



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y
APLICADAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

MODELOS DE MECÁNICA ESTADÍSTICA EN DINÁMICA SIMBÓLICA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

M. EN C. LUIS ARMANDO CORONA POPOCA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. EDGARDO UGALDE SALDAÑA

CO-DIRECTOR

DR. RAÚL SALGADO GARCÍA

CUERNAVACA, MORELOS

SEPTIEMBRE DE 2022

Agradecimientos

La presente tesis es un esfuerzo en el cual, directa o indirectamente, participaron varias personas leyendo, opinando, corrigiendo, teniéndome paciencia, dando ánimo, acompañando en los momentos de crisis y en los momentos de felicidad.

El presente trabajo de tesis primeramente me gustaría agradecerle a Dios por bendecirme para llegar hasta donde he llegado, porque hiciste realidad este sueño anhelado.

Al Dr. Edgardo Ugalde, mi Director de Tesis, por su presencia incondicional, sus apreciados y relevantes aportes, críticas, comentarios y sugerencias durante el desarrollo de esta investigación.

Al Dr. Raúl Salgado, por el apoyo como co-director y críticas constructivas, por los cursos que me impartió a lo largo de mi vida académica en los cuales aprendí mucho.

A mi madre por hacer de mí una mejor persona a través de sus consejos, enseñanzas y por darme una segunda vida.

Debo agradecer de manera especial a Melissa Cervantes por todo el apoyo que me brindó y el ánimo que me brinda día con día para alcanzar nuevas metas, tanto profesionales como personales.

Finalmente agradezco al CONACyT por la beca otorgada.

Gracias

Índice general

1. INTRODUCCIÓN	3
2. Conceptos Preliminares	7
2.1. La Dinámica Simbólica de la Mecánica Estadística	7
3. Antecedentes: Mecánica Estadística en Dinámica Simbólica	21
3.1. Modelo de Ising en 2D	21
3.2. Argumento de Peierls	23
3.3. La correspondencia de Burton-Steif	30
3.4. Modelo de Potts	37
4. Resultados	41
4.1. Correspondencia de Burton-Steif en el modelo de Potts	41
4.2. Un nuevo modelo tipo vértices en 2D	44
4.2.1. Presentación de un nuevo modelo tipo vértices	45
4.2.2. Transición de fase en el nuevo modelo tipo vértices	52
4.2.3. Correspondencia de Burton-Steif en el nuevo modelo tipo vértices .	59
5. CONCLUSIONES	71
Bibliografía	75

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Una rama muy conocida de las Matemáticas y de la Física es la de sistemas dinámicos, donde se puede definir a un sistema físico como un sistema dinámico, es decir, como un conjunto de objetos compuestos por materia que se relacionan entre sí de una forma causal. Estos sistemas se caracterizan por estar evolucionando en el tiempo; el comportamiento en dicho estado se puede caracterizar determinando los límites del sistema (ellos son una selección de aquellos componentes que contribuyen a generar sus dinámicas, y luego se determina el espacio de descripción donde se llevará a cabo el estudio y que puede ser discreto o continuo, omitiendo toda clase de aspectos irrelevantes), además de los elementos y sus relaciones. De esta forma se pueden elaborar modelos que buscan representar la estructura del mismo sistema.

Los sistemas dinámicos pueden dividirse en dos grandes clases: aquellos en los que el tiempo varía continuamente y en los que el tiempo transcurre discretamente. Los sistemas dinámicos que se abordan en esta tesis son los de tiempo discreto, que a su vez tienen relación con la Dinámica Simbólica, que es una herramienta para estudiar sistemas dinámicos discretos. Su ventaja recae en el hecho de que esta técnica ayuda a representar trayectorias como sucesiones infinitas de símbolos. Esto simplifica el análisis de cierto tipo de sistemas que son muy difíciles de estudiar por otra vía basándose en la ecuación que modela la dinámica de interés.

Una aplicación que en particular se le da a la Dinámica Simbólica es estudiar sistemas

físicos. En esta tesis se estudian modelos físicos de la Mecánica Estadística, que es una rama de la Física que, con la ayuda de la probabilidad, se concentra en estudiar el comportamiento de sistemas mecánicos macroscópicos, desde un punto de vista microscópico, es decir explica la termodinámica de un sistema grande a partir de la dinámica de las partículas que lo constituyen.

Existen procesos físicos conocidos como transiciones de fase (existen transiciones de fase de primer orden y segundo orden). En esta tesis se estudian las transiciones de fase de segundo orden. Un ejemplo de una transición de fase de primer orden, la podemos percibir, por ejemplo, suponiendo que conocemos la fuerza entre moléculas de agua. Entonces deberíamos ser capaces de predecir la presión y la densidad dentro de un hervidor de agua a temperatura ambiente. Más interesante, deberíamos ser capaces de predecir que esta densidad cambiará de repente y de forma dramática a medida que la temperatura se incrementa de 99°C a 101°C : el agua cambia de líquido a vapor.

Un modelo muy conocido y estudiado que presenta transición de fase de segundo orden, es el modelo de Ising, el cual es un modelo físico propuesto por Wilhelm Lenz en 1920, fue diseñado con el objetivo de modelizar materiales ferromagnéticos, para estudiar así sus propiedades y las transiciones de fase que puede presentar un sistema de tales características. El modelo de Ising pertenece a una clase de modelos que permiten un tratamiento completamente analítico sin tener que recurrir a aproximaciones, es decir su función de partición pueda ser calculada exactamente. Estos modelos se conocen como modelos con solución exacta o modelos exactamente resueltos.

En 1994, Robert Burton and Jeffrey Steif utilizando el resultado de Peierls sobre el modelo de Ising [1], desarrollaron en [3] una estrategia para construir subshift de tipo finito fuertemente irreducibles que admiten varias medidas de máxima entropía. Esta estrategia que además fue aplicada por Olle Häggström en [6, 8], permitió definir familias parametrizadas de subshift de tipo finito fuertemente irreducibles que experimentan una transición de fase en el sentido de que cuando incrementamos el valor del parámetro, el subshift correspondiente pasa de un sistema con una única medida de máxima entropía a un sistema que admite múltiples medidas de máxima entropía (lo que equivale en Mecáni-

ca Estadística a una transición de fase). Para algunos de estos ejemplos, el simplex de medidas maximizantes se puede determinar con precisión y, por lo tanto, para cada $q \geq 2$ (espines), se pueden dar ejemplos de tales sistemas cuyo simplex de medidas maximizantes coincide con el simplex estándar q -dimensional (esto se puede lograr con un subshift fuertemente irreducible de tipo finito en dimensión 2). Usando este enfoque también se construyen subshift fuertemente irreducibles de tipo finito con un continuo de medidas ergódicas maximizantes. El secreto del éxito de este enfoque reside en el hecho de que proporciona un diccionario entre la Mecánica Estadística en equilibrio y la Dinámica Simbólica, lo que permite traducir una plétora de resultados rigurosos sobre la coexistencia de fases desde la Mecánica Estadística en equilibrio hasta la Dinámica Simbólica. De hecho, uno de los resultados en [3], es la existencia de un subshift fuertemente irreducible de tipo finito en dimensión dos que soporta al menos dos medidas ergódicas de máxima entropía. De esta correspondencia entre modelos de la Mecánica Estadística de equilibrio y sistemas simbólicos, Burton y Steif derivan en [4], usando una idea análoga utilizada por Milos Zahradnik en [9], una descripción completa del simplex de medidas de máxima entropía. En [8], Olle Häggström generaliza la correspondencia mencionada anteriormente para una clase más amplia de interacciones de corto alcance, y establecen formalmente una correspondencia en el sentido de que para una clase de modelos de la Mecánica Estadística con interacciones con valores racionales, todos los estados de equilibrio pueden ser obtenidos como una proyección de medidas de máxima entropía de un correspondiente subshift fuertemente irreducible de tipo finito. En esta tesis, estudiamos más a fondo esta correspondencia, centrándonos en el modelo de Potts y en un modelo de nuestra autoría inspirado en los modelos de vértices de la Mecánica Estadística. Nuestro objetivo es ilustrar cómo la correspondencia de Burton-Steif se puede utilizar para explotar resultados conocidos en Mecánica Estadística, en particular las relativas a las transiciones de fase, en el contexto de la Dinámica Simbólica. Los modelos de la Mecánica Estadística que consideramos tienen la particularidad de que la energía se concentra en contornos, de modo que el comportamiento del sistema esté determinado por una competencia entre energía y entropía que cambia con la temperatura. A cada uno de estos modelos de la Mecánica

Estadística, la correspondencia Burton-Steif les asigna una familia numerable de subshift fuertemente irreducibles de tipo finito.

La estructura de la tesis es de la siguiente manera: en el capítulo dos escribimos un recordatorio de algunas nociones básicas que usaremos a lo largo de la tesis. En el capítulo tres damos los antecedentes que ayudan a la creación de esta tesis. Cabe destacar que fueron reescritas para su mayor comprensión. En el capítulo cuatro están los resultados, donde desarrollaremos esta correspondencia y analizaremos algunas de sus consecuencias. Ilustramos esta correspondencia en el caso del modelo de Potts y en un nuevo modelo inspirado en los modelos de vértices de la Mecánica Estadística, para el cual recuperamos la fenomenología del modelo Ising. En el capítulo cinco cerramos la tesis con algunas conclusiones.

Capítulo 2

Conceptos Preliminares

En ese capítulo definiremos los conceptos necesarios para poder desarrollar y mejorar la comprensión de los antecedentes y resultados obtenidos en esta tesis; éstos involucran conceptos de Dinámica Simbólica y Mecánica Estadística.

2.1. La Dinámica Simbólica de la Mecánica Estadística

Iniciamos con los conceptos de Dinámica Simbólica en dos dimensiones, los cuales son obtenidos en su mayoría de [3], para continuar con algunos conceptos de Mecánica Estadística y concluir con la construcción del concepto de contorno, el cual cabe mencionar, es equivalente en ambas ramas.

Consideramos un sistema dinámico simbólico cuya estructura es \mathbb{Z}^2 y cuyo conjunto de símbolos o también llamado **alfabeto** es \mathcal{A} , un conjunto finito de al menos dos elementos. A \mathbb{Z}^2 se le asigna la norma $\| \cdot \|_{L^1}$ (vecino más cercano) así que $\|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2|$.

Sea Λ un subconjunto de \mathbb{Z}^2 , entonces la frontera interior de Λ es

$$\partial\Lambda = \{x \in \Lambda : \exists y \in \Lambda^c \text{ con } \|x - y\| = 1\}.$$

En general Λ será un subconjunto finito de \mathbb{Z}^2 , al menos que se indique lo contrario.

Una **configuración infinita** es una función $\eta^* : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathcal{A}$ y una **configuración finita**

o **bloque** es una función de $\eta : \Lambda \subset \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathcal{A}$. Las $x \in \Lambda$ son llamadas ubicaciones o sitios y η_x es el valor de la configuración en la ubicación x .

Nota: A lo largo de la tesis se utilizará solo η^* y η para indicar si una configuración es infinita o finita. Habrá casos en el que en un mismo enunciado aparezcan dos configuraciones infinitas o finitas, para ello se utilizarán letras distintas, indicando el tipo de configuración.

Una configuración $\eta : \Lambda \rightarrow \mathcal{A}$ es una restricción de una configuración $\zeta : \Lambda' \rightarrow \mathcal{A}$ si $\Lambda \subseteq \Lambda'$ y ζ coincide con η en Λ . Decimos en este caso que ζ es una extensión de η y lo denotamos por $\zeta_\Lambda = \eta$, ($\zeta_\Lambda \in \mathcal{A}^\Lambda := \{\eta : \Lambda \rightarrow \mathcal{A}\}$).

\mathbb{Z}^2 actúa sobre las configuraciones por traslación. Si $y \in \mathbb{Z}^2$ y $x \in \mathbb{Z}^2$ fijo, $T_{yx} = x - y$ y para $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^2$, el conjunto $T_y\Lambda = \{x - y : x \in \Lambda\}$. Si $\eta : \Lambda \rightarrow \mathcal{A}$, además sea $T_y\eta_x = \eta(T_{yx})$ para $x \in T_{-y}\Lambda$.

Sea $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ la colección de todas las $\eta^* : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathcal{A}$ equipadas con la topología producto. Los subconjuntos X de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ que son cerrados en la topología producto usual y shift invariantes o T -invariantes (i.e., $\eta^* \in X$ y $y \in \mathbb{Z}^2$ implica $T_y\eta^* \in X$) son conocidos como *subshift*.

La siguiente definición es de *subshift de tipo finito* mediante configuraciones finitas prohibidas o bloques prohibidos.

Definición 2.1.1. Sea $\eta^i : \Lambda_i \rightarrow \mathcal{A}; 1 \leq i \leq K$ un conjunto finito \mathcal{F} de configuraciones con Λ_i finito para cada $1 \leq i \leq K$. El **subshift de tipo finito** (en 2 dimensiones) correspondiente a \mathcal{F} , es el conjunto $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ que consiste de todas las configuraciones $\eta^* : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathcal{A}$ tales que para todo $y \in \mathbb{Z}^2$, no se da el caso que $T_y\eta^*$ sea una extensión de algún η^i . (Los η^i deberíamos pensarlos como bloques prohibidos).

La siguiente definición es equivalente a la anterior de **subshift de tipo finito**, solo que usamos una notación compacta.

Definición 2.1.2. X es un **subshift de tipo finito** si existe una familia de bloques prohibidos \mathcal{F} tal que

$$X_{\mathcal{F}} := \left\{ \eta^* \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2} \mid \forall i \in \mathbb{Z}^2, \mathbf{F} \subsetneq \mathbb{Z}^2 \text{ finito} : \eta^*|_{i+\mathbf{F}} \notin \mathcal{F} \right\}$$

Se debe tomar en cuenta que $X_{\mathcal{F}}$ es un subshift de tipo finito, entonces $X_{\mathcal{F}}$ es cerrado bajo la topología producto e invariante bajo traslaciones (T-invariante).

Existe otra definición de *subshift de tipo finito* mediante configuraciones finitas admisibles o bloques admisibles.

Si $\bar{\eta} : \Lambda \rightarrow \mathcal{A}$ es una configuración, decimos que $\bar{\eta}$ es una configuración finita admisible o bloque admisible en X si $\exists \eta^* \in X$ tal que $\bar{\eta}$ es una restricción de η^* . Sea $\Lambda_n = [-n, n]^2$ y $\mathcal{L}_\Lambda(X) = \{\bar{\eta} : \Lambda_n \rightarrow \mathcal{A} \text{ con } \bar{\eta} \text{ admisible}\}$. Además sea $|\mathcal{L}_\Lambda(X)|$ la cardinalidad de $\mathcal{L}_\Lambda(X)$ y $[\bar{\eta}] = \{\eta^* \in X : \eta^* \text{ es una extensión de } \bar{\eta}\}$, $[\bar{\eta}]$ se le conocen como **conjuntos cilindros**. Cabe destacar que la topología en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ es generado por los conjuntos cilindros y X es cerrado en esta topología.

Definición 2.1.3. X es un subshift de tipo finito si para algún $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ y una colección finita $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}^\Lambda$ tenemos

$$X := \{\eta^* \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2} : (T_z \eta^*)_\Lambda \in \mathcal{L} \forall z \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Los *subshifts de tipo finito* definidos por sus bloques prohibidos son equivalentes a los definidos por sus bloques admisibles.

Definición 2.1.4. Un $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ es un sistema simétrico de primeros vecinos si existe un subconjunto $G \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ que es simétrico (i.e. $(e, f) \in G \implies (f, e) \in G$) y tal que $X = \{\eta : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathcal{A} : x, y \in \mathbb{Z}^2, \|x - y\| = 1 \text{ implica } (\eta_x, \eta_y) \notin G\}$.

Notamos que un sistema simétrico de primeros vecinos es un subshift de tipo finito.

A continuación definiremos la entropía topológica la cual nos da información de la medida del tamaño del subshift, así como de su complejidad.

Definición 2.1.5. La entropía topológica del subshift $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ es

$$h_{top}(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\mathcal{L}_\Lambda(X)|}{|\Lambda_n|}.$$

La existencia de este límite se debe al lema de subaditividad de Fekete's. Una prueba se puede ver en [26]. La entropía topológica además nos da una tasa de crecimiento exponencial de $|\mathcal{L}_\Lambda(X)|$ con respecto a $|\Lambda_n|$.

Ya que definimos un *subshift de tipo finito* y como obtenemos su entropía topológica, a continuación, daremos a conocer uno de los conceptos importantes de esta tesis; las **medidas de máxima entropía**.

La colección de todas las medidas de probabilidad de Borel en X la denotamos por $\mathcal{M}^1(X)$. Es un conjunto convexo y se convierte en un espacio topológico, considerando la topología débil. La subcolección de medidas de probabilidad de Borel T-invariantes, la cual se denota por $\mathcal{M}_T^1(X)$, es un simplex en esta topología. Una medida $\mu \in \mathcal{M}_T^1(X)$ es ergódica, si cualquier conjunto T-invariante tiene una medida μ igual a cero o uno.

Definición 2.1.6. *La entropía de la medida de $\mu \in \mathcal{M}_T^1(X)$ es*

$$h(\mu) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{\bar{\eta} \in \mathcal{A}^{\Lambda_n}} \mu[\bar{\eta}] \log \mu[\bar{\eta}].$$

De nuevo, el límite existe por subaditividad.

Para cualquier medida μ tenemos $h(\mu) \leq h_{\text{top}}(X)$. Una medida μ para la cual la entropía de la medida coincide con la entropía topológica, se conoce como **medida de máxima entropía**.

Teorema 2.1. *Sea X un subshift de tipo finito. Sea $\mathcal{M}_T^1(X)$ sea el conjunto de medidas invariantes bajo traslación en X . Entonces $h_{\text{top}}(X) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_T^1(X)} h(\mu)$ además, el supremo se logra en alguna medida.*

Una prueba del teorema anterior se puede ver en [4].

Nos interesa cuando el supremo se logra en más de un lugar, es decir, si hay más de una medida de máxima entropía.

El siguiente ejemplo es de un *subshift de tipo finito* con dos medidas de máxima entropía.

Ejemplo 2.1. *Sea $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Sea X el sistema simétrico de primeros vecinos en dos dimensiones con $G = \{(0, 1), (1, 0)\}$. Notamos que X tiene exactamente dos elementos y por lo tanto dos medidas máxima de entropía.*

Ya que nos interesan los *subshift de tipo finito* con más de una medida de máxima entropía. Notamos que en el Ejemplo 2.1 es un *subshift de tipo finito* generado de manera trivial,

eso nos lleva a definir una condición de irreducibilidad que nos ayudará a obtener *subshift de tipo finito* no triviales.

Definición 2.1.7. *Sea X un subshift de tipo finito. X es fuertemente irreducible si existe un $r \geq 0$ de modo que siempre que tengamos dos configuraciones finitas admisibles $\eta^1 : \Lambda_1 \rightarrow \mathcal{A}$ y $\eta^2 : \Lambda_2 \rightarrow \mathcal{A}$ y donde la distancia entre Λ_1 y Λ_2 es más grande que r , existe entonces un $\eta^* \in X$ que es una extensión de ambos η^1 y η^2 . X es débilmente irreducible si para cada η^1 y η^2 , existe un $y \in \mathbb{Z}^2$ y un $\eta^* \in X$ tal que η^* es una extensión de η^1 y $T_y \eta^2$.*

Probaremos después que fuertemente irreducible implica que un *subshift de tipo finito* con al menos dos elementos tiene entropía topológica positiva.

Definición 2.1.8. *Sea $S \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito. Sea η una configuración admisible definida en ∂S . Definimos Ω_η como el conjunto de configuraciones en S que extienden η . Definimos μ_η como la medida uniforme en Ω_η .*

Proposición 2.1. 1. *Un subshift de tipo finito fuertemente irreducible con $|X| > 1$ tiene entropía topológica positiva.*

2. *Considera un subshift de tipo finito el cual es fuertemente irreducible. Sea η^n una configuración admisible definida en $\partial \Lambda_n$. Supongamos que μ se obtiene como un límite débil de subsucesiones de μ_{η^n} , donde μ_{η^n} es la medida en configuraciones en Λ_n dada por la Definición 2.1.8. Si μ es invariante bajo traslaciones, entonces tiene máxima entropía.*

Notamos que μ_{η^n} es una medida de las configuraciones de Λ_n y por lo tanto, no es una medida de X . Sin embargo, se puede definir arbitrariamente en Λ_n^c y la convergencia será independiente de la extensión que se tome.

