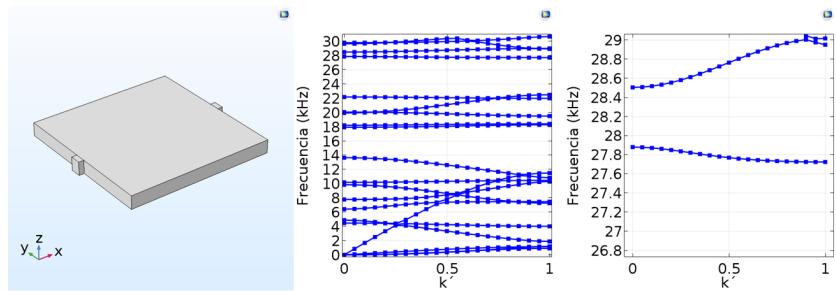


Figura 4.3: Estructura de bandas  $L=70$  mm y  $h=6.35$  mm.

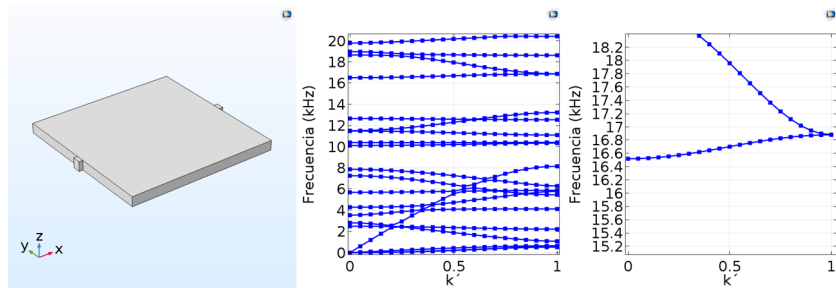


Figura 4.4: Estructura de bandas  $L=95$  mm y  $h=6.35$  mm.

En la figura 4.5 y 4.6 muestran bandas cruzadas con la de interés y seguirían impidiendo ver el fenómeno buscado.

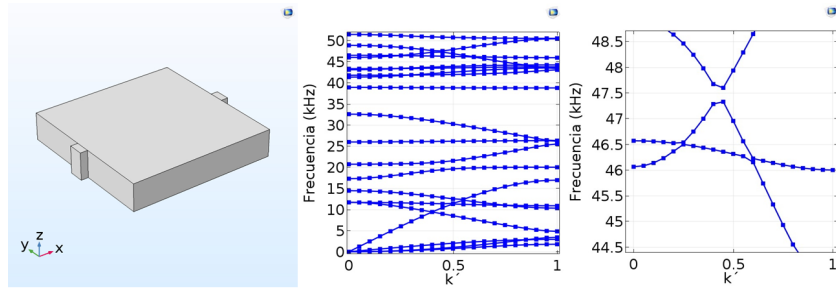


Figura 4.5: Estructura de bandas  $L=50$  mm y  $h=9.525$  mm.

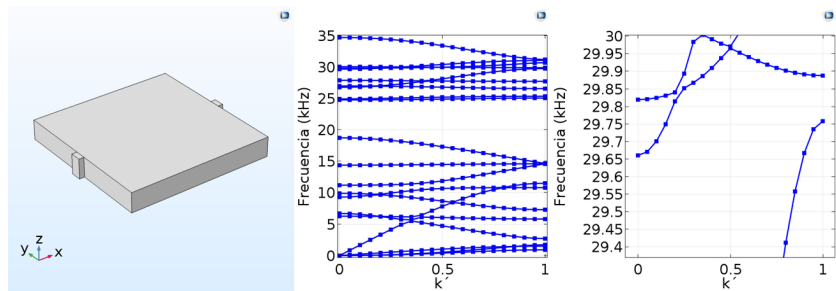


Figura 4.6: Estructura de bandas  $L=70$  mm y  $h=9.525$  mm.

La figura 4.7 es la estructura de bandas de nuestra celda unitaria cuyas dimensiones están en la figura 3.1, esta contiene una banda considerablemente plana y aislada de las otras bandas en una frecuencia de 19736.925 Hz. Cabe mencionar que también existe una banda plana alrededor de 12300 Hz, su modo de vibrar es fuera del plano y su velocidad de grupo es más alta en comparación con la banda de los 19736 Hz es por ello que no se seleccionó.

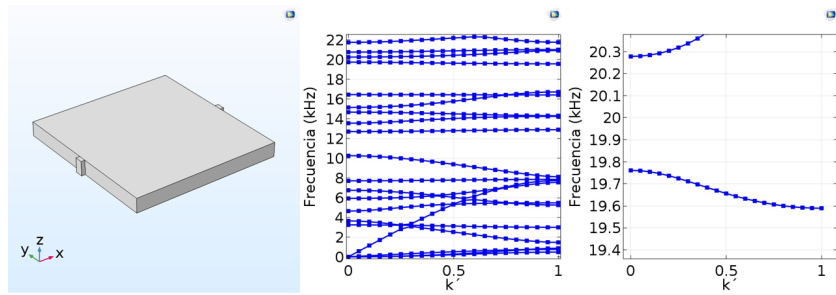


Figura 4.7: Estructura de bandas de la celda unitaria.

En las figuras 4.8, 4.9 y 4.10 ninguna tiene lo buscado, en ellas solo se observan bandas cruzadas y con pendientes altas, además de ser una celda muy pesada debido a su espesor.

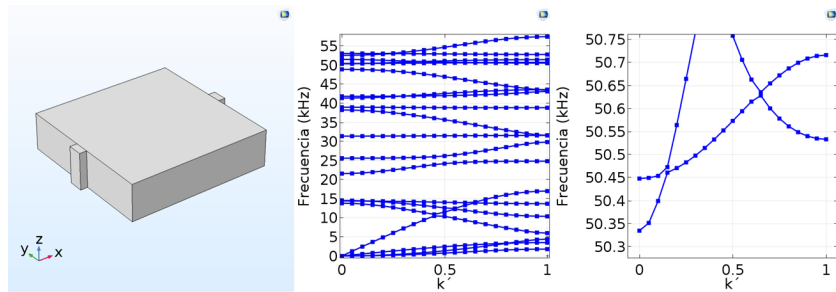


Figura 4.8: Estructura de bandas  $L=50$  mm y  $h=12.7$  mm.

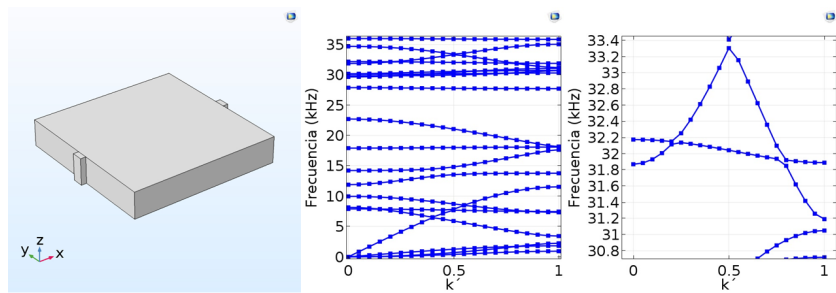


Figura 4.9: Estructura de bandas  $L=70$  mm y  $h=12.7$  mm.

