UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS (CINC)

Apalancamiento Con Derivados

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA

JESSICA MORALES HERRERA

Director de tesis

Dr. Gilberto Calvillo Víves

CUERNAVACA MORELOS Octubre 2019

DR. VICTOR BARBA LÓPEZ
COORDINADOR DEL POSGRADO EN CIENCIAS
PRESENTE

Atendiendo a la solicitud para emitir DICTAMEN sobre la revisión de la TESIS titulada **"Apalancamiento con Derivados"** que presenta la alumna **Jessica Morales Herrera (10009554)** para obtener el título de **Maestro en Ciencias.**

Nos permitimos informarle que nuestro voto es:

NOMBRE	DICTAMEN	FIRMA
Dr. Antonio Daniel Rivera López CInC-UAEM	Aprobado	[firma]
Dr. Raúl Salgado García CInC-UAEM	Aprobado	[firma]
Dr. David Romero Vargas IMATE-UNAM	Aprobado	[firma]
Dr. Gilberto Calvillo Víves IMATE-UNAM	Aprobado	G. Calvillo V.
Dr. Jesús Igor Heberto Barahona IMATE-UNAM	Aprobado	[firma]

Jurado

Dr. Antonio Daniel Rivera López (CInc - UAEM)

Dr. Raúl Salgado García (CInc- UAEM)

Dr. David Romero Vargas (IMATE - UNAM)

Dr. Gilberto Calvillo Víves (IMATE - UNAM)

Dr. Jesús Igor Heberto Barahona (IMATE -UNAM)

Índice general

Agradecimientos.

Quiero agradecer a Dios por permitirme un logro más y a toda mi familia por siempre apoyarme.

Al Consejo Nacional de Ciencia y tecnología CONACYT por el apoyo a todos los estudiantes que deseamos realizar un posgrado.

Quiero agradecer también a mi tutor, el doctor Gilberto Calvillo Víves por apoyarme y acompañarme a lo largo de este proyecto que comencé hace dos años, por todas sus enseñanzas y paciencia.

Gracias a todos mis sinodales por sus consejos y aportaciones a este trabajo.

Gracias al doctor Jorge Rivera Noriega por todas sus enseñanzas y por que siempre me motivó a seguir adelante con mis proyectos.

Gracias a todos mis amigos por su apoyo y su compañia.

Y en especial, quiero agradecer a mis perritos Panqué y Max por acompanñarme en todos y cada uno de los días en que estudié y elaboré el presente trabajo.

Introducción

El presente trabajo se ha centrado en el estudio de uno de los temas importantes de la Economía y las Finanzas: *El Apalancamiento Financiero.*
Brevemente podemos decir que el apalancamiento es pedir prestado dinero para invertirlo y de esta manera aumentar el rendimiento, así mismo es importante notar que a mayor apalancamiento, el capital propio invertido es menor y el riesgo aumenta.
La ecuación contable nos dice que

$$\text{Activo} = \text{Pasivo} + \text{Capital}$$

con ella se obtiene una manera sencilla de calcular la razón de apalancamiento la cual es la siguiente ecuación:

$$L_r = \frac{\text{Capital}}{\text{Activo}}$$

o de forma equivalente se tiene

$$L_r = \frac{\text{Activo - Pasivo}}{\text{Activo}}$$

de donde podemos calcular el nivel de apalancamiento como $L = \frac{1}{L_r}$ o bien

$$L = \frac{\text{Activo}}{\text{Capital}}$$

Veamos un ejemplo sencillo de como funciona el apalancamiento.

Cierta persona desea adquirir una casa por un valor de 1 millón 100 mil pesos pero tiene únicamente un capital de 100 mil pesos, de tal forma que la persona tiene un activo de 100 mil pesos y un pasivo de cero pesos, por lo tanto su activo es igual a su capital; su nivel de apalancamiento es 1. Decide pedir un préstamo por 1 millón, así su activo es ahora de 1 millon 100 mil pesos, mientras su pasivo ha ascendido a 1 millon. De esta forma su nivel de apalancamiento es 11.

Después de cierto tiempo, la casa adquiere cierta plusvalía, y su valor asciende a $1 millon $300 mil pesos. Debido al aumento de valor del activo, es decir, de la casa, su nivel de apalancamiento baja a 4.3.

La persona en ese momento, se da cuenta de que el valor de las casa va al alza, por lo que decide hipotecar su casa para comprar otra, supongamos por el mismo precio de la primera, 1 millon 100 mil pesos y que no paga intereses. Ahora el valor de su activo se convierte en 2 millones 400 mil pesos, su pasivo es de 2 millones 100 mil, mientras que su nivel de apalancamiento es de 8.

Como vemos en el ejemplo anterior, el apalancamiento es útil y lo encontramos en la vida cotidiana. El panorama cambia cuando el valor de los activos cambia, pues esto afecta a la operación que estemos realizando. Supóngase que después de un tiempo el valor de las casas que se adquirieron baja a 1 millón. El valor del activo ha cambiado a 2 millones mientras que el pasivo se mantiene igual. El capital es ahora de -100 mil pesos. En la situación anterior si los precios de las casas continuaran bajando la persona quedaría en bancarrota.

A pesar de que el concepto de apalancamiento puede parecer sencillo o fácil de explicar, a lo largo de los años se ha pretendido llegar a un acuerdo sobre cómo poder medirlo de manera efectiva, pues se dificulta más cuando intervienen instrumentos complejos como los derivados. El caso anterior se limita a dar el ejemplo de cómo una sola persona hizo uso del apalancamiento. Pero ¿qué sucede cuando una entidad financiera como un banco se apalanca?.

Para responder a la pregunta anterior, podemos pensar que el banco es como la persona del ejemplo anterior, con la diferencia de que el banco tendrá miles de operaciones como la expuesta anteriormente. La forma de medir el apalancamiento en estos casos, cambia y se torna mucho más compleja. En este caso podemos tomar al apalancamiento como un *promedio ponderado* sobre todos los activos involucrados en la inversiones del banco y su riesgo. Esto quiere decir que, en la práctica se califica a los activos según su riesgo y se toma un promedio sobre ello.

En el presente trabajo nos centramos en el problema del apalancamiento con derivados pues, como lo mencionamos antes, medir el apalancamiento de una entidad finaciera no es una tarea sencilla, más aún si incluyen derivados pues no todos ellos se reflejan en la hoja de balance.

Si pensamos el apalancamiento como una manera de aumentar las ganancias todo funciona correctamente, la pregunta es, ¿qué pasa cuando el apalancamiento se realiza de manera incorrecta?

En el año 2008 se presentó una crisis financiera. Se cree que a partir de los eventos sucedidos con las Torres Gemelas en Nueva York en septiembre de 2001, se creó una inestabilidad e incertidumbre, por lo cual, en tiempos en los que se presenta este fenómeno, las personas y empresas optan por evitar el endeudamiento a manera de tener liquidez en caso de presentarse una crisis. Este panorama es incoveniente para la economía de un país por lo cual la Reserva Federal optó por bajar las tasas de interés entre el 2001 y 2004 hasta el 1 % con el fin de incentivar los créditos y de esta manera hacer que la economía creciera.

El punto clave en esta crisis fueron los créditos de vivienda o créditos hipotecarios. Como las tasas de interés eran bajas, muchas personas decidieron pedir créditos con el fin de obtener una casa propia y se apalancaron. Más tarde los bancos de inversión, vieron que la compra de hipotecas sería una buena inversión por lo que se bursatilizaron las hipotecas. En algún momento los contratos de hipotecas se fueron reduciendo hasta hacerse nulos, ya que todas las personas que cumplían con los requisitos para un crédito, ya contaban con una casa, lo que propició que se otorgaran créditos sin comprobar ingresos o historial crediticio, esto es, a personas con alta probabilidad de incumplimiento. Así sugieron las hipotecas *Subprime*. Todo funcionaría correctamente mientras las personas pagaran sus hipotecas y el precio de las viviendas fuera al alza, pero, el problema surgiría cuando las hipotecas se dejaran de pagar simultáneamente.

En 2004 la Reserva Federal decide subir las tasas de interés del 1 % al 5 % y muchos de los créditos solicitados tenían una tasa variable, lo que propició que al subir las tasas de interés las cuotas del crédito fueran mas costosas. El problema comienza cuando las personas no calificadas para tener una hipoteca dejaron de pagar.

Se esperaba que, cuando una de las personas dejara de pagar su hipoteca, el banco se quedaría con la propiedad de manera que, como el valor de éstas siempre sube, el banco no perdería; la situación se agravó cuando demasiadas personas dejaron de pagar, entonces el ingreso del banco ya no era líquido, sino casas.

De esta manera se tenía un exceso de casas y por tanto a mayor oferta, el precio de éstas bajó. Muchas personas dejaron de pagar su hipoteca, ya que a pesar de que podían hacerlo, el pago era cada vez mayor y el valor de su casa era cada vez menor. Así los bancos acumularon casas que tenían un valor muy bajo y nadie quería comprar. Recordemos que el banco anteriormente había pedido prestado millones para comprar las miles de hipotecas que no podía pagar (se apalancó) .

Todo el mundo se vio afectado por la crisis debido a que no sólo las entidades financieras de Estados unidos sino tambien las Europeas tenían títulos asociados con el mercado inmobiliario estadounidence. Fue entonces cuando muchos de los grandes bancos como Lehman Brothers quebraron, mientras otras entidades financieras como la aseguradora IG fueron rescatados por la Reserva Federal.

Para evitar fenómenos como estos, conocidos como riesgo sistémico, surgen los acuerdos de Basilea III en el 2010, los cuales son una serie de iniciativas que pretendían fortalecer al sistema financiero tras las crisis ocurrida.

La elaboración de la reforma es incentivada al observarse que el origen de la crisis surge por el crecimiento excesivo de los valores presentados en los balances de los bancos, así como por los valores fuera de balance, esto es, la utilización de productos derivados, así como la caída simultánea del nivel y la calidad de fondos propios para el riesgo.
En escencia, los bancos no contaban con la suficientes reservas para afrontar dicha crisis de liquidez.

El objetivo de este trabajo como se planteó en un inicio fue comenzando con el artículo *Measuring Off-Balance Sheet Leverage* de Peter Breuer, un artículo del Fondo Monetario Internacional del año 2004 en el que se analiza una forma de elaborar un coeficiente o razón de apalancamiento general y describe algunas formas de medirlo para derivados como opciones y *Forwards*. Dicho artículo fue proporcionado por una entidad financiera quien estaba interesada en el tema y con la que se tenía un posible proyecto. Este artículo fue elaborado previamente a la crisis antes mencionada. Se leyó dicho artículo y se llegó a la conclusión de que no medía de manera correcta el apalancamiento, por lo que se hizo una búsqueda bibliográfica más actualizada en cuanto al tema y se encontraron artículos del Banco de Pagos Internacionales, BIS, entre los que destacan *Calibrating Leverage Ratio* [3] y *Basel III Leverage Ratio Framework and Disclosure Requirements*, [4] en los cuales se presenta una mejor manera de medir la razón de apalancamiento.

El contenido de éste trabajo se presenta de la siguiente manera.

En el primer capitulo se da una introducción a conceptos finacieros requeridos para entender el tema principal, los cuales pueden encontrarse en [1].

En el segundo capítulo se explica el apalancamiento con derivados y se analiza el artículo *Measuring Off-Balance Sheet Leverage* [2] y se mencionará la manera en que en la actualidad se mide el apalancamiento, tomando como referencia los artículos restantes.

Un tema importante y que está altamente relacionado con el apalancamiento es el tema de la valuación de derivados, por ello, en el tercer capítulo nos enfocaremos en la valuación únicamente de opciones con distintos métodos, los cuales usan una poderosa herramienta matemática, el Cálculo Estocástico.

Se anexan dos apéndices. En el primero se explica brevemente algunos conceptos sobre procesos estocásticos necesarios en el tercer capítulo para tratar la valuación de opciones y en el segundo apéndice se tratan los precios de acciones utilizando los métodos anteriores.

En resumen, el enfoque de este trabajo es brindar una explicación sobre el apalancamiento mediante los artículos mencionados, así como, una introducción al tema de los derivados y su evaluación.

Cabe señalar que en la elaboración de esta tesis, se hizo una búsqueda bibliográfica, la mayoría en el idioma inglés, por lo cual, no fue posible encontrar una traducción literal o fiel al español de muchos conceptos financieros, por ello, decidimos que para aquellos términos no traducidos de manera adecuada, se dejarían con el nombre en inglés y el anglicismo se escribiría con letra *cursiva*.

Capítulo 1

Definiciones básicas

En este capítulo se presentarán los conceptos necesarios para la compresión del presente trabajo. Suponemos que el lector está familiarizado con algunos conceptos matemático - financieros comunes tales como préstamos, tasas de interés, capital, activos, pasivos, entre otros, sin embargo hacemos énfasis en algunos temas no tan cómunes que creemos que el lector podría no conocer tan a fondo y que serán necesarios para su uso posterior en las próximas secciones. Los temas aquí expuestos pueden consultarse con más detalle en [1].

1.1. Interés compuesto y composición continua

En esta sección definimos la composición continua la cual es muy utilizada al momento de trabajar con tasas de interés. Lo anteriormente dicho significa que, si se tiene cierta cantidad de dinero en una cuenta y se desea invertir, el banco pagará cierta cantidad (interés) por tener el dinero en dicha cuenta. La cantidad mencionada corresponde a un porcentaje sobre el monto guardado en el banco. El interés por tanto, puede ser pagado de manera anual, semestral, trimestral, o en periodos más cortos, lo cual implica que, por ejemplo en el caso trimestral que el dinero crecerá cada tres meses. Abordamos primero el caso sencillo el cual es la composición anual, semianual, mensual y a partir de éstas derivaremos la antes mencionada.

Considérese una cantidad A invertida por n años a una tasa de interés de R anual. Si se quisiera componer la tasa de interés una vez al año el valor final obtenido a lo largo de n años sería:

$$V(A,n,1) = A\,(1+R)^n$$

donde $V(A,n,1)$ denota el valor final o valor obtenido al invertir A cantidad durante un año con rendimiento reinvertible una vez al año.

Ahora supóngase que se quiere componer m veces a lo largo del año durante un periodo de n años. El valor final de la inversión será:

$$V(A,n,m) = A\left(1+\frac{R}{m}\right)^{mn}$$

Podemos pensar $m = 2$ lo cual sería equivalente a reinvertir semestralmente, $m = 4$ (trimestralmente),etc, pero qué pasa si se compone el interés en periodos cada vez más cortos, lo que estaríamos haciendo sería obtener un límite cuando m tiende a cero, es decir:

$$\lim_{m\to\infty} A\left(1+\frac{R}{m}\right)^{mn}$$

Podemos notar que el límite anterior, matemáticamente corresponde al número e por ello en la definición siguiente traducimos dicho límite a una expresión más conocida cuando se desea hacer una composición continua sobre una tasa de interés.

Definición 1.1.1. *Sea A una cantidad que será invertida por n años a una tasa de interés R la cual será compuesta m veces al año. Definimos:*

$$\lim_{m\to\infty} A\left(1+\frac{R}{m}\right)^{mn} = Ae^{Rn}$$

como la composición compuesta de la tasa de interés R.