Antes de proceder a la demostración, necesitaremos el siguiente lema, que dice que ciertas medidas que surgen naturalmente en nuestro contexto son probabilidades condicionales uniformes.

Lema 2.1. *Sea $S = \Lambda_n$ y σ cualquier configuración en $\partial\Lambda_n$. Sea Ω_σ y μ_σ como en la definición 2.1.8, es decir definimos Ω_σ como el conjunto de configuraciones en S que extienden σ . Definimos μ_σ como la medida uniforme en Ω_σ . Sea U un conjunto de puntos en Λ_{n-1} . Sea C el conjunto de puntos en $\Lambda_{n-1} \cap U^c$ los cuales son adyacentes a algún elemento de U . Entonces, con respecto a μ_σ , la distribución condicional en U dado que los valores en C son uniformes en las configuraciones definidas en U que junto con los valores en C se extienden a un elemento de Ω_σ .*

Se puede pensar (no siempre) que C será un camino simple dentro de Λ_{n-1} y U serán los puntos dentro de C .

Demostración. Sea $\mathcal{T} = |\Omega_\sigma|$. Para $\eta \in \Omega_\sigma$ y $R \subset \Lambda_n$, sea η_R que denota la restricción de η a R . Sea δ una configuración en C que se extiende a un elemento de Ω_σ . Sea γ una configuración en U que junto con los valores de δ en C es extendible a un elemento de Ω_σ .

Sea I el número de configuraciones en Ω_σ que es igual a γ en U y δ en C , J es el número de configuraciones en Ω_σ que es igual a δ en C , y K el número de configuraciones definidas en U que junto con δ definidas en C se extienden a un elemento de Ω_σ . Entonces

$$\mu_\sigma(\eta_U = \gamma | \eta_C = \delta) = \frac{\mu_\sigma(\eta_U = \gamma, \eta_C = \delta)}{\mu_\sigma(\eta_C = \delta)} = \frac{I/\mathcal{T}}{J/\mathcal{T}} = \frac{I}{J} = \frac{1}{K}$$

La última ecuación viene de lo siguiente. Primero notamos que ya que $x \in U$, $y \in \Lambda_{n-1} \cap U^c \cap C^c$ implica $\|x - y\| > 1$, I depende solamente en δ y no en γ . Por lo tanto una vez que δ es dado, el número de maneras de extenderlo a un elemento de Ω_σ (el cual es J) es solo el número de maneras de extenderlo en U (el cual es K) por el número de maneras de extenderlo en $\Lambda_{n-1} \cap U^c \cap C^c$ (el cual es I) y así $J = KI$. Finalmente, el hecho de que la probabilidad condicional es $1/K$ prueba el lema.

□

Procedemos a la demostración de la Proposición 2.1.

Demostración. Ya que X es fuertemente irreducible asumimos que existe un r de modo que dos configuraciones finitas admisibles cuyos conjuntos estén ubicados a lo más a distancia r el uno al otro y tienen una extensión común.

1. Como $|X| > 1$ hay al menos dos símbolos, cada uno de los cuales se extiende a un elemento de X . Por lo tanto, el número de configuraciones admisibles en $\Lambda_{(r+1)n}$ es al menos $2n^2$, lo cual implica entropía topológica positiva.
2. Sea $|\mathcal{L}_\Lambda(X)|$ donde $\mathcal{L}_\Lambda(X)$ es el conjunto de configuraciones admisibles en Λ_n , como fue definido anteriormente. Entonces por supuesto por definición

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\mathcal{L}_\Lambda(X)|}{(2n+1)^2} = h_{\text{top}},$$

donde h_{top} es la entropía topológica.

Usamos la notación estándar para la entropía y la entropía condicional. Fijamos M , fijamos $M' = M + r$ y $k > M'$.

$$h_{\mu_{\eta^k}}(\Lambda_{M'}) \geq h_{\mu_{\eta^k}}(\Lambda_{M'} | \partial\Lambda_{M'}) = \sum_{\delta \in \partial\Lambda_{M'}} \mu_{\eta^k}(\delta) h_{\mu_{\eta^k}}(\Lambda_{M'} | \delta).$$

Ahora, la distribución condicional (con respecto a μ_{η^k}) en $\Lambda_{M'}$ dado δ es (por lema 2.1) uniforme sobre todas las configuraciones en Ω_δ , este último definido en la Definición 2.1.8. El número de tales configuraciones es al menos el número total de configuraciones admisibles en Λ_M , ya que somos fuertemente irreducibles con nuestra r dada.

Por lo tanto $h_{\mu_{\eta^k}}(\Lambda_{M'} | \delta) \geq \log |\mathcal{L}_{\Lambda_M}(X)|$ para todo δ el cual implica

$$h_{\mu_{\eta^k}}(\Lambda_{M'}) \geq \log |\mathcal{L}_{\Lambda_M}(X)|$$

o

$$\frac{h_{\mu_{\eta^k}}(\Lambda_{M'})}{(2M'+1)^2} \geq \frac{\log |\mathcal{L}_{\Lambda_M}(X)|}{(2M'+1)^2}.$$

Haciendo $k \rightarrow \infty$ a lo largo de una sucesión tal que μ_{η^k} converge a μ da

$$\frac{h_\mu(\Lambda_{M'})}{(2M'+1)^2} \geq \frac{\log |\mathcal{L}_{\Lambda_M}(X)|}{(2M'+1)^2}.$$

Finalmente haciendo $M \rightarrow \infty$ (con r fijo) da

$$h_\mu \geq h_{\text{top}}$$

y así μ es una medida de máxima entropía como deseamos. □

Antes de enunciar el siguiente lema, introduciremos un orden parcial en medidas de probabilidad las cuales son definidas en \mathcal{A}^S donde

$$\mathcal{A} = \{-M, -M + 1, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, M - 1, M\}$$

y donde S es numerable (finito). Para hacer esto, introducimos un orden parcial en \mathcal{A}^S declarando $\eta \preceq \delta$ si $\eta_x \leq \delta_x$ para todo $x \in S$.

Definición 2.1.9. Si μ y ν son medidas de probabilidad en \mathcal{A}^S donde $\mathcal{A} = \{-M, -M + 1, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, M - 1, M\}$ y S es numerable (finito), decimos que $\mu \preceq \nu$ si existe una medida de probabilidad m en $\mathcal{A}^S \times \mathcal{A}^S$ cuyos primeros y segundos marginales son μ y ν respectivamente y tal que

$$m\{(\eta, \delta) : \eta \preceq \delta\} = 1.$$

Lema 2.2. Sea S un conjunto finito contenido en \mathbb{Z}^2 . Sea $\eta \preceq \delta$ definida en la ∂S y admisible. Sea $\Omega_\eta, \Omega_\delta, \mu_\eta$ y μ_δ como en la Definición 2.1.8. Entonces $\mu_\eta \preceq \mu_\delta$

Ver prueba en [3] pag. 220.

Nos centraremos en dos tipos de simplexs en $\mathcal{M}_T^1(X)$, pero para ello, primero tenemos que definir algunas nociones relacionadas con la Mecánica Estadística.

Primero sea $\mathcal{A}^\Lambda := \{\eta : \Lambda \rightarrow \mathcal{A}\}$. Sean $\Lambda, \Lambda' \subset \mathbb{Z}^2$. Para cada $\eta \in \Lambda$ y $\zeta \in \Lambda'$, denotamos por $\eta \oplus \zeta$ a la configuración admisible $\delta \in \mathcal{A}^{\Lambda \cup \Lambda'}$, tal que $\delta_\Lambda = \eta$ y $\delta_{\Lambda'} = \zeta$.

Consideremos una interacción la cual es una colección de funciones $\Phi := \{\Phi_\Lambda : \mathcal{A}^\Lambda \rightarrow \mathbb{R} : \Lambda \subset \mathbb{Z}^2\}$. En lo que sigue asumiremos que la interacción es de rango finito y T-invariante. Esto significa que

- (a) existe $r > 0$ tal que si $\text{diam}(\Lambda) > r$ entonces $\Phi_\Lambda(\eta) = 0$ para todo $\eta \in \mathcal{A}^\Lambda$, y

(b) $\Phi_\Lambda(\eta) = \Phi_{\Lambda+z}(T_z\eta)$, para cada $z \in \mathbb{Z}^2$.

Abusando de la notación, usamos $T_z\eta$ para denotar la única configuración en $\zeta \in \mathcal{A}^{\Lambda+z}$ tal que $\zeta_s = \eta_{s-z}$. El número r in (a) es el rango de interacción y para cada $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ sea $\partial^r\Lambda$ la r -frontera of Λ , i.e., $\partial^r\Lambda := \{z \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Lambda : \text{dist}(z, \Lambda) \leq r\}$.

Dada la interacción Φ , un estado de equilibrio a temperatura inversa $\beta \geq 0$ es una medida de probabilidad $\mu \in \mathcal{M}_T^1(X)$ que satisface lo siguiente: para cada $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2, \Lambda' \supset \Lambda \cup \partial^r\Lambda$, y cada configuración admisible $\eta \in \mathcal{A}^{\Lambda'}$, tenemos

$$\mu([\eta_\Lambda] \mid [\eta]) := \frac{e^{-\beta H_\Lambda(\eta_{\Lambda \cup \partial^r\Lambda})}}{\sum_{\zeta \in \mathcal{A}^{\Lambda'} : [\zeta \oplus \eta_{\partial^r\Lambda}] \neq \emptyset} e^{-\beta H_\Lambda(\zeta \oplus \eta_{\partial^r\Lambda})}}$$

donde $H_\Lambda(\bar{\eta}^*) := \sum_{U \subset \Lambda \cup \partial^r\Lambda} \Phi_U(\bar{\eta}_U^*)$ es la energía del volumen Λ . La colección de todos los estados de equilibrio, $\mathcal{E}_\beta(\Phi) \subset \mathcal{M}_T^1(X)$, es un simplex de Choquet cuyos extremos son medidas ergódicas. El denominador

$$\mathcal{Z}_\beta(\Lambda, \eta_{\partial^r\Lambda}) := \sum_{\zeta \in \mathcal{A}^{\Lambda'} : [\zeta \oplus \eta_{\partial^r\Lambda}] \neq \emptyset} e^{-\beta H_\Lambda(\zeta \oplus \eta_{\partial^r\Lambda})}$$

define la función de partición, la cual depende del inverso de la temperatura β así como de la frontera de la configuración $\eta_{\partial\Lambda} \in \mathcal{A}^{\partial^r\Lambda}$. Si (X, T) es fuertemente irreducible, el límite

$$f_\phi(\beta) := -\frac{1}{\beta} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \log \mathcal{Z}_\beta(\Lambda_n, \eta^*)$$

define la energía libre de Helmholtz.

A partir de la interacción Φ de rango finito T -invariante, definimos la energía específica $X \ni \eta^* \mapsto u(\eta^*) := \sum_{U \ni 0} \Phi_U(\eta_U^*) / |U|$. Si (X, T) es un subshift fuertemente irreducible, para cada $\mu \in \mathcal{M}_T^1(X)$ tenemos

$$f_\phi(\beta) \leq \mu(u) - \frac{h_T(\mu)}{\beta}.$$

La igualdad se cumple si y solo si $\mu \in \mathcal{E}_\beta(\Phi)$. Además $\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta f(\beta) = -h_{\text{top}}(X)$, entonces $h_T(\mu) \leq h_{\text{top}}(X)$ para cada $\mu \in \mathcal{M}_T^1(X)$. La colección

$$\text{Max}(X) := \left\{ \mu \in \mathcal{M}_T^1(X) : h_T(\mu) = h_{\text{top}}(X) \right\}$$

es el simplex de medidas de máxima entropía y coincide con $\mathcal{E}_0(\Phi)$ para una interacción arbitraria Φ , siempre que la energía local $\eta^* \mapsto u(\eta^*) := \sum_{0 \in \Lambda} \Phi_\Lambda(\eta^*)$ sea una función

continua. Cuando $\text{Max}(X)$ es un singulete, decimos que (X, T) es intrínsecamente ergódico.

Dado que la medida condicional en una configuración, dada cualquier condición de frontera depende solo de los sitios a una distancia menor que r , entonces

$$\mu([\eta] \mid \eta^*) := \frac{e^{-\beta H_\Lambda(\eta \oplus \eta_{\partial^r \Lambda}^*)}}{\mathcal{Z}_\beta(\Lambda, \eta_{\partial^r \Lambda}^*)}$$

es una realización de la medida condicional, que se define para cada configuración admisible $\eta \in \mathcal{A}^\Lambda$ y cada condición de frontera $\eta^* \in X$.

Consideraremos los *subshifts de tipo finito* e interacciones de rango finito T -invariantes. Mediante una codificación de bloques, podemos reducir la interacción a una función de una letra al mismo tiempo que reducimos las configuraciones que definen el subshift a un conjunto de configuraciones en el volumen

$$\Lambda_{\text{cross}} := \{(0, 0), (\pm 1, 0), (0, \pm 1)\} \equiv \{o, \pm e^1, \pm e^2\} \subset \mathbb{Z}^2.$$

Sea $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ un *subshift de tipo finito* (con la acción T definida), definido por la colección \mathcal{L} de configuraciones admisibles de F , con $F \subset \mathbb{Z}^2$ finito, y sea Φ una interacción de rango finito. Podemos naturalmente embeber X en $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}^2}$, donde $\mathcal{D} := \mathcal{A}^\Lambda$ y

$$\Lambda = F \cup \left(\bigcup_{U \ni 0: \Phi_U \neq 0} U \right).$$

El embebimiento de $\eta^* \mapsto \iota(\eta^*)$ tal que $\iota(\eta^*)_z = \eta_{z+\Lambda}^*$ es una conjugación entre (X, T) and $(\iota(X), T)$. Claramente $\iota(X)$ es el *subshift de tipo finito* definido por la colección

$$\mathcal{L}' := \left\{ \zeta \in \mathcal{D}^{\Lambda_{\text{cross}}} : \zeta_z \in \mathcal{L}_\Lambda(X) \forall z \in \Lambda_{\text{cross}}, (\zeta_0)_{\xi+z} = (\zeta_z)_\xi \forall z \in \Lambda_{\text{cross}} \forall \xi \in \Lambda \text{ tal que } \{\xi + z, z\} \subset \Lambda \right\}.$$

Esto no es más que el requisito de que las letras de una configuración en $\iota(X)$ sean configuraciones admisibles en X , y que se superponen correctamente cuando se consideran como configuraciones en X . El embebimiento ι reduce Φ a la función de una letra $\mathcal{D} \ni \zeta \mapsto \Phi'(\zeta) = \sum_{U \ni 0} \Phi_U(\zeta_U)/|U|$ que define las funciones de energía $\mathcal{B}^{\Lambda'} \ni \zeta \mapsto H_{\Lambda'}^i(\zeta) = \sum_{z \in \Lambda'} \Phi'(\zeta_z)$. Notamos que si $\bar{\eta}^* = \iota(\eta^*)$, entonces

$$H_{\Lambda'}^{\iota}(\bar{\eta}_{\Lambda}^*) = \sum_{z \in \Lambda'} \sum_{U \ni z} \frac{\Phi_U(\eta_U^*)}{|U|} = \sum_{U \cap \Lambda'} H_U(\eta_U^*) = H_{\Lambda}(\eta_{\Lambda'}^*).$$

La embebimiento ι induce la función $\iota^* : \mathcal{M}_T^1(X) \rightarrow \mathcal{M}_T^1(\iota(X))$ tal que $\iota_{\ell}^* \mu(\mathbf{B}) = \mu(\iota_{\ell}^{-1} \mathbf{B})$ para cada conjunto de Borel $\mathbf{B} \subset \iota_{\ell}(X)$. Esta transformación es un isomorfismo entre los simplexs $\mathcal{M}_T^1(X)$ y $\mathcal{M}_T^1(\iota(X))$ mapeando $\mathcal{E}_{\beta}(\Phi)$ en $\mathcal{E}_{\beta}(\Phi^{\iota})$ para cada $\beta \geq 0$.

Por último se construirá la definición de **contorno**, que será fundamental para el desarrollo de los resultados, como se mencionó en la introducción los modelos que trataremos tienen la particularidad de que la energía se concentra en ellos. La definición se hará desde un punto de vista de la Mecánica Estadística, aunque es análogo en Dinámica Simbólica.

CONTORNOS.

Fijamos el siguiente rectángulo en \mathbb{Z}^2

$$\Lambda_{MN} = \mathbb{Z}^2 \cap ([M_1, N_1] \times [M_1, N_1])$$

donde $M_1 < N_1$ en \mathbb{Z}^2 , consideramos el conjunto

$$B = \{\{i, j\} \subset \mathbb{Z}^2 : |i - j| = 1, \{i, j\} \cap \Lambda_{MN} \neq \emptyset\}$$

de todos los enlaces de vecinos más cercanos los cuales emanan de sitios de Λ_{MN} . Cada enlace $b = \{i, j\} \in B$ debería ser visualizado como un segmento de línea entre i y j . Ver Figura 2.1.

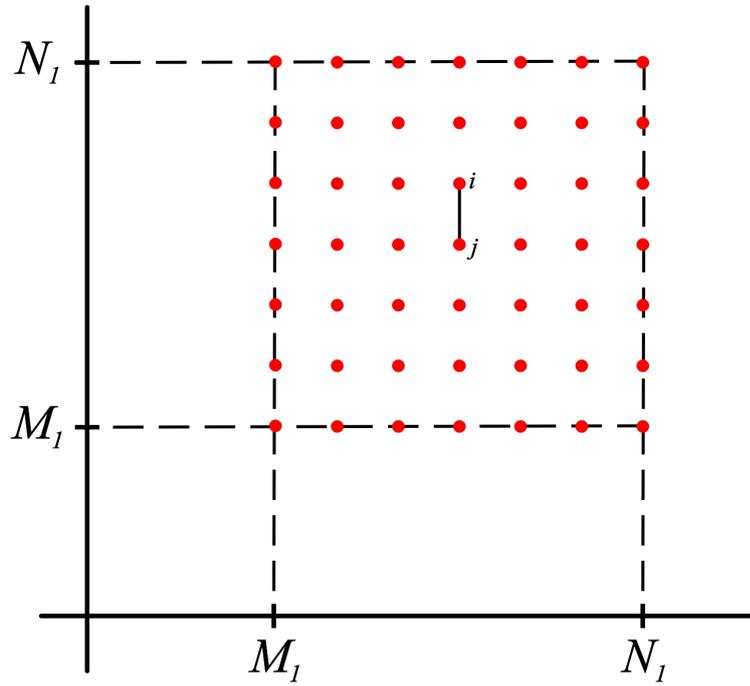


Figura 2.1: Ejemplo de un elemento $b \in B$

El segmento de línea b cruza un único segmento de línea “dual” entre dos sitios de vecinos más cercanos u, v en el rectángulo dual,

$$\Lambda_{MN}^* = \{M_1 - \frac{1}{2}, M_1 + \frac{1}{2}, \dots, N_1 + \frac{1}{2}\} \times \{M_1 - \frac{1}{2}, \dots, N_1 + \frac{1}{2}\}.$$

El conjunto asociado $b^* = \{u, v\}$ es llamado el enlace dual de b . Por lo tanto

$$b^* = \{u \in \Lambda_{MN}^* : |u - (i + j)/2| = 1/2\}.$$

Para representar lo anterior nos apoyamos en la Figura 2.2.

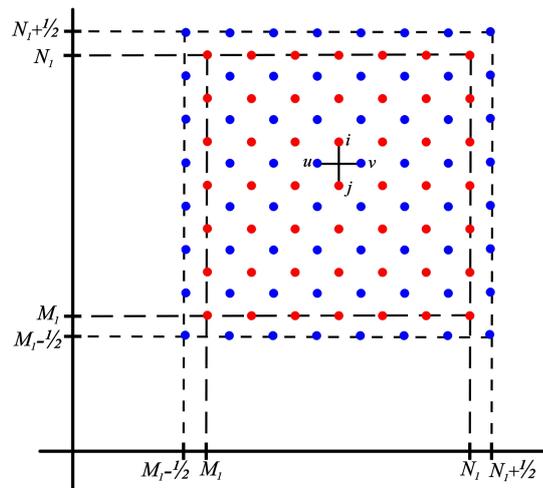


Figura 2.2: Ejemplo de un elemento b^*

Escribimos

$$B^* = \{b^* : b \in B\} = \{\{u, v\} \subset \Lambda_{MN}^* : |u - v| = 1\}$$

para el conjunto de enlaces duales. Sea $\{u^k \in \Lambda_{MN}^*\}$ tal que $\{u^{k-1}, u^k\} \in B^*$ entonces decimos que el subconjunto $\gamma' = \{b_k^* = \{u^{k-1}, u^k\} \in B^* : 0 \leq k \leq l, u^0 = u^l\}$ es un **circuito**. La colección $P := \{\{b_k^* := u^{k-1}, u^k\} \in B^*\}$ se le llama **camino**. Ver Figura 2.3.