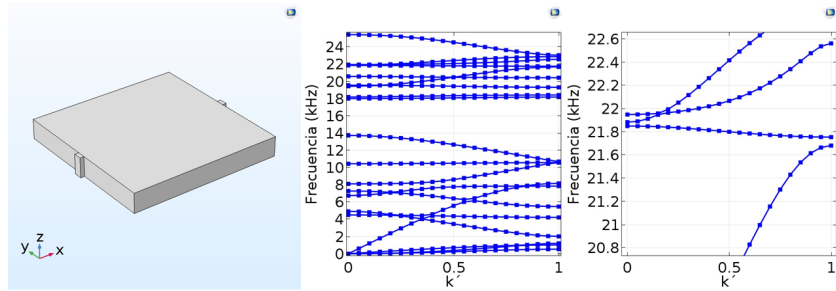


Figura 4.10: Estructura de bandas  $L=95$  mm y  $h=12.7$  mm.

## 4.2. Forma del modo de vibrar

La forma del modo en el cual estamos interesados es de crucial importancia. En la parte baja de la figura 4.11 se ve que prácticamente no hay movimiento fuera del plano, por lo que es una vibración en el plano, además es un modo complejo que vive tanto en el eje  $x$  como en el eje  $y$ . También se observa la característica principal ya mencionada anteriormente, el menor desplazamiento en los extremos centrales de la placa, por lo que se conectan mediante celdas cuadradas pequeñas para entrelazarlas, esperando así la menor transmisión de energía entre una celda y otra.

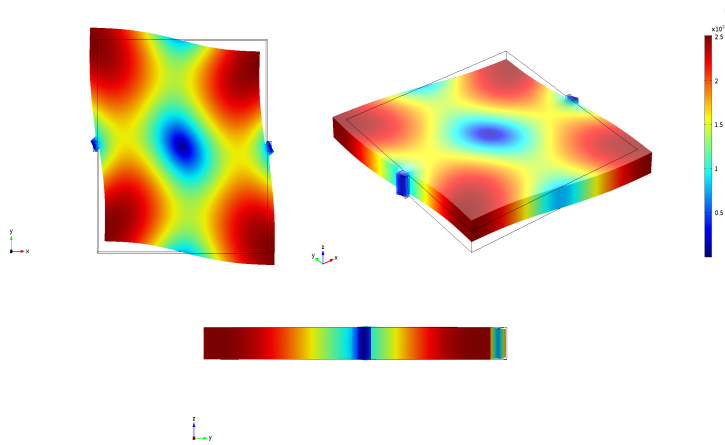


Figura 4.11: Forma del sólido, modo 17.



### 4.3. Velocidad de grupo

He aquí el resultado principal de esta tesis, lograr una velocidad de grupo cero. Concentrémonos en la figura 4.7 que es la estructura de bandas elegida que satisface nuestros criterios de selección, entonces; recordemos que la velocidad de grupo está descrita por la expresión  $\frac{d\omega}{dk}$ . Es así que mediante la derivada de la velocidad angular respecto al número de onda podemos calcular la velocidad de un paquete de ondas. La siguiente figura muestra la banda seleccionada donde  $k' = \frac{ka}{\pi}$ .

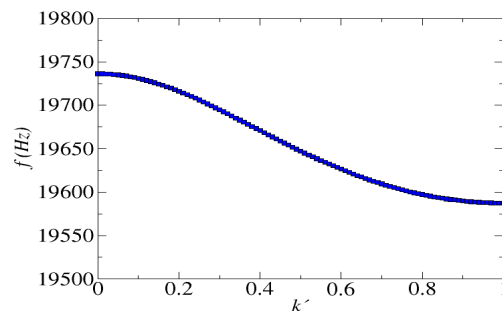


Figura 4.12: Banda plana estudiada.

Utilizamos un método numérico para derivarla y se obtuvo la velocidad de grupo que se ve en la figura 4.7. Como puede observarse el máximo del valor absoluto de la velocidad es  $50 \frac{m}{s}$  que es mucho menor que la velocidad de las ondas compresionales en el aluminio que es del orden de  $5000 \frac{m}{s}$ .

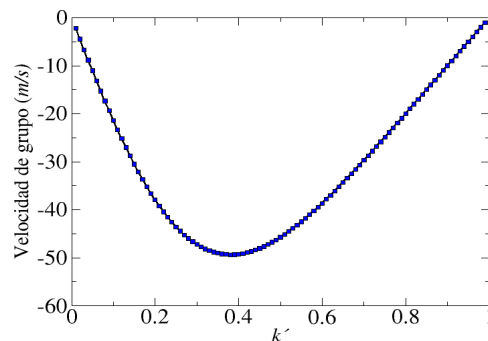


Figura 4.13: Velocidad de grupo.

#### 4.4. Velocidad de grupo con el conector en distinta posición

Este estudio se llevó a cabo para comprobar la existencia de la menor transmisión de energía ubicada en los extremos centrales de la celda unitaria, permitiendo observar el comportamiento de la banda en la cual nos enfocamos. Se esperaría que la pendiente de esta aumente y por consecuencia la velocidad de grupo crezca con ella. En la figura 4.14 podemos observar las tres distintas posiciones que tomarán ambos conectores de la celda unitaria. En las figuras 4.15, 4.16 y 4.17 se observan los resultados obtenidos. Teniendo del lado izquierdo de las figuras la forma del modo de vibrar, en el centro la banda estudiada y a su lado derecho la cuantificación de la velocidad de grupo.

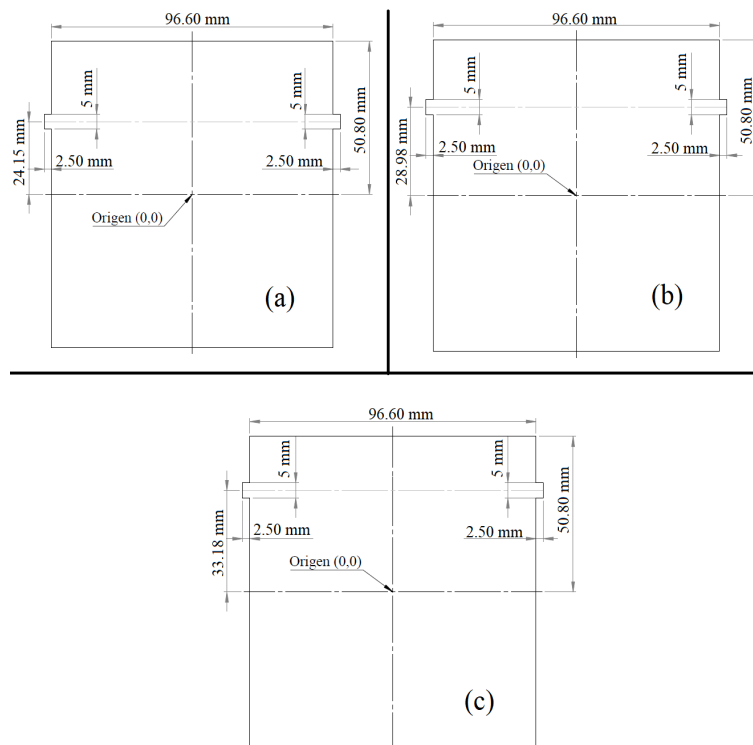


Figura 4.14: (a) Conector a 24.15 mm. (b) Conector a 28.98 mm. (c) Conector a 33.18 mm.