El resultado del límite anterior quiere decir que si la tasa R se compone continuamente la cantidad crece al cabo de n años a Ae^{Rn}

Nuestro trabajo se basa en el uso de derivados, los cuales son contratos que son celebrados por dos partes, cada una tomando una posición ya sea de compra o de venta, para especificarlo con mayor detalle se dan las siguienes definiciones.

Definición 1.1.2. *Un **instrumento financiero** es, de acuerdo a las normas internacionales de información fianciera (NIIF), un contrato financiero que da origen a un activo financiero para una parte, mientras que origina un pasivo para la otra parte.*

Como ejemplos podemos encontrar instrumentos financieros primarios como valores, acciones, préstamos, bonos o CETES o bien instrumentos mas sofisticados como los derivados.

Definición 1.1.3. *Los* **derivados** *son instrumentos financieros cuyo valor depende del precio de un* **activo** *al cual se le conoce comunmente como* **activo subyacente***.*

Los derivados han ganado gran importancia en nuestros días. En los mercados financieros se compran y venden en futuros, *Forwards*, *Swaps*, opciones, algunos de estos negociados en mercados formales o en mercados informales comunmente llamados OTC *"Over the Counter"*; más adelante se describen a detalle cada uno de estos conceptos.

A continuación se dan las definiciones sobre los contratos diferidos: Futuros y *Forwards.*

Definición 1.1.4. *Un **Forward** es un derivado el cual se negocia entre dos instituciones financieras en el mercado OTC. Es un contrato en el cual se acuerda comprar o vender algún bien en el futuro, por un precio establecido.*

En los instrumentos financieros como los mencionados anteriormente, así como en los contratos de futuros y opciones que veremos más adelante, siempre existen dos partes en el contrato: la posición larga (**long position**) y la posición corta (**short position**).

Definición 1.1.5. *Se dice que la parte que asume la* **posicion larga** *o long position es quien acuerda* **comprar** *el activo subyacente a un precio específico y en una fecha específica.*

Definición 1.1.6. *Se dice que la parte que asume la* **Posicion Corta** *o Short Position es quien acuerda* **vender** *el activo subyacente a un precio específico y en una fecha específica.*

Definición 1.1.7. *Se conoce como* ***precio de entrega*** *o delivery price al precio del activo subyacente acordado en un contrato Forward.*

En un contrato *Forward* el precio de entrega se calcula de tal manera que no se tenga ningún costo al tomar alguna de las posiciones antes mencionadas. Ahora definiremos otro concepto importante.

Definición 1.1.8. *El* **precio de un contrato *Forward*** *en un tiempo determinado es el precio de entrega que se aplicaría si se entrase en el contrato en esa fecha.*

Cabe señalar que el precio de entrega y el precio de un contrato *Forward* pueden ser iguales, pero en general esto no sucede; éstos serán iguales en el momento de entrar el contrato, pero varían conforme el tiempo pasa; esto se debe a la volatilidad en el precio del activo subyacente, es decir, el precio del activo subyacente no será el mismo hoy que en un tiempo determinado, éste podrá subir o bajar.

Definimos ahora el *Payoff* de un contrato *Forward.*

Definición 1.1.9. *Definimos la retribución, recompensa o* **payoff** *de un contrato Forward como el pago, pérdida o ganancia total recibida por cada una de las personas que entra en el contrato.*

Definimos la **ganancia de la posición larga** *sobre una unidad del activo subyacente como*

$$S_T - K$$

donde S_T es el precio de mercado o ***spot price*** *del activo subyacente al tiempo T y K es el* ***precio de entrega****.*

De manera análoga la **ganancia de la posición corta** *la definimos como:*

$$K - S_T$$

con la notación antes mencionada.

Vale la pena notar que la ganancia puede ser tanto positiva como negativa. Es importante notar también que la razón por la que la ganancia cambia de signo en cada caso se debe a la posición tomada. Mientras la posición larga obtendrá un beneficio de $S_T - K$ cuando $S_T > K$, la posición corta obtendrá un beneficio de $K - S_T$ cuando $K > S_T$. (Véase la figura 1.1).

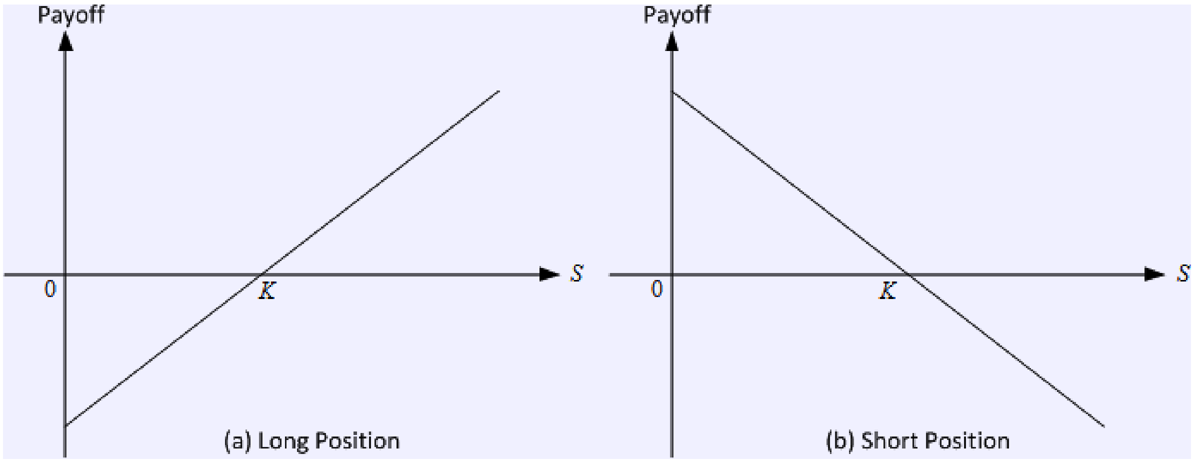

Figura 1.1: a) *payoff* de la posicion larga. b) *payoff* de la posición corta.

Ahora hablaremos un poco sobre el otro tipo de contratos diferidos: los Futuros.

Definición 1.1.10. *Un contrato* **futuro** *es un acuerdo entre dos partes para vender o comprar un activo en un tiempo y costo específico. Se negocian únicamente dentro de los denominados Exchanges o mercados financieros formales.*

Al leer la definición de contratos futuros, podemos observar que es muy similar a la definición de contratos *Forward*. Podemos decir que los futuros y los *Forwards* son el mismo tipo de contrato, salvo el lugar y las condiciones en que se negocian; mientras un *Forward* es un acuerdo que se lleva a cabo en el mercado OTC, entre dos personas que deciden negociar con un activo, la cantidad, el tiempo de entrega y demás especificaciones, un futuro es también un acuerdo entre estas dos personas, con la diferencia de que las especificaciones del contrato las dicta el Exchange. Una cámara de compensación se asegura mediante ciertos métodos, que ninguna de las dos partes falle.

Si bien los derivados anteriores son importantes, en el presente trabajo nos enfocaremos más en el siguiente tipo de derivados, pues estaremos interesados en estudiar el apalancamiento con derivados en el cual se usan las opciones. Éstas se han vuelto muy importantes para el desarrollo de los mercados financieros.

Definición 1.1.11. *Las* **opciones** *son un instrumento derivado en el que una de las partes tiene el derecho pero no la obligación de comprar o vender un activo, mientras que la otra parte tiene la obligación de vender o comprar en un determinado tiempo y precio.*

En las opciones así como en los derivados anteriores se tienen dos partes. Por un lado se tiene al tenedor de la opcion o ***holder*** quien toma la posición larga o *long position* y compra la opción. Por otro lado se tiene al emisor o ***writer*** quien toma la posición corta o *short position* y vende o *emite* la opción.

Definición 1.1.12. *Una* **opción de compra** *o* ***call option*** *es un tipo de opción en la que el* **tenedor** *de la opción o* ***holder*** *tiene el* **derecho** *pero no la obligación de* **comprar** *el activo subyacente en una fecha y precio específicos.*

Definición 1.1.13. *Una* **opción de venta** *o* ***put option*** *es un tipo de opción en la que el* **tenedor** *de la opción o* ***holder*** *tiene el* **derecho** *pero no la obligación de* **vender** *el activo subyacente en una fecha y precio específicos.*

Definición 1.1.14. *El precio en el contrato de una opción se le conoce como* ***precio de ejercicio*** *o* ***exercise price*** *o* ***strike price****. A la fecha en el contrato se le conoce como* **fecha de maduración***,* **maturity** *o* ***expiration date****.*

En el mercado encontraremos dos tipos de opciones: las opciones europeas y las opciones americanas.

Definición 1.1.15. *Una* **opción europea** *es aquella que únicamente puede ser ejercida en la fecha de maduración, mientras que una* **opción americana** *es aquella que puede ser ejercida tanto en la fecha de maduración, como en cualquier momento previo a dicha fecha.*

Definición 1.1.16. *El emisor o writer de una opción recibe una cantidad de dinero por parte del tenedor de la opción al entrar en el contrato para afrontar posibles pérdidas o pasivos futuros. A este monto se le llama* ***prima****.*

En la definición anterior cabe mencionar que esto es una característica de las opciones;

el tenedor paga la prima por entrar en la opción. De esta manera si el tenedor decide no ejercer la opción, el emisor obtendrá la prima como beneficio; en otro caso, si el tenedor ejerce la opción, la prima será el monto que reduce la posible pérdida del emisor en caso de que la ganancia o el *payoff* (como se definió anteriormente) beneficie al tenedor.

La prima es un concepto importante. En el capítulo 3 nos enfocaremos en la valuación de opciones por medio de ciertos métodos. Esto será de gran ayuda para decidir cuánto será el monto solicitado de la prima, siendo el monto, una cantidad que depende de las fluctuaciones en los precios. Una vez especulado el precio de una opción podremos dar un monto fijo para la prima.

Previamente hemos definido la ganancia para *Forwards* y futuros. En el caso de las opciones se define de manera similar, salvo que se tienen cuatro casos especiales que se definen a continuación.

Definición 1.1.17. *Definimos la* ***ganancia*** *o* ***payoff*** *para opciones como alguno de los cuatro escenarios siguientes: (Véase la figura 2.1)*

1. *Una posición larga en una opción de compra.* ***(long call)****.*

$$max(S_T - K, 0)$$

2. *Una posición corta en una opción de venta.* ***(long put)****.*

$$max(K - S_T, 0)$$

3. *Una posición corta en una opción de venta.* ***(short call)****.*

$$min(K - S_T, 0)$$

4. *Una posición corta en una opción de venta.* ***(short put)****.*

$$min(S_T - K, 0)$$

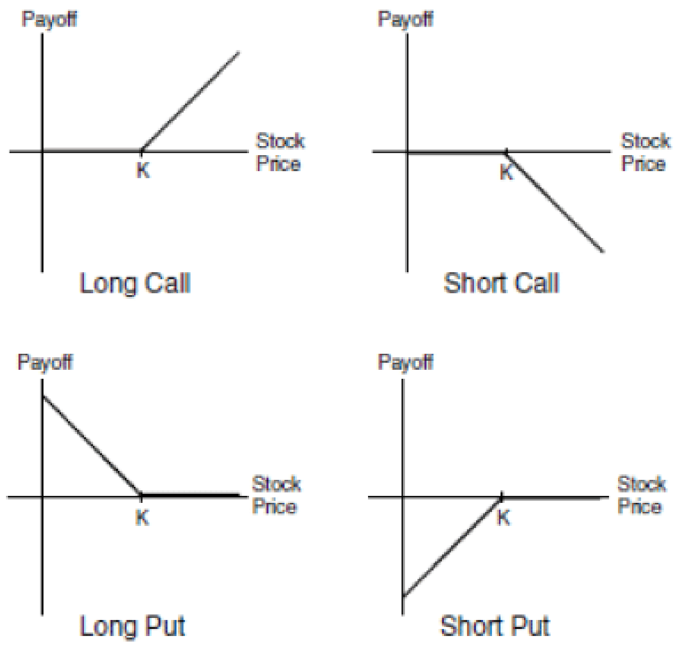

Figura 1.2: Payoffs de opciones europeas.

Es útil para caracterizar la ganancia de opciones utilizar opciones europeas principalmente porque sólo pueden ser ejercidas hasta la fecha de madurez.

En la figura anterior podemos observar los casos antes mencionados. Notemos que no se considera el pago de la prima en ninguno de los cuatro casos.

1.2. Mercados de derivados

En esta sección nos enfocaremos en la manera en como se opera con opciones en los mercados financieros *Exchange*, la terminología utilizada entre otras características. En secciones posteriores nos centraremos en la valuación de opciones y los métodos utilizados.

Primeramente diremos que, como se mencionó antes, las opciones son utilizadas para hacer transacciones con activos subyacentes, estos pueden ser acciones, divisas, índices de acciones entre otros. A continuación se darán algunos detalles.

Opciones sobre acciones

Las opciones sobre acciones se pueden operar en Mexico, en el MexDer, Mercado Mexicano de Derivados y en Estados Unidos en el *Chicago Board Options Exchange* (CBOE), en el *Philadelphia Exchange*(PHLX), en el *American Exchange* (AMEX) y en el *Pacific Stock Exchange* (PSE). Las opciones pueden ser sobre 500 acciones de activos diferentes, y en este caso se tiene una opción del tipo americana. Los contratos se hacen por 100 acciones a un precio de ejercicio específico, y esto se debe a que es común que en cada contrato se acuerde comprar o vender por lotes de 100 acciones.

Opciones sobre divisas

Las opciones sobre divisas (**Foreign Currency Options**) son otro tipo opción que podemos encontrar en el mercado. En este caso el principal lugar para comercializar con este tipo de opciones es el Philadelphia Exchange. Aquí podemos encontrar tanto opciones europeas como americanas y el tamaño del contrato dependerá de la moneda con la que se quiera negociar. Ejemplos de monedas extranjeras que se negocian son: Dolar Autraliano, Libra Esterlina, Dolar Canadiense, Euros, Yen Japones, etc.

Opciones sobre índices

Las opciones sobre índices bursátiles son otro ejemplo de opciones que se comercializan en los mercados financieros. Antes de profundizar en este apartado, daremos la definición de un índice bursátil y ejemplos de ellos.

Definición 1.2.1. *Un **índice bursátil** es un indicador estadístico cuya finalidad es reflejar qué tanto varía el valor de las acciones que componen dicho índice.*

Podemos pensar un índice bursátil como un promedio ponderado, donde los pesos de cada acción son calculados de acuerdo con la proporción del portafolio invertido en dicha acción. Una vez definido que es un índice bursátil daremos algunos ejemplos de diferentes tipos de índices:

Dow Jones Industrial Average

El Dow Jones Industrial Average es un índice bursátil que consiste de 30 *Blue Chips*

Stocks (empresas bien establecidas con un alto nivel de liquidez). En este índice los pesos dados a cada acción en el portafolio son proporcionales a sus precios.

Standard & Poor's 500 (S&P 500)

Este índice se basa en un portafolio de 500 acciones de empresas diferentes repartidas de la siguiente manera: 400 industriales, 40 de servicios, 20 en compañías de transporte y 40 en instituciones financieras. En este caso, los pesos de cada acción de una empresa en el portafolio son proporcionales a su capitalización en el mercado.

Standard & Poor's 400

El Standar & Poor's 400 es muy similar al anterior, la diferencia es que este se basa en un portafolio de 400 acciones de empresas que tienen una capitalización más baja en el mercado.