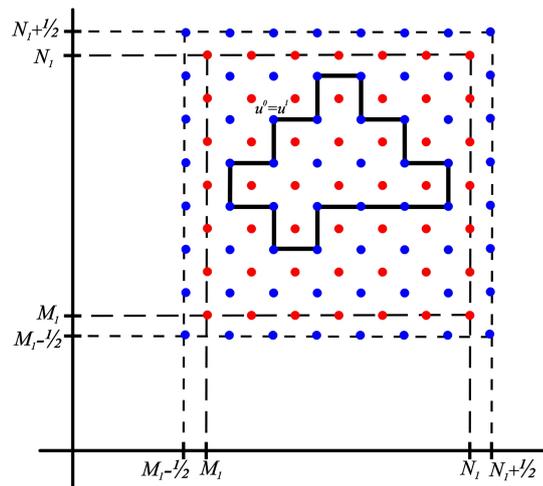


Figura 2.3: Ejemplo de un Circuito

Un circuito γ se dice que rodea al sitio $0 \in \Lambda_{MN}$ si para cada camino $P := \{\{i^{m-1}, i^m\} \in B : 1 \leq m \leq N\}$ tal que $i^0 = 0, i^N \notin \Lambda_{MN}$, existe un $1 \leq k \leq N$ tal que $\{i^{k-1}, i^k\}^* \in \gamma$. Sea Γ_0 que denota el conjunto de todos los circuitos en B^* los cuales rodean a 0. Ver Figura 2.4.

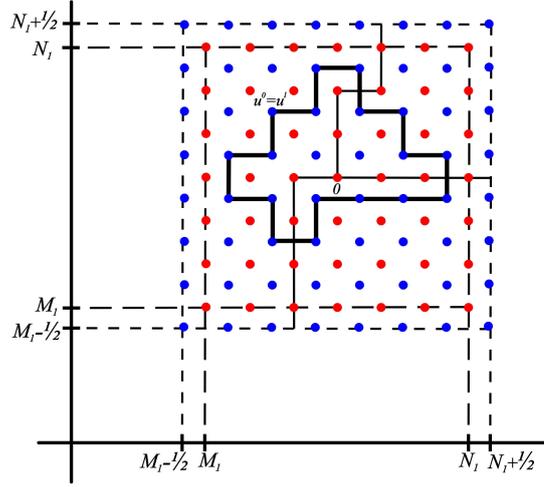


Figura 2.4: Ejemplo de un Circuito que rodea al 0

Ahora miramos los circuitos que ocurren en una configuración de la siguiente manera. Para cada $\eta \in \mathcal{A}^{\Lambda_{MN}}$ sea

$$B^*(\eta) = \{b^* : b = \{i, j\} \in B, \eta_i \neq \eta_j\}$$

denota el conjunto de todos los enlaces duales en B^* que cruzan un enlace entre espines de signo opuesto. Un circuito γ con $\gamma \subset B^*(\eta)$ es llamado **contorno** para η .

Capítulo 3

Antecedentes: Mecánica Estadística en Dinámica Simbólica

Este capítulo se dan los antecedentes de esta tesis, los cuales son la base de los resultados. Comenzamos presentando el modelo de Ising, para dar lugar al argumento de Peierls, el cual consiste en utilizar los contornos definidos en el capítulo anterior para demostrar que el modelo de Ising presenta transición de fase. Continuamos con la correspondencia de Burton-Steif, la cual como ya mencionamos es un análogo simbólico de lo hecho por Peierls en el modelo de Ising, finalmente presentamos el modelo de Potts.

3.1. Modelo de Ising en 2D

El modelo de Ising es un modelo físico propuesto para estudiar el comportamiento de materiales ferromagnéticos. El modelo fue inventado por el físico Wilhelm Lenz (1920), que lo concibió como un problema para su alumno Ernst Ising para demostrar que el sistema presentaba una transición de fase. Ising (1925) demostró que en una dimensión no existía tal transición de fase, resolviéndolo en su tesis de 1924. El modelo bidimensional de Ising en \mathbb{Z}^2 es más complicado, y solamente se le dio una descripción analítica mucho más tarde, por Lars Onsager en [19], Onsager, quien demostró que el modelo de Ising en dos dimensiones presenta transición de fase, además dio pie a que la física estadística era

capaz de describir transiciones de fase. Lars Onsager lo resolvió con campo nulo, mediante un método de matriz de transferencia, más tarde C. Yang en [22] con campo magnético, aunque existen diferentes enfoques, más relacionados con la teoría cuántica de campos.

El modelo de Ising fue ideado para estudiar el comportamiento de materiales ferromagnéticos, ya que el ferromagnetismo aparece en muchos metales ordinarios como el hierro y el níquel, y se manifiesta como la presencia de magnetización espontánea incluso cuando no hay campo magnético externo. Este fenómeno se debe a que una fracción importante de los momentos magnéticos (o espines) de los átomos, se alinean en la misma dirección debido a la interacción entre los mismos, dando lugar a que la muestra se magnetice. Este alineamiento se produce únicamente a temperaturas bajas.

El modelo de Ising consiste de un sistema de partículas con una propiedad llamada estado de espín, que se puede interpretar como un estado magnético individual de la partícula. A estas alturas podemos decir que el modelo de Ising puede estudiarse por medio de la Dinámica Simbólica, ya que configuración de espín se ve como un símbolo.

La energía del modelo de Ising (Hamiltoniano) es:

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} -J\omega_i\omega_j$$

donde:

1. H es el hamiltoniano del sistema.
2. $\sum_{\langle i,j \rangle}$ denota una suma sobre partículas vecinas entre si.
3. ω_i es el espín de la partícula i -ésima, que puede tomar sólo dos valores, $+1$ y -1 , y J es el factor de escala entre interacción entre espines y energía. Es un parámetro de la teoría.

Por ejemplo, supongamos que tenemos todos los espines apuntando hacia arriba, esto es $\omega_i = 1$ siempre. En este caso, la energía total es $-J$ veces el número diferentes parejas de próximos vecinos, que es $2N$ (se podría pensar que cada espín tiene cuatro espines vecinos, pero no debemos contarlos dos veces por tanto tenemos

que dividir por dos). Por tanto la energía del estado fundamental es $H_0 = -2JN$. El primer estado excitado es que un solo espín apunte hacia abajo, con energía $H_1 = -2JN + 8J$ así sucesivamente.

La función de partición.

El problema se resuelve simplemente calculando la función de partición:

$$Z = \sum_{\{\omega_j\}} \prod_{\langle i,j \rangle} e^{J\omega_i\omega_j/k_B T}$$

donde $\sum_{\{\omega_i\}}$ se refiere a suma sobre todas las configuraciones posibles de los N espines (llamados microestados).

Acabamos de presentar el Modelo de Ising en dos dimensiones, continuamos con el argumento de Peierls, el cual utiliza los contornos ya definidos anteriormente para mostrar que el Modelo de Ising en dos dimensiones presenta transición de fase.

3.2. Argumento de Peierls

Peierls demostró en su artículo *On Ising's model of ferromagnetism*[1] que el modelo de Ising de primeros vecinos en dimensión dos presenta transición de fase; esta prueba fue corregida y escrita rigurosamente por Griffiths en 1964 [14].

La prueba consiste en lo siguiente:

Tenemos el siguiente espacio de configuraciones $\Omega := \{\omega = (\omega_{ij})_{i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}} : \omega_{ij} \in \{+1, -1\}\} = \{+1, -1\}^{\mathbb{Z}^2}$

La energía de una configuración esta definida por:

$$H(\omega) = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \omega_i \omega_j - h \sum_i \omega_i$$

donde (i, j) son primeros vecinos. De modo que al término de la interacción solo contribuyen primeros vecinos que intersectan al volumen en cuestión. Las constantes h y J son positivas, y representan respectivamente la fuerza de interacción y la fuerza del campo magnético externo.

Enseguida vamos a desarrollar el argumento de Peierls en el que se muestra que para $\beta = 1/kT$ ($k = 1.38 \times 10^{-23} J/K$ constante de Boltzmann y T temperatura) suficientemente grande y $h = 0$, el conjunto de estados de equilibrio no es un singulete, es decir existe magnetización espontánea.

Tomamos un $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ finito y definimos el campo magnético infinitesimal como $m_\infty = \lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{N \rightarrow \infty} m_\Lambda$

En un Λ (volumen finito) el valor esperado de la magnetización m_Λ puede ser escrita de la forma

$$m_\Lambda = \frac{\mathbb{E}_{\mu_\beta}(N_+) - \mathbb{E}_{\mu_\beta}(N_-)}{N} = 1 - 2 \frac{\mathbb{E}_{\mu_\beta}(N_-)}{N}$$

donde N_+ son el total de espines con valor $+1$, N_- total de espines con valor -1 y N total de espines, además $N_+ + N_- = N$ y μ_β es una medida definida como en la sección de Mecánica Estadística (o similar a un medida de Gibbs).

Para que exista una magnetización espontánea, tenemos que mostrar que $m_\infty > 0$, para ello es suficiente mostrar que para cada N tenemos $\mathbb{E}_{\mu_\beta}(N_-)/N < 1/2 - \epsilon$ (con $\epsilon > 0$ y N independiente). Para mostrar lo anterior, introducimos **contornos de Peierls** en la retícula dual $\hat{\mathbb{Z}}^2$ de \mathbb{Z}^2 (similares a los ya definidos). Recordemos que los vértices son las aristas de \mathbb{Z}^2 y cuyas aristas son parejas de aristas en \mathbb{Z}^2 que comparten un vértice en \mathbb{Z}^2 .

Enumeramos las siguientes **precisiones** para su construcción.

1. Tomamos un volumen finito subconjunto de Ω de tamaño $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$.
2. Fijamos la frontera del volumen finito con positivos, denotada por $\omega_{i_b} = +1$.
3. Dibujamos cuadrados unitarios en cada sitio i con $\omega_i = -1$.
4. Removemos las aristas que separan $\omega_i = \omega_j = -1$.
5. En el caso en el cual cuatro aristas coincidan en el mismo punto, corta las esquinas del cuadrado para remover ambigüedades (ver Figura 3.1).

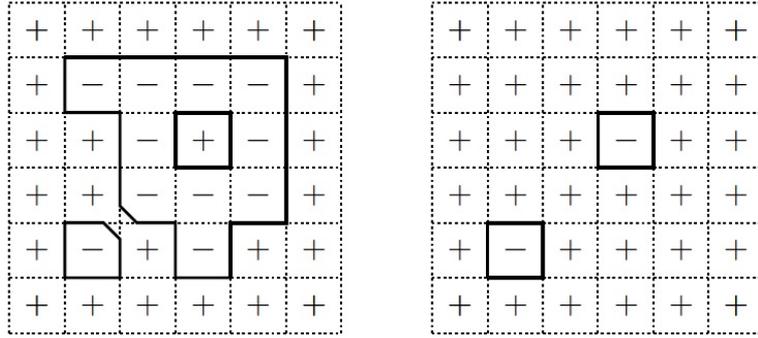


Figura 3.1: A la izquierda construcción del contorno de Peierls y a la derecha un ejemplo de la transformación de ω a $\bar{\omega}$, en el cual γ es el contorno mas largo de la configuración mostrado en el panel de la izquierda

Denotamos el contorno de Peierls como γ y cumple lo siguiente:

1. Cada contorno es una curva cerrada sin intersección.
2. Cada sitio $\omega_i = -1$ esta dentro al menos de un contorno.
3. El conjunto de contornos admisible es uno a uno con el conjunto de configuraciones.
Esto es posible por la condición $\omega_{i_b} = +1$.

Notación

- Denotamos por $l = |\gamma|$ a la longitud (l) del contorno (perímetro).
- Sea $\mathcal{C}_l = \{\gamma \text{ contorno de Peierls} : |\gamma| = l\}$.
- $|\mathcal{C}_l| = C_l$ es el número de contornos de longitud l .
- $A(\gamma)$ es el área del contorno γ , es decir el número de sitios dentro del contorno.

Observaciones

- En un volumen finito el número de contornos de una longitud dada l es finita.

Tenemos la siguiente cota superior para el para el número de N_- de sitios con $\omega_i = -1$ presentes en una configuración:

$$N_- \leq \sum_{l \geq 4, \text{par}} \sum_{\gamma \in \mathcal{C}_l} A(\gamma) X_\gamma(\omega)$$

donde $X_\gamma(\omega) = 1$ si γ ocurre en una configuración ω dada y $X_\gamma(\omega) = 0$ en otro caso.

- El límite inferior de la primer suma es 4 ya que es la longitud mínima para un contorno cerrado y se extiende sobre los pares.
- La última ecuación es una consecuencia de que cada sitio i con $\omega_i = -1$ esta dentro de al menos de un contorno.
- Si sumamos las áreas de todos los contornos que ocurren en una configuración conseguimos una cota superior para N_- en esa configuración.

El siguiente paso es mostrar que $A(\gamma)$ tiene una cota superior de la forma $A(l)$, es decir $A(\gamma) \leq A(l)$, depende solamente de la longitud l del contorno.

- Para obtener la cota superior dibujamos el rectángulo más pequeño \mathcal{R} (con lados paralelos a la frontera del volumen finito) que contienen $\gamma \in \mathcal{C}_l$ (ver Figura 3.2).

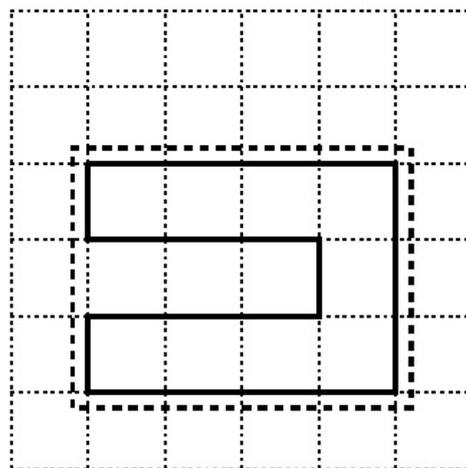


Figura 3.2: Primer paso de la demostración para el límite $A(\gamma)$

- El perímetro de \mathcal{R} no es más grande que l : si dibujamos dentro de \mathcal{R} una línea paralela a uno de los ejes, esta línea intersecta a \mathcal{R} en dos aristas, pero esta línea también tiene que intersectar a γ en al menos dos aristas, de otra manera γ se separarían en dos contornos disjuntos o \mathcal{R} no sería el rectángulo más pequeño que contenga γ .
- Si denotamos la longitud de los lados de \mathcal{R} por x_1 y x_2 , tenemos que $2(x_1 + x_2) \leq l$ y $A(\gamma) \leq x_1 x_2$. Como una consecuencia tenemos

$$A(\gamma) \leq \max_{2(x_1+x_2) \leq l} x_1 x_2.$$

El máximo de la ecuación anterior se alcanza en $x_1 = x_2 = l/4$ (es decir, todos los rectángulos con perímetro fijo, el cuadrado es el único con área mayor por lo tanto

$$A(\gamma) \leq A(l) \equiv \frac{l^2}{16}$$

Usamos la última ecuación para modificar $N_- \leq \sum_{l \geq 4, \text{par}} \sum_{\gamma \in \mathcal{C}_l} A(\gamma) X_\gamma(\omega)$ como sigue:

$$N_- \leq \sum_{l \geq 4, \text{par}} A(l) \sum_{\gamma \in \mathcal{C}_l} X_\gamma(\omega).$$

No nos interesa el valor N_- para una configuración, pero nos interesa $\mathbb{E}_{\mu_\beta^+}(N_-)$. Entonces de la ecuación anterior tenemos

$$\mathbb{E}_{\mu_\beta^+}(N_-) \leq \sum_{l \geq 4, \text{par}} A(l) \sum_{\gamma \in \mathcal{C}_l} \mathbb{E}_{\mu_\beta^+}(X_\gamma(\omega)).$$

Vamos a mostrar que $\mathbb{E}_{\mu_\beta^+}(X_\gamma(\omega)) \leq X(l)$, donde $X(l)$ es una función que depende solo de la longitud l del contorno γ .

Nos enfocamos en la probabilidad que ocurra $X_\gamma(\omega)$ la cual está definida por la medida de Gibbs

$$\mathbb{E}_{\mu_\beta^+}(X_\gamma(\omega)) = \mu_\beta^+ \{ \omega : \gamma \in \omega \} = \frac{\sum_{\omega \in \Gamma} e^{-\beta H(\omega)}}{\sum_{\omega \in \Lambda_+} e^{-\beta H(\omega)}},$$

donde $\beta = 1/kT$, $\Lambda_+ = \{ \omega \in \Omega : \omega_{i0} = +, \omega_{jk} = +, \omega_{kl} = +, \omega_{m0} = +, 0 \leq i, j, l, m \leq k \}$, $|\Lambda_+| = N$ y $\Gamma = \{ \omega : \gamma \text{ ocurre en } \omega \}$. Entonces la suma en el numerador se restringe

a aquellas configuraciones donde γ ocurre y el denominador es una suma sobre todas las configuraciones que satisfacen que $\omega_{i_b} = +1$.

Si ω es una configuración en donde γ ocurre, sea $\bar{\omega}$ como la obtenida de cambiar los signos de ω de todas las variables asociadas a los sitios dentro de γ . Es claro que $\bar{\omega} \in \Lambda_+$, ya que los valores de frontera de la configuración no han cambiado, así el conjunto de todos los posibles $\bar{\omega}$ es un subconjunto de Λ_+ , es decir:

$$\bar{\Gamma} = \{\bar{\omega} : \omega \ni \gamma, \bar{\omega} \text{ signos cambiados en el interior de } \gamma\} \subset \Lambda_+.$$

Por lo tanto

$$\sum_{\bar{\omega} \in \bar{\Gamma}} e^{-\beta H(\bar{\omega})} \leq \sum_{\omega \in \Lambda_+} e^{-\beta H(\omega)}.$$

Si restringimos la suma en el denominador de $\mathbb{E}_{\mu_\beta^+}(X_\gamma(\omega))$ a solo aquellas configuraciones $\bar{\omega}$ obtenidas de las configuraciones en el numerador al invertir todos los signos dentro de γ de tenemos que

$$\mathbb{E}_{\mu_\beta^+}(X_\gamma(\omega)) = \frac{\sum_{\omega \in \Gamma} e^{-\beta H(\omega)}}{\sum_{\omega \in \Lambda_+} e^{-\beta H(\omega)}} \leq \frac{\sum_{\omega \in \Gamma} e^{-\beta H(\omega)}}{\sum_{\bar{\omega} \in \bar{\Gamma}} e^{-\beta H(\bar{\omega})}}$$

y, sus energías están relacionadas de la siguiente manera

$$H(\omega) = H(\bar{\omega}) + 2Jl,$$

ya que, al hacer $\omega \rightarrow \bar{\omega}$, el sistema en las fronteras pierde l parejas distintas de $(+-)$, cada una con energía $-J\omega_i\omega_j = J$, y gana l parejas iguales $(++)$, cada una con energía $-J\omega_i\omega_l = -J$

obtenemos una cota superior

$$\mathbb{E}_{\mu_\beta^+}(X_\gamma(\omega)) \leq X(l) \equiv e^{-2J\beta l}.$$

Usando esta última ecuación en $\mathbb{E}_{\mu_\beta^+}(N_-) \leq \sum_{l \geq 4, par} A(l) \sum_{\gamma \in \mathcal{C}_l} \mathbb{E}_{\mu_\beta^+}(X_\gamma(\omega))$

obtenemos

$$\mathbb{E}_{\mu_\beta^+}(N_-) \leq \sum_{l \geq 4, par} A(l) \sum_{\gamma \in \mathcal{C}_l} X(l) = \sum_{l \geq 4, par} A(l) C_l X(l)$$

y para terminar necesitamos una cota superior para C_l , es decir para el número de contornos cerrados de longitud l . Esto se puede obtener enumerando las posibles formas en que un contorno cerrado de longitud l puede construirse usando l aristas.