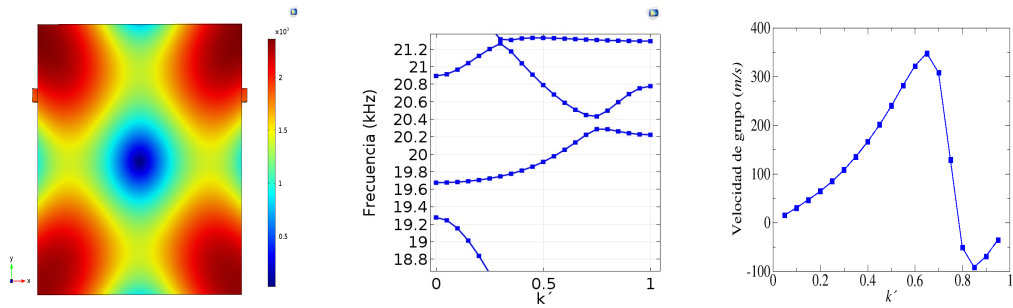


Figura 4.15: Velocidad de grupo con el conector a 24.15 mm.

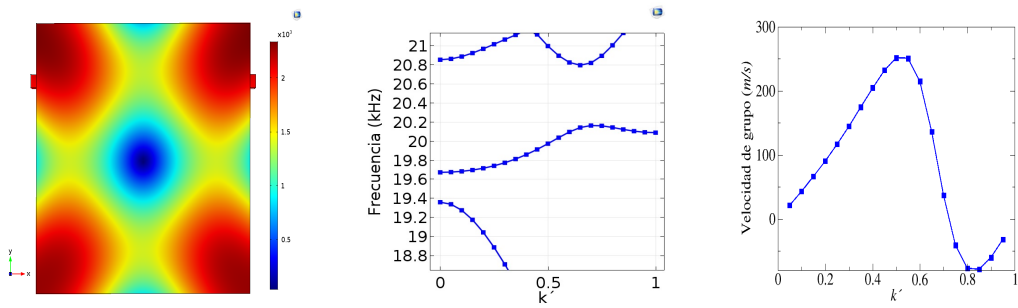


Figura 4.16: Velocidad de grupo con el conector a 28.98 mm.

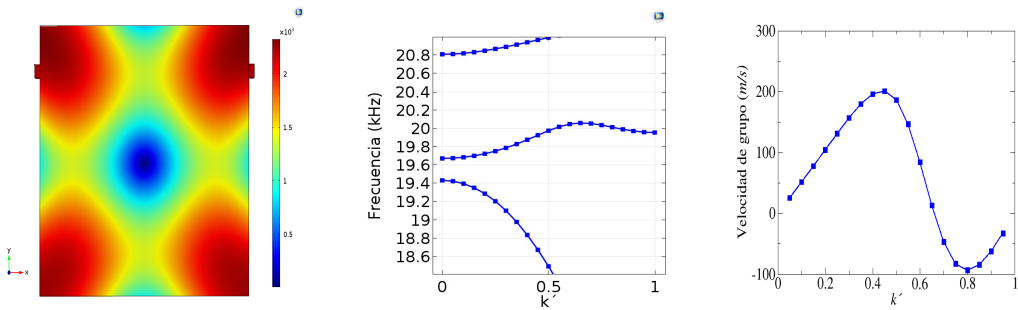


Figura 4.17: Velocidad de grupo con el conector a 33.81 mm.

En las figuras 4.15, 4.16, 4.17 al desplazar la posición del conector, la pendiente de la banda de interés aumenta, hasta unos  $350 \frac{m}{s}$ , siete veces más rápido en comparación a tener el conector en el centro de la celda unitaria. En la figura 4.11 se grafican las 3 velocidades de grupo para los valores

anteriores de la posición del conector, junto con la velocidad de grupo del metamaterial con la posición del conector en el centro. La aparición de velocidades negativas es debido a la pendiente negativa que sufre dicha banda. Lo que significaría que si mandas un paquete de ondas en una dirección este viajaría en sentido contrario, eso sería una velocidad de grupo negativa.

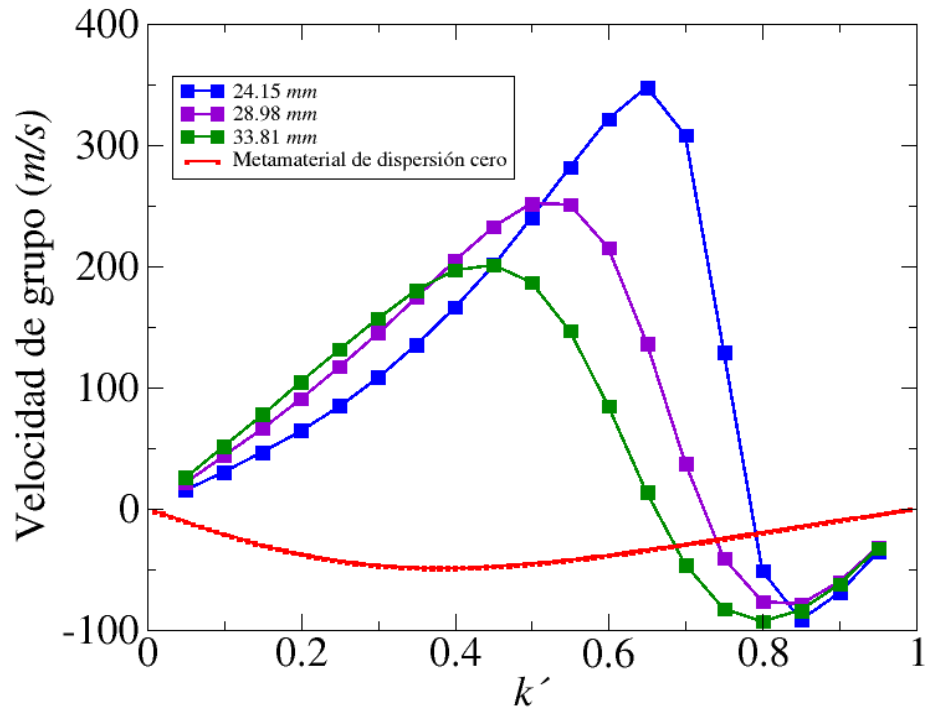


Figura 4.18: Comparación de velocidades de grupo.

Nótese que en las figuras 4.15 a 4.17 la banda de interés sufre lo que se conoce como un cruce evitado de bandas. Por esta razón la banda se aplanó, pero no demasiado y también si esta hubiera continuado con la otra banda hubiéramos obtenido una mayor velocidad de grupo.

## 4.5. Metamaterial finito

La construcción de un metamaterial finito nace para poder medir experimentalmente la velocidad de un paquete de ondas. Comercialmente existen las soleras de aluminio cuya longitud es de 3.66 m, lo cual hace posible el diseño de 36 celdas unitarias en esa longitud tal como se muestra en la figura 4.19.