Nikkei 225

El índice Nikkei 225 se basa en un portafolio, como su nombre lo indica de 225 de las acciones de empresas más grandes en el Tokio Stock Exchange. En este caso las acciones son ponderadas de acuerdo a sus precios.

NASDAQ 100

Este índice bursátil se basa en acciones de 100 compañías del sector tecnológico e industrial, incluyendo empresas de hardware y software.

Si bien los índices antes mencionados son los más conocidos en el mundo, en México y Latinoamerica también existen ciertos índices como los siguientes.

IPC (México)

El **índice de precios y cotizaciones** es el principal índice en México, el cual muestra las 35 empresas principales listadas en la Bolsa Mexicana de Valores, entre las que se encuentran empresas de telecomunicaciones, servicios financieros, industriales, entre otras.

IMC 30 (México)

El IMC es el índice de mediana capitalización cuya función es representar a empresas que, si bien tienen un nivel alto de capitalización no es suficiente para incluirlas en el IPC. Así como en los índices anteriores el peso de cada empresa dentro del índice dependerá de su nivel de capitalización.

INMEX (México)

El INMEX es el segundo índice más representativo de México después del IPC. La manera de calcularlo es similar al IPC salvo algunas diferencias:

- El peso de una empresa no puede superar el 10 % de su valor en el índice.
- Este índice está formado por entre 20 a 25 empresas de mayor capitalización.
- El valor mínimo de mercado que una empresa emisora deberá alcanzar debe ser mayor a los 100 mdd.

IBOVESPA (Brazil)

EL índice BOVESPA (Bolsa de Valores do Estado de São Paulo) está compuesto por aproximadamente 50 compañías que cotizan en la Bolsa de Sao Paulo, las cuales tienen títulos que constituyen el 80 % del volumen negociado en los últimos 12 meses y que fueron negociados al menos el 80 % de los días de cotización. Este índice se revisa trimestralemente, manteniendo de esta manera, el grado de representación de todas las acciones negociadas en el mercado.

Las opciones sobre índices funcionan en escencia, de la misma manera que los demás tipos de opciones, en este caso el activo subyacente será el propio índice.

Las más populares son el S&P 500 la cual es una opción europea y el S&P 100 que es un tipo de opción americana y se comercializan en el *Chicago Board Option Exchange* (CBOE). El contrato consiste de 100 acciones las cuales se compran o venden a un precio especificado en el mismo contrato.

Opciones sobre futuros

En este tipo de opciones el activo subyacente será un contrato futuro, el cual, normalmente expira previamente a la fecha de expiración de la opción. Estas opciones se negocian en el

CBOE y en el caso de las opciones Eurodollar sobre futuros se comercializan en el *Chicago Mecantile Exchange* (CME). El activo subyacente es el futuro que a su vez, tendrá alguno de los siguientes activos subyacentes: maíz, frijol de soya, petroleo crudo o notas del tesoro.

1.3. Especificaciones en opciones sobre acciones.

Como hemos mencionado antes, las opciones se operan en *Exchanges* y mercados *Over The Counter* u OTC's. El *Exchange* deberá especificar los términos del contrato, es decir el tamaño del contrato, la fecha de expiración y el precio de ejercicio.

Cabe señalar que los terminos en una opción no se ajustan por dividendos en efectivo pero si se ajustan por dividendos de acciones, así mismo, por división de acciones.

Los *Exchanges* usan un sistema de *market-markers*, estos son personas cuya función es establecer un precio de oferta, es decir, el precio de compra del *market-marker*, y un precio de demanda, es decir, el precio de venta del *market-marker*. Los *market-markers* son importantes en el mercado pues mejoran la liquidez y aseguran que no existan retrasos al ejecutar ordenes en el mercado.

Factores que afectan el precio de una opción

Hasta ahora hemos definido varios tipos de opciones y hemos hablado sobre los lugares en donde se operan, pero recordemos que nuestro principal interés es saber como valuar las opciones. A continuación se enumeran seis factores que afectan al precio de una opción.

1. El precio actual de la opción.
2. El *strike price*.
3. La fecha de expiración de la opción.
4. La volatilidad del activo subyacente.
5. La tasa libre de riesgo.
6. Los dividendos esperados durante el tiempo de vida de la opción.

Precios de acciones y precio de entrega

Como mencionamos anteriormente la ganancia de una opción *call* será la diferencia entre el precio de mercado de la acción y su precio de entrega. De esta manera, una opción *call* tendrá mayor valor mientras más incremente el precio de mercado y tendrá menor valor cuando el precio de entrega aumente. De la misma manera para una opción *put* la ganancia se define como la diferencia entre el precio de entrega y el precio de mercado por lo tanto, esta será más valiosa mientras más bajo sea el precio de mercado y menos atractiva cuando el precio de entrega disminuya.

Fecha De Expiración

Recordemos que existen dos tipos de opciones: americanas y europeas. La fecha de expiración puede ser un factor importante en el cambio de precio de una opción, pero notemos que este caso afecta únicamente a las opciones americanas pues pueden ser ejerccidas en cualquier momento mientras que para las opciones europeas la fecha en la que se ejerce es la fecha de expiración.

Para ilustrar lo antes mencionado podemos suponer que se tienen dos contratos de opciones americanas, uno con fecha de maduración n y la otra con fecha de maduracion $n + m$, siendo n y m el número de meses a partir de hoy. Notemos que el tenedor de la opción con fecha de maduración $n + m$ tendrá más posibilidades de ejercer la opción que el tenedor de la opción con fecha de maduración n pues tiene todas las del tenedor de la opción con fecha de madurez n más las que sobran en el periodo entre n y $n + m$. Por lo tanto podemos conlcuir que la opción con mayor tiempo será más valiosa que la opción con tiempo de vida más corto.

Volatilidad

Definición 1.3.1. *La volatilidad del precio de una acción, σ es tal que $\sigma\sqrt{\Delta t}$ es la desviación estándar de la ganancia de la acción en un peridodo corto de tiempo Δt*

La volatilidad es un factor importante, pues si ésta se incrementa, también se incrementará la probabilidad de que el precio de una acción aumente o disminuya. Para el tenedor de una acción los posibles resultados anteriores tienden a compensarse uno con el otro.

En el caso de opciones lo anterior no se cumple. En el caso de una opción *call*, el tenedor se beneficia mientras aumente el precio de la acción y tiene un riesgo limitado a la baja, ya que lo más que puede perder es el pago por la opción. Así mismo el tenedor de una opción *put* se beneficiará mientras el precio de la acción descienda y tiene riesgo a la baja limitado en el caso de que el precio aumente. De aquí podemos concluir entonces que, el precio de una opción en ambos casos (*calls* o *puts*) se incrementará mientras la volatilidad lo haga.

Tasa Libre de Riesgo

La tasa de interés libre de riesgo afecta al precio de una opción ya que mientras esta aumenta, la tasa esperada de crecimiento del precio de la acción tiende a incrementar. Cabe señalar que el valor presente de cualquier flujo futuro de dinero recibido por el tenedor de la opción decrece. Estos dos efectos pueden afectar el precio de una opción *put* o *call* respectivamente, esto es, el precio de una opción *put* caerá mientras la tasa de interés se incremente. Contrariamente, para una opción *call* si la tasa libre de interés aumenta, el precio de la opción aumentará también pero si el flujo futuro de dinero disminuye el precio de la opción disminuye.

En la práctica si la tasa de interés aumenta o baja, el precio de las acciones bajan o suben respectivamente.

Dividendos

Los dividendos tienden a reducir el precio de la acción en la fecha de ex-dividendos. Esta fecha es aquella que define quien es el propietario de los dividendos, es decir, si un comerciante compra una acción posterior a la fecha de ex-dividendos, éste no tendrá derecho a los dividendos, el propietario será el dueño de la acción el día previo a esta fecha.

Notación

Introducimos ahora la notación necesaria para algunas relaciones entre precios de opciones que se utilizarán más adelante. Es importante señalar que en estas relaciones no requerimos de la hipótesis de la volatilidad o del comportamiento probabilístico del precio de la acción.

Se asume lo siguiente:

1. No hay costos por transacciones.
2. Todos los beneficios o pérdidas están sujetos a la misma tasa de impuestos.
3. Los préstamos a tasa de interés libre de riesgo son posibles.
4. Los participantes tomarán ventaja sobre el arbitraje en caso de haberlo.
5. Las oportunidades de arbitraje mencionadas en el punto anterior desaparecen rapidamente.

Usaremos la siguiente notación:

S_0**:** Precio actual de la acción

S_T**:** Precio de la acción al tiempo T.

X**:** *Strike price* de la opción.

T**:** Tiempo de expiración de la opción.

r**:** Tasa libre de riesgo para una madurez a tiempo T, compuesta continuamente.

C**:** Valor de una opción **americana *call*** para comprar una acción.

P**:** Valor de una opción **americana *put*** para vender una acción.

c**:** Valor de una opción **europea *call*** para comprar una acción.

p**:** Valor de una opción **europea *put*** para vender una acción.

Asumimos también que $r > 0$ ya que, de otra manera, la tasa de interés no proveerá ventaja sobre el efectivo.

Cotas superior e inferior para los precios de una opción.

Cota superior

Como hemos mencionado anteriormente, una opción *call* americana o europea, da el derecho de comprar una acción en una fecha determinada a un precio determinado. Por lo tanto, podemos concluir que el precio de dicha opción no puede ser, bajo ninguna circunstancia mayor al precio de la acción misma ya que, de ser así, sería facil que ocurriese arbitraje y de esta manera se obtendría un beneficio sin riesgo. La operación sería comprar la acción para luego venderla en una opción del tipo antes mencionado. De lo anterior concluimos que

$$c \leq S_0 \;\text{ y }\; C \leq S_0$$

Para una opción *put* americana o europea, el tenedor tiene el derecho de vender la acción en cierta fecha por un cierto precio. Por ello, el precio de dicha opción puede ser a lo más el *strike price* de la opción, es decir

$$p \leq X \;\text{ y }\; P \leq X$$

sabiendo lo anterior, podemos concluir que

$$p \leq Xe^{-rT}$$

ésto es, el precio de una opción europea queda acotado superiormente por el valor presente del *strike price*. De no ser así se puede obtener cierta ventaja vendiendo la opción e invirtiendo las ganancias a una tasa libre de riesgo.

Cota inferior para opciones *call* europeas sin pago de dividendos

A continuación se deduce una cota inferior para el precio de una opción europea *call* que no paga dividendos:

Supóngase que se tiene lo siguiente:

Portafolio A: Una opción europea y una suma de efectivo equivalente a Xe^{-rT}.

Portafolio B: Una acción.

En el caso del portafolio A, el efectivo se invierte a tasa libre de riesgo y crecerá a X en un tiempo T. Si $S_T > X$ se ejerce la opción y entonces el portafolio tendrá un valor de S_T. En caso contrario, la opción expira sin valor y entonces el valor del portafolio será de X. Por lo tanto el valor del portafolio podemos definirlo como

$$max(S_T, X)$$

El valor del portafolio B será de S_T al tiempo T, de aquí se tiene que, el portafolio A vale tanto como, o posiblemente más que B al tiempo T. Por lo tanto A debe valer tanto como el valor presente de B, es decir

$$c + Xe^{-rT} \geq S_0$$

o

$$c \geq S_0 - Xe^{-rT}$$

El peor escenario para una opción *call* es que expire sin valor, por ello su valor debe ser no negativo y será:

$$c \geq \max(S_0 - Xe^{-rT}, 0)$$

Cotas inferiores para opciones *put* europeas que no pagan dividendos.

Supóngase que se tienen dos portafolios:

Portafolio C: Una opción *put* europea y una acción.

Portafolio D: Una cantidad de dinero igual a Xe^{-rt}

Sabemos que si $S_T < X$ se ejerce la opción y el valor de portafolio resulta ser X, en caso contrario, la opción no se ejerce, es decir, expira sin valor. De este modo el portafolio tendrá un valor de S_T, por ello podemos concluir que el portafolio deberá tener un valor a tiempo T de

$$\max(S_T, 0)$$

Para el portafolio D, asumimos que el efectivo se invierte a una tasa libre de riesgo, de esta manera el valor del portafolio será de X al tiempo T. Como podemos observar, el portafolio C, valdrá tanto como el portafolio D, o posiblemente más al tiempo T. Por lo tanto, si suponemos que no existen oportunidades de arbitraje, el portafolio C valdrá a lo más el valor presente del valor del portafolio D, es decir

$$p + S_0 \geq Xe^{-rT}$$

o

$$p \geq Xe^{-rT} - S_0$$

En el peor de los casos, la opción expira sin valor y su valor será no negativo, es decir

$$p \geq \max(Xe^{-rT} - S_0, 0)$$

1.4. Put - Call parity

En esta sección mencionaremos una relación importante entre el valor de las opciones europeas *put* p y el valor de las opciones europeas *call* c. Para ello considérese los siguientes portafolios:

Portafolio A: Una opción europea *call* más una cantidad de de efectivo equivalente a Xe^{-rT}.

Portafolio B: Una opción europea *put* más una acción.

Notemos que ambos portafolios tendrán un valor de $\max(S_T, X)$ al tiempo T, es decir, al momento de expiración de la opción. Al ser ambas opciones europeas, recordemos que éstas no pueden ser ejercidas previamente a la fecha de expiración de la opción, por lo tanto, el valor presente de los portafolios deberá ser idéntico, es decir

$$c + Xe^{-rT} = p + S_0$$

A la relación anterior se le conoce como ***put - call parity*** y será de gran importancia, pues como puede observarse, establece una relación entre el valor de una opción *put* y el valor de una opción *call*. Notemos que ambas opciones deberán tener la misma fecha de expiración y el mismo precio de ejercicio.

Capítulo 2

Apalancamiento con Derivados

2.1. ¿Qué es el Apalancamiento con derivados?

En ésta sección nos enfocaremos en el estudio del apalancamiento.

El **apalancamiento** es una relación entre el crédito y el capital propio que se invierte en una operación financiera. Esto es, a mayor crédito menor capital invertido y mayor es el apalancamiento adquirido; es útil ya que permite entrar en grandes operaciones financieras, sin invertir tanto capital.

Como se mencionó en la introducción el apalancamiento ha sido señalado como uno de los factores más importantes en la acumulación de condiciones que conlleven a problemas financieros.

Se cree que el apalancamiento puede ser un factor determinante para el desarrollo de una crisis financiera. Si existen movimientos adversos en los precios de mercado los participantes se veran en la necesidad de cerrar sus operaciones a la brevedad (desapalancarse) y al no llevar una cuenta de que tan apalancado se encuentra cada participante, esto propiciará que exista poca liquidez en el mercado.

Es importante señalar que, para prevenir una crisis financiera como la del 2008 surge la necesidad de medir el apalancamiento de una entidad financiera, esto para evitar los problemas que pueden sucitarse si ésta no es debidamente controlada. Lo anterior se debe medir con más cuidado si dicha entidad hace uso de derivados financieros.

En el presente trabajo exponemos dos maneras de medir el apalancamiento consultadas en artículos elaborados previamente a la crisis y posterior a la crisis del 2018.

A continuación daremos una manera en la que se mide el apalancamiento.