1. Tenemos $2N$ maneras de colocar la primer arista
2. Como debe ser un contorno cerrado, debemos conectar cada extremo con otra arista y hay 3 posibles maneras de realizarlo
3. Iteramos: en el paso $n \geq 2$ agregamos dos nuevas aristas en los extremos libres obtenidas en el paso $n - 1$
4. Ya que la arista del paso 1 se fija, tenemos $3^{2(n-1)}$ maneras de construir la curva en el paso n
5. En el paso n la longitud de la curva es $2(n - 1) + 1$ y cuando llegamos al paso \bar{n} definido por

$$2(\bar{n} - 1) + 1 = l - 1,$$

(recordemos que l es par), y la única manera de agregar la última arista es cerrando la curva

6. El número de curvas cerradas de longitud l debe ser más pequeño que $2N3^{2(\bar{n}-1)} = 2N3^{l-2}$.
 - Ya que todas las aristas de una curva cerrada están en la misma posición, entonces llegamos a la cota superior

$$C_l \leq \mathcal{N}(l) \equiv \frac{2N}{9l} 3^l$$

- Usando $\mathbb{E}_{\mu_\beta^+}(N_-) \leq \sum_{l \geq 4, \text{par}} A(l) \sum_{\gamma \in \mathcal{C}_l} X_\gamma(\omega) = \sum_{l \geq 4, \text{par}} A(l) C_l X(l)$

Recordando que $A(\gamma) \leq A(l) \equiv \frac{l^2}{16}$ y $\mathbb{E}_{\mu_\beta^+}(X_\gamma(\omega)) \leq X(l) \equiv e^{-2J\beta l}$

Conseguimos finalmente

$$\mathbb{E}_{\mu_\beta^+}(N_-) \leq \sum_{l \geq 4, \text{par}} A(l) \mathcal{N}(l) X(l) \leq \frac{N}{72} \sum_{l \geq 4, \text{par}} l 3^l e^{-2J\beta l} \quad (3.1)$$

Esta suma siempre converge si $3e^{-2J\beta} < 1$.

El resultado final es

$$\mathbb{E}_{\mu_{\beta}^+}(N_-) \leq \frac{N}{36} x^2 \frac{2-x}{(1-x)^2}. \quad (3.2)$$

Para $\mathbb{E}_{\mu_{\beta}^+}(N_-) \leq \sum_{l \geq 4, \text{par}} A(l)\mathcal{N}(l)X(l) \leq \frac{N}{72} \sum_{l \geq 4, \text{par}} l3^l e^{-2J\beta l}$.

Que es justo a lo que se quería llegar.

El resultado de la derecha de la ecuación 3.2, se obtiene de la ecuación 3.1 procediendo de la siguiente manera.

Cambiando la variable l a $n = l/2$ conseguimos

$$\sum_{l \geq 4, \text{par}} l3^l e^{-2J\beta l} = 2 \sum_{n=2}^{\infty} n(9e^{-4j\beta})^n$$

Introducimos la variable x definida como $x = 9e^{-4J\beta}$ y usando $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)}$ obtenemos

$$2 \sum_{n=2}^{\infty} nx^n = 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^n \right) - 2x$$

Por otro lado

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \frac{d}{dx} \frac{1}{(1-x)} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Multiplicando por x obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Pero en la suma para $n = 0$ es cero, es lo mismo que empezar en uno.

Por lo tanto

$$2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^n \right) - 2x = 2 \frac{x}{(1-x)^2} - 2x = 2x \left(\frac{1}{(1-x)^2} - 1 \right) = 2x^2 \frac{2-x}{(1-x)^2}.$$

3.3. La correspondencia de Burton-Steif

Como se mencionó en la introducción, la correspondencia de Burton-Steif [3] explota el hecho de que para algunos modelos de la mecánica estadística en equilibrio, la energía

se concentra en algunas regiones de la retícula a las cuales nos referimos como contornos. En el complemento de estas regiones, las configuraciones deben ser homogéneas y de mínima energía. El paso de un régimen termodinámico donde solo un estado de equilibrio existe a una situación en la que coexisten varios estados de equilibrio ergódico, se rige por la competencia entre energía y entropía, impulsada por el cambio de temperatura. El correspondiente familia de subshift de Burton-Steif es tal que las regiones homogéneas se convierten en regiones altamente entrópicas mientras que los contornos siguen siendo regiones de entropía cero o baja entropía. La transición entonces está gobernada por el aumento de la entropía de las regiones homogéneas. Ilustremos esto usando una interacción de rango finito en dimensión dos.

Burton-Steif inicia construyendo un subshift de tipo finito el cual es inspirado en el modelo de Ising en dos dimensiones, posteriormente se demuestra que este subshift es fuertemente irreducible y tiene al menos dos medidas de máxima entropía.

El siguiente enunciado es el *subshift de tipo finito* que tiene analogía con el Modelo de Ising en dos dimensiones.

Sea M un entero positivo y

$$\mathcal{A} = \{-M, -M + 1, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, M - 1, M\}.$$

En dos dimensiones, consideremos el sistema simétrico de primeros vecinos dado por $G = \{(i, j) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} : i, j \leq -2\}$. Entonces $X = \{\eta \in I : (\eta_x, \eta_y) \notin G, \text{ para todo } x, y \in \mathbb{Z}^2, \|x - y\| = 1\}$ e $I = \{f : f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathcal{A} \subset \mathbb{Z}\}$.

En otras palabras, un símbolo negativo no puede situarse al lado de un positivo al menos que ambos sean ± 1 . La anterior define un subshift de tipo finito ya que un sistema simétrico de primero vecinos es un subshift de tipo finito con alfabeto \mathcal{A}

Para el *subshift de tipo finito* anterior demostraremos el siguiente teorema.

Teorema 3.1. *En $d = 2$ si M es tal que*

$$\sum_{l=4}^{\infty} l 3^{l-1} \frac{2}{M^{\max(\frac{l}{128} - \frac{1}{8}, 1)}} < \frac{1}{2},$$

entonces existe más de una medida de máxima entropía.

Para la demostración del teorema 3.1 se necesitan tres proposiciones. Antes de enunciar las proposiciones, afirmemos lo siguiente; sea μ_n la medida en X que da la probabilidad 1 de tener una M en todos los puntos de $\Lambda_n^c \cup \partial\Lambda_n$ y da medida uniforme en todas las configuraciones admisibles en Λ_n las cuales son iguales a M en $\partial\Lambda_n$. Esto es, por supuesto, esencialmente μ_n como se define en Definición la 2.1.8 donde η se define en $\partial\Lambda_n$ es $\equiv M$ excepto que μ_n está definida en todo X .

Proposición 3.1. *Para todo $n \geq 1$*

$$\mu_n\{\eta_0 \in \{-M, -M+1, \dots, -2, -1\}\} \leq \sum_{l=4}^{\infty} l3^{l-1} \frac{2}{M^{\max(\frac{l}{128} - \frac{1}{8}, 1)}}$$

Demostración. Una curva simple en la gráfica dual de Λ_n es llamada contorno. Sea Ω_n el conjunto de configuraciones admisibles en Λ_n el cual es $\equiv M$ en $\partial\Lambda_n$. Sea $C' := \{\gamma \in B^*(\eta) : \text{para todo } \eta \in \Omega_n\}$ la familia de contornos y $C := \{\gamma \in B^*(\eta) : \gamma \text{ un contorno que rodea al cero, para todo } \eta \in \Omega_n\}$ aquellos contornos que rodean al origen 0. Si $\eta \in \Omega_n$ con $\eta_0 \leq -1$ obtenemos un elemento de C como sigue: colocamos las aristas en la gráfica dual de Λ_n entre vértices de signo opuesto. Esto nos da un conjunto de contornos. Sin embargo, existe una ambigüedad en el caso donde un vértice de la gráfica dual tiene 4 aristas duales emanando de ella. Esta ambigüedad se resuelve cortando las esquinas adyacentes al vértice con un signo menos. Ver Figura 3.3.

arista en cada paso. Combinando esto con el Lema 3.1 obtenemos.

$$\sum_{\gamma \in C} \mu_n(E_\gamma) \leq \sum_{l=4}^{\infty} l 3^{l-1} \frac{2}{M^{\max(\frac{l}{128} - \frac{1}{8}, 1)}}.$$

□

Demostración. Lema 3.1

Sea γ un contorno alrededor del 0 de longitud l contenido dentro de Λ_n .

Sea $O(\gamma) := \{i \in \mathbb{Z}^2 : i \in b \text{ con } b^* \in \gamma, i \text{ fuera de } \gamma\}$ aquellos vértices lo cuales son adyacentes pero fuera de γ e $I(\gamma) := \{i \in \mathbb{Z}^2 : i \in b \text{ con } b^* \in \gamma, i \text{ dentro de } \gamma\}$ aquellos vértices los cuales son adyacentes pero dentro de γ . Si E_γ ocurre, debe haber todos 1's en $O(\gamma)$ y todos -1 's en $I(\gamma)$. Entonces tenemos que si

$$\mathbb{A} := \{\eta \in \Omega_n : \eta(i) = -1, \text{ para todo } i \in I(\gamma)\}$$

$$\mathbb{B} := \{\eta \in \Omega_n : \eta(i) = +1, \text{ para todo } i \in O(\gamma)\}$$

$$\mu_n(E_\gamma) \leq \mu_n(\mathbb{B})\mu_n(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \leq \mu_n(\mathbb{A}|\mathbb{B})$$

Sea Ω_γ el conjunto de configuraciones dentro de γ las cuales son ≥ -1 en $I(\gamma)$, el lema 2.1 implica que esta medida condicional es solo distribución uniforme en Ω_γ . Sea μ_γ que denota esta medida y A_γ el conjunto de configuraciones definidas dentro de γ las cuales son -1 en $I(\gamma)$.

Finalmente por supuesto necesitamos mostrar que $\mu_\gamma(A_\gamma)$ satisface la desigualdad del lema 3.1.

Subdividimos γ en segmentos de longitud 16 con una posible pieza restante con longitud < 16 . Es fácil ver que un segmento de longitud 16 debe ya sea contener dos aristas en una fila las cuales son perpendiculares tal que ellas son “torneadas hacia adentro” en el sentido que el único punto en Λ_n adyacente a las dos aristas se encuentra dentro de γ ó contiene cinco aristas en una fila que se encuentran en la misma línea (es decir,

sin girar). Decimos que un segmento de longitud 16 es de tipo a si contiene dos aristas perpendiculares en una fila como arriba, y de tipo b si contiene 5 aristas en una fila como arriba. Si tal segmento contiene ambos objetos, decimos que es de tipo a . Lo siguiente, es decir que γ es de tipo 1 si al menos la mitad de los segmentos de longitud 16 son de tipo a y de tipo 2 en otro caso.

Caso 1. γ es de tipo 1.

Entonces γ tiene al menos $\lceil \frac{1}{2} \lfloor \frac{l}{16} \rfloor \rceil \equiv a_l$ de tales esquinas internas. Si $a_l \geq 1$, procedemos como sigue. Sea x_1, x_2, \dots, x_{a_l} una colección de puntos dentro de γ pero adyacentes a tales esquinas internas. Si $\eta \in A_\gamma$, sea $E(\eta)$ el conjunto de configuraciones δ dentro de γ las cuales son $-\eta$ excepto en los x_i donde ellos pueden ser cualquier valor positivo (en $\{1, 2, \dots, M\}$). Notamos que $E(\eta) \subseteq \Omega_\gamma$, $E(\eta) \cap A_\gamma = \emptyset$, $|E(\eta)| = M^{a_l}$, y si $\eta_1 \neq \eta_2$ están en A_γ , $E(\eta_1) \cap E(\eta_2) = \emptyset$. Notamos que la razón que $E(\eta) \subseteq \Omega_\gamma$ es que si y es adyacente a uno de los x_i 's con y dentro de γ , entonces η_y debe ser negativo. Esto depende mucho de la manera de definir nuestros contornos. Si tenemos definidos nuestros contornos como en [2], este no sería el caso. Junto, esto nos da

$$\mu_\gamma(A_\gamma) \leq 1/M^{a_l}.$$

Del caso $a_l = 0$ nos encargaremos después.

Caso 2. γ es de tipo 2.

Entonces tenemos que hay al menos a_l (definidos arriba) segmentos de longitud 16 cada uno contiene 5 aristas en una fila en una línea. Para cada uno de estos segmentos, consideremos el de en medio de los cinco vértices en $I(\gamma)$ adyacentes a esas aristas. Dicho vértice se puede asociar a un máximo de dos segmentos de longitud 5 y hay al menos $\lceil \frac{1}{2} a_l \rceil$ de tales puntos. Sea x_1, x_2, \dots, x_{b_l} una colección de tales puntos donde $b_l = \lceil \frac{1}{2} a_l \rceil$.

Dado $\eta \in A_\gamma$, decimos que x_i es de tipo n (para negativo) si x_i se sitúa al lado de tres valores negativos y de tipo p (para positivo) si se sitúa al lado de solo dos valores negativos. Notamos que esas son las únicas dos posibilidades y que a diferencia de las particiones anteriores ésta depende de la configuración particular.

Sea A_γ^1 el conjunto de configuraciones en A_γ tal que al menos $\lceil \frac{1}{2} b_l \rceil$ de los x_i 's son de tipo n y A_γ^2 el conjunto de configuraciones en A_γ tal que al menos $\lceil \frac{1}{2} b_l \rceil$ de los x_i 's son

de tipo p . Notamos por supuesto que $A_\gamma \subseteq A_\gamma^1 \cup A_\gamma^2$ aunque los dos últimos conjuntos no son necesariamente disjuntos. Sea $c_l = \lceil \frac{1}{2}b_l \rceil$. Si $c_l \geq 1$, procedemos como sigue.

Consideremos A_γ^1 . Dado $\eta \in A_\gamma^1$, sea y_1, y_2, \dots, y_{c_l} los puntos de x_1, x_2, \dots, x_{b_l} los cuales son de tipo n . Entonces sea $E(\eta)$ el conjunto de configuraciones δ dentro de γ , las cuales son $-\eta$ excepto en los y_i donde ellos pueden ser cualquier valor positivo. Como antes, tenemos que $E(\eta) \subseteq \Omega_\gamma$, $E(\eta) \cap A_\gamma = \emptyset$, $|E(\eta)| = M^{c_l}$, y si $\eta_1 \neq \eta_2$ están en A_γ , $E(\eta_1) \cap E(\eta_2) = \emptyset$. Junto, esto nos da

$$\mu_\gamma(A_\gamma^1) \leq 1/M^{c_l}.$$

Luego consideramos A_γ^2 . Dado $\eta \in A_\gamma^2$, sea y_1, y_2, \dots, y_{c_l} los puntos de x_1, x_2, \dots, x_{b_l} los cuales son de tipo p . Entonces sea $E(\eta)$ el conjunto de configuraciones δ obtenidas de η por cambiar los dos -1 's al lado de cada y_i a 1 y permitiendo a y_i ser cualquier valor positivo. Entonces $E(\eta) \subseteq \Omega_\gamma$, $E(\eta) \cap A_\gamma = \emptyset$, $|E(\eta)| = M^{c_l}$, y si $\eta_1 \neq \eta_2$ están en A_γ , $E(\eta_1) \cap E(\eta_2) = \emptyset$. La razón que $E(\eta) \subseteq \Omega_\gamma$ es que los dos -1 's al lado de un y_i debe ser solamente ± 1 's al lado de ellos y así podemos voltearlos (y permanecer en Ω_γ), y después de que sean volteados, y_i esta rodeado por todos 1's y así se puede voltear a cualquier número positivo. Junto, esto nos da

$$\mu_\gamma(A_\gamma^2) \leq 1/M^{c_l}.$$

También hay un límite simple el cual es válido para todos los contornos. Claramente cualquier contorno γ contiene al menos un punto de esquina. Argumentando exactamente como en el caso 1 arriba, esto nos da que $\mu_\gamma(A_\gamma) \leq 1/M$. Esto nos permite eliminar las suposiciones sobre $a_l, c_l \geq 1$ y obtenemos (usando el hecho que $a_l \geq c_l$)

$$\mu_\gamma(A_\gamma) \leq \frac{2}{M^{\max(c_l, 1)}} \text{ para todo } \gamma.$$

Un simple cálculo nos da $c_l \geq \frac{l}{128} - \frac{1}{8}$ lo cual nos da la desigualdad deseada.

□

Proposición 3.2. μ_n converge a algún μ_∞ cuando $n \rightarrow \infty$ la cual es invariante bajo traslaciones.

Demostración. Afirmamos que si $n > m$, entonces $\mu_n \preceq \mu_m$. Una vez que tenemos esto, inmediatamente la compacidad nos da la convergencia de μ_n la cual es la primera parte de la proposición.

Para mostrar que $\mu_n \preceq \mu_m$, es claramente suficiente mostrar esta dominación en Λ_m . Por lema 2.1, $\mu_n|_{\Lambda_m} = \sum_{\eta \in \partial\Lambda_m} \mu_n(\eta)\mu_\eta$ donde μ_η esta dado en la definición 2.1.8. Ya que $\mu_\eta \preceq \mu_m|_{\Lambda_m}$ para todo η por lema 2.2, se sigue fácilmente que $\mu_n|_{\Lambda_m} \preceq \mu_m|_{\Lambda_m}$ como se deseaba.

La invarianza traslacional es algo claro de arriba, se sigue bastante fácil de los argumentos de dominación de arriba.

□

Proposición 3.3. μ_∞ es una medida de máxima entropía

Demostración. Ya que X es fuertemente irreducible con $r = 2$. Esto se debe a que podemos extender las configuraciones finitas agregando 1 o -1 . Entonces usando inmediatamente la proposición 2.1 y la proposición 3.2 para garantizar la invarianza traslacional.

□

Demostración. Teorema 3.1

Por proposición 3.1 y 3.2 junto con la manera de escoger M implica que

$$\mu_\infty\{\eta_0 \in \{-M, -M + 1, \dots, -2, -1\}\} < \frac{1}{2}$$

Ya que μ_∞ es una medida de máxima entropía por proposición 3.3, usando simetría, debe existir otra medida de máxima entropía (a saber, la medida obtenida por transformar μ_∞ aplicando $\eta \rightarrow -\eta$).

□

3.4. Modelo de Potts

En esta sección introducimos el Modelo Potts, hablaremos un poco de la historia del modelo y sus características, sin adentrarnos en detalles técnicos, ni desarrollos analíticos.

El modelo de Potts en dos dimensiones se introdujo en [17] por Renfrey Potts, donde generalizó un método para encontrar la temperatura crítica introducida algunos años

antes, en el contexto del Modelo de Ising en dos dimensiones, por Kramers y Wannier en ([20], [21]), además de ser uno de los modelos más estudiados y fructíferos en la Mecánica Estadística de transiciones de fase. Históricamente, quienes estudiaron por primera vez una versión del modelo (de cuatro componentes) fueron los matemáticos Julius Ashkin y Edward Teller [27] en 1943. Pero el modelo general de q componentes (colores) lleva su nombre actual desde 1952, a partir de la Tesis de doctorado de Renfrey Potts, quien lo propuso tal como ahora lo conocemos luego de llevar a cabo durante su trabajo de Tesis una propuesta levemente diferente planteada por su director Cyril Domb. El problema fue tratado de manera independiente dos años después por Kihara.

Debido a Rodney J. Baxter en [13], el modelo de Potts ganó interés en el área de la física estadística.

Hoy en día el modelo de Potts sigue siendo de gran interés desde el punto de vista teórico; en particular, por la posibilidad de variar con el parámetro q la naturaleza de su transición de fase, y por su simpleza y aptitud para el estudio de fenómenos de no-equilibrio. Entre ellos podemos mencionar: la dinámica de crecimiento de granos o dominios magnéticos, la nucleación de fases estables a partir de una situación de meta-equilibrio o comportamientos de dinámica lenta. Pero también es utilizado para el modelaje de aplicaciones prácticas, tales como, espumas y burbujas de jabón, segregación genética, comportamiento celular, migración tumoral, análisis de imágenes, redes neuronales o incluso en el comportamiento social y demográfico. Gracias al conocimiento de algunos resultados exactos y vasta bibliografía, constituye también una plataforma de prueba para nuevos métodos numéricos y aproximaciones en el estudio de la teoría de transiciones de fase y fenómenos críticos.