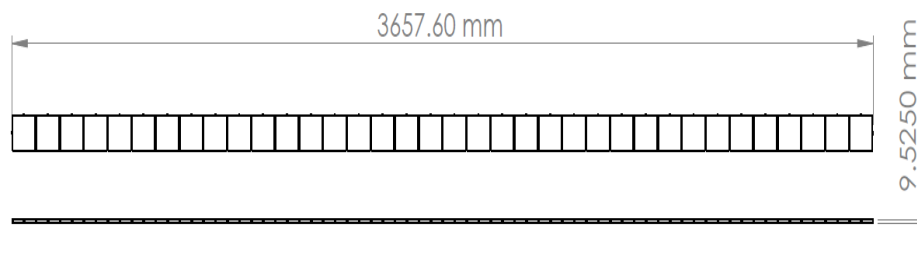


Figura 4.19: Metamaterial finito

## 4.6. Frecuencias propias del metamaterial finito

El estudio de frecuencias propias dentro del intervalo del  $\Delta f$  de la banda plana se cumple con la obtención de las mismas separadas entre no más de 3 Hz. Se obtienen así 36 frecuencias muy cercanas una de la otra. Esto es correcto si la obtención de la velocidad de grupo es pequeña. Los valores son los siguientes:

Frecuencia (Hz)

19587.8670	19603.7534	19648.1174	19706.5627
19587.8623	19607.3377	19654.4431	19712.2845
19589.2939	19611.2862	19660.9385	19717.5746
19590.1641	19615.5912	19667.5577	19722.3539
19591.4629	19620.2426	19674.2490	19726.5466
19593.1576	19625.2275	19680.9543	19730.0831
19595.2380	19630.5297	19687.6100	19732.9023
19597.6997	19636.1290	19694.1466	19734.9540
19600.5393	19642.0013	19700.4901	19736.2005.

Ahora se muestran las 36 frecuencias propias en su forma de vibrar.

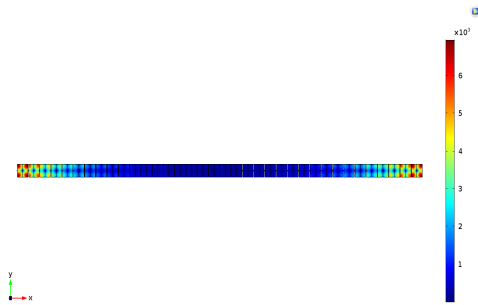


Figura 4.20: 1.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19587.867 Hz.

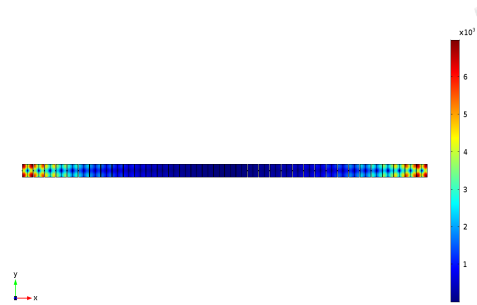


Figura 4.21: 2.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19587.862 Hz.

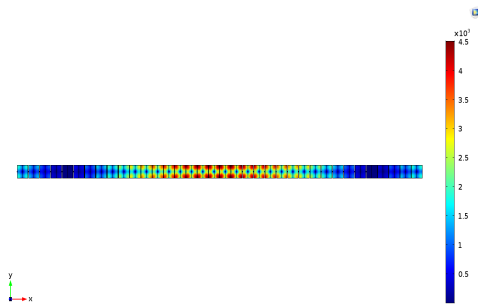


Figura 4.22: 3.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19589.293 Hz.

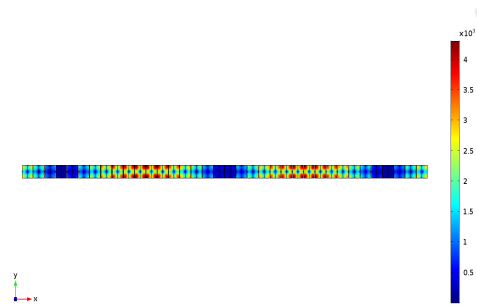


Figura 4.23: 4.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19590.164 Hz.

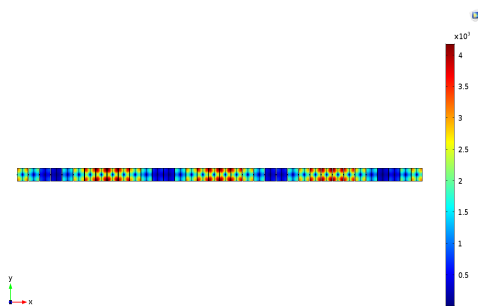


Figura 4.24: 5.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19591.462 Hz.

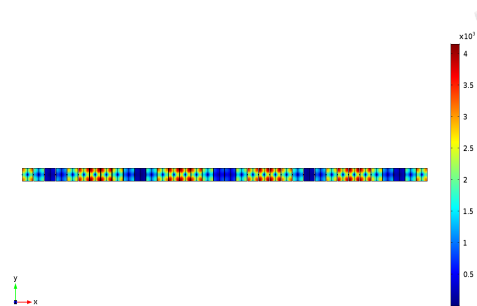


Figura 4.25: 6.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19593.157 Hz.

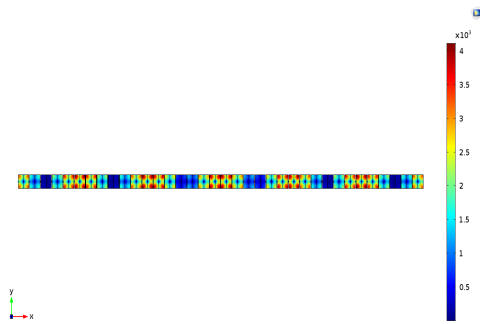


Figura 4.26: 7.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19595.238 Hz.

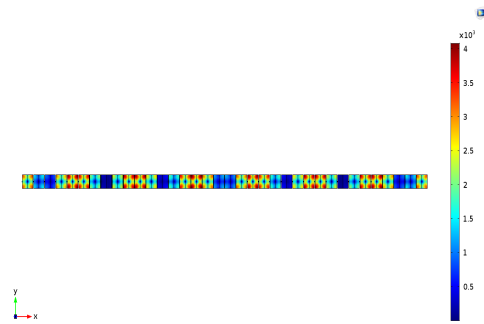


Figura 4.27: 8.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19597.699 Hz.

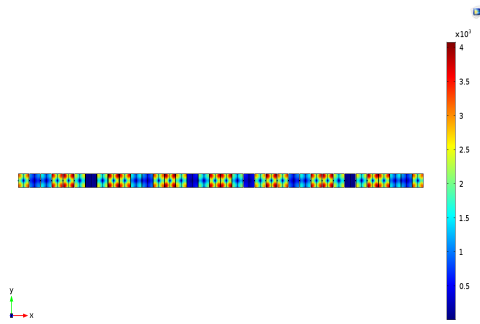


Figura 4.28: 9.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19600.539 Hz.



Figura 4.29: 10.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19603.753 Hz.

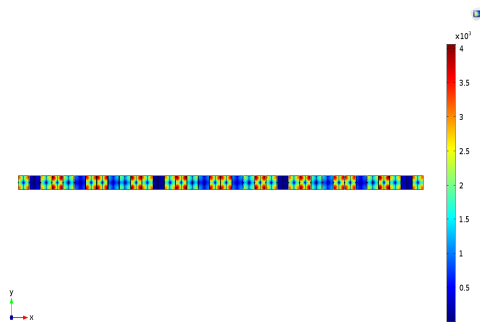


Figura 4.30: 11.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19607.337 Hz.

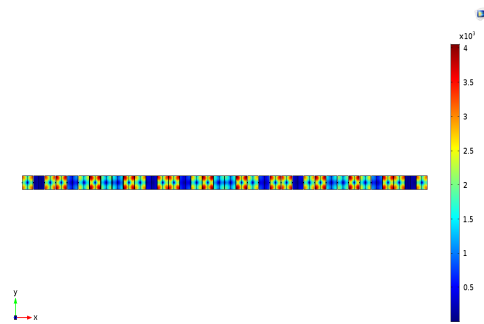


Figura 4.31: 12.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19611.286 Hz.