Definición 2.1.1. *El apalancamiento se puede medir mediante la* **tasa de apalancamiento***, la cual mide que tanto capital en deuda tenemos con respecto a nuestro capital en cuenta, es decir*

$$\boldsymbol{Apalancamiento} = \frac{\textit{Volumen nominal de la negociación}}{\textit{Saldo en cuenta}}$$

A manera de ilustrar cómo funciona el apalancamiento daremos un par de ejemplos sencillos.

Supongamos que se tiene un capital de 200,000 pesos y se quiere comprar una casa valuada en 2,000,000. Se pide un crédito hipotecario por la diferencia entre el valor de la casa y el capital disponible.

Contabilizando se tendrá:

- Activo: 2,000,000 (Casa).
- Pasivo: 1,800,000.
- Capital: 200,000.

Donde:

El **riesgo** que se tiene es que la tasa de interés suba en caso de que el crédito hipotecario tenga tasa variable (tal como se sucitó en la crisis del 2008).

El **rendimiento** que se obtiene es plusvalía de la casa.

De esta manera, el comprador de la casa se está apalancando ya que con un capital pequeño está adquiriendo un activo con mayor valor, eso se verá reflejado mediante su nivel de apalancamiento

$$\text{Apalancamiento} = \frac{2,000,000}{200,000} = 10$$

es decir, tiene un bien que vale 10 veces más que su capital real.

Otro ejemplo es el siguiente.

Un inversionista tiene depositados 50,000 en su cuenta. El inversionista compra un futuro con valor de 95 000.
El volumen de la negociación es por lo tanto de 95 000. En este caso el apalancamiento tomado por el inversionista es

$$\text{Apalancamiento} = \frac{95,000}{50,000} = 1.9$$

es decir, el inversionista esta utilizando 1.9 veces más que el saldo que tiene en la cuenta. De esta manera el inversionista está apalancado.

En el caso de apalancamiento con derivados la situación es un tanto más compleja.

En contabilidad, además de las cuentas de balance (*On-Balance-Sheets*), existen las cuentas de orden (*Off-Balance-Sheets*). En las primeras se contabilizan activos, pasivos y capital de una entidad financiera, mientras que en las segundas, se registran operaciones que si bien no afectan directamente en la contabilidad de la empresa en el momento del registro, es importante tener en cuenta pues no se tiene la certeza sobre cómo influirán en la situación financiera de la empresa. Tal es el caso de los derivados financieros, éstos al contabilizarse mediante las cuentas de orden, no se tiene un control sobre su uso, pues no se sabe qué tanto es el capital obtenido mediante pasivos o activos. Lo anterior puede derivar en que la entidad finaciera en algún momento esté tan endeudada que carezca de liquidez y solvencia.

En el artículo *Measuring Off-Balance-Sheet Leverage Ratio* de Peter Brauer [2], publicado por el Fondo Monetario Internacional, se propone una manera de contabilizar los derivados en las cuentas de orden, pero no se toma en cuenta el riesgo que se tiene en los activos subyacentes a cada derivado. Este artículo data del año 2000, es decir, previo a la crisis del 2008, y a pesar de no haber tenido influencia en un problema tan grande como la crisis mencionada, ya se tenía la idea de medir o de llevar un control sobre el uso de derivados en el apalancamiento.

También se analizaron brevemente los artículo *Calibrating The Leverage Ratio*, de Ingo Fender [3] y *Basel III leverage ratio framework and disclosure requirements* [4] en los cuales se propone una razón de apalancamiento que inclueye varios casos en los que puede haber exposición al riesgo. Cabe señalar que los artículos antes mencionados fueron elaborados posteriormente a la crisis del 2008. Estos artículos se buscaron pues nos surgió la duda de cómo se mide actualmente el apalancamiento. Por motivos de tiempo no se pudieron analizar a profundidad pero se encontró que la razón de apalancamiento cambió. Haremos mención de ello más adelante.

2.2. Measuring Off-Balance-Sheet Leverage Ratio

La introducción el artículo comienza señalando al apalancamiento como uno de los principales factores en la acumulación de condiciones financieras que conllevan a una crisis, lo que puede desencadenar problemas financieros como la deuda moratoria de Rusia en 1998. El desapalancamiento simultáneo debido a movimientos adversos en los precios pueden propiciar una crisis. Nos menciona que desde ese tiempo existían instituciones como *The President Working Group*, el banco de reserva de Australia o el comité de Basilea de supervisión bancaria, quienes estaban muy interesados en proponer una medición efectiva del apalancamiento pues, de esta manera, podrían evitarse situaciones como las antes mencionadas.

Este artículo propone una manera de medir el apalancamiento subyacente en contratos de derivados financieros. Dicha forma es, descomponer los intrumentos financieros en fondos propios o capital y préstamos o deuda, de manera que se trasladen a una hoja de balance equivalente, todos los movimientos existentes en las cuentas de orden que incluyen derivados.

Se sabe que los derivados financieros no se anexan a una hoja de balance pues debido a la naturaleza de la transacción, el resultado que estos proveen es incierto, y es por ello que se contabilizan por medio de las hojas fuera de balance.

Con una medida de apalancamiento total lo que se busca es tener una intuición sobre las faltas potenciales de una institución así como de la sensibilidad de inversionistas ante movimientos adversos en los precios.

La sección dos nos habla de la importancia del apalancamiento. El apalancamiento permite que se aumente la inversión por medio de préstamos o en transacciones sobre cuentas de orden como son los derivados. En el apalancamiento se espera que la tasa de interés sobre el préstamo o el derivado sea menor que la tasa esperada de ganancia sobre la transacción, de manera que el inversionista pueda obtener una ganancia sobre el valor nocional o monto del contrato, además, una gran ventaja en los derivados es que sólo se necesita un pequeño capital en forma de margen, o como prima en el caso de opciones, para entrar en el contrato.

Normalmente se piensa o se coincibe al apalancamiento como una elasticidad o una razón entre activos a capital, como mencionamos en la introducción de este trabajo, debido a que cambios en el valor de los activos afectarán directamente al capital del inversionista.

El autor hace énfasis en que se debe tomar en consideración el apalancamiento por dos efectos importantes:

1. El primer efecto es que mediante el apalancamiento se crea y se potencía el riesgo de incumplimiento por parte de los participantes del mercado e

2. Incrementa el potencial de desapalancamiento rápido, es decir, la reversión o *unwinding* de las posiciones lo que podría desembocar en problemas en los mercados financieros debido a los movimientos del mercado exagerados

Además de considerar que si se tiene un nivel elevado de apalancamiento, pequeños movimientos en el precio propiciarían una reversión o *unwinding* en la posición.

La expresión "*Unwinding*", reversión o deshacer la operación, se refiere a tomar la posición opuesta en la que se encuentra en el momento, es decir, si se ha entrado en un contrato con una posición larga, la manera de deshacer dicha operación sería entrar en corto a manera de anularla.

La medida propuesta por el autor pretende capturar las posiciones inmersas tanto en hojas de balance como en cuentas de orden.

En la tercera sección nos habla sobre la importancia de diferenciar entre riesgo y apalancamiento, pues, en palabras del autor, el apalancamiento es el engrane entre el riesgo de una posición sobre una acción y su correspondiente riesgo sobre la participación en el capital. Explica que el riesgo de mercado tiene dos componentes, el riesgo de mercado del portafolio de inversión, el cual se entiende como el riesgo de los activos subyacentes a dicho portafolio, y la razón de apalancamiento mediante la cual dicho riesgo se traslada a la posición de capital.

Define al apalancamiento, como antes se menciona, como una elasticidad entre los activos y el capital, es decir,

$$L = \frac{dC}{C}\frac{A}{dA} = \frac{A}{C} \quad \text{para } C > 0 \tag{2.1}$$

la expresión 2.1 concuerda con la definición de apalancamiento definida anteriormente.

La ecuación 2.2 hace referecia a que un punto de porcentaje en la tasa de ganancia de los activos será equivalente a L puntos de porcentaje de la ganancia sobre el capital, donde $r(E)$ y $r(A)$ denotan la tasa de ganancia del capital y los activos respectivamente.

$$r(A) = Lr(E) \tag{2.2}$$

El autor hace mención sobre cómo el apalancamiento traslada el riesgo adquirido por medio de los activos directamente al riesgo en la posición del capital. Se menciona que si el riesgo es medido mediante la varianza de la ganancia sobre los activos la razón de apalancamiento incrementará el riesgo de la ganancia en capital de manera desproporcionada. Lo anterior se puede corroborar en la siguiente ecuación.

$$\text{var}(A) = L^2\text{var}(E) \tag{2.3}$$

Otra manera de medir el apalancamiento, sugerida por el *President Working Group* fue mediante el valor en riesgo (VaR) de los activos relativo al capital, veáse la ecuación 2.4. El VaR mide cuál es la exposición al riesgo de mercado mediante técnicas estadísticas.

$$l = \frac{\text{VaR}(A)}{E} \tag{2.4}$$

Dicha medida no fue muy efectiva pues el VaR proporciona la razón de cobertura de riesgo, que si bien, tiene una estrecha relación entre riesgo y apalancamiento, la razón sólo arrojará información sobre si se tiene el suficiente capital para afrontar pérdidas potenciales. La siguiente ecuación muestra la relación antes mencionada.

$$l = \frac{VaR(A)}{E} = \frac{VaR(A)}{A}\frac{A}{E} = \frac{VaR(A)}{A}L \tag{2.5}$$

Lo anterior hace referencia a que el riesgo adquirido en la posición de capital consistirá del riesgo de mercado de los activos así como del apalancamiento que incrementrá y trasladará, como se mencionó anteriormente, dicho riesgo a la posición de capital. La deficiencia de esta razón yace en el hecho de que no da información sobre el riesgo adicional proveniente del riesgo de mercado adquirido por parte de la institución .

La idea general propuesta por el artículo es elaborar portafolios equivalentes. Éstos replicarán la operación a manera de trasladar el riesgo contenido en las cuentas de orden, dentro de una hoja de balance, y se sugiere que, mediante esta técnica se tendrá información más precisa sobre el grado de apalancamiento de una institución.

Un ejemplo interesante sobre cómo un individuo puede apalancarse con muy poco capital se muestra en la cuarta sección del artículo.

La primera parte del apalancamiento consiste en una operación financiera llamada *Yen Carry Trade*, la cual consiste en pedir prestado yenes a una tasa baja dando a cambio un colateral (dinero o algún bien en garantía), en este caso de 1 dólar, para más tarde cambiarlos a otra moneda en donde se puedan comprar bonos que tengan una tasa de interés alta, en este caso, dolares estadounidenses.

Una vez cambiando los yenes a dólares, el inversionista obtiene 4 dólares los cuales usa como colateral para entrar en un *short sale* de *On the Run Government Bonds* con valor de 20 dolares, esto es, se compromete a vender algo que aún no tiene en un tiempo establecido, en espera de que el precio de los *On The Run Government Bonds* baje para esa fecha y se obtenga una ganancia.

Con la ganancia obtenida por la venta en corto o *short sale* de los *On The Run Government*

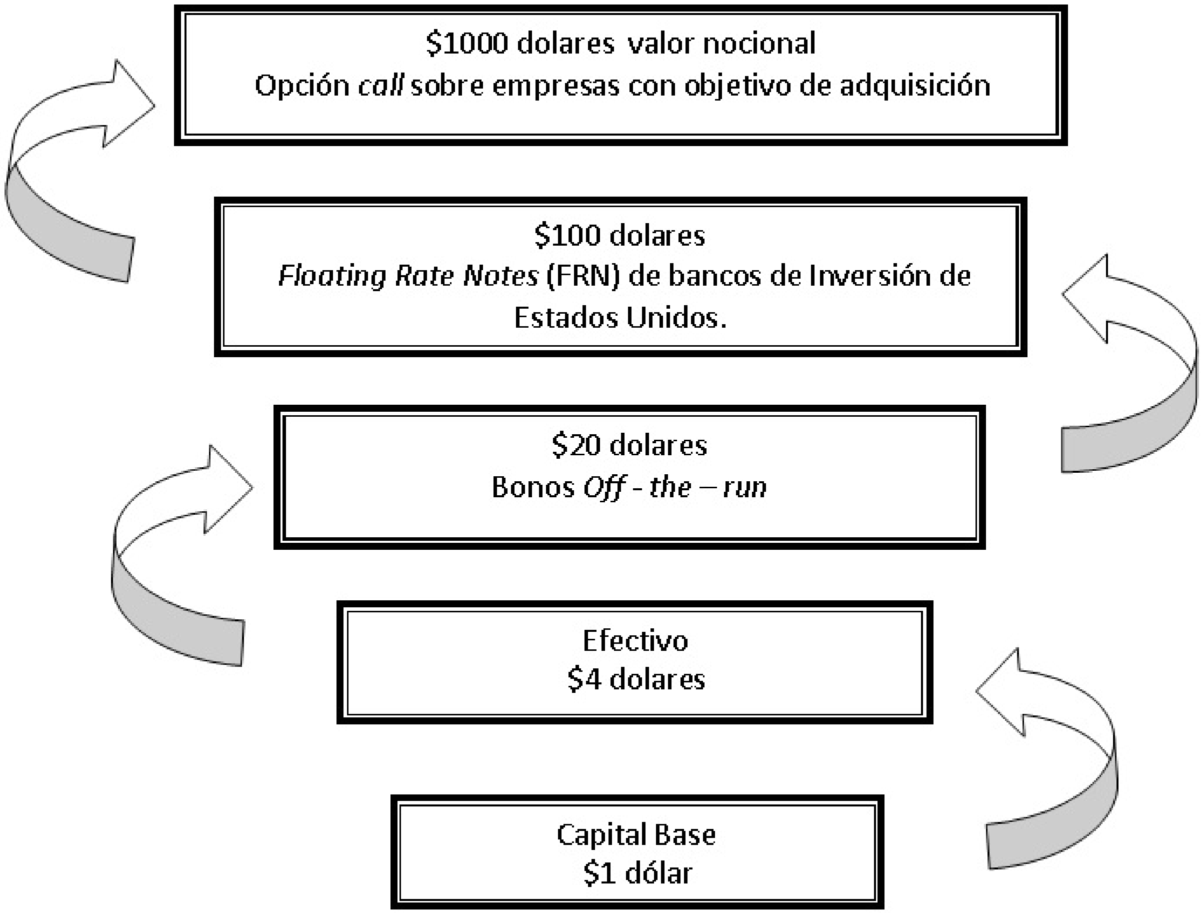

Figura 2.1: Adquiriendo apalancamiento.

Bonds, se compran *Off The Run Government Bonds*.

La diferencia entre este tipo de bonos reside en la fecha en la que fueron emitidos; mientras los *On The Run Government Bonds* son los bonos emitidos recientemente, los *Off The Run Government Bonds* son bonos que fueron emitidos previamente a los anteriores pero que aún permanecen activos.

Para este momento, el inversionista tendrá en su poder *Off The Run Government Bonds* con valor de 20 dólares, en espera de que la diferencia de rendimiento entre los dos tipos de bono sea mínima en algún momento, de esta manera no se tendrán pérdidas en el momento de compra de los bonos.

Posteriormente, se pedirán fondos prestados, mediante un *Repurchase Agreement*, repo o reporto, con valor de 100 dólares, usando la posición larga sobre los *Off The Run Government Bonds* para colateralizar el préstamo. Los 100 dólares se invierten en otro tipo de instrumentos llamados *Floating Rate Notes* o FRNś, los cuales son bonos con interés variable. Se espera que los bonos paguen una tasa de interés más alta que el préstamo.