El problema original propuesto por Domb partía de la base de considerar al modelo de Ising como un sistema de espines interactuantes que podían ser paralelos o antiparalelos. Por lo tanto, una apropiada generalización podría ser considerar un sistema de espines confinados en un plano, con cada uno de ellos apuntando a una de las q igualmente espaciadas direcciones dadas por los ángulos:

$$\Theta_n = \frac{2\pi n}{q}, n = 0, 1, \dots, q - 1.$$

En su forma más general la interacción entre vecinos cercanos depende solo del ángulo relativo entre los dos vectores. Esto es generalmente conocido como un sistema de simetría $Z(q)$ cuyo hamiltoniano se expresa:

$$H = - \sum_{\langle ij \rangle} J(\Theta_{ij})$$

donde la función $J(\Theta)$ es 2π periódica y $\Theta_{ij} = \Theta_{n_i} - \Theta_{n_j}$ es el ángulo entre dos spins en los sitios vecinos i y j . La propuesta de Domb consistía en elegir:

$$J(\Theta) = -\epsilon_1 \cos(\Theta)$$

Usando un análisis de Kramer-Wannier [20], Potts logró determinar el punto crítico de este modelo en la red cuadrada para $q = 2, 3, 4$. Al no poder extender este logro a $q > 4$, Potts reportó como nota final de su publicación el punto crítico para todo q del siguiente modelo:

$$J(\Theta_{ij}) = \epsilon_2 \delta(n_i, n_j)$$

donde

$$\delta(n_i, n_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } n_i = n_j \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

es la delta de Kroneker. Esta versión del modelo es la que ha atraído mayor atención y por eso se la conoce como Modelo de Potts estándar o simplemente Modelo de Potts. Por razones históricas, en algunos casos se lo encuentra bajo el nombre de Modelo de Ashkin-Teller-Potts.

El modelo de Potts es ferromagnético si $\epsilon_2 > 0$ y antiferromagnético si $\epsilon_2 < 0$. En adición a interacciones entre dos sitios, puede haber en general interacciones entre varios sitios, interacciones dependientes de alguna distancia o interacciones con campos externos. Por ejemplo, el modelo de Potts en una red G (en principio arbitraria) de N sitios con interacciones de pares, tríos y con un campo externo toma la forma:

$$-\beta H = L \sum_i \delta(\omega_i, 0) + K \sum_{(i,j)} \delta(\omega_i, \omega_j) + K_3 \sum_{(i,j,k)} \delta(\omega_i, \omega_j, \omega_k) + \dots$$

donde $\beta = \frac{1}{kT}$ y $\omega_i = 0, 1, \dots, q - 1$ especifica el estado del spin en el sitio i -ésimo, $K = \beta\epsilon_2$ y K_n con $n \geq 3$ mide la intensidad de las interacciones de n -sitios y L es un campo externo aplicado al estado 0 de spin. Su función partición se escribe:

$$Z_G(q; L, K, K_n) = \sum_{\omega_1=0}^{q-1} \dots \sum_{\omega_N=0}^{q-1} e^{-\beta H}$$

A partir de ella sería posible derivar, por ejemplo: La energía libre por sitio

$$f(q; L, K, K_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z_G(q; L, K, K_n)$$

La energía interna por sitio

$$E(q; L, K, K_n) = -\frac{\partial}{\partial \beta} f(q; L, K, K_n)$$

La magnetización por sitio

$$M(q; L, K, K_n) = -\frac{\partial}{\partial L} f(q; L, K, K_n)$$

Sin embargo, como es usual en Mecánica Estadística, no conocemos para este modelo el cálculo exacto de la función partición. El cálculo exacto de cantidades físicas es posible sólo en algunos casos muy particulares y en general el sistema se analiza bajo aproximaciones analíticas de diversa indole o simulaciones numéricas.

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo presento los resultados, los cuales consisten en dos aportaciones, la aplicación de la correspondencia de Burton-Steif al modelo de Potts y la propuesta de un modelo estadístico de nuestra autoría, el cual consiste de 14 espines (símbolos), inspirado en los modelos de vértices de la Mecánica Estadística, se estudia desde enfoque de la Mecánica Estadística dando como resultado un modelo que presenta transición de fase de segundo orden y desde el punto de vista de la Dinámica Simbólica dando como resultado un subshift de tipo finito fuertemente irreducible con dos medidas de máxima entropía

4.1. Correspondencia de Burton-Steif en el modelo de Potts

Como se mencionó en el capítulo anterior la versión 2D del modelo de Potts por Renfrey Potts en [17], donde generalizó un método para encontrar la temperatura crítica introducida algunos años antes, en el contexto del modelo 2D de Ising, por Kramers y Wannier en [20], [21].

Para establecer la equivalencia entre estados de equilibrio y medidas de máxima entropía, haremos la siguiente suposición con respecto a la interacción:

H) Existe $\epsilon_0 > 0$ y $S \subset \mathbb{N}_0$ finito, tal que $\Phi_\Lambda \in \epsilon_0 S$ para cada $\Lambda \in \mathbb{Z}^2$.

Por lo tanto, los valores posibles de la interacción son todos múltiplos de la misma

magnitud ϵ_0 .

En este modelo, el subshift subyacente es $(X := \mathbb{Z}_q^{\mathbb{Z}^2}, T)$, siendo el entero q el número de colores. La interacción Φ es tal que

$$\Phi_\Lambda(\eta) = \begin{cases} \delta(\eta_z, \eta_{z'}) & \text{si } \Lambda = \{z, z'\} \text{ y } |z - z'| = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

con $\delta(\cdot, \cdot)$ la delta de Kronecker. Podemos identificar el modelo de Potts con un *subshift de tipo finito* X fuertemente irreducible en el alfabeto $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}_q)^{\Lambda_{\text{cross}}}$. El conjunto de configuraciones admisibles $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}^{\Lambda_{\text{cross}}}$ que definen X está determinado por la superposición de símbolos en \mathcal{A} cuando se considera como configuraciones en $(\mathbb{Z}_q)^{\Lambda_{\text{cross}}}$. Después de esta identificación, la energía del volumen Λ está determinada por la interacción $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\Phi(\eta) = \frac{1}{2} |\{z \in \Lambda : |z| = 1 \text{ y } \eta_z = \eta_0\}|.$$

Esta interacción satisface la hipótesis H con $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y $\epsilon_0 = 1/2$.

La descripción del simplex de estados de equilibrio, $\mathcal{E}(\beta)$, a medida que β crece desde cero, constituye el diagrama de fase de el modelo. El diagrama de fase del modelo de Potts fue descrito por Martirosian en [18] donde demuestra que para q suficientemente grande (según Baxter en [13] q grande significaría $q > 4$) existe una temperatura inversa β_c tal que $\mathcal{E}(\beta)$ tiene exactamente $q + 1$ medidas extremas para $\beta = \beta_c$, tiene exactamente q medidas extremas para $\beta > \beta_c$, y es un singulete si $\beta < \beta_c$. En aras de la exhaustividad, enunciemos una versión del teorema de Martirosian adaptada a nuestras necesidades.

Teorema 4.1 (Adaptado de Martirosian [18]). *Existe $q_c \in \mathbb{N}$ tal que para cada $q > q_c$ existe una temperatura inversa $\beta_c(q) > 0$ tal que cuando $\beta = \beta_c(q)$ entonces $\mathcal{E}(\beta)$ tiene exactamente $q + 1$ extremos, para $\beta > \beta_c(q)$, $\mathcal{E}(\beta)$ tiene exactamente q extremos, y cuando $\beta < \beta_c(q)$, $\mathcal{E}(\beta)$ es un singulete.*

De un trabajo reciente de Duminil-Copin, Raoufi y Tassion en [7] deriva una mejora de el teorema de Martirosian en el sentido de que la transición en $\beta_c(q)$ ahora se sabe

que es brusca, lo que significa que la influencia de las condiciones de frontera decae exponencialmente rápido por debajo de la temperatura inversa crítica. Por encima de la temperatura inversa crítica, a cada uno de los q estados de equilibrio ergódico (o fase pura) corresponde a un único color $k \in \mathbb{Z}_q$ que, con probabilidad uno, llena una componente conexa sin frontera de \mathbb{Z}^2 mientras que el resto de los colores ocupan solo componentes conexas acotadas o islas.

El inverso de la temperatura crítica se ha calculado exactamente para cada $q \geq 2$. Su valor conjeturado se deriva primero de un argumento de dualidad utilizado por Kramers y Wannier en [13]. Fue resuelto exactamente para $q = 2$ del resultado de Onsager en [19]. Para $q \geq 4$, se demostró que el valor conjeturado era cierto mediante el uso de Teorema circular de Suzuki-Fisher en [24]. Este cálculo se puede encontrar en [11]. El gap $q = 3$, junto con muchos otros resultados interesantes, fue solo recientemente llenado por Beffara y Duminil-Copin en [5], y da

$$\beta_c(q) = \frac{\log(\sqrt{q} + 1)}{2}. \quad (4.1)$$

La energía libre del modelo Ising 2D ha sido explícitamente calculado por Lars Onsager en [19]. El modelo de Potts $q = 2$ es equivalente al modelo de Ising, la única diferencia es que $\Phi^{\text{Potts}} = (\Phi^{\text{Ising}} + 1)/2$.

Tomando esto en cuenta, y utilizando el resultado exacto de Onsager, obtenemos

$$-\beta f(\beta) = -\beta + \frac{\log(2)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \log \left(\cosh^2(\beta) + \frac{\sqrt{1 + \kappa^2 - 2\kappa \cos(2\phi)}}{\kappa} \right) d\phi,$$

donde $\kappa = 1/\sinh^2(\beta)$.

De los teorema [3.1 y 4.1] obtenemos lo siguiente.

Corolario 4.1. *Para cada $q \in \mathbb{N}$ existe $\ell_q > 0$ tal que, si $N < \ell_q$, entonces X_N es intrínsecamente ergódico, i.e., $\text{Max}(X_N)$ es un singulete. si por el contrario $N > \ell_q$, entonces $\text{Max}(X_N)$ es un simplex con exactamente q medidas extremas, una por cada color en \mathbb{Z}_q .*

Como se mencionó anteriormente, la temperatura inversa crítica se ha calculado exactamente para cada $q \geq 2$. Este valor determina directamente la degeneración crítica ℓ_q del corolario anterior. Por lo tanto, de (4.1) obtenemos,

$$\ell_q = \sqrt{q} + 1.$$

En particular, para la familia de *subshifts de tipo finito* fuertemente irreducibles correspondiente al modelo de Ising tenemos que $\ell_2 = \sqrt{2} + 1$ y, mientras que X_1 y X_2 son intrínsecamente ergódicos, $\text{Max}(X_N)$ tiene dos extremos para cada $N \geq 3$. De esta forma, obtenemos un *subshift de tipo finito* fuerte irreducible en un alfabeto con 2^9 símbolos con exactamente dos medidas ergódicas.

En el caso de $q = 2$, que corresponde al modelo de Ising, la energía libre se ha calculado explícitamente. La correspondencia entre la entropía topológica de X_N y la energía libre de Helmholtz de el modelo de Potts, nos permite dar un valor exacto para $h_{\text{top}}(X_N)$ cuando $q = 2$. Tomando $\kappa = (2N^2/(N^4 - 1))^2$, el resultado de Onsager da

$$h_{\text{top}}(X_N) = 2 \log(N) + \frac{\log(2)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \log \left(\left(\frac{N^4 + 1}{2N^2} \right)^2 + \frac{\sqrt{1 + \kappa^2 - 2\kappa \cos(2\phi)}}{\kappa} \right) d\phi.$$

Para $q > 2$ solo son aproximaciones a la energía libre de Helmholtz conocido, pero no una fórmula exacta. Sin embargo, hay otros modelos de Mecánica Estadística para los cuales la energía libre de Helmholtz puede ser calculado exactamente y para el cual la correspondencia de Burton-Steif puede ser aplicado.

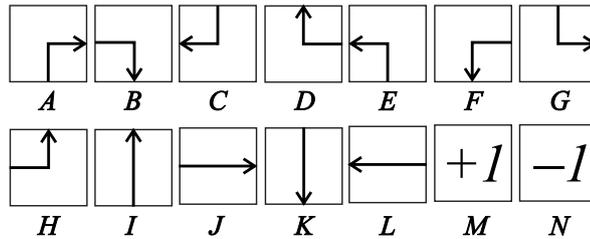
4.2. Un nuevo modelo tipo vértices en 2D

Los modelos de vértices son modelos de la Mecánica Estadística relacionados con el modelo de Ising, para el cual la energía libre de Helmholtz puede ser calculado exactamente. Estos modelos exhiben una transición de fase siguiendo una fenomenología análoga al modelo de Ising. Son *subshifts de tipo finito* y sus estados de equilibrio se definen por interacciones de un símbolo que toman valores en un conjunto de múltiplos enteros de

una cantidad dada, por lo tanto son adecuados para la aplicación de la correspondencia de Burton-Steif. Sin embargo, el *subshift de tipo finito* subyacente a estos modelos no es fuertemente irreducible en general. Por esta razón presentamos aquí un modelo de tipo vértice que consta de 14 símbolos, inspirado en los modelos de vértices clásicos, para el cual es posible aplicar el argumento de Peierls en el contexto de la Mecánica Estadística y demostrar tanto la fuerte irreducibilidad del subyacente subshift y la existencia de una transición de fase.

4.2.1. Presentación de un nuevo modelo tipo vértices

El modelo es un *subshift de tipo finito* en dos dimensiones (X, T) , el alfabeto es un conjunto de 14 símbolos, el alfabeto se muestra a continuación:



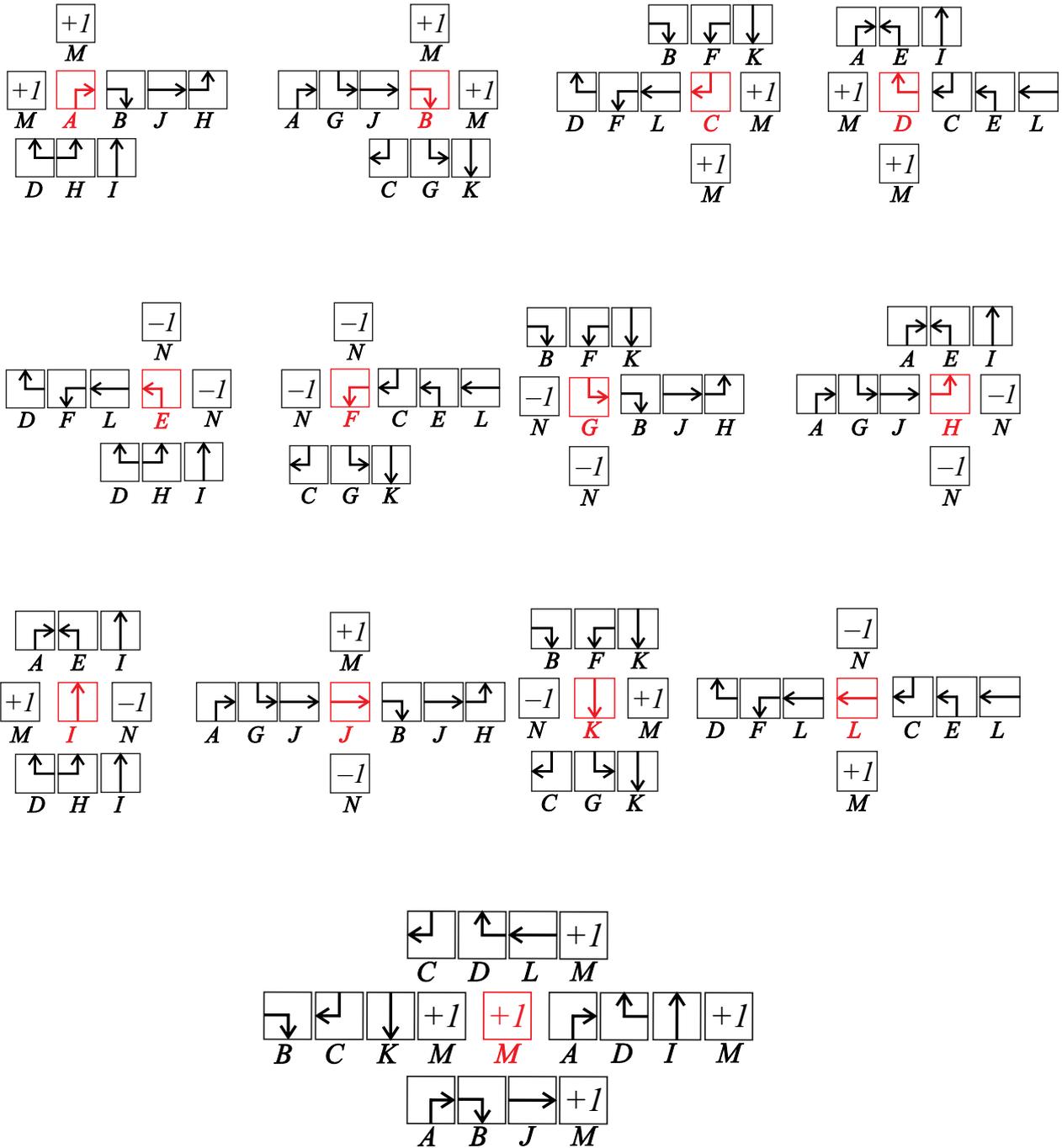
Nótese que los símbolos están ubicados en sitios de \mathbb{Z}^2 y que están etiquetados alfabéticamente. Al conjunto de los 14 símbolos lo denotamos por \mathcal{A} . Los primeros 12 símbolos de \mathcal{A} representan la dirección de las flechas, estas indican como cruzan un sitio de \mathbb{Z}^2 , mientras que los últimos dos símbolos son los dígitos $+1$ y -1 , que a continuación se indicará como son ubicados en \mathbb{Z}^2 .

Para ubicar los elementos de \mathcal{A} en la retícula \mathbb{Z}^2 o construir una configuración $\eta : \mathbf{W} \subset \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathcal{A}$, debemos seguir un conjunto \mathcal{B} de tres reglas de construcción o también llamadas reglas gramaticales:

- 1) Dos flechas no pueden ocupar sitios adyacentes al menos que la punta de una flecha coincide con la cola de la flecha vecina.
- 2) El símbolo $+1$ tiene que estar rodeado por símbolos $+1$ o por flechas que lo rodean en sentido contrario a las manecillas del reloj.

- 3) El símbolo -1 tiene que estar rodeado por símbolos -1 o por flechas que lo rodean en el sentido de las manecillas del reloj.

En la Figura 4.1 ilustramos cada uno de los 14 símbolos y los símbolos que pueden posicionarse a su derecha, izquierda, arriba y abajo.



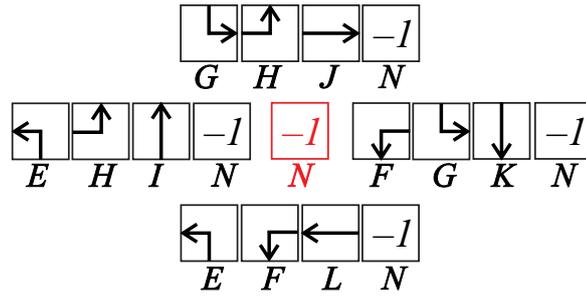


Figura 4.1: En rojo los 14 símbolos y a sus lados (arriba, abajo, derecha e izquierda) los símbolos que pueden ubicarse o pegarse a cada uno de ellos.

Entonces el *subshift de tipo finito* se define como:

$$X := \{\eta^* : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathcal{A} : \forall i \in \mathbb{Z}^2, \mathbf{F} \subsetneq \mathbb{Z}^2 \text{ finito} : \eta^*|_{i+\mathbf{F}} \notin \mathcal{B}^c\}.$$

La energía H de una configuración η es:

$$H = \sum_{i=A}^N n_i \varepsilon_i$$

donde n es el número de vértices de tipo i con $i = A, \dots, N$ y ε la energía asociada a cada vértice i .

Un ejemplo de una configuración se muestra en la Figura 4.2.

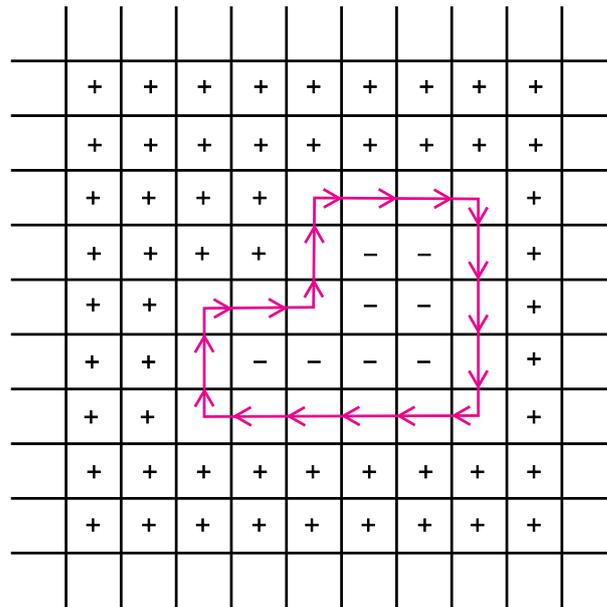


Figura 4.2: Ejemplo de una configuración.