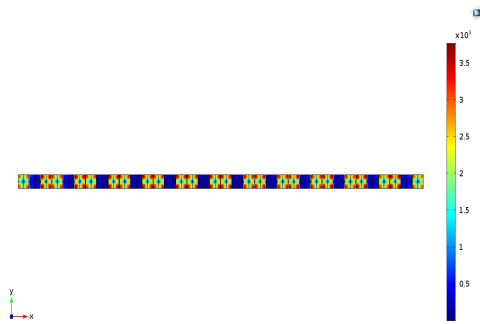


Figura 4.32: 13.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19615.591 Hz.

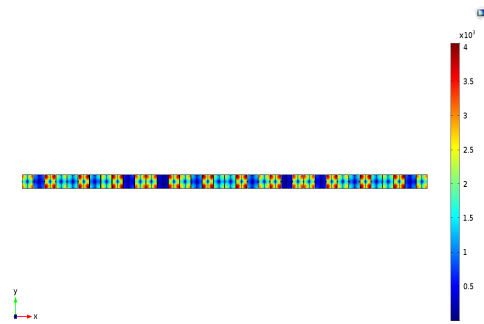


Figura 4.33: 14.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19620.242 Hz.

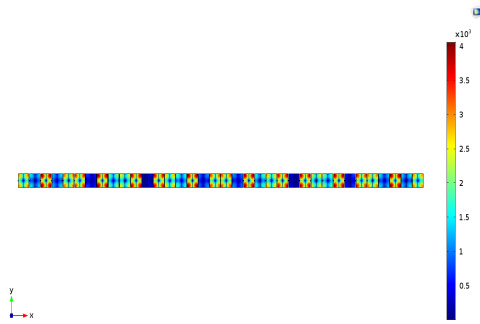


Figura 4.34: 15.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19625.227 Hz.

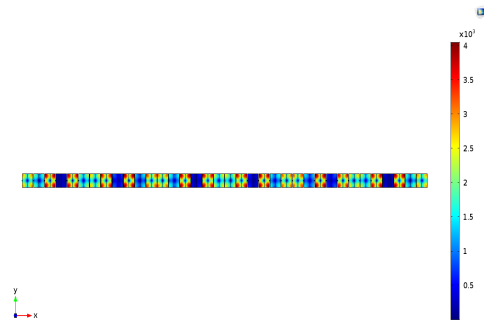


Figura 4.35: 16.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19630.529 Hz.

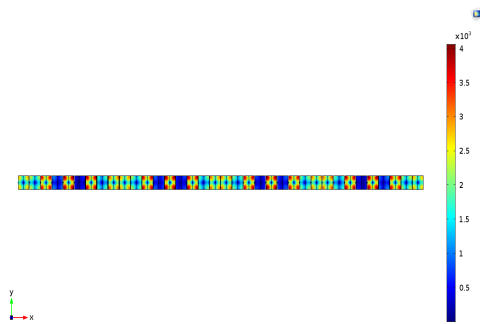


Figura 4.36: 17.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19636.129 Hz.

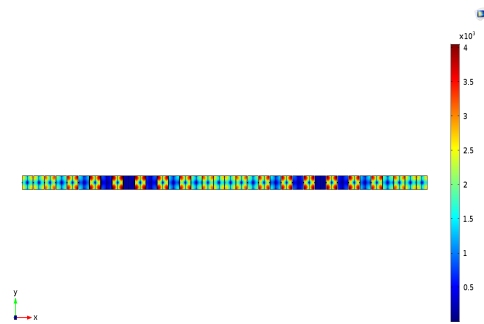


Figura 4.37: 18.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19642.001 Hz.





Figura 4.38: 19.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19648.117 Hz.

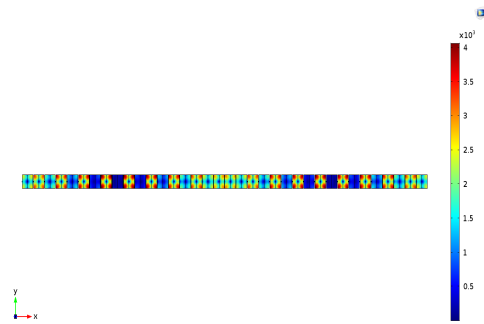


Figura 4.39: 20.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19654.443 Hz.

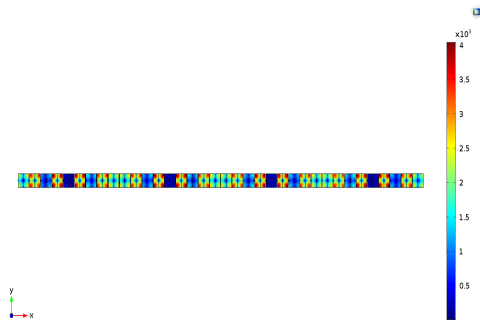


Figura 4.40: 21.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19660.938 Hz.

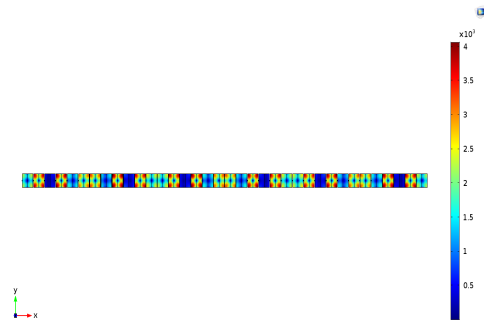


Figura 4.41: 22.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19667.557 Hz.

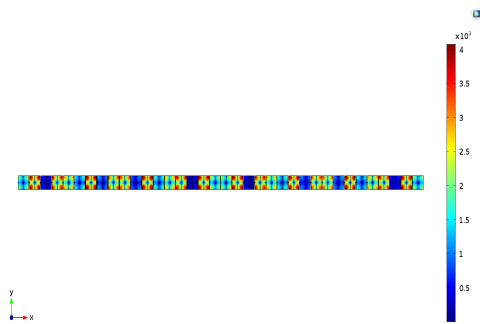


Figura 4.42: 23.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19674.249 Hz.

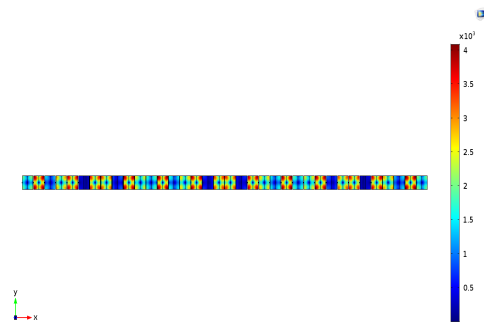


Figura 4.43: 24.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19680.954 Hz.

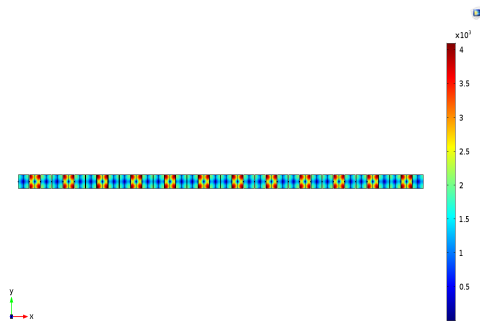


Figura 4.44: 25.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19687.610 Hz.