El inversionista puede utilizar nuevamente un reporto para prestarle al banco los FRNś. De esta manera se obtendrá el capital que se utilizará como prima para entrar en una opción con valor nocional de 1000 dolares sobre firmas seleccionadas con objetivo de adquisición.

En el ejemplo anterior, observamos cómo un individuo que comienza únicamente con un dólar aumenta su activo a 1000 dólares, los cuales son el valor nocional (o tamaño de la operación) de la opción.

Como se destacó varias veces en el ejemplo, esta serie de operaciones funciona bajo ciertos supuestos, como que el dólar nunca se deprecie con respecto al yen o que éste ultimo se aprecie, que los bonos tengan una tasa de rendimiento similar, entre otras.

El artículo destaca ciertos eventos en los que contrario a una buena estrategia, el inversionista podría quedar en banca rota debido a su alto nivel de apalancamiento.

Es importante enfatizar el hecho de que, si un sólo individuo puede afectar al sistema con una operación fallida como la anterior, un grupo de entidades con las mismas características provocaría turbulencias tales en el mercado como las ya mencionadas en la introducción del presente trabajo. Por ello es menester una manera de medir el apalancamiento, para así poder prevenir problemas como el mencionado.

En la quinta sección Peter Brauer nos explica una manera muy partícular de trasladar las operaciones en la hoja fuera de balance a una hoja de balance, relativa a la mencionada. Esto es lo que el llama replicar el portafolio, a fin de mapear los componentes individuales en fondos propios y fondos prestados equivalentes. Lo anterior se elabora para *forwards*, opciones, y *repurchase agreements*.

FORWARDS

Supóngase que se tiene un contrato para un *forward* con una posición larga, es decir, el tenedor del contrato se compromete a comprar un bien en determinado tiempo; se asume también que el contrato no provee ganancia alguna, así como que no se tienen dividendos. Como hemos visto en el primer capítulo, el valor de un contrato *forward* a tiempo t es

$$f_t^l = S_t - Xe^{-r(T-t)} \tag{2.6}$$

siendo S_t el precio actual del activo o bien subyacente, $Xe^{-r(T-t)}$ es el valor presente descontado del precio X al que será entregado el bien en la fecha de madurez T

La operación de entrar en el contrato puede ser replicada mediante pedir prestado una cantidad de $Xe^{-r(T-t)}$ a la tasa libre de riesgo y complementar con capital propio f_t^l a modo de invertir la cantidad en el bien subyacente al contrato con una valor de $S_t = f_t^l + Xe^{-r(T-t)}$.

De esta manera, mediante la replicación de dicha operación, en la fecha de madurez del contrato, se obtendrá la misma ganancia que se hubiese obtenido al entrar en el *forward*, siendo esta la diferencia $S_t - Xe^{-r(T-t)}$. Dependiendo de cómo cambió el precio del activo subyacente; la ganancia será positiva en caso de que el precio aumente y negativa o igual a cero en caso contrario.

La manera de calcular el grado de apalancamiento se hace siguiendo la idea de la ecuación 2.1. El total de activos, se puede interpretar, de acuerdo con la ecuación contable como la suma del capital y la deuda; en éste caso $f_t^l + Xe^{-r(T-t)}$, mientras que el capital será, como se mencionó antes f_t^l. Por ello el grado de apalancamiento usando la ecuación 2.6 es:

$$L_f^l(S) = \begin{cases} \frac{S_t}{f_t^l} \qquad si \qquad S_t > Xe^{-r(T-t)} \\ \\ \infty \quad otro \;\; caso \end{cases} \tag{2.7}$$

de aquí que, también podemos interpretar el apalancamiento de un *forward* como, el **valor actual nocional** o *current notional value* del contrato dividido entre su precio de mercado, donde el valor actual nocional no es más que el producto entre la cantidad de acciones subyacentes y el precio actual en el mercado. Lo anterior se debe a que el *current notional value* es una medida de las posiciones en las cuentas de orden trasladadas a una hoja de balance equivalente, en la cual se verá reflejado el grado de exposición al riesgo contenido en el instrumento derivado.

La diferencia entre el valor nocional actual o *current notional value* y el valor nocional o *notional value*, es que éste último no se basa en el precio actual del activo subyacente, sino en el precio de entrega o ejercicio especificado en contrato, esto es, se multiplica la cantidad de activo por su precio de ejercicio.

Cabe mencionar que mientras el precio del activo subyacente cambie, lo hará tambien el precio del contrato *forward*, lo que propicia que se presente un cambio en la posición de capital y con ello, una razón de apalancamiento.

Para tener una noción de cómo cambia el apalancamiento conforme el valor del activo subyacente aumenta o disminuye, se analiza el límite cuando el valor del activo subyacente S_t se aproxima a $Xe^{-r(T-t)}$ el cual es el valor presente del precio al cual se entregará el contrato en la fecha de madurez T así como cuando el precio sube y tiende a infinito.

$$\lim_{S_t \to Xe^{-r(T-t)}} L_f^l = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{S_t \to \infty} L_f^l = 1$$

También se obtiene la derivada con respecto al precio S de la razón de apalancamiento de la ecuación 2.7 para un *forward* en la cual se observa que la pendiente es negativa; de aquí se concluye que conforme el precio del activo subyacente asciende, el apalancamiento desciende, observese la imagen 2.2, la cual puede también encontrarse en el artículo original.

$$\frac{dL_f^l}{dS} = \frac{-Xe^{-r(T-t)}}{(S - Xe^{-r(T-t)})^2} \leq 0$$

Para la posición contraria, un *short forward* se sigue una estrategia similar a la anterior, con la finalidad de replicar el portafolio del inversionista. El nivel de apalancamiento L_f^s se define igual salvo un signo negativo,$L_f^s = -L_f^l$, el cual nos indica la posición en la que se encuentra el inversionista. Es importante mencionar que, debido a la posición en el contrato los límites difieren de los anteriores, es decir, en este caso el límite de la razón de apalancamiento L_f^s cuando el precio del activo subyacente S_t se aproxima a cero es cero, por lo cual podemos concluir que el inversionista estará menos apalancado conforme el precio del activo disminuya. Por otro lado, si calculamos el límite cuando L_f^s se aproxima a $Xe^{-r(T-t)}$, este caerá hacia menos infinito, lo cual nos dice que, entre más se acerque el precio del activo subyacente S_t al valor presente descontado del precio de ejercicio

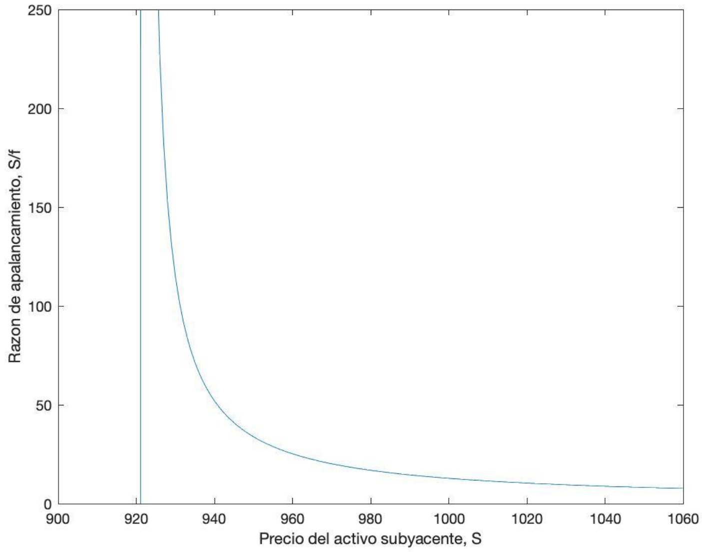

Figura 2.2: Gráfica del apalancamiento en un *long forward* como función del precio del activo subyacente.

$Xe^{-r(T-t)}$ el inversionista podría terminar en banca rota. Dicho de otra forma

$$\lim_{S_t \to 0} L_f^s = 0 \text{ y } \lim_{S_t \to -Xe^{-r(T-t)}} L_f^s = -\infty$$

lo cual es consistente con la gráfica proporcionada por el artículo, vease imagen 2.3

También se observó que en este caso la derivada de la razón de apalancamiento L_f^s es también negativa, más aún, coincide con la derivada anterior.

OPCIONES

Para el caso de opciones, nuevamente se trata de trasladar la posición dentro de una opción a una posición equivalente con capital propio y fondos prestados, con la diferencia que, en las opciónes la posición se ajusta constantemente como veremos más adelante.

Se utiliza la fórmula de Black-Scholes expuesta en el capítulo 3 para el valor c_t de una opción *call* europea que no paga dividendos a tiempo t, la cual está en función del precio del activo subyacente S_t, del *strike price* X y de la delta de una opción $\Delta_t^c = N(d1)$ la cual, como mencionaremos más adelante es una función de distribución de probabilidad

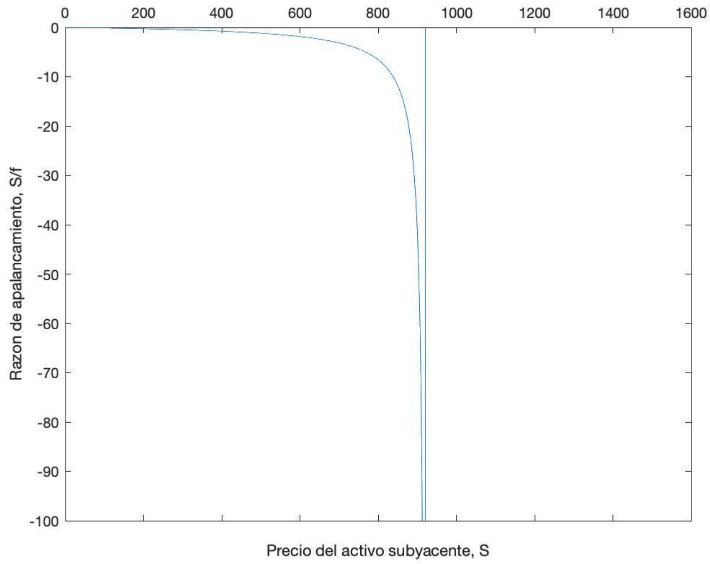

Figura 2.3: Gráfica del apalancamiento en un *short forward* como función del precio del activo subyacente.

de una variable normal estándar con media 0 y varianza 1, y la cual también podemos interpretar como la tasa de cambio entre el precio de la opción y el cambio en el precio del activo subyacente, es decir, $\frac{dc}{dS}$. También intervienen en la valuación de la opción la volatilidad σ de la tasa de ganancia del activo subyacente, la tasa libre de riesgo, pues suponemos que no se tiene arbitraje, así como el tiempo restante a la fecha de madurez del contrato.

En el capítulo 3 elaboramos la construcción para valuar opciones de manera discreta mediante árboles binomiales. Ahí podremos observar que la delta de una opción puede pensarse como la cantidad de acciones necesarias para mantener el portafolio sin riesgo.

Por tanto el valor de una opción *call* queda determinado por

$$c_t^l = N(d_1)S_t - N(d_2)Xe^{-t(T-t)}$$

donde

$$d_1 = \frac{ln(S_t/X + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$N(d_1)$ y $N(d_2)$ son funciones de distribución de probabilidad de una variable normal estandarizada con media 0 y varianza 1.

En este caso se puede replicar la posición mediante la siguiente estrategia: Se pide prestado la cantidad de $N(d_2)Xe^{-r(T-t)}$ a la tasa libre de riesgo y se complementa con capital propio c_t^l con la finalidad de comprar $N(d_1)S_t$ cantidad de activo subyacente, o bien $\Delta_t^c S_t$. La operación anterior replica exactamente la opción pues para el momento T, el cual es la fecha de madurez del contrato, se obtendrá la misma ganancia o pérdida que si se entrase en el contrato. Si el precio del activo subyacente crece, el capital del inversionista crece, en la fecha T paga el préstamo y obtiene una ganancia de $N(d_1)S_t - N(d_2)Xe^{-t(T-t)}$, mientras que si el precio del activo disminuye, el capital lo hará también hasta el momento en el que el precio $N(d_1)S_t$ sea menor igual $N(d_2)Xe^{-t(T-t)}$ donde el inversionita podría quedar en banca rota.

Se hace mención, como lo destacamos antes, que la posición en la opción para ser replicada correctamente, debe ser ajustada continuamente, pues la delta cambia respecto al precio de mercado del bien, la volatilidad y el tiempo de madurez así como la cantidad invertida y prestada deberán ser ajustadas constantemente.

Nuevamente usando la ecuación 2.1 se calcula la razón de apalancamiento, ahora para una opción call europea, sabiendo que el activo consiste en $N(d_2)Xe^{-t(T-t)} + c_t^l$, mientras que el capital es c_t^l. Por lo tanto

$$L_{co}^l(S) = \frac{N(d_2)Xe^{-r(T-t)+c_t^l}}{c_t^l}$$

o lo que es lo mismo

$$L_{co}^l(S) = \frac{\Delta_t^c S_t}{c_t^l}$$

Nuevamente calculando los límites observamos que si hacemos tender el precio S_t a infinito tenemos que

$$\lim_{S\to\infty} L_{co}^{l} = 1$$

mientras que

$$\lim_{S\to 0} L_{co}^{l} = \infty$$

con lo cual se puede inferir que conforme el precio asciende, el apalancamiento descenderá hasta llegar a uno, mientras que si el precio cae el apalancamiento crecerá hasta llegar a infinito. Lo último es claramente teórico pues en la práctica si el apalancamiento crece demasiado, el inversionista quedará en bancarrota.

Posteriormente el artículo señala que la razón de apalancamiento de opciones se aproxima a los mismos límites que la razón de apalancamiento para *forwards*, pero recalca que el nivel de apalancamiento de opciones es menor que el correspondiente a *forwards* comparando las razones de apalancamiento, es decir

$$L_{co}^{l} \leq L_{f}^{l} \tag{2.8}$$

La manera de ver que esto es cierto es la siguiente: recordemos del capítulo anterior que una cota inferior para el precio de una opción *call* europea es su valor intrínseco

$$S - Xe^{-r(T-t)}$$

pero observese por la ecuación 2.6 que lo anterior es el precio de un *forward* de aquí que $f_t^l \leq c_t^l$ por lo tanto

$$\frac{1}{c_t^l} \leq \frac{1}{f_t^l}$$

con lo cual se obtiene

$$\frac{S_t}{c_t^l} \leq \frac{S_t}{f_t^l}$$

Ahora para asegurarnos de que

$$\Delta_t^c \frac{S_t}{c_t^l} \leq \frac{S_t}{f_t^l}$$

observese L_{co}^l puede reescribirse de la siguiente manera

$$L_{co}^l = \frac{dC}{dS} \cdot \frac{S}{C}$$

la cual está escrita en la forma de la ecuación 2.1 haciendo $\frac{dC}{dS} = \Delta_t^l$, con lo que se obtiene $dC = \Delta_t^l dS$; recordemos que la ecuación anterior permite observar qué cambios en el precio del activo S se reflejan directamente en el capital, debido a la observación hecha de que $dC = dA$. Pero podemos notar que en el caso de las opciones lo anterior no se cumple pues la delta de una opción no siempre es 1, es decir la posición en los activos subyacentes se ajustan de manera que los cambios en el precio del activo afectan parcialemtente al capital del inversionista. Por lo tanto concluimos que le desigualdad antes mencionada es válida.