Las siguientes definiciones describen a las $\eta^* \in X$. Empezamos redefiniendo el concepto de contorno, el cual se visualiza como una curva cerrada simple en el plano dual de \mathbb{Z}^2 , ahora el contorno se definirá en \mathbb{Z}^2 .

Definición 4.2.1. *Un contorno $\gamma \in \eta^*$, es una curva cerrada simple en \mathbb{Z}^2 , donde cada enlace de esa curva contiene algún símbolo de \mathcal{A} (excepto los símbolos M y N) que siguen la regla 1 y por regla 2 o 3 el contorno debe rodear al símbolo M o N según sea el caso.*

Un ejemplo de la definición 4.2.1 se aprecia en la figura 4.2.

Observación 4.1. *Notamos que si un contorno tiene en su interior signos negativos entonces el contorno tiene orientación acorde con el movimiento de las manecillas del reloj y al contrario al movimiento de las manecillas del reloj si en su interior tiene signos positivos.*

El contorno en la Figura 4.2 tiene movimiento acorde a las manecillas del reloj.

Observación 4.2. *De las reglas gramaticales observamos que los símbolos adyacentes en el exterior de un contorno son solamente $+1$ si la dirección del contorno es con el*

movimiento de las manecillas del reloj y -1 si la dirección del contorno es contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

Definición 4.2.2. *Dos contornos son disjuntos si la intersección de ambos es vacía, es decir, ambos contornos no comparten símbolos.*

Definición 4.2.3. *Si en el interior de un contorno γ existe otro contorno γ' entonces se dice que $\gamma' \subset \gamma$ (γ' contenido en γ).*

Proposición 4.1. *Si existe más de un contorno en una configuración y estos son disjuntos entonces estos deben tener el mismo sentido.*

Demostración. Demostramos primero que si en una configuración existen dos contornos y esos son disjuntos, entonces tienen el mismo sentido. Supongamos que en una configuración existen dos contornos disjuntos con dirección contraria; la mínima cantidad de sitios que pueden separar dos contornos por las reglas de construcción, es uno (y ahí se pueden colocar los símbolos ± 1) y como tienen dirección contraria, entonces los símbolos adyacentes en el exterior del contorno de cada uno de ellos, deben tener signo positivo o negativo dependiendo la dirección; pero esto no puede pasar ya que las reglas de construcción no la permiten, por lo tanto ambos deben tener la misma dirección. Cuando a los contornos los separan dos sitios, un contorno tiene en su exterior $+1$ y el otro -1 pero el bloque $+1 - 1$ está prohibido, por lo tanto hay una contradicción. Supongamos que los contornos están separados por k sitios y se genera la contradicción. Demostramos para $k + 1$, pero es el mismo caso que cuando solo los separan dos símbolos: generan al menos un bloque prohibido $+1 - 1$, por lo tanto los contornos deben tener la misma dirección. Si existen más de dos contornos disjuntos en una configuración se procede análogamente pero aplicado dos a dos en los contornos.

□

Un ejemplo de la proposición 4.1 se puede ver en la figura 4.3.

Proposición 4.2. *Si un contorno está contenido en otro, entonces deben tener sentidos distintos.*

Demostración. Para la demostración procedemos exactamente como en la demostración de la proposición 1.

□

La Figura 4.4 muestra un ejemplo de la proposición 4.2.

Observación 4.3. *La proposición 4.3 aplica para dos contornos contenidos. Si hubieran varios contornos anidados, aplica cuando el contorno contenido es el adyacente (más cercano) como en la figura 4.5, si los contornos están anidados, la dirección va cambiando uno respecto al otro.*

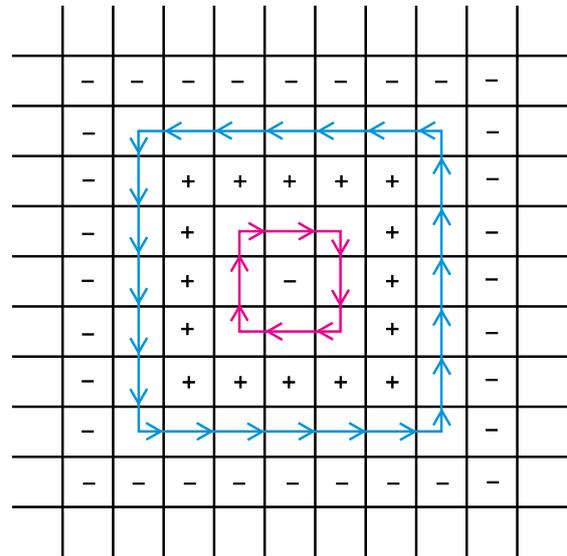
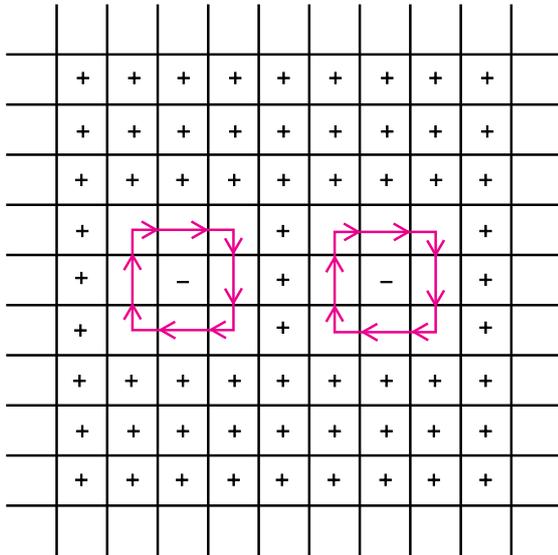


Figura 4.3: Ejemplo de la primera parte de la proposición. En rosa dos contornos disjuntos.

Figura 4.4: Ejemplo de la segunda parte de la proposición. En rosa un contorno γ y en azul un contorno γ' tal que $\gamma \subset \gamma'$.

Definición 4.2.4. *Una línea vertical positiva en una configuración, consiste en colocar el símbolo I consecutivamente, tal que atraviesa la configuración y la orientación de la línea es hacia arriba. Una línea vertical negativa en una configuración, consiste en colocar el símbolo K consecutivamente, tal que atraviesa la configuración y la orientación de la línea es hacia abajo. Una línea horizontal positiva en una configuración, consiste en colocar el*

símbolo J consecutivamente, tal que atraviesa la configuración y la orientación de la línea es hacia la derecha. Una línea horizontal negativa en una configuración, consiste en colocar el símbolo L consecutivamente, tal que atraviesa la configuración y la orientación de la línea es hacia la izquierda.

Definición 4.2.5. Una línea escalonada positiva en una configuración, consiste en conectar una línea horizontal positiva (o solo el símbolo J) con una línea vertical positiva (o solo símbolo I) con los símbolos A o H (o ambos) o con una línea horizontal negativa (o solo el símbolo L) con una línea vertical positiva (o solo el símbolo I) con los símbolos D y E (o ambos). Una línea escalonada negativa en una configuración, consiste en conectar una línea horizontal positiva (o solo el símbolo J) con una línea vertical negativa (o solo símbolo K) con los símbolos B o G (o ambos) o con una línea horizontal negativa (o solo el símbolo L) con una línea vertical negativa (o solo el símbolo K) con los símbolos C y F (o ambos).

Observación 4.4. Notamos que en la definición 4.2.5, las líneas escalonadas positiva y negativa atraviesan la configuración y sus estructuras son como de una escalera, que en el caso de la positiva la escalera sube y en el de la negativa baja.

Un ejemplo de las definiciones 4.2.4 y 4.2.5, se observan en la Figura 4.5.

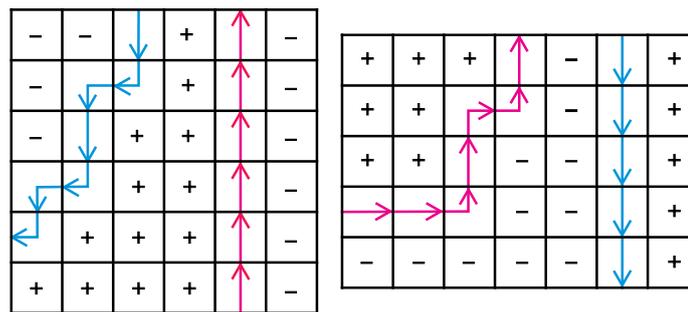


Figura 4.5: A la izquierda un ejemplo de una configuración con una línea vertical positiva (rosa), y una línea escalonada negativa (azul) y a la derecha un ejemplo de una configuración con una línea vertical negativa (azul) y una línea escalonada positiva (rosa).

Proposición 4.3. *Si existen líneas verticales, horizontales o escalonadas positivas en una configuración y existe la línea inmediata anterior o inmediata posterior (o ambas) entonces deben ser negativas. Es análogo el caso cuando las líneas son negativas.*

Demostración. Para la demostración procedemos exactamente como en la demostración de la proposición 4.2.

□

Un ejemplo de la proposición 4.3 se aprecia en la figura 4.5.

Observación 4.5. *Una línea está separada de su línea inmediata anterior y de su línea inmediata posterior por signos positivos o negativos según sea el caso. Ver figura 4.5.*

Las proposiciones 4.1, 4.2 y 4.3 nos dan una caracterización de las configuraciones en una retícula cuando éstas tienen contornos y líneas; es decir, si damos una configuración que tenga más de un contorno y línea, podemos saber si es una configuración válida. Por otro lado podemos usar \mathcal{B} para saber si en general una configuración es válida o no.

El modelo de 14 vértices presenta una fase ferromagnética; esta fase se presenta cuando $\varepsilon_M = \varepsilon_N = 0$ y las demás energías son 1. Los estados básicos de la fase son $+1$ y -1 .

4.2.2. Transición de fase en el nuevo modelo tipo vértices

En esta sección demostraremos que el modelo tipo vértices presenta transición de fase.

Teorema 4.2. *El nuevo modelo tipo de vértices presenta transición de fase.*

Para que exista transición de fase o también llamada magnetización espontánea, tenemos que mostrar que para cada \mathcal{N} tenemos $\mathbb{E}_{\mu_\beta}(\mathcal{N}_-)/\mathcal{N} < 1/2 - \epsilon$ (con $\epsilon > 0$ y \mathcal{N} independiente), donde \mathcal{N} es el total sitios en una retícula finita Λ , \mathcal{N}_\pm es el total de sitios con símbolos ± 1 , \mathbb{E} es el valor esperado y μ_β es la medida de Gibbs.

Demostración. Para la demostración utilizaremos los **contornos** que tienen movimiento acorde a las manecillas del reloj.

Enumeramos las siguientes **precisiones**.

1. Tomamos un volumen finito $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ con \mathcal{N} sitios.
2. Fijamos la frontera del volumen finito con $+1$.
3. Los **contornos** son precisamente como en la definición 4.2.1, pero solo nos interesan los contornos con orientación acorde con las manecillas del reloj, entonces los contornos separan en la retícula Λ mares de $+1$ de islas de -1 .

Denotamos un contorno como γ . Además los siguientes enunciados son ciertos:

- a) Cada contorno es una curva cerrada simple sin intersección.
- b) Cada sitio -1 está dentro al menos de un contorno.
- c) El conjunto de contornos es uno a uno con el conjunto de configuraciones. Esto se da por las condiciones de frontera.

Para denotar la longitud de un contorno en \mathbb{Z}^2 usamos \mathbf{L} .

Observaciones.

- En un volumen finito el número de contornos de una longitud dada \mathbf{L} es finita.
- Las condiciones de frontera garantizan que solo hayan contornos y no haya ningún tipo de línea.

Tenemos la siguiente cota superior para el para el número de \mathcal{N}_- de sitios presentes en una configuración:

$$\mathcal{N}_- \leq \sum_{\mathbf{L} \geq 8, \text{par}} \sum_{\gamma \in \mathcal{C}_{\mathbf{L}}^+} \mathbf{A}(\gamma) \mathbf{X}_{\gamma}(\eta)$$

donde $\mathbf{X}_{\gamma}(\eta) = 1$ si γ ocurre en una configuración η dada y $\mathbf{X}_{\gamma}(\eta) = 0$ en otro caso.

Además:

- $\mathbf{L} = |\gamma|$ es la longitud (\mathbf{L}) del contorno (perímetro).
- Sea $\mathcal{C}_{\mathbf{L}}^+ = \{\gamma \text{ contorno acorde con el movimiento de las manecillas del reloj} : |\gamma| = \mathbf{L}\}$.

- $\mathbf{L} \geq 8$ ya que el contorno con menor perímetro que rodea a un símbolo es ocho.
- $\mathbf{A}(\gamma)$ es el área del contorno γ , es decir el número de sitios dentro del contorno.

El siguiente paso es mostrar que $\mathbf{A}(\gamma)$ tiene una cota superior de la forma $\mathbf{A}(\mathbf{L})$, es decir $\mathbf{A}(\gamma) \leq \mathbf{A}(\mathbf{L})$, depende solamente de la longitud \mathbf{L} del contorno.

- Para obtener la cota superior dibujamos el rectángulo más pequeño \mathcal{R} (con lados paralelos a la frontera del volumen finito) que contienen $\gamma \in \mathcal{C}_{\mathbf{L}}^+$.
- El perímetro de \mathcal{R} no es más grande que \mathbf{L} : si dibujamos dentro de \mathcal{R} una línea paralela a uno de los ejes, esta línea intersecta a \mathcal{R} en dos aristas; pero esta línea también tiene que intersectar a γ en al menos dos aristas, de otra manera γ se separaría en dos contornos disjuntos o \mathcal{R} no sería el rectángulo más pequeño que contenga a γ .
- Si denotamos la longitud de los lados de \mathcal{R} por x_1 y x_2 , tenemos que $2(x_1 + x_2) \leq \mathbf{L}$ y $\mathbf{A}(\gamma) \leq x_1 x_2$. Como una consecuencia tenemos

$$\mathbf{A}(\gamma) \leq \max_{2(x_1+x_2) \leq \mathbf{L}} x_1 x_2.$$

El máximo de la ecuación anterior se alcanza en $x_1 = x_2 = \mathbf{L}/4$ (es decir, todos los rectángulos con perímetro fijo, el cuadrado es el único con área mayor) por lo tanto

$$\mathbf{A}(\gamma) \leq \mathbf{A}(\mathbf{L}) \equiv \frac{\mathbf{L}^2}{16}$$

Entonces tenemos que $\mathcal{N}_- \leq \sum_{\mathbf{L} \geq 8, par} \sum_{\gamma \in \mathcal{C}_{\mathbf{L}}^+} \mathbf{A}(\gamma) \mathbf{X}_{\gamma}(\eta)$ se convierte en:

$$\mathcal{N}_- \leq \sum_{\mathbf{L} \geq 8, par} \frac{\mathbf{L}^2}{16} \sum_{\gamma \in \mathcal{C}_{\mathbf{L}}^+} \mathbf{X}_{\gamma}(\eta). \quad (4.2)$$

No nos interesa el valor \mathcal{N}_- para una configuración, ya que nos interesa el valor esperado $\mathbb{E}_{\mu_{\beta}^+}(\mathcal{N}_-)$. Entonces de la ecuación (4.2) tenemos

$$\mathbb{E}_{\mu_{\beta}^+}(\mathcal{N}_-) \leq \sum_{\mathbf{L} \geq 8, par} \mathbf{A}(\mathbf{L}) \sum_{\gamma \in \mathcal{C}_{\mathbf{L}}^+} \mathbb{E}_{\mu_{\beta}^+}(\mathbf{X}_{\gamma}(\eta)), \quad (4.3)$$

donde $\mathbb{E}_{\mu_\beta^+}(\mathbf{X}_\gamma(\eta))$ es la esperanza de una variable aleatoria de tipo Bernoulli la cual es la probabilidad.

Entonces la probabilidad de que ocurra $\mathbf{X}_\gamma(\eta)$ esta dada por la medida de Gibbs

$$\mathbb{E}_{\mu_\beta^+}(\mathbf{X}_\gamma(\eta)) = \mu_\beta^+\{\eta : \gamma \in \eta\} = \frac{\sum_{\eta \in \Gamma} e^{-\beta H(\eta)}}{\sum_{\eta \in \Omega_{\Lambda^+}} e^{-\beta H(\eta)}}, \quad (4.4)$$

donde $\Omega_{\Lambda^+} = \{\eta \in \Omega : \eta_{i0} = +, \eta_{jk} = +, \eta_{kl} = +, \eta_{m0} = +, 0 \leq i, j, l, m \leq k\}$ y $\Gamma = \{\eta : \gamma \text{ ocurre en } \eta\}$. Entonces la suma en el numerador se restringe a aquellas configuraciones donde γ ocurre y el denominador es una suma sobre todas las configuraciones que satisfacen que la condición de frontera es positiva.

Nos interesa acotar $\sum_{\gamma \in \mathcal{C}_{\mathbf{L}}^+} \mathbb{E}_{\mu_\beta^+}(\mathbf{X}_\gamma(\eta))$ por una función $X(\mathbf{L})$ la cual solo depende de la longitud del contorno. Entonces

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{C}_{\mathbf{L}}^+} \mu_\beta^+\{\eta : \gamma \in \eta\} = \frac{\sum_{\gamma \in \mathcal{C}_{\mathbf{L}}^+} \sum_{\eta \in \Gamma} e^{-\beta H(\eta)}}{\sum_{\eta \in \Omega_{\Lambda^+}} e^{-\beta H(\eta)}}. \quad (4.5)$$

Para acotar la parte derecha de la ecuación (4.5). Definimos

$R^+(\eta) := \{\bar{\eta} : \eta \text{ quitamos } \gamma \text{ más cercano al origen y además rellenamos el interior de } +\}$,

asimismo notamos que si existe un γ' dentro de γ que rodea al origen, éste cambia su orientación y los signos dentro de él. La figura 4.6 muestra cómo obtener un elemento de $R^+(\eta)$.

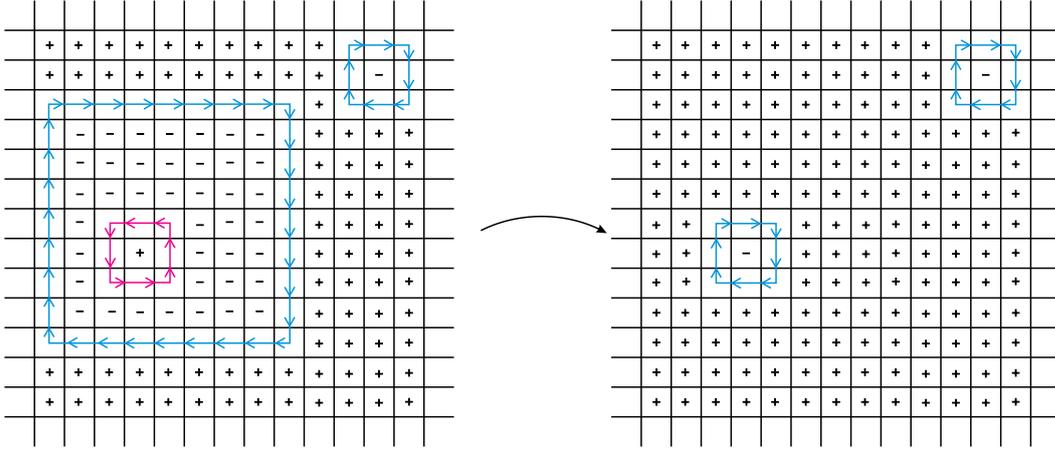


Figura 4.6: A la izquierda una configuración η y a la derecha una configuración $\bar{\eta} \in R^+(\eta)$ construida a partir de η .