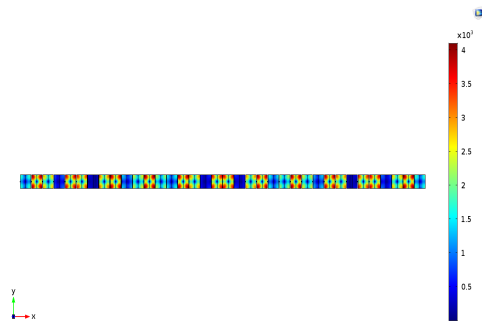


Figura 4.45: 26.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19694.146 Hz.



Figura 4.46: 27.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19700.490 Hz.



Figura 4.47: 28.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19706.562 Hz.



Figura 4.48: 29.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19712.284 Hz.

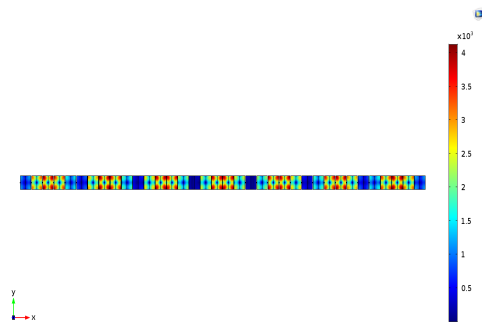


Figura 4.49: 30.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19717.574 Hz.

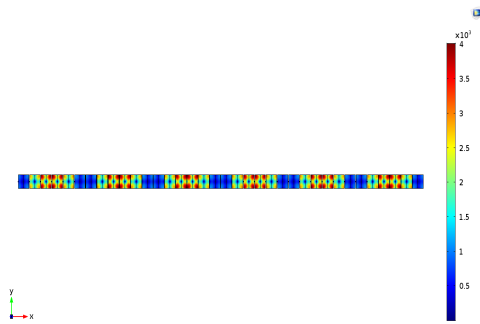


Figura 4.50: 31.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19722.353 Hz.

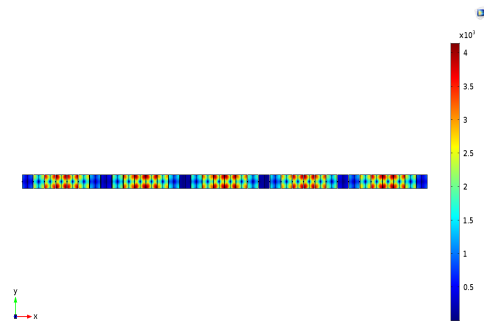


Figura 4.51: 32.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19726.546 Hz.

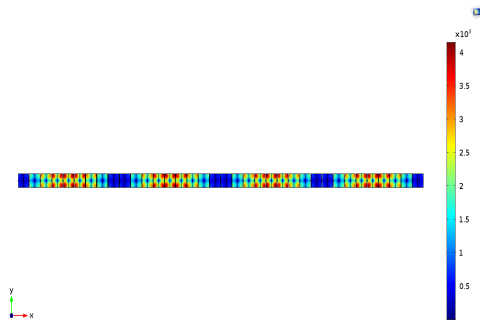


Figura 4.52: 33.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19730.083 Hz.

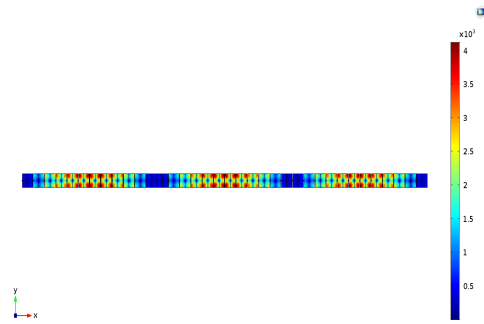


Figura 4.53: 34.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19732.902 Hz.

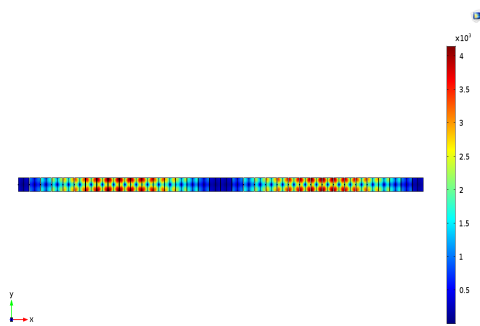


Figura 4.54: 35.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19734.954 Hz.

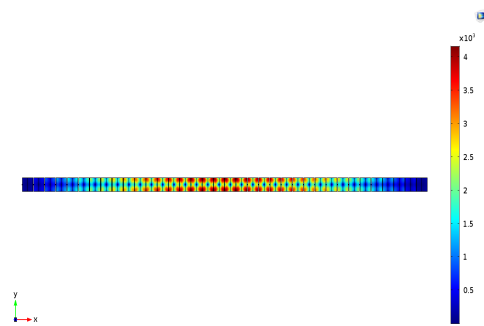


Figura 4.55: 36.<sup>a</sup> frecuencia propia a 19736.200 Hz.

Vale la pena realizar un acercamiento en las figura 4.20, 4.32 y 4.47 para así observar la alternancia entre modos de vibrar que se presentan entre los nodos del sistema.

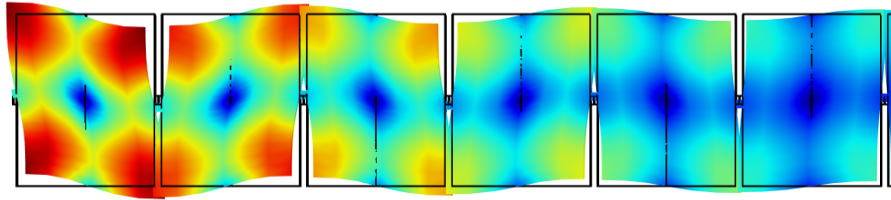


Figura 4.56: Acercamiento del 1.<sup>er</sup> Modo de vibrar. Metamaterial finito.

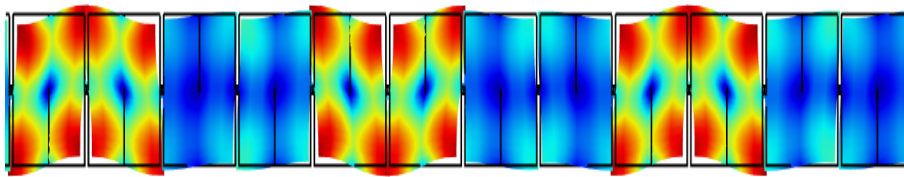


Figura 4.57: Acercamiento del 13.<sup>er</sup> Modo de vibrar. Metamaterial finito.