La derivada para la razón de apalancamiento de opciones presentada en el artículo es un tanto oscura; no fue clara la manera de derivar del autor pues utiliza una notación que no especifica en ningún momento por lo cual, obtuvimos la derivada y aunque no coincidió con el resultado del autor cumple con el requerimiento de que

$$\frac{d_{co}^l}{dS} \leq \frac{dL_f^l}{dS}$$

La derivada obtenida fue la siguiente

$$d_{co^l} = \frac{-N(d1)N(d2)Xe^{-r(T-t)}}{(c_t^l)^2}$$

que al comparar con la derivada de un *forward* para verificar que satisficiera la ecuación 2.8

$$d_{co^l} = \frac{-N(d1)N(d2)Xe^{-r(T-t)}}{(c_t^l)^2} \leq \frac{-Xe^{-r(T-t)}}{(S - Xe^{-r(T-t)})}$$

seguido de una serie de manipulaciones algebraicas, obtenemos que

$$0 \leq N(d_1)S^2 - N(d_2)X^2e^{-r(T-t)}$$

lo cual concluimos que es válido pues $N(d_1)S$ corresponde a los activos del inversionista los cuales deberán ser mayores que $N(d_2)Xe^{-r(T-t)}$ que es la deuda adquirida por el mismo.

Como la derivada de la razón de apalancamiento es negativa podemos inferir que a mayor precio del activo subyacente, el nivel de apalancamiento desciende. Más aún, como la razón de apalancamiento de una opción *call* queda acotada por la razón de apalancamiento de un *forward* así como sus respectivas derivadas concluimos que el apalancamiento de una opción crecerá más despacio a medida que el precio del activo subyacente desciende.

Así como en el caso de los *forwards* también podemos obtener la razón de apalancamiento para una opción *call* pero en la posición corta. En este caso la estrategia a seguir será replicar el portafolio pero esta vez se vende en corto el activo subyacente con valor de $\Delta_t^l S_t$ y se complementa con capital propio c_t^l que se invertirá a la tasa libre de riesgo. El capital c_t^l es equivalente al capital utilizado en caso de adquirir la opción con la posición antes mencionada.

El valor de opción *call* en la posición corta corresponde a

$$c_t^s = N(d_2)Xe^{-r(T-t)} - \Delta_t^c S_t$$

por lo tanto la razón de apalancamiento será

$$L_{co}^s(S) = \frac{c_t^s - N(d_2)Xe^{-r(T-t)}}{c_t^s}$$

o lo que es lo mismo

$$L_{co}^s(S) = \frac{-\Delta_t^c S_t}{c_t^s}$$

Para comparar ambas razones de apalancamiento se toma el valor absoluto de cada uno.

En la sexta sección se explica la manera de obtener una medida total del apalancamiento dentro de las hojas de balance y de orden, éstas últimas de acuerdo con lo desarrollado hasta ahora.

La idea anterior fue, trasladar el apalancamiento comprendido en las cuentas de orden a una hoja de balance equivalente (*On - balance - sheet - asset equivalent*). De esta manera se logra contabilizar el grado de apalancamiento mediante una razón de apalancamiento dentro de las cuentas de orden. La manera de lograrlo es la que sigue: se suman todos los fondos propios y prestados dentro de la hoja de balance equivalente, con los activos de las hojas de balance. Esta suma será dividida por el capital de la hoja de balance (es decir, el capital real) y de esta manera, se obtendrá una razón de apalancamiento, la cual será la suma de la razón de apalancamiento convencional con la razón de apalancamiento de la hoja de balance equivalente, o lo que es lo mismo, la razón de apalancamiento de las hojas fuera de balance, es decir

$$\frac{A_E + A_B}{C_B} = \frac{A_E}{C_B} + \frac{A_B}{C_B}$$

Donde:

A_E es el activo en la hoja de balance equivalente.

A_B es el activo en la hoja de balance.

C_B es el capital de la hoja de balance (el capital real).

$\frac{A_E}{C_B}$ es la razón de apalancamiento que mide la exposición en las cuentas de órden.

$\frac{A_B}{C_B}$ es la razón de apalancamiento convensional, como se definió en 2.1.

Cabe señalar que la razón de apalancamiento mencionada es mayor a tomar únicamente la razón de apalancamiento de las cuentas de órden; lo anterior se debe a que ciertas posiciones en las cuentas de orden podrían estar financiadas con deuda proveniente de las hojas de balance.

El autor menciona posteriormente las dos formas en las que en la práctica se mide el apalancamiento: el *Gross Leverage Ratio* que en el presente trabajo denotaremos como L_G y el *Net leverage ratio* que denotamos L_N. Estas razones de apalancamiento se definen como

$$L_G = \frac{|\text{Posiciones cortas} + \text{Posiciones largas}|}{\text{Capital de la hoja de balance}}$$

y

$$L_N = \frac{\text{Posiciones Largas} - \text{Posiciones cortas}}{\text{Capital de la hoja de balance}}$$

Ambos índices de apalancamiento son usados en Europa y Estados Unidos respectivamente. El *Gross Leverage Ratio* es más restrictivo al momento de contabilizar el apalancamiento pues excede el valor real y por ello, se toma como una cota superior, mientras que el *Net Leverage Ratio* será inferior al valor de apalancamiento total pues éste no toma en cuenta el riesgo de crédito y riesgo de liquidez, pues como su nombre lo indica, netea las posiciones; supóngase que cierto individuo entra en una posición larga y corta al mismo tiempo con el mismo valor, el *Gross Leverage Ratio* tomará ambas operaciones como activos, por lo cual, como en ambas se puede tener un rendimiento tanto positivo como negativo, el apalancamiento será mayor. En el caso del *Net Leverage Ratio* eliminara las posiciones por considerarlas contrarias y su apalancamiento será de cero.

Es por lo antes mencionado que el autor propone el uso del *Gross Leverage Ratio*.

Un punto que nos falta por mencionar es el capital de una entidad finaciera. Este podrá ser calculado mediante el **capital regulatorio**, el cual consiste en la suma del *Tier 1*, el cual es la principal fuente de financiación de la entidad y del *Tier 2*, el cual incluye todas los fondos que no aparecen en los estados financieros de la entidad. La suma anterior será dividida por los activos ponderados por riesgo o *Risk weighted assets* los cuales son usados para determinar el capital mínimo necesario para que una empresa pueda reducir su riesgo de insolvencia.

En resumen lo que en éste artículo se expuso, es una propuesta para medir el apalancamiento de una entidad financiera. Como lo mencionamos anteriormente dicho artículo se desarrollo previamente a la crisis financiera del 2008 y es necesario recalcar que aun antes de todos los problemas suscitados en esta fecha, ya se necesitaba tener una noción de que tan apalancada se encontraba una entidad financiera.

Debido a que el artículo ya es un tanto antiguo, decidimos buscar bibliografía más reciente para tener una idea de como se mide el apalancamiento actualmente. Como hemos mencionado antes, por motivos de tiempo, no pudimos examinarlos a fondo, pero creemos que la razón de apalancamiento encontrada en *Calibrating Leverage Ratio*, [3] y *Basel III Leverage Ratio Framework and Disclosure Requirements*, [4] es una manera más precisa para medir el apalancamiento pues toma en cuenta todos los posibles casos a los que una entidad financiera puede estar expuesta. La razón de apalancamiento es el siguiente

$$L = \frac{\text{Medida del Capital}}{\text{Medida a la exposición}}$$

donde

Medida del Capital = Tier 1 y

Medida a la exposición = exposición en hojas de balance (prestamos) + exposición a derivados a costo de remplazo + exposición a bonos + exposición en cuentas de orden.

Por último mencionamos que nos fue menester adentrarnos en el tema de valuación de opciones desde el punto de vista matemático para entender mejor la situación, lo que requiere del estudio de algunos temas de Procesos Estocásticos, los cuales decidimos abordar desde el punto de vista práctico, por lo que en el siguiente capítulo se encontrarán algunos de los temas requeridos para la valuación de opciones como son árboles binomiales, los cuales abren camino para derivar a la formula de Black-Scholes utilizada en el artículo, complementando en el apéndice con algunos temas de Procesos Estocásticos.

Capítulo 3

Valuación de opciones

En esta sección presentamos algunas técnicas para la valuación de derivados pues como se ha mencionado antes, éstos juegan un papel muy importante en el apalancamiento. Para una explicación teórica más detallada del tema puede consultarse [5].

3.1. Introducción a árboles binomiales

Los árboles binomiales son una técnica popular en la valuación de opciones, la cual nos muestra todos los posibles caminos que puede seguir el precio de un activo durante la vida de la opción. Es importante su estudio debido a su relación con la valuación de riesgo neutral, la cual utilizaremos más tarde con la fórmula de Black-Scholes.

Comencemos con un ejemplo simple que nos ayudará a comprender el modelo.

Supongase que se tiene un *stock* o activo cuyo precio actual es de 20 dólares. Se sabe que dentro de un tiempo, digamos tres meses, el precio será o bien 22 o bien 18 dólares y nos interesa valuar una opción *call* europea para comprar dicho activo en tres meses por 21 dolares. Así, si el precio del activo dentro del tiempo específicado sube a 22 dólares, el valor de la opción como ya se ha visto será $S_T - X$, es decir $22 - 21 = 1$, mientras que si el precio del activo baja a 18, el valor de la opción será cero pues ésta no se ejerce. (Véase la figura 3.1).

Notemos que en argumento anterior y en los siguientes, supondremos que no se tiene la existencia de oportunidades de arbitraje.

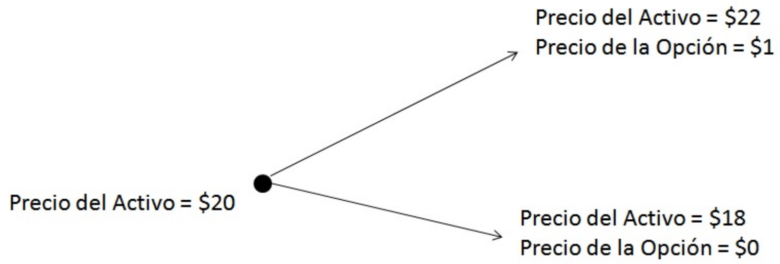

Figura 3.1: Movimiento del precio de una acción

El propósito será elaborar un portafolio sin riesgo que consista de un activo y de una acción con dicho activo subyacente; de esta manera no se tendrá incertidumbre sobre el valor del portafolio al final del tiempo específicado. Ya que como hipótesis el portafolio no tiene riesgo, la tasa de retorno será la tasa libre de riesgo. Lo anterior permitirá evaluar el costo de elaboración del portafolio así como el costo de la opción.

Consideremos un portafolio consistente de un posición larga en Δ acciones del activo y una posición corta en una opción *call*. Se calculará el numero de acciones Δ necesarias para obtener un portafolio sin riesgo, es decir, que sin importar el resultado el comerciante no pierda su inversión.

Observese que si el precio del activo sube de \$20 a \$22, entonces el valor de las acciones será de \$22Δ y como se mencionó previamente el precio de la opción será de \$1. Por el contrario, si el precio del activo subyacente baja de \$20 a \$18, se tendrá que el valor de las acciones será de 18Δ mientras que el valor de la opción es cero. Igualando ambos casos se tiene:

$$22\Delta - 1 = 18\Delta$$

con lo cual se obtiene:

$$\Delta = 0.25$$

La información obtenida hasta ahora lo que nos dice es que, para obtener un portafolio **sin riesgo**, debemos tener una posición larga que consista de 0.25 acciones de cierto activo y una posición larga de una opción, con dicho activo subyacente. De este modo, el valor del portafolio, sin importar cual de los casos anteriores se presente, será el mismo en la fecha de madurez de la opción. Para calcular el valor actual del portafolio, solo calculamos el valor presente de la cantidad obtenida previamente, es decir:

$$e^{-rT}(22\Delta - 1)$$

o bien

$$e^{-rT}(18\Delta)$$

donde r es la tasa libre de riesgo, pues suponemos que no existen oportunidades de arbitraje, y T es el tiempo de duracion del contrato.

Generalización

Supóngase que se tiene un portafolio consistente de una posición larga en Δ acciones de un activo cuyo valor presente es de S_0, y una opción sobre ese mismo activo (o cualquier otro derivado que dependa de dicho activo) con valor de f, y supongamos que la duración de la opción es de T. Como en el caso anterior supondremos que el precio de la opción puede subir de S_0 a S_u o bajar de S_0 a S_d, considerese $1 < u$, $v < 1$. Obsérvese que el incremento proporcional en el costo del activo será de $u - 1$, mientras que el decremento proporcional sera de $1 - d$.

Supondremos que la ganancia o *payoff* de la opción si el precio sube será de f_u, mientras que si el precio baja será de f_d, (Véase la figura 3.2).

Nuevamente, tenemos un portafolio consistente de una posición larga en Δ acciones de cierto activo y una posición corta en una opción con dicho activo subyacente. Se desea calcular el número de acciones necesarias Δ que hacen que el portafolio sea sin riesgo.

Si el precio del activo sube entonces se tendrá que el valor del portafolio al final de la vida de la opción es

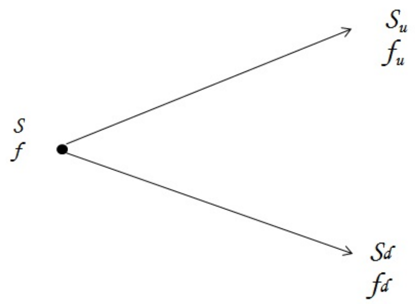

Figura 3.2: Movimiento del precio de una acción en el caso general (árbol binomial de un paso).

$$S_0 u\Delta - f_u$$

mientras que si el precio decae, el valor será de

$$S_0 d\Delta - f_d$$

Igualando las expresiones anteriores se tiene

$$S_0 u\Delta - f_u = S_0 d\Delta - f_d$$

despejando la anterior se tiene por lo tanto que el número necesario de acciones es:

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d} \tag{3.1}$$

A la igualdad anterior se le conoce como **razón de cambio en el precio de la opción al cambio con respecto al precio del activo subyacente**. Debido a que el portafolio es sin riesgo, recalcamos que únicamente gana la tasa libre de riesgo r. Podemos de esta manera calcular el valor presente de portafolio como sigue

$$\text{Valor presente del portafolio} = e^{-rT}(S_0u\Delta - f_u)$$

Calcularemos ahora el costo f de la opción. Se tiene que el costo para la creación del portafolio será de $S_0\Delta - f$. Igualando lo anterior con el valor presente antes calculado se tiene

$$S_0\Delta - f = e^{-rT}(S_0u\Delta - f_u)$$

o

$$f = S_0\Delta - e^{-Tt}(S_0u\Delta - f_u)$$

Sustituyendo el valor de Δ en la ecuación anterior y simplificando se tendrá lo siguiente:

$$f = e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d] \tag{3.2}$$

donde

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d} \tag{3.3}$$

y

$$1 - p = \frac{u - e^{-rT}}{u - d}$$

De lo anterior, podemos concluir que el valor de f permite valuar una opción usando el modelo binomial de un paso.