Entonces

- Si $\eta \ni \gamma$, $\gamma \in \mathcal{C}_{\mathbf{L}}^+$, entonces $\mathcal{E}(\eta) = L + R^+(\eta)$
- Si $\eta \in \Omega_{\Lambda_+}$, $\eta \ni \gamma$ y $\gamma \in \mathcal{C}_{\mathbf{L}}^+$ entonces $R^+(\eta) \in \Omega_{\Lambda_+}$

Ahora si $\bar{\eta} \in \Omega_{\Lambda_+}$ y $\eta_0 = -1$, entonces $\mathcal{I} := \{\eta \in \Omega_{\Lambda_+} : R^+(\eta) = \bar{\eta}\}$, necesitamos calcular una cota para su cardinalidad. Una cota sería el número de contornos cerrados de longitud \mathbf{L} . Esto se puede obtener enumerando las posibles formas en que un contorno cerrado de longitud \mathbf{L} , puede construirse usando \mathbf{L} símbolos:

1. Tenemos $12\mathcal{N}$ maneras de colocar la primer arista.
2. Como debe ser un contorno cerrado, debemos conectar cada extremo con otra arista y hay 3 posibles maneras de realizarlo.
3. Iteramos: en el paso $n \geq 2$ agregamos dos nuevas aristas en los extremos libres obtenidas en el paso $n - 1$.
4. Ya que la arista del paso 1 se fija, tenemos como máximo $3^{2(n-1)}$ maneras de construir la curva hasta el paso n .

5. En el paso n la longitud de la curva es $2(n-1) + 1$ y cuando llegamos al paso \bar{n} definido por

$$2(\bar{n} - 1) + 1 = \mathbf{L} - 1,$$

(recordemos que \mathbf{L} es par) solo tenemos una única manera de agregar la última arista para cerrar la curva, por lo que número de curvas cerradas de longitud \mathbf{L} debe ser más pequeño que $12\mathcal{N}3^{2(\bar{n}-1)} = 12\mathcal{N}3^{\mathbf{L}-2}$.

Ya que todas las aristas de una curva cerrada están en la misma posición, entonces llegamos a la cota superior

$$|\mathcal{I}| \leq \frac{4\mathcal{N}}{3\mathbf{L}} 3^{\mathbf{L}}.$$

Entonces de la ecuación (4.5) tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \mathcal{C}_{\mathbf{L}}^+} \mu_{\beta}^+ \{\eta : \gamma \in \eta\} &= \frac{\sum_{\gamma \in \mathcal{C}_{\mathbf{L}}^+} e^{-\beta\mathbf{L}} \sum_{\eta \in \Gamma} e^{-\beta H(R^+(\eta))}}{\sum_{\eta \in \Omega_{\Lambda_+}} e^{-\beta H(\eta)}} \\ &= \frac{e^{-\beta\mathbf{L}} \sum_{\gamma \in \mathcal{C}_{\mathbf{L}}^+} \sum_{\eta \in \Gamma} e^{-\beta H(R^+(\eta))}}{\sum_{\eta \in \Omega_{\Lambda_+}} e^{-\beta H(\eta)}} \\ &\leq \frac{e^{-\beta\mathbf{L}} \sum_{\bar{\eta} \in \mathcal{C}_{\mathbf{L}}^+ : \eta_0 = +1} e^{-\beta H(\bar{\eta})} |\mathcal{I}|}{\sum_{\eta \in \Omega_{\Lambda_+}} e^{-\beta H(\eta)}} \\ &\leq \frac{e^{-\beta\mathbf{L}} \sum_{\bar{\eta} \in \mathcal{C}_{\mathbf{L}}^+ : \eta_0 = +1} e^{-\beta H(\bar{\eta})} \frac{4\mathcal{N}}{3\mathbf{L}} 3^{\mathbf{L}}}{\sum_{\eta \in \Omega_{\Lambda_+}} e^{-\beta H(\eta)}} \end{aligned}$$

como $\sum_{\bar{\eta} \in \mathcal{C}_{\mathbf{L}}^+ : \eta_0 = +1} e^{-\beta H(\bar{\eta})} \leq \sum_{\eta \in \Omega_{\Lambda_+}} e^{-\beta H(\eta)}$, entonces podemos eliminarlos de la expresión anterior, por lo tanto la cota que nos resulta es:

$$e^{-\beta\mathbf{L}} \frac{4\mathcal{N}}{3\mathbf{L}} 3^{\mathbf{L}}.$$

Finalmente sustituyendo en la ecuación (4.3) tenemos

$$\mathbb{E}_{\mu_{\beta}^+}(\mathcal{N}_-) \leq \sum_{\mathbf{L} \geq 8, \text{par}} \frac{\mathbf{L}^2}{16} e^{-\beta\mathbf{L}} \frac{4\mathcal{N}}{3\mathbf{L}} 3^{\mathbf{L}} = \frac{\mathcal{N}}{12} \sum_{\mathbf{L} \geq 8, \text{par}} \mathbf{L} 3^{\mathbf{L}} e^{-\beta\mathbf{L}}. \quad (4.6)$$

El lado derecho de la expresión anterior se puede hacer arbitrariamente pequeña a temperaturas suficientemente bajas. Por lo tanto existe transición de fase.

□

Además podemos calcular una β_c derivado de la cota superior.

Tenemos que $\frac{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_-}^{\mu_+}}{\mathcal{N}_-} \leq \frac{1}{12} \sum_{\mathbf{L} \geq 8, \text{par}} \mathbf{L} 3^{\mathbf{L}} \exp(-\beta \mathbf{L}) = \frac{1}{2}$.

Ahora

$$\frac{1}{12} \sum_{\mathbf{L} \geq 8, \text{par}} \mathbf{L} 3^{\mathbf{L}} e^{-\beta \mathbf{L}} = \frac{1}{12} \sum_{\mathbf{L}=8}^{\infty} \mathbf{L} (3e^{-\beta})^{\mathbf{L}} = \frac{1}{2}.$$

Realizamos el cambio de variable $n = \mathbf{L} - 8$

$$\frac{1}{12} \sum_{n=0}^{\infty} (n+8) (3e^{-\beta})^{n+8} = \frac{1}{12} (3e^{-\beta})^8 \sum_{n=0}^{\infty} (n+8) (3e^{-\beta})^n = \frac{1}{2}.$$

Introducimos la variable x definida como $x = 3e^{-\beta}$,

$$\frac{1}{12} x^8 \sum_{n=0}^{\infty} (n+8) x^n = \frac{1}{12} x^8 \left(\sum_{n=0}^{\infty} n x^n + 8 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \frac{1}{2},$$

usando

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)}$$

y

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \frac{d}{dx} \frac{1}{(1-x)} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

multiplicando por x obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Sustituyendo obtenemos que

$$\frac{1}{12} x^8 \left(\sum_{n=0}^{\infty} n x^n + 8 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \frac{1}{12} x^8 \left(\frac{x}{(1-x)^2} + \frac{8}{(1-x)} \right) = \frac{1}{2}.$$

Multiplicando la igualdad por $(1-x)^2$ y simplificando obtenemos

$$\frac{-7}{12} x^9 + \frac{2}{3} x^8 = \frac{1}{2} (1-x)^2.$$

Resolviendo la ecuación, tenemos dos valores para x reales, los cuales son: $x = 0.769$ y $x = 1.137$.

Sustituyendo ambas x en $x = 3e^{-\beta}$, para $x = 0.769$ obtenemos $\beta_c = 1.36127$.

4.2.3. Correspondencia de Burton-Steif en el nuevo modelo tipo vértices

Construiremos un *subshift de tipo finito* a partir del modelo tipo vértices de 14 símbolos, utilizan sus bloques prohibidos, este *subshift* tendrá $2m+12$ símbolos, además demostraremos que el *subshift de tipo finito* es fuertemente irreducible y tiene al menos dos medidas de máxima entropía.

Sea $\mathcal{A} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, S^+, S^-\}$ un alfabeto donde $S^+ := \{1, 2, \dots, \mathcal{M} : \mathcal{M} \in \mathbb{Z}\}$ y $S^- := \{-1, -2, \dots, -\mathcal{M} : \mathcal{M} \in \mathbb{Z}\}$. Sea \mathcal{F} el conjunto de bloques prohibidos que se muestran en la figura 4.7.

$$\begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, S^- \\ | \\ A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, S^- - A - A, C, D, E, F, G, I, K, L, S^+, S^- \\ | \\ A, B, C, E, F, G, J, K, L, S^+, S^- \end{array} & \begin{array}{c} A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, S^- \\ | \\ B, C, D, E, F, H, I, K, L, S^+, S^- - B - A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, S^- \\ | \\ A, B, D, E, F, H, I, J, L, S^+, S^- \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} A, C, D, E, G, H, I, J, L, S^+, S^- \\ | \\ A, B, C, E, G, H, I, J, K, S^+, S^- - C - A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, S^- \\ | \\ A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, S \end{array} & \begin{array}{c} B, C, D, F, G, H, J, K, L, S^+, S^- \\ | \\ A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, S^- - D - A, B, D, F, G, H, I, J, K, S^+, S^- \\ | \\ A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, S^- \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, S^+ \\ | \\ A, B, C, E, G, H, I, J, K, S^+, S^- - E - A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, S^+ \\ | \\ A, B, C, E, F, G, J, K, L, S^+, S^- \end{array} & \begin{array}{c} A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, S^+ \\ | \\ A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, S^+ - F - A, B, D, F, G, H, I, J, K, S^+, S^- \\ | \\ A, B, D, E, F, H, I, J, L, S^+, S^- \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} A, C, D, E, G, H, I, J, L, S^+, S^- \\ | \\ A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, S^+ - G - A, C, D, E, F, G, I, K, L, S^+, S^- \\ | \\ A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, S^+ \end{array} & \begin{array}{c} B, C, D, F, G, H, J, K, L, S^+, S^- \\ | \\ B, C, D, E, F, H, I, K, L, S^+, S^- - H - A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, S^+ \\ | \\ A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, S^+ \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} B, C, D, F, G, H, J, K, L, S^+, S^- \\ | \\ A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, S^- - I - A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, S^+ \\ | \\ A, B, C, E, F, G, J, K, L, S^+, S^- \end{array} & \begin{array}{c} A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, S^- \\ | \\ B, C, D, E, F, H, I, K, L, S^+, S^- - J - A, C, D, E, F, G, I, K, L, S^+, S^- \\ | \\ A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, S^+ \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} A, C, D, E, G, H, I, J, L, S^+, S^- \\ | \\ A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, S^+ - K - A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, S^- \\ | \\ A, B, D, E, F, H, I, J, L, S^+, S^- \end{array} & \begin{array}{c} A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, S^+ \\ | \\ A, B, C, E, G, H, I, J, K, S^+, S^- - L - A, B, D, F, G, H, I, J, K, S^+, S^- \\ | \\ A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, S^- \end{array}
 \end{array}$$



Figura 4.7: Bloques prohibidos de cada una de las letras del alfabeto, de sus cuatro direcciones (arriba, abajo, derecha e izquierda).

El *subshift de tipo finito* asociado al modelo tipo vértices de 14 símbolos es:

$$X_{\mathcal{F}} = \{\eta^* : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathcal{A} : \forall i \in \mathbb{Z}^2, \mathbf{F} \subsetneq \mathbb{Z}^2 \text{ finito} : \eta^*|_{i+\mathbf{F}} \notin \mathcal{F}\}$$

Teorema 4.3. $X_{\mathcal{F}}$ es fuertemente irreducible.

Demostración. Demostraremos que para $r = 15$, $X_{\mathcal{F}}$ es fuertemente irreducible. Para ello mostraremos que para cualesquiera dos configuraciones admisibles $\eta^1 : \Lambda_1 \rightarrow \mathcal{A}$ y $\eta^2 : \Lambda_2 \rightarrow \mathcal{A}$, $\eta^* \in X_{\mathcal{F}}$ que consta de dos contornos disjuntos con orientación acorde a las manecillas del reloj, en su exterior signos positivos y los símbolos adyacentes al contorno en el interior son negativos (un ejemplo de η^* se muestra en la figura 4.8), será extensión de ambas configuraciones.

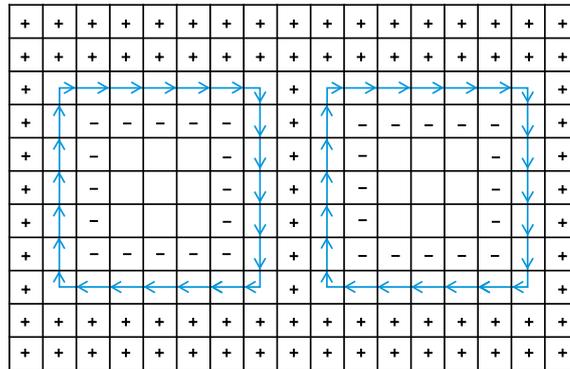


Figura 4.8: Ejemplo de un η^* , donde los espacios vacíos en η^* son para pegar η_1 y η_2 .

Sin pérdida de generalidad solo nos enfocaremos en configuraciones en Λ con \mathcal{N} sitios, ya que cualquiera que sea la forma de nuestra configuración, ésta se puede extender hasta formar un cuadrado con \mathcal{N} sitios.

Por otro lado, solo nos interesan los símbolos que están en la frontera de cada configuración, para poderlas extender a η , debido a que si los bloques prohibidos son de tamaño 2 solo necesitaríamos verificar que los símbolos que añadamos a la frontera, sigan generando una configuración admisible. En general podemos clasificar las fronteras de las configuraciones en 2 clases: las fronteras clase 1 que llamaremos uniformes que constan solo de los símbolos positivos o negativos en la frontera, como por ejemplo *a*) y *b*) de la Figura 4.9 o de los otros 12 símbolos restantes, como por ejemplo *c*) y *d*) de la Figura 4.9, donde las fronteras son como los contornos que ya vistos. Las fronteras de clase 2 que llamaremos intercaladas, se construyen con los 14 símbolos. La diferencia con las fronteras uniformes es que se pueden utilizar hasta los 14 símbolos en toda la frontera de la configuración, esto significa que para que la frontera no sea como de la clase 1 se intercalan con signos positivos o negativos (o viceversa), como por ejemplo *e*), *f*), *g*), *h*), *i*) y *j*) de la figura 4.9. Entonces para que una η^* como la de la Figura 4.8 sea extensión de cualquier configuración (con alguno de los dos tipos de fronteras) debemos encerrarla con símbolos del conjunto S^- o con un contorno con orientación contraria a las manecillas del reloj y por lo tanto podríamos extender la configuraciones directamente a η^* .

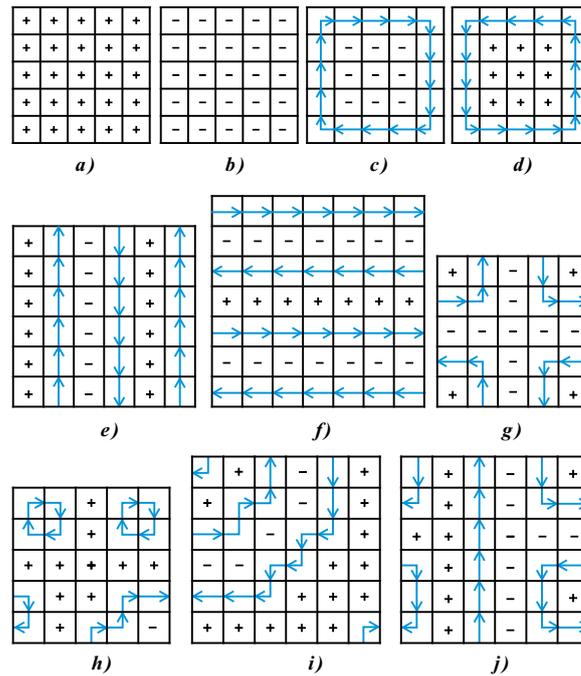


Figura 4.9: Las configuraciones a), b), c) y d) tienen frontera uniforme y las configuraciones e), f), g), h), i) y j) tienen frontera intercalada.

Procederemos por casos.

Caso 1. Cuando las configuraciones tienen fronteras intercaladas. Este caso es complicado ya que existen muchas fronteras de este tipo. A continuación daremos unas observaciones sobre las configuraciones, que están relacionadas con las definiciones 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3, 4.2.4 y 4.2.5 y las proposiciones 4.1, 4.2 y 4.3, además dividiremos los símbolos en dos tipos: el tipo 1 son aquellos símbolos que van del A a la L y el tipo 2 que lo conforman los símbolos de los conjuntos S^+ y S^- .

Observaciones.

1. En una configuración sobre una retícula cuadrada los únicos símbolos de tipo 1 que pueden estar aislados de símbolos del mismo tipo son: C y H en la esquina superior izquierda, G y D en la esquina superior derecha, B y E en la esquina inferior izquierda y A y F en la esquina inferior derecha, además solo pueden estar aislados en las esquinas de la frontera de la configuración; en las aristas esto es falso.

Por lo tanto solo pueden estar rodeados de símbolos del grupo 2. Esto se verifica por los bloques prohibidos. Un ejemplo es *i*) de la Figura 4.9.

2. Ambos símbolos del tipo 2 pueden estar aislados y de igual manera solo en las esquinas. Un ejemplo es *g*) de la Figura 4.9.
3. De la observación 1 y 2, podemos decir entonces que los símbolos de tipo 1 que se encuentran en las aristas de la frontera, son parte de líneas que empiezan o terminan en una arista, o bien, son parte de un contorno. Análogo para los de tipo 2.

De las observaciones anteriores, podemos afirmar que cualquier configuración η solo está conformada por líneas o contornos (o ambos), las cuales están separados por símbolos positivos o negativos y ciertos símbolos aislados.

Entonces el algoritmo para extender una configuración con frontera intercalada es el siguiente:

Consideremos una configuración con frontera intercalada.

1. Nos ubicamos en la esquina superior izquierda y verificamos que tipo de símbolo es. Si es de tipo 2 lo omitimos, si es de tipo 1, entonces verificamos si forma parte de una línea, de un contorno o si es aislado. Si es aislado o forma parte de una línea entonces lo etiquetamos para utilizarlo en el siguiente paso.
2. Recorremos la frontera respecto a las manecillas del reloj, símbolo a símbolo, cuando hallemos otro símbolo de tipo 1, verificamos si forma parte de una línea o de un contorno. Si forma parte de una línea entonces cerramos el contorno con el símbolo que etiquetamos en el paso anterior (esto se puede realizar por la proposición 4.3) y realizamos este proceso hasta haber recorrido cada símbolo de la frontera.
3. Cuando hayamos recorrido cada símbolo puede ocurrir que todas las líneas se convirtieron en contornos (porque la configuración tenía un número par de líneas) o que una línea no se cerró (ya que la configuración tenía un número impar de ellas). Si nos sobra una línea entonces la cerramos consigo misma.

4. El proceso anterior ensancha nuestra configuración en 3 símbolos, ya que puede ocurrir que cerremos un contorno por fuera de la configuración, más el símbolo positivo o negativo que debemos agregar para que contorno lo rodee.
5. En general tenemos una configuración con contornos disjuntos, los cuales por la proposición 4.1, deben tener la misma dirección. Si tienen la dirección contraria a la manecillas del reloj, podemos extender directamente; si tienen la dirección respecto a las manecillas del reloj entonces debemos agregar 2 símbolos más para poder extender a η^* .

Todo el algoritmo nos generó un ancho de $r = 5$, pero recordemos que debemos conectar 2 configuraciones entonces a cada configuración debemos ensancharla a lo más 5 símbolos, además la η^* que debemos extender separa las configuraciones por 5 símbolos, por lo tanto $r = 15$.

Caso 2. Cuando las configuraciones tienen frontera uniforme. Este caso es el más sencillo debido a que solo hay en total 4 fronteras que cumplen la uniformidad.

Para *a*) solo debemos rodear la frontera con un contorno con orientación contraria a las manecillas del reloj y así podemos extender a η^* .

Para *b*) podemos extenderla directamente.

Para *c*) solo debemos rodear la frontera con signos positivos y después con un contorno con orientación contraria a las manecillas del reloj; así podemos extender a η^* .

Para *d*) Solo rodeamos dos veces con la frontera con signos negativos.

Para los cuatro incisos anteriores, se pueden agregar tantos símbolos como sean necesarios para que al final $r = 15$.

□

Acabamos de demostrar que $X_{\mathcal{F}}$ es fuertemente irreducible, lo siguiente será demostrar que tiene al menos dos medidas de máxima entropía, para ello demostraremos el siguiente teorema.

Teorema 4.4. *Para $X_{\mathcal{F}}$. Sea L la longitud del contorno. Si \mathcal{M} es tal que*

$$\sum_{L=8}^{\infty} 12L3^{L-1} \frac{1}{\mathcal{M}^L} < \frac{1}{2}$$

entonces existe más de una medida de máxima entropía.

Antes de proceder a la demostración del Teorema 4.4, haremos una afirmación y enunciaremos una proposición que nos ayudará a su demostración.

Afirmamos lo siguiente: sea μ_n la medida en $X_{\mathcal{F}}$ que nos arroja la probabilidad 1 de tener \mathcal{M} en todos los sitios de Λ^c y en $\partial^1\Lambda$ y da medida uniforme en todas las configuraciones admisibles en Λ .