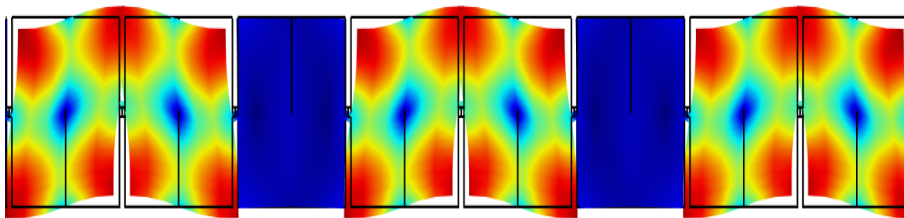


Figura 4.58: Acercamiento del 28.<sup>o</sup> Modo de vibrar. Metamaterial finito.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En esta tesis se lograron los objetivos. La obtención de estructuras de bandas de metamateriales bajo distintos parámetros y también el diseñar y calcular un metamaterial mecánico con velocidad de grupo igual a cero, sin embargo la velocidad obtenida no fue cero, se obtuvo una velocidad de  $50 \frac{m}{s}$ , es decir, que si hacemos la comparación con la velocidad de las ondas compresionales cuya velocidad es del orden de  $5000 \frac{m}{s}$  se puede observar que es solamente el 1% de esa velocidad. Es así que podemos decir que tal vez no logramos la detención completa de un paquete de ondas pero si una considerable y muy buena ralentización de ese paquete de ondas que viaja a través del material, una comparativa mas entendible sería:

Imaginemos un vehículo cuya velocidad es de  $100 \frac{km}{h}$ , el 1% de esa velocidad es de  $1 \frac{km}{h}$ , los seres humanos nos podemos mover a la velocidad de  $1 \frac{km}{h}$ , ya que la velocidad promedio de la caminata de los humanos es de  $4 \frac{km}{h}$ . Pero alcanzar los  $100 \frac{km}{h}$  se torna demasiado complicado e incluso imposible sin la ayuda de una máquina. Entonces la visualización de un hombre a una velocidad tan baja se convierte en algo completamente fácil de analizar, pero en cambio si este viaja a una velocidad de  $100 \frac{km}{h}$  es casi imposible analizarlo a simple vista, lo mismo sucede con nuestra velocidad de grupo, se convierte en algo “tan” lento que se puede procesar, manipular, distorsionar, etc, de una manera más eficaz debido a que viaja a una velocidad pequeña. Esto podría tener algunas aplicaciones para el empaquetamiento de información. También se logró diseñar el sistema finito de 36 celdas unitarias para la corroboración de los resultados, los cuales fueron correctos.

# Apéndice A

## Metamateriales

### A.1. Metamateriales con índice de refracción negativo

En los metamateriales con índice de refracción negativo se trabaja con la permitividad eléctrica, que está relacionada con la conductividad eléctrica y con la permeabilidad magnética que está relacionada con el magnetismo de los materiales [1]. La primera propiedad nos ayuda a saber qué tanto se pueden separar las cargas eléctricas positivas de las negativas en un material, en presencia de un campo eléctrico. Por otro lado, la permeabilidad magnética es una cantidad que proporciona información acerca de la respuesta de un material a un campo magnético. Sabiendo eso, en este tipo de metamateriales, si la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética son menores que cero, se tiene que tomar el índice de refracción negativo como  $n = -\sqrt{\epsilon\mu}$ . En los materiales naturales, si la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética son mayores que cero, la onda será refractada positivamente, mientras que si son menores que cero la refracción será negativamente, como se ve en la figura A.1. En la naturaleza no existen materiales que presenten una refracción negativa, sin embargo los materiales artificiales llamados metamateriales han logrado mostrar la refracción negativa [2]. En la figura A.2 se ilustra un ejemplo de cómo se vería la refracción negativa en la vida cotidiana.

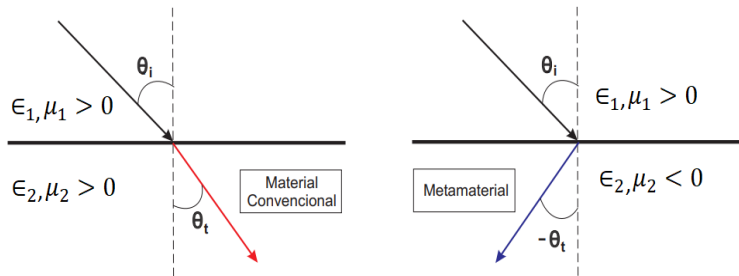


Figura A.1: Índice de refracción negativo, tomado de la referencia [1].

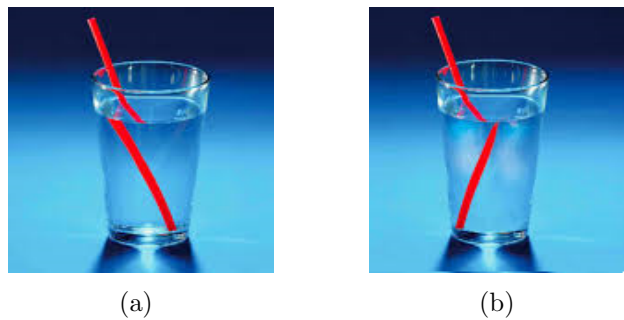


Figura A.2: (a) Refracción positiva. (b) Refracción negativa.

## A.2. Metamateriales de capa de invisibilidad

El sonido y la luz son ondas. Y los cuerpos sólidos interrumpen o distorsionan su paso. Por ello es que no podemos ver a través de un objeto, la luz se refleja sobre la superficie del cuerpo por lo que nos impide ver que hay detrás, como se ve en la figura A.3. Uno de los objetivos de la ciencia de los metamateriales busca encontrar la forma de doblar las ondas de luz de tal manera que un objeto sea invisible, como se ve en la figura A.4.

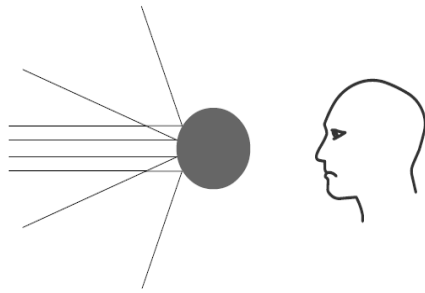


Figura A.3: Objetos visibles.

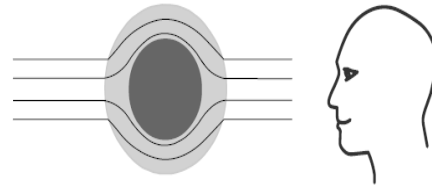


Figura A.4: Objetos invisibles.

La visión para obtener un metamaterial de capa de invisibilidad es crear un dispositivo que dirija el flujo de luz suavemente alrededor de un objeto, como el agua que fluye por una roca en un arroyo, sin reflexión, haciendo que el objeto sea invisible. Si un área se cubre con una estructura adecuadamente diseñada, las ondas no chocarán con ella, sino que la rodearán y seguirán su camino exactamente en la misma dirección que tenía antes de alcanzarlo, como se ve en la figura A.5. Estos metamateriales alteran cómo los objetos interactúan con el espectro electromagnético. Estos utilizan la óptica de transformación que describe la capacidad de doblar la luz o las ondas electromagnéticas así como la energía de cualquier manera preferente, para una aplicación deseada. En la realidad los metamateriales que presentan este fenómeno son imperfectos y tienen muchas limitaciones. Un reto hasta el día de hoy es lograr capas de invisibilidad en el espectro de luz visible.

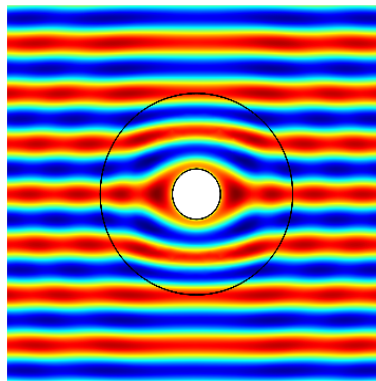


Figura A.5: Metamaterial invisible electromagnéticamente, tomado de la referencia [11].