Nótese que, hasta ahora no se ha incluido la probabilidad de que el precio del activo suba o baje en las ecuaciones anteriores. Aunque esto parezca extraño, la razón del porqué no aparece dicha probabilidad se debe a que ya está incluida en el precio del activo S_0 y recordemos que estamos calculando a f_u y a f_d en función del precio del activo.

Risk-neutral valuation

A pesar de que en la ecuación anterior no tomamos en cuenta la probabilidad de que el precio suba o baje, podemos interpretar a p como una probabilidad de ascenso del precio del activo subyacente y a $1-p$ como la probabilidad del precio de descenso del precio. De esta mandera, podemos interpretar a $pf_u + (1-p)f_d$ como **el valor esperado de la ganancia de una opción**. Como la ecuación 3.2 es el valor actual de la opción, con la interpretación anterior,tambien será el valor futuro esperado descontado a la tasa libre de riesgo.

Calcularemos la ganancia esperada del activo tomando a p como la probabilidad de alza del precio. el precio esperado al tiempo T, $\mathbb{E}(S_T)$ está dada por

$$\mathbb{E}(S_T) = pS_0u + (1-p)S_0d$$

o

$$\mathbb{E}(S_T) = pS_0(u-d) + S_0d$$

Sustityendo el valor de p dado en la ecuación 3.3 en la ecuación anterior se obtiene lo siguiente

$$\mathbb{E}(S_T) = S_0e^{rT} \tag{3.4}$$

con lo cual mostramos que, en promedio, el precio del activo crecerá a la tasa libre de riesgo r. El mismo resultado se obtiene para la ganancia sobre el activo.

Definición 3.1.1. *Si consideramos la situación en la que los individuos son indiferentes al riesgo le llamaremos mundo con riesgo neutral o risk - neutral world*

Lo anterior se refiere a la situación en la que los individuos no pagan compensación alguna por el riesgo tomado y en todos los casos la ganancia esperada es únicamente la tasa libre de riesgo. En la ecuación 3.4 podemos observar que se tiene justamente el caso antes mencionado; más aún, la ecuación 3.2 nos dice que el valor f de una opción, es el valor descontado esperado de la ganacia en un mundo de riesgo neutral a la tasa libre de riesgo.

Lo anterior es un ejemplo de un principio conocido en la valuación de opciones llamado *risk-neutral valuation*. El principio anterior es importante a la hora de valuar opciones pues establece que no solamente es correcto en un mundo neutral al riesgo, sino también en el mundo real.

3.2. Árboles binomiales a dos pasos

Podemos extender el análisis antes mencionado a un árbol binomial a dos pasos como en mostrado en la figura 3.3. En este caso se tendrá que el valor inicial del activo subyacente será de 20 y a cada paso subirá o descenderá su valor por un 10 %. Supondremos que cada paso es por 3 meses ($\frac{3}{12} = 0.25$), la tasa libre de riesgo se calcula anualmente y tiene un valor de 12 %, ademas supondremos que el valor final de la opción es de 21.

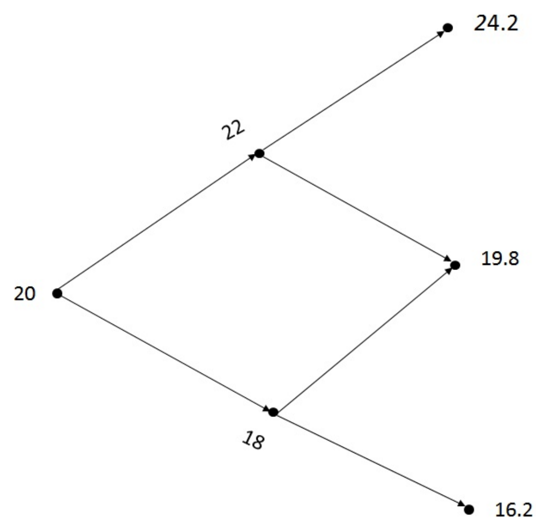

Figura 3.3: Precio de una acción en un árbol binomial de dos pasos.

La idea es obtener por este método el precio inicial de la opción, o dicho de otra forma, en el nodo incial. La manera de calcular dichos valores será aplicar lo visto en la sección anterior repetidas veces. En la figura 3.4 podemos ver el mismo árbol que en la figura 3.3 con la diferencia que éste icluirá los precios de la opción en los distintos nodos o pasos del árbol. El número en la parte de arriba representa el valor del activo, mientras que el número en la parte de abajo representa el valor de la opción.

Para calcular el precio de la opción sabemos que este siempre será $S_T - X$, donde S_T es el valor del activo subyacente al tiempo T y X será el *strike price*. Por lo tanto para el nodo D el valor de la opción es $24.2 - 21 = 3.2$, mientras que para los nodos E y F el valor de la opción es 0 pues ésta expira sin valor(no se ejerce); lo mismo se tendrá para el nodo C. Para el nodo B, el precio de la opción lo calcularemos mediante la ecuación 3.2, tomando en cuenta que $u = 1.1$ $d = 0.9$ $r = 0.12$ y por lo tanto por la ecuación 3.3 podemos calcular p cuyo valor es $p = 0.6523$. Por lo tanto

$$f = e^{-0.12\times 0.25}[0.6523 \times 3.2 + 0.3477 \times 0] = 2.0257$$

Sólo resta calcular el valor de la opción en el nodo inicial A. Repetimos el proceso anterior. Calculamos f sabiendo que el valor de la opción del nodo B es 2.0257 y el valor de opción en el nodo C es 0. Por lo tanto

$$f = e{-}0.12 \times 0.25[0.6523 \times 2.0257 + 0.3477 \times 0] = 1.2823$$

Recordamos que en el ejemplo se tiene que u y d son los mismos para cada nodo, así como el tiempo que trascurre entre nodo y nodo es tambien fijo. Por ello la probabilidad calculada en la ecuación 3.3 es la misma para cada nodo.

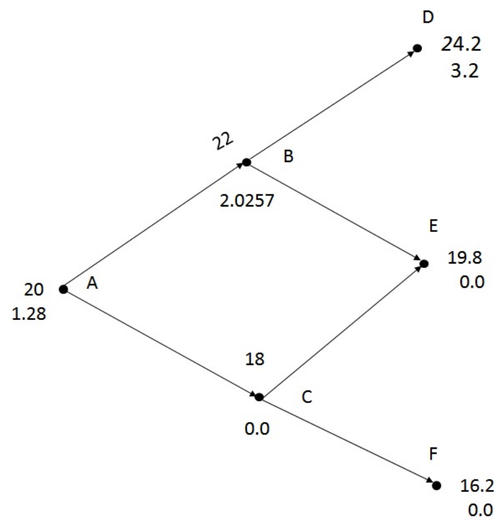

Figura 3.4: Precio de una opción en un árbol b inomial de dos pasos.

3.3. Generalización

En esta sección generalizaremos el caso anterior.

Consideremos que el precio inicial del activo es S_0 y en cada paso el precio puede subir por u veces su valor inicial o bien, bajar d veces su valor inicial. La notación utilizada para el valor de la opción será por ejemplo f_{uu} si el valor de la opción subió dos veces o bien f_{ud} si el precio subió y en el próximo paso descendió. Supondremos que la tasa es la tasa libre de riesgo r y la longitud del tiempo en cada paso es Δt años. Aplicando repetidamente la ecuación 3.2 tendremos lo siguiente

$$f_u = e^{-r\Delta T}[pf_{uu} + (1-p)f_{ud}] \tag{3.5}$$

$$fd = e^{-r\Delta T}[pf_{ud} + (1-p)f_{dd}] \tag{3.6}$$

$$f = e^{-r\Delta T}[pf_u + (1-p)f_d] \tag{3.7}$$

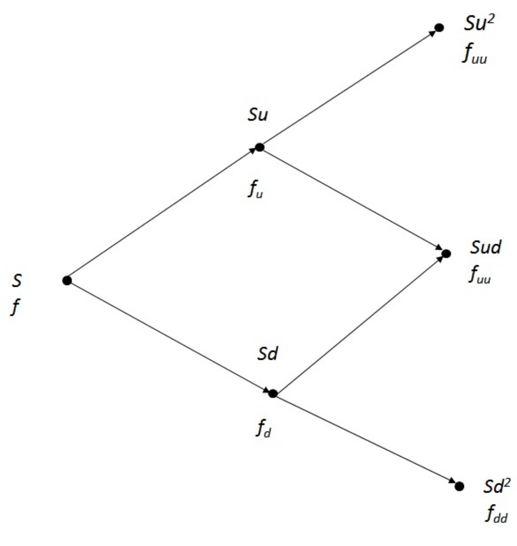

Figura 3.5: Precio de una opción en un árbol binomial de dos pasos generalizado.

Si sustituimos las ecuaciones 3.5 y 3.6 en 3.7 obtenemos lo siguiente

$$f = e^{-2r\delta T}[p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}] \tag{3.8}$$

La ecuación anterior es consistente con el principio de valuación de riesgo neutral mencionado anteriormente. Aquí se tiene que p $(1-p)$ y $(1-p)^2$ son las probabilidades del nodo superior, medio e inferior respectivamente. De la ecuación 3.8 podemos concluir que el precio de la opción es igual al valor presente esperado del *payoff* en un *risk-neutral world* a la tasa libre de riesgo. Lo anterior se sigue cumpliendo aunque aumentemos más nodos al árbol.

3.4. El Modelo de Black-Scholes

En la sección anterior hablamos un poco sobre cómo podemos utilizar los árboles binomiales para poder valuar el costo de una opción al día de hoy. Resulta que existe una generalización de este método, pues teniendo un número de pasos discreto, nos preguntamos si se seguirá cumpliendo el modelo al hacer tender el número de pasos a infinito, ahí surge el modelo de Black-Scholes. Este modelo ha tenido una gran influencia y uso por parte de las personas que se dedican a hacer transacciones ya sea para especular o para cubrirse sobre un riesgo utilizando las opciones para ello.

Fue elaborado por Fischer Black, Myron Scholes y Robert Merton en 1970, quienes ganaron el premio Novel por ello, aunque desafortunadamente Fischer Black no vivía ya para ese entonces.

3.5. Derivación de la ecuación diferencial de Black-Scholes-Merton

En esta sección utilizaremos los resultados vistos en el apendice A sobre Procesos Estocásticos y B sobre el proceso de precios de acciones siguiente

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \tag{3.9}$$

Supongamos que f es el precio de una opción *call*, el cual depende del precio S del activo subyacente y del tiempo t. Por lo tanto

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dz \tag{3.10}$$

Las siguientes ecuaciones corresponden a la versión discreta de las ecuaciones 3.9 y 3.10.

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z \tag{3.11}$$

y

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \Delta z \tag{3.12}$$

donde ΔS y Δf son los cambios en f y S en un intervalo de tiempo pequeño Δt. Como se observa en el apéndice A, el proceso de Wiener tanto de f como de S será el mismo, es decir $\Delta z = \epsilon\sqrt{\Delta t}$ en las ecuaciones 3.11 y 3.12 es el mismo proceso. Por lo anterior si elegimos un portafolio que contenga la opción y el activo subyacente, su proceso de Wiener puede ser eliminado.

Elegiremos el portafolio de la siguiente manera

-1: opción.

$+\frac{\partial f}{\partial S}$: acciones.

Lo anterior significa que que el tenedor de dicho portafolio se encuentra en una posición corta con la opción y una posición larga en $\frac{\partial f}{\partial S}$ activos. Definiremos ρ como el precio del portafolio el cual será

$$\rho = -f + \frac{\partial f}{\partial S}S \tag{3.13}$$

Ahora, el cambio en el valor del portafolio en un intervalo de tiempo Δt esta dado por la ecuación

$$\rho = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S \tag{3.14}$$

Si sutituimos ΔS de la ecuación 3.11 y f de la ecuación 3.12 en la ecuación anterior. se tendrá lo siguiente

$$\Delta\rho = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t \tag{3.15}$$

En la ecuación anterior, podemos observar que no se involucra el proceso Δz, el cual provocaría que el portafolio tenga cierto riesgo. Por tanto concluimos que el portafolio es un portafolio sin riesgo durante el tiempo Δt, por lo tanto podemos concluir que se gana, únicamente la tasa libre de riesgo, durante este tiempo Δt, ya que si este no fuese el caso, se tendría una clara oportunidad de arbitraje. Cabe señalar que el portafolio permanece sin riesgo únicamente en un intervalo infinitamente pequeño ya que, conforme el precio del activo subyacente S y el tiempo t cambian la cantidad de acciones $\frac{\partial f}{\partial S}$ también cambiará, por lo cual, para lograr que un portafolio permanezca sin riesgo es necesario actualizar constantemente la cantidad (en cierta proporción) tanto de la opción como del activo subyacente. Por lo tanto podemos decir que

$$\Delta\rho = r\rho\Delta t$$

donde r es la tasa libre de riesgo; si sustituimos el valor $\Delta\rho$ de la ecuación 3.15 y el valor de ρ de la ecuación 3.14 en la ecuación anterior se obtiene la siguiente ecuación

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left(f - \frac{\partial f}{\partial S}S\right)\Delta t$$

de la cual se obtiene que

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \tag{3.16}$$

La ecuación anterior es la ecuación diferencial de Black-Scholes-Merton, la cual tiene diferentes soluciones de acuerdo a los diferentes derivados con activo subyacente S. El derivado que se obtiene depende de las condiciones de frontera utilizadas, las cuales especifican los valores del derivado en la frontera de los posibles valores de S y t. Para el caso de opciones europeas *call* la condición clave es tomar $f = max(S - X, 0)$, con $t = T$, mientras que para el caso de una opción *put* europea $f = max(X - S, 0)$, con $t = T$

3.6. Fórmulas de Black-Scholes para fijar precios

El modelo es utilizado para valuar opciones europeas *call* y *put* que no pagan dividendos. En estricto rigor se utiliza únicamente para valuar opciones *put*, pero gracias a la ecuación de Put- Call parity vista en en el capítulo 1 podemos tener tambien el caso de opciones *call.*

Las fórmulas de Black-Scholes para precios a tiempo cero de una opción europea *call* y *put* que no paga dividendos son las siguientes

$$c = S_0 N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2) \tag{3.17}$$

y

$$p = Xe^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \tag{3.18}$$

donde

$$d_1 = \frac{ln(S_0/X) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$d_1 = \frac{ln(S_0/X) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

y denotamos $N(x)$ como la función de distribución acumulada para una variable con distribución normal con media cero y varianza 1, S_0 es el precio de la acción al tiempo cero, X es el *strike price*, r es la tasa libre de riesgo compuesta continuamente, σ es la volatilidad del precio de la acción y T es el tiempo de madurez de la opción.

Una forma de encontrar las fórmulas de Black-Scholes es resolviendo la ecuación diferencial de Black-Scholes-Merton 3.16 sujeta a las condiciones de frontera mencionadas anteriormente.

Apéndice A

Algunos temas de Procesos Estócasticos

En esta sección se incluyen los temas necesarios para entender la valuación de opciones presentada en el capítulo 3. Estas herramientas son poderosas pues no sólo permiten valuar opciones sino derivados un poco mas complejos, no obstante nosotros nos centramos únicamente en las opciones.