### A.3. Metamateriales con coeficiente de Poisson negativo

El coeficiente de Poisson  $\nu$  es una de las constantes elásticas propias de un material isotrópico, dicho coeficiente cuantifica el fenómeno en el cual un material típicamente se expande en direcciones perpendiculares a la dirección de la compresión. Inversamente, si el material es sometido a tensión, típicamente se produce una contracción en las direcciones transversales a la dirección de tensión, ver inciso (a) de la figura A.6. De forma general se puede expresar como la razón con signo entre la deformación transversal frente a la longitudinal. Esta razón se denota como

$$\nu = -\frac{d\epsilon_{trans}}{d\epsilon_{long}}. \quad (A.1)$$

Un material auxético es aquel que presenta un coeficiente de Poisson negativo, lo que implica que al producir una compresión en una dirección, la sección perpendicular del material disminuye, como se ve en el inciso (b) de la figura A.6. Del mismo modo, si se somete a tensión, la sección perpendicular a la dirección de aplicación de la fuerza aumenta. Los materiales auxéticos se caracterizan por un comportamiento peculiar y como consecuencia, poseen propiedades mecánicas fuera de lo normal, tales como mejor resistencia a la cizalladura, a la fractura entre otras. Además las espumas auxéticas mejoran la absorción acústica.

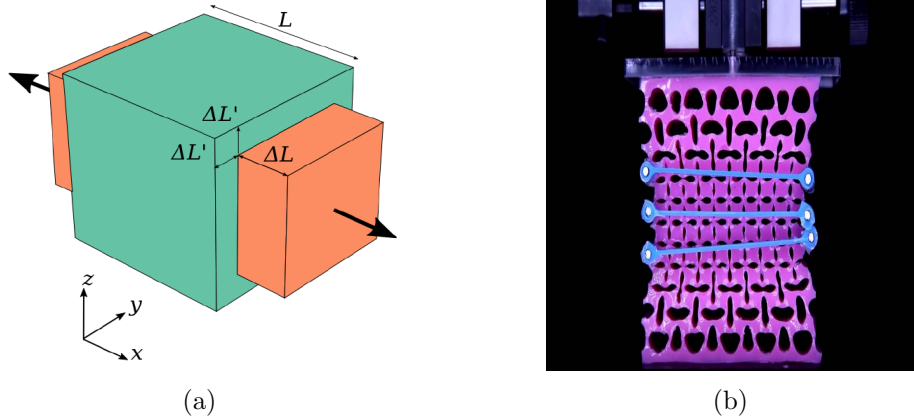


Figura A.6: (a) Coeficiente de Poisson positivo. (b) Coeficiente de Poisson negativo.

# Bibliografía

- [1] V. Veselago, «Electrodynamics of substances with simultaneously negative and», *Usp. Fiz. Nauk*, vol. 92, pág. 517, 1967.
- [2] D. R. Smith, W. J. Padilla, D. Vier, S. C. Nemat-Nasser y S. Schultz, «Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity», *Physical review letters*, vol. 84, n.º 18, pág. 4184, 2000.
- [3] R. A. Shelby, D. R. Smith y S. Schultz, «Experimental verification of a negative index of refraction», *science*, vol. 292, n.º 5514, págs. 77-79, 2001.
- [4] K. H. Matlack, M. Serra-García, A. Palermo, S. D. Huber y C. Daraio, «Designing perturbative metamaterials from discrete models», *Nature materials*, vol. 17, n.º 4, págs. 323-328, 2018.
- [5] C. Kittel, *Introduction to solid state physics*. New York: Wiley, 1976, vol. 8.
- [6] N. W. Ashcroft y N. D. Mermin, *Solid state physics*. New York: Holt, Rinehart y Winston, 1976.
- [7] M. Alonso y E. J. Finn, «Física: Fundamentos cuánticos y estadísticos.», 1971.
- [8] K. F. Graff, *Wave motion in elastic solids*. Courier Corporation, 2012.
- [9] J. Segui. (2015). Protecting Aircraft Composites from Lightning Strike Damage, dirección: <https://www.comsol.com/blogs/protecting-aircraft-composites-from-lightning-strike-damage/> (visitado 05-04-2020).
- [10] J. Munn. (2019). How to Numerically Simplify Your Periodic RF Models, dirección: <https://www.comsol.com/blogs/how-to-numerically-simplify-your-periodic-rf-models> (visitado 05-04-2020).

- [11] D. Schurig, J. J. Mock, B. Justice, S. A. Cummer, J. B. Pendry, A. F. Starr y D. R. Smith, «Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies», *Science*, vol. 314, n.º 5801, págs. 977-980, 2006.
- [12] N. Elabbasi. (2016). Modeling Phononic Band Gap Materials and Structures, dirección: <https://www.comsol.com/blogs/modeling-phononic-band-gap-materials-and-structures/> (visitado 05-04-2020).
- [13] L. Brillouin, *Wave propagation and group velocity*. Academic Press, 2013, vol. 8.
- [14] A. Arreola-Lucas, G. Báez, F. Cervera, A. Climente, R. Méndez-Sánchez y J. Sánchez-Dehesa, «Experimental evidence of rainbow trapping and Bloch oscillations of torsional waves in chirped metallic beams», *Scientific reports*, vol. 9, n.º 1, págs. 1-13, 2019.
- [15] M. Kalaei, M. Mirhosseini, P. B. Dieterle, M. Peruzzo, J. M. Fink y O. Painter, «Quantum electromechanics of a hypersonic crystal», *Nature nanotechnology*, vol. 14, n.º 4, págs. 334-339, 2019.
- [16] P. Gao, A. Climente, J. Sánchez-Dehesa y L. Wu, «Theoretical study of platonic crystals with periodically structured N-beam resonators», *Journal of Applied Physics*, vol. 123, n.º 9, pág. 091707, 2018.
- [17] M. Miniaci, M. Mazzotti, M. Radziński, N. Kherraz, P. Kudela, W. Ostachowicz, B. Morvan, F. Bosia y N. M. Pugno, «Experimental observation of a large low-frequency band gap in a polymer waveguide», *Frontiers in Materials*, vol. 5, pág. 8, 2018.
- [18] T. R. Chandrupatla, A. D. Belegundu, T. Ramesh y C. Ray, *Introduction to finite elements in engineering*. Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 2002, vol. 2.
- [19] H. Xue, Y. Yang, F. Gao, Y. Chong y B. Zhang, «Acoustic higher-order topological insulator on a kagome lattice», *Nature materials*, vol. 18, n.º 2, págs. 108-112, 2019.
- [20] O. C. Zienkiewicz, *El método de los elementos finitos*. Reverté, 1981.
- [21] D. L. Linero, D. Garzón y A. Ramírez, *Análisis estructural mediante el método de los elementos finitos. Introducción al comportamiento lineal elástico*. Universidad Nacional de Colombia, 2013.
- [22] L. Solymar y E. Shamonina, *Waves in metamaterials*. Oxford University Press, 2009.

- [23] H. Chen, C. T. Chan y P. Sheng, «Transformation optics and metamaterials», *Nature materials*, vol. 9, n.º 5, págs. 387-396, 2010.
- [24] E. M. Cortés, «Óptica de transformación y metamateriales», Tesis de maestría., Universidad Nacional Autónoma de México, 2012.
- [25] L. O. Berrocal, *Elasticidad*. McGraw-hill, 2004.