Definición A.0.1. *Una variable que cambia su valor a través del tiempo de manera aleatoria se dice que sigue un* ***proceso estocástico****.*

Estos procesos pueden clasificarse como de tiempo (o variable) discreto o continuo. En el caso de procesos de tiempo (o variable) discreto, la variable puede cambiar su valor únicamente en puntos fijos de tiempo (la variable toma ciertos valores posibles). En el caso de procesos de tiempo (o variable) continuo, el tiempo puede cambiar su valor en cualquier momento (la variable toma cualquier valor dentro de un intervalo)

En lo consecuente supondremos que los procesos estocásticos en cuestión son de variable y tiempo continuo; cabe señalar que en la práctica no se observa que los precios de acciones sigan este tipo de procesos empero dichos procesos parecen predecir y proveer modelos correctos para los propósitos requeridos.

A.1. Propiedad de Markov

Definición A.1.1. *Un* ***proceso de Markov*** *es un proceso estocástico en donde suponiendo conocido el estado presente del sistema, los estados anteriores no tienen influencia en los estados futuros del sistema. Lo anterior se expresa de la siguiente manera: para cualesquiera estados* $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$*,* x_n*,* x_{n+1} *se cumple la igualdad*

$$p(x_{n+1} \mid x_0, \ldots, x_n) = p(x_{n+1} \mid x_n)$$

.

El proceso de Markov intuitivamente nos dice que para predecir el valor futuro de la variable únicamente es relevante el valor presente y no los valores pasados. Podríamos pensar que la información pasada está de cierta manera "guardada" ya en el valor presente y por ello tomar en cuenta valores pasados sería irrelevante.

La propiedad de Markov sobre valores de acciones es consistente con la **la forma débil de los mercados eficientes** la cual dice que el precio actual de una acción contiene toda la información en un registro de precios anterior , como mencionamos arriba.

Definición A.1.2. *Se dice que un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X_t : t \geq 0\}$ *tiene incrementos independientes si para cualesquiera tiempos* $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ *las variables* $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ *son independientes.*

A.2. Procesos de Wiener

A continuación se da la definición de un proceso de Wiener de dos maneras distintas; la primera corresponde a la definición matemática formal, mientras que la segunda es una definición más intiutiva.

Definición A.2.1. *Un* ***Proceso de Wiener*** *o* ***Movimiento Browniano*** *unidimensional de parámetro* σ^2 *(varianza) es un proceso estocástico* $\{Z_t : t \geq 0\}$*. con valores en* $\mathbb{R}$ *que cumple las siguientes propiedades*

1. *$Z_0 = 0$ c-s.*
2. *Las trayectorias son continuas.*
3. *El proceso tiene incrementos independientes.*
4. *Para cualesquiera tiempos $0 \leq s < t$, la variable incremento $Z_t - Z_s$ tiene distribución $N(0, \sigma^2(t-s))$*

Definición A.2.2. *Un tipo de proceso estocástico markoviano cuya variable tiene media de cambio 0 y una tasa de varianza de 1 anual se dice que sigue un* ***Proceso de Wiener*** *o* ***Movimiento Browniano****.*

Lo anterior podemos formalizarlo diciendo que, una variable que sigue un proceso de Wiener tendrá las siguientes propiedades.

Propiedad 1. El cambio Δz durante un periodo pequeño de tiempo Δt será:

$$\Delta z = \epsilon\sqrt{\Delta t} \tag{A.1}$$

siendo ϵ un número generado aleatoriamente con una distribución normal estandarizada $\phi(0,1)$.

Propiedad 2. Los valores de Δz para cualesquiera dos intervalos de tiempo Δt son independientes.

De la primera propiedad podemos concluir que Δz también tendrá una distribución normal con media 0, desviación estandar $\sqrt{\Delta t}$ y varianza Δt, mientras que de la segunda propiedad concluimos que z sigue un proceso de Markov.

Asumiendo la definición anterior consideremos el incremento en el valor de z en un periodo de tiempo T el cual podemos denotar como $z(T) - z(0)$ y haremos una partición de dicho intervalo considerando N pequeños intervalos de longitud Δt es decir:

$$N = \frac{T}{\Delta t}$$

de este modo tendremos que:

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^{N} \epsilon_i \sqrt{\Delta t} = \Delta z_i \tag{A.2}$$

donde ϵ_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ es un número generado aleatoriamente con distribución normal $\phi(0, 1)$

Notése por la segunda propiedad que ϵ_i's son independientes unos de otros y por la ecuación A.2 podemos decir que:

la media de $[z(T) - z(0)] = 0$
la varianza de $[z(T) - z(0)] = N\Delta t = T$
la desviación estándar de $[z(T) - z(0)] = \sqrt{T}$

lo cual es consistente con lo mencionado anteriormente.

Proceso generalizado de Wiener

El proceso básico de Wiener mencionado hasta ahora considera una tasa de cambio de cero y varianza 1 lo cual significa que, el valor esperado de Z en cualquier momento en el futuro será igual a su valor actual, mientras que la varianza de Z en un intervalo de tiempo de longitud T es igual a T. Definimos el proceso generalizado de Wiener como sigue.

Definición A.2.3. *Un proceso generalizado de Wiener para una variable x se define en términos de z como:*

$$dx = adt + bdz \tag{A.3}$$

donde a y b son constantes.

Podemos entender la ecuación anterior como sigue: el término *adt* es la tasa de acumulación esperada, la cual nos dice cómo cambia el promedio de a por unidad de tiempo, es decir, si omitimos el término bdz se tendría la siguiente ecuación

$$\frac{dx}{dt} = a$$

o de otra manera

$$x = x_0 + at$$

dónde x_0 es el valor de x al tiempo cero.

El término bdz puede pensarse como el "ruido" o variabilidad del camino seguido por x, y podemos observar que la cantidad de ruido antes mencionado será b veces un proceso de Wiener dz, el cual tiene desviación estándar de b pues, como mencionamos anteriormente, el proceso de Wiener tiene desviación estandar de 1. Utilizando las ecuaciones A.1 y A.3 podemos pensar al cambio Δx en un intervalo pequeño de tiempo Δt como

$$\Delta x = a\Delta t + b\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

donde ϵ como antes es elegido aleatoriamente, con distribución normal estándarizada. De esta manera podemos decir que:

La media de $\Delta x = a\Delta t$

La desviación estándar de $\Delta x = b\sqrt{\Delta t}$

La varianza de $\Delta x = b^2\Delta t$

Si consideramos ahora cualquier intervalo de tiempo T, por un razonamiento similar se puede mostrar que el cambio en se distribuye de manera normal con:

Media de cambio de $x = aT$

Desviación estándar de cambio en $x = b\sqrt{T}$

Varianza de cambio de $x = b^2T$

En la figura A.1 se ilustra el proceso de Wiener dado por la ecuación A.3 el cual tiene una tasa de deriva esperada de a y una tasa de varianza (varianza por unidad de tiempo) de b^2.

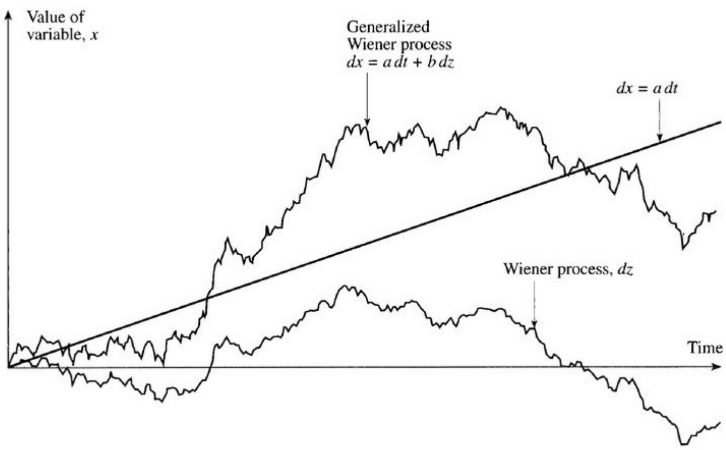

Figura A.1: Proceso Generalizado de Wiener con $a = 0.3$ y $b = 1.5$

Movimiento geométrico Browniano

En esta sección detallamos brevemente el **Movimiento geométrico Browniano**. La versión discreta del modelo puede expresarse como

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t} \tag{A.4}$$

o

$$\Delta S = \mu S\Delta t + \sigma S\epsilon\sqrt{\Delta t} \tag{A.5}$$

donde la variable ΔS es el cambio en el precio de la acción en un intervalo pequeño de tiempo Δ, ϵ será número generado aleatoriamente con distribución normal estandarizada. El parámetro μ es la tasa esperada de retorno por unidad de tiempo de la acción, mientras que σ representa la volatilidad de la acción, los cuales se asume que son constantes.

La parte izquierda de la ecuación A.4 es la ganancia sobre la acción en un periodo de tiempo pequeño, Δt, el término $\mu\Delta t$ es el valor esperado de dicha ganancia y el término $\sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}$ es la parte estocástica de la ganancia antes mencionada. También podemos observar que, la varianza del componente estocástico y, por consiguiente de toda la ganancia será $\sigma^2\Delta t$. Más aún la ecuación A.4 muestra que $\frac{\Delta S}{S}$ es normalmente distribuida con media $\mu\Delta t$ y desviación estándar $\sigma\sqrt{\Delta t}$, es decir

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t})$$

A.3. Proceso de Ito

Definición A.3.1. *Un proceso de Ito es un proceso generalizado de Wiener cuyos parametros a y b son funciones del valor de la variable subyacente x, asi como del tiempo t, es decir*

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \tag{A.6}$$

Podemos inferir de la definición anterior que el cambio de x a $x + \Delta x$ en un intervalo pequeño de tiempo entre t y $t + \Delta t$ sera de

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

de lo anterior podemos observar que la tasa de acumulación y varianza de x permanecen constantes durante un intervalo de tiempo entre t y Δt siendo $a(x,t)$ y $b^2(x,t)$ la tasa de acumulación y la varianza respectivamente.

Lema de Ito

El precio de una acción es una función cuyo valor depende del precio del activo subyacente en ese momento. En general, la valuación del precio de cualquier derivado financiero será una función de variables estocásticas subyacentes al derivado en el momento en el que quiera ser valuado. En esta sección analizaremos un resultado interesante e importante el lema de Ito.

supongamos que el valor de una variable x sigue un proceso de Ito.

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \tag{A.7}$$

donde dz es un proceso de Wiener y a y b son funciones de x y de t. La variable x tiene una tasa de deriva de a y tasa de varianza b^2. Entonces el lema de Ito lo que muestra es que, dada una función G, de x y t sigue el proceso

$$dG = (\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdz \tag{A.8}$$

donde dz es el mismo proceso de Wiener que en la ecuación A.6. De aquí, podemos concluir que G sigue un proceso de Ito, el cual tiene tasa de deriva de

$$\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2$$

y tasa de varianza de

$$(\frac{\partial G}{\partial x})^2 b^2$$

Anteriormente dijimos que

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \tag{A.9}$$

con μ y σ constantes modela los movimientos del precio de una acción. Por el lema de Ito, existe una función G que depende de S y de t tal que

$$dG = (\frac{\partial G}{\partial S}\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)dt + \frac{\partial G}{\partial x})\sigma S dz$$

Notemos que, tanto G como S son afectados por la misma incertidumbre subyacente dz. Lo anterior es de mucha utilidad en la derivación de la fórmula de Black-Scholes, la cual se encuentra en capítulo 3.

Apéndice B

Precios de acciones.

B.1. El proceso para precios de acciones

En esta sección analizaremos el proceso estocástico que siguen los precios de acciones que no pagan algún tipo de dividendo, el cual es un proceso generalizado de Wiener, es decir se tiene una tasa de acumulación esperada constante, así como una tasa de varianza constante. Debemos notar que el modelo anterior no toma en cuenta un aspecto importante; es natural pensar que un inversionista requerirá un porcentaje de ganancia esperada independientemete del precio de la acción.

Por ello debemos remplazar la constante esperada de la tasa de acumulación, dividiendo la tasa de deriva por el precio, obteniendo así la ganancia esperada, la cual será constante. Sea S el precio de la acción al tiempo t, entonces la tasa esperada de acumulación puede asumirse como μS donde μ es la tasa esperada de ganancia sobre la acción expresado en forma decimal. Lo anterior nos dice que la tasa esperada de incremento en el precio S de la acción en un intervalo pequeño de tiempo Δt será $\mu S \Delta t$. Considerando que la volatilidad es cero entonces

$$\Delta S = \mu S \Delta t$$

tomando límite cuando $\Delta t \to 0$

$$dS = \mu S dt$$

así

$$\frac{dS}{S} = \mu dt$$

con lo cual se tiene

$$S_T = S_0 e^{\mu T} \tag{B.1}$$

siendo S_0 y S_T el precio de la acción al tiempo cero y T respectivamente. La ecuación B.1 muestra que bajo la suposición anterior el precio de una acción crecerá a la tasa μ compuesta continuamente por unidad de tiempo. Claramente en la práctica el precio de una acción presentará cierta volatilidad, pero podemos asumir que la variabilidad del precio en un periodo corto de tiempo Δt es la misma sin importar el precio de la acción, es decir, un inversionista tendrá la misma incertidumbre sobre el porcentaje de ganancia independientemente de si el precio de una acción es bajo o alto. Por ello podemos pensar que la desviación estándar de cambio en el precio en un periodo pequeño de tiempo Δt deberá ser proporcional al precio de la acción, lo cual sugiere el modelo siguiente, el cual es más usado en la observación o el análisis del comportamiento de los precios de acciones.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

o bien

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \tag{B.2}$$

donde σ es la volatilidad sobre el precio de la acción y μ es la tasa esperada de retorno.

Propiedad Lognormal de los precios de acciones

Definición B.1.1. *Una variable tiene distribución lognormal si el logaritmo natural de la variable es normalmente distribuida.*

Mostramos anteriormente que el precio de una acción sigue un movimiento Browniano geométrico, es decir

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

se sigue que

$$d\ lnS = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dz$$

De aquí, podemos observar que la variable en lnS_T sigue un proceso generalizado de Wiener, el cambio de S dentro del intervalo $[0, T]$ será normalmente distribuido, por lo cual

$$lnS_T - lnS_0 \sim \phi[(\mu - \sigma/2)T, \sigma\sqrt{T}]$$

De aquí se sigue que

$$ln\frac{S_T}{S_0} \sim \phi[(\mu - \sigma/2)T, \sigma\sqrt{T}]$$

con lo que se tiene que

$$lnS_T \sim \phi[lnS_0 + (\mu - \sigma/2)T, \sigma\sqrt{T}]$$

donde

S_T es el *stock price* a tiempo T, S_0 es el *stock price* a tiempo 0 y $\phi(m, s)$ es la función de distribución normal con media m y desviación estándar s. La ecuación anterior nos muestra que lnS_T es normalmente distribuida de esta manera S_T tendrá una distribución lognormal.

Bibliografía

[1] Hull John C., *Options,Futures, & Other Derivatives*, Prentice Hall, 1999.

[2] Peter Breuer, *Measuring Off-Balance-Sheet Leverage*, FMI,2000.

[3] Ingo Fender, Ulf Lewrick, *Calibrating Leverage Ratio*,BIS Quarterly Review, December 2015.

[4] Basel Commitee on Banking Supervision,*Base III leverage ratio framework and disclosure requiremets*,January 2014

[5] Pascucci Andrea *PDE and Martingale Methods in Option Pricing*, Springer, 2011.