Proposición 4.4. *Para todo $n \geq 1$*

$$\mu_n\{\eta_0 \in S^-\} \leq \sum_{L=8}^{\infty} 12L3^{L-1} \frac{1}{\mathcal{M}^L}$$

Demostración. Un contorno γ en una configuración en Λ , es un camino cerrado simple, el cual consiste de una colección de sitios con ciertos símbolos de los doce posibles (excepto símbolos de los conjuntos S^+ y S^-), tal que es orientado.

Sea \mathcal{C}' una familia de contornos que tienen orientación acorde con el movimiento de las manecillas del reloj y sea \mathcal{C} el conjunto de aquellos contornos que tienen orientación acorde con las manecillas del reloj que rodean al origen 0. Sea Ω_n el conjunto de configuraciones admisibles en Λ las cuales son idénticamente \mathcal{M} en $\partial\Lambda$.

Si $\eta \in \Omega_n$ con $\eta_0 \leq -1$ obtenemos un elemento de \mathcal{C} como sigue: colocamos símbolos admisibles (excepto símbolos del conjunto S^+ y S^-) en sitios que están entre símbolos del signo opuesto. Esto nos da un conjunto de contornos.

Entonces sea γ el contorno que rodea al origen, obtenido de la construcción de arriba, si existe más de un contorno, tomamos el más cercano al origen.

Si $\gamma \in \mathcal{C}$, sea $\mathbf{E}_{\gamma} := \{\eta \in \Omega_n : \eta_0 \leq -1 : \gamma \text{ rodea al origen} \in \eta\}$ el evento que γ surge de η usando la construcción de arriba. Entonces se sigue que

$$\{\eta_0 \in \{S^-\}\} \subseteq \bigcup_{\gamma \in \mathcal{C}} \mathbf{E}_{\gamma}$$

y necesitamos mostrar que

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{C}} \mu_n(\mathbf{E}_\gamma) \leq \sum_{\mathbf{L}=8}^{\infty} 12\mathbf{L}3^{\mathbf{L}-1} \frac{1}{\mathcal{M}^{\mathbf{L}}}$$

Lema 4.1. *Si γ tiene longitud \mathbf{L} entonces*

$$\mu_n(\mathbf{E}_\gamma) \leq \frac{1}{\mathcal{M}^{\mathbf{L}}}.$$

Es fácil ver que el número de contornos de longitud \mathbf{L} es a lo más $12\mathbf{L}3^{\mathbf{L}-1}$ ya que la arista más a la izquierda del contorno que intercepta al eje x , tiene a lo más \mathbf{L} posibilidades y 12 símbolos que colocar en esas posibilidades; lo que nos da $12\mathbf{L}$ y entonces a medida que se construye el contorno, existen a lo más 3 maneras de escoger la arista en cada paso. Combinando esto con el lema 4.1.

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{C}} \mu_n(\mathbf{E}_\gamma) \leq \sum_{\mathbf{L}=8}^{\infty} 12\mathbf{L}3^{\mathbf{L}-1} \frac{1}{\mathcal{M}^{\mathbf{L}}}$$

□

Demostración. Lema 4.1. Para demostrar el Lema hay que acotar la siguiente expresión:

$$\frac{|\mathbf{E}_\gamma|}{|\Omega_n|}.$$

Acotamos de la siguiente manera: sea $\eta \in \mathbf{E}_\gamma$ generamos un conjunto $\mathbf{Q} \subset \Omega_n$ a partir de η , usando las siguientes reglas;

$$\bar{\eta} \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{\eta}_{\text{exterior}} = \eta_{\text{exterior}}. \\ \bar{\eta}_{\text{interior}} = -\eta_{\text{interior}} \text{ (cambiamos signos en los símbolos en el interior).} \\ \text{Eliminamos el contorno } \gamma \in \mathcal{C} \text{ y en los sitios que ocupaba el contorno} \\ \text{colocamos elementos de } S^+. \end{cases}$$

En la figura 4.10 se muestra un ejemplo de una configuración $\bar{\eta}$ (derecha) generada a partir de una configuración η (izquierda) con η_0 negativo. Notamos que $\gamma \in \mathcal{C}$ (color rojo), en el exterior de γ coinciden η y $\bar{\eta}$, en el interior de γ cambian de signo los símbolos $\bar{\eta}$ y los contornos en el interior de γ cambian su dirección y γ desaparece en $\bar{\eta}$ y puede tomar cualquier valor \mathcal{M} .

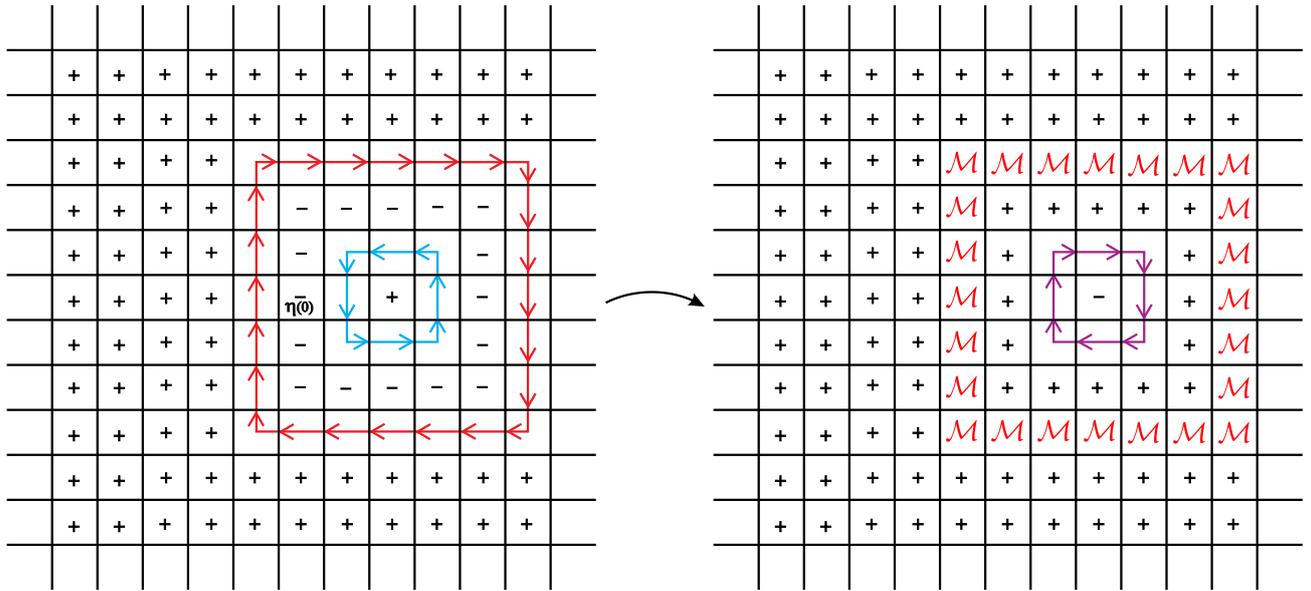


Figura 4.10: A la izquierda una configuración η , a la derecha una configuración $\bar{\eta}$.

Entonces para cada $\eta \in \mathbf{E}_\gamma$ existen \mathcal{M}^L configuraciones $\eta \in \Omega_n$, por lo tanto

$$\frac{|\mathbf{E}_\gamma|}{|\Omega_n|} \leq \frac{1}{\mathcal{M}^L}$$

□

Demostración. Teorema 4.4.

La proposición 4.4 junto con la manera de escoger \mathcal{M} implican que

$$\mu_n\{\eta_0 \in S^-\} < \frac{1}{2}.$$

Sea

$$H_{\mu_{n_k}}(\Lambda_m) = H(\mu_{n_k}|\Lambda_m) = - \sum_{\bar{\eta} \in \mathcal{A}^{\Lambda_m}} \mu_{n_k}[\hat{\eta}] \log \mu_{n_k}[\hat{\eta}].$$

$$H_{\mu_{n_k}}(\Lambda_m) \geq \log(\mathcal{L}_{\Lambda_{m-r}}) \text{ número de configuraciones}$$

dividimos entre el volumen $|\Lambda_m|$

$$\frac{H_{\mu_{n_k}}}{|\Lambda_m|} \geq \frac{\log(\mathcal{L}_{\Lambda_{m-r}})}{|\Lambda_m|}$$

tomamos un punto de acumulación ya que el espacio es compacto ($k \rightarrow \infty$)

$$\frac{H_\mu}{|\Lambda_m|} \geq \frac{\log(\mathcal{L}_{\Lambda_{m-r}})}{|\Lambda_m|}$$

tomamos $m \rightarrow \infty$

$$H_\mu \geq H.$$

Usando simetría, debe existir otra medida de máxima entropía (a saber, la medida obtenida por transformar μ_∞ aplicando $\eta \rightarrow -\eta$).

□

Además podemos calcular \mathcal{M} para la cual se cumple que

$$\sum_{\mathbf{L}=8}^{\infty} 12\mathbf{L}3^{\mathbf{L}-1} \frac{1}{\mathcal{M}^{\mathbf{L}}} = \frac{1}{2},$$

mediante el siguiente cálculo

$$\sum_{\mathbf{L}=8}^{\infty} 12\mathbf{L}3^{\mathbf{L}-1} \frac{1}{\mathcal{M}^{\mathbf{L}}} = 12 \sum_{\mathbf{L}=8}^{\infty} \mathbf{L}3^{\mathbf{L}-1} \mathcal{M}^{-\mathbf{L}} = \frac{1}{2}.$$

Multiplicamos por $\frac{3^7 \mathcal{M}^8}{3^7 \mathcal{M}^8}$,

$$12 \frac{3^7}{\mathcal{M}^8} \sum_{\mathbf{L}=8}^{\infty} \frac{\mathcal{M}^8}{3^7} \mathbf{L}3^{\mathbf{L}-1} \mathcal{M}^{-\mathbf{L}} = 4 \left(\frac{3}{\mathcal{M}} \right)^8 \sum_{\mathbf{L}=8}^{\infty} \mathbf{L}3^{\mathbf{L}-8} \mathcal{M}^{-(\mathbf{L}-8)} = \frac{1}{2}.$$

Realizamos el cambio de variable $n = \mathbf{L} - 8$,

$$4 \left(\frac{3}{\mathcal{M}} \right)^8 \sum_{n=0}^{\infty} (n+8) 3^n \mathcal{M}^{-n} = 4 \left(\frac{3}{\mathcal{M}} \right)^8 \sum_{n=0}^{\infty} (n+8) \left(\frac{3}{\mathcal{M}} \right)^n = \frac{1}{2}.$$

Introducimos la variable x definida como $x = \frac{3}{\mathcal{M}}$,

$$4x^8 \sum_{n=0}^{\infty} (n+8)x^n = 4x^8 \left(\sum_{n=0}^{\infty} nx^n + 8 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \frac{1}{2},$$

usando

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)}$$

y

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \frac{d}{dx} \frac{1}{(1-x)} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

multiplicando por x obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Sustituyendo obtenemos que

$$4x^8 \left(\sum_{n=0}^{\infty} nx^n + 8 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = 4x^8 \left(\frac{x}{(1-x)^2} + \frac{8}{(1-x)} \right) = \frac{1}{2},$$

multiplicando por $(1-x)^2$ y simplificando

$$-28x^9 + 32x^8 = \frac{1}{2}(1-x)^2.$$

De las soluciones de la ecuación obtenemos dos valores reales positivos para x los cuales son $x = 0.5318$ y $x = 1.142$, sustituimos en $x = \frac{3}{\mathcal{M}}$ y concluimos que para obtener la \mathcal{M} óptima, usamos $x = 0.5318$.

Por lo tanto $\mathcal{M} = 6$.

Capítulo 5

CONCLUSIONES

Hemos visto cómo se pueden utilizar los modelos de mecánica estadística que experimentan una transición de fase, para aplicar la correspondencia de Burton-Steif, y así obtener un *subshift de tipo finito* fuertemente irreducible, el cual admite varias medidas de máxima entropía. Nos centramos en particular en modelos para los que tenemos una buena descripción del diagrama de fases. Estos son los modelos de Potts, que incluyen el modelo de Ising y el modelo que hemos introducido. Además del modelo de Ising, hay algunos modelos de mecánica estadística para los que se conoce exactamente la energía libre de Helmholtz, entre los que se encuentran los modelos de hielos (el cual fueron los modelos en los que nos inspiramos para proponer uno nuevo). Los modelos de hielo fueron introducidos para modelar cristales con enlaces de hidrógeno, como es el caso del cristal de hielo. Estos son estados de equilibrio en un subshift de tipo finito en seis símbolos. Uno puede pensar en cada símbolo como cuatro enlaces dirigidos incidentes en un sitio determinado. El flujo total en un sitio tiene que ser cero, lo que significa que los enlaces vienen en pares de direcciones opuestas. Para obtener una configuración admisible en el subshift, todos sus enlaces deben coincidir con los enlaces de los sitios vecinos. La energía para este modelo viene dada por una interacción de un símbolo y tres submodelos, dependiendo de los valores relativos de la interacción, se han estudiado extensamente. El primero es el modelo de hielo para el cual la interacción es constante. El subshift de tipo finito obtenido mediante la aplicación de la correspondencia de Burton-Steif es en

este caso es el subshift de tipo finito original y la entropía topológica de este subshift de tipo finito fue calculada por Elliott Lieb en [23] y da

$$h_{\text{top}}(X) = \frac{3}{2} \log \left(\frac{4}{3} \right).$$

Este subshift de tipo finito no es fuertemente irreducible, pero si débilmente, y aunque no está formalmente probada, se espera que el sistema no fuera intrínsecamente ergódico. Para respaldar esto, hay varios resultados que proporcionan evidencia de la coexistencia de varias medidas de máxima entropía, en particular, las relativas a el efecto de las condiciones de frontera sobre la convergencia de varios indicadores (ver [25] por ejemplo).

El segundo submodelo importante, similar en algunos aspectos al modelo de Ising, se conoce como modelo KDP en mecánica estadística. Sufre una transición de fase similar a la del modelo Ising. Para β suficientemente grande, el sistema admite dos estados de equilibrio ergódicos asociados con dos homogéneas configuraciones. En este caso, la expresión de la medida condicional en términos de contornos ocurre a nivel de los símbolos y el diagrama de fase de esta versión del modelo (así como el resto posibles combinaciones con respecto a los valores relativos de la interacción) se describe en [12].

A pesar de que el soporte de los modelos de tipo hielo no es fuertemente irreducible, la teoría de Burton-Steif merece ser estudiada y aplicada en esos modelos. Para esos modelos, la energía libre de Helmholtz se puede calcular exactamente, y bajo Burton-Steif, nos dará un valor exacto de la entropía topológica restringida a condiciones de frontera periódicas. El hecho de que esta y otras características termodinámicas dependan de las condiciones de frontera, indica una rica estructura del simplex de medidas de equilibrio que bajo Burton-Steif se reflejaría en una estructura compleja para las medidas de máxima entropía.

Como ya se mencionó, el modelo propuesto en esta tesis, nos arroja un subshift fuertemente irreducible con dos medidas ergódicas de máxima entropía. Una construcción similar, pero modificando las reglas de construcción (es decir, permitiendo que \mathbb{Z}^2 se pueda teselar con puras flechas) nos permite producir un subshift tal vez con las mismas características, pero valdría la pena estudiar si este cambio produce más medidas de

máxima entropía, o en general que otras propiedades gana o pierde ese subshift.

Bibliografía

- [1] R. Peierls, *On Ising's model of ferromagnetism*. Proc. Cambridge Phil. Soc. 32, 477 (1936).
- [2] H. Georgii, *Gibbs Measures and Phase Transitions*, de Gruyter: New York, 1988.
- [3] R. Burton and J. E. Steif, *Non-uniqueness of measures of maximal entropy for subshifts of finite type*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, 1993.
- [4] R. Burton and J. E. Steif. “New results on measures of maximal entropy”, *Israel Journal of Mathematics* (1995) **89**, 275–300.
- [5] V. Beffara and H. Duminil-Copin. “The self-dual point of the two-dimensional random-cluster model is critical for $q \geq 1$ ”, *Probability Theory and Related Fields* (2012) **153**, 511–542.
- [6] O. Häggström. “A subshift of finite type that is equivalent to the Ising model”, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* (1995) **15**, 543–556.
- [7] H. Duminil-Copin, A. Raoufi and V. Tassion. “Sharp phase transition for the random-cluster and Potts models via decision trees”, *Annals of Mathematics* (2019) **189**, 75–99.
- [8] O. Häggström. “On the relation between finite range potentials and subshifts of finite type”, *Probability Theory and Related Fields* (1995) **101**, 469–478.
- [9] M. Zahradnik. “An Alternate Version of Pirogov-Sinai Theory”, *Communications in Mathematical Physics* (1984) **93**, 559–581.

- [10] P. Walters. *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer: New York, 1975.
- [11] A. Hintermann, H. Kunz and F. Y. Wu. “Exact Results for the Potts Model in Two Dimensions”, *Journal of Statistical Physics*, (1978) **19**, 623–632.
- [12] R.J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, (London , 1982) Academic Press.
- [13] R. J. Baxter. ”Potts model at the critical temperature”. *J. Phys. C* · 6, L445 · 1973.
- [14] R. B. Griffiths, *Peierls Proof of Spontaneous Magnetization in a Two-Dimensional Ising Ferromagnet*. *Phys. Rev.* 136, A437 (1964).
- [15] Claudio Bonati, *The peierls argument for higher dimensional Ising models*, *European Journal of Physics.*, 2014.
- [16] F. Y. Wu. The Potts model. *Rev. Mod. Phys.* · 54, 235 · 1982
- [17] R. B. Potts. “Some Generalized Order-Disorder Transformations”. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* (1952) 48, 106-109.
- [18] D. H. Martirosian. “Translation Invariant Gibbs States in the q -State Potts Model”, *Communications in Mathematical Physics* (1986) **105**, 281–290.
- [19] L. Onsager. “Crystal statistics. 1. A Two-dimensional model with an order disorder transition”, *Physical Review* (1944) **65**, 117–149.
- [20] H. A. Kramers and G. H. Wannier. “Statistics of the Two-Dimensional Ferromagnet. Part I”, *Physical Review* (1941) **60**, 252–262.
- [21] H. A. Kramers and G. H. Wannier. “Statistics of the Two-Dimensional Ferromagnet. Part II”, *Physical Review* (1941) **60**, 263–276.
- [22] C. N. Yang. The spontaneous magnetization of a two-dimensional ising model. *Physical Review*, Vol 85 pág. 808 (1952).
- [23] E. H. Lieb. “Residual entropy of squared Ice”, *Physical Review* (1967) **162**, 162–172.

- [24] M. Suzuki and M. E. Fisher. “Zeros of the Partition Function for the Heisenberg, Ferroelectric, and General Ising Models”, *Journal of Mathematical Physics* (1971) **12**, 235–246.
- [25] V. Korepin and P. Zinn-Justin. “Thermodynamic limit of the six-vertex model with domain wall boundary conditions”, *Journal of Physics A* (2000) **33** 7053–7066.
- [26] M. Misiurewicz. A short proof of the variational principle for a \mathbb{Z}_+^N -action on a compact space. *Asterisque* 40 (1975), 147-157.
- [27] J. Ashkin and E. Teller. ?Statistics of Two-Dimensional Lattices with Four Components?. *Phys. Rev.* · 64, 178 · 1943.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS



**DR. JEAN MICHEL GRÉVY MACQUART
COORDINADOR DEL POSGRADO EN CIENCIAS
PRESENTE**

Atendiendo a la solicitud para emitir DICTAMEN sobre la revisión de la TESIS titulada “**MODELOS DE MECÁNICA ESTADÍSTICA EN DINÁMICA SIMBÓLICA**”, que presenta el alumno **Luis Armando Corona Popoca (5620140201)** para obtener el título de **Doctor en Ciencias**.

Nos permitimos informarle que nuestro voto es:

NOMBRE	DICTAMEN	FIRMA
Dr. Federico Vázquez Hurtado CInC-UAEM	APROBADO	
Dr. Miguel Eduardo Mora Ramos CInC-UAEM	APROBADO	
Dr. Francois Alain Leyvraz Waltz ICF-UNAM	APROBADO	
Dr. Hernán Larralde Ridaura ICF-UNAM	APROBADO	
Dr. Rolando Pérez Álvarez CInC-UAEM	APROBADO	
Dr. Raúl Salgado García CInC-UAEM	APROBADO	
Dr. Markus Franziskus Muller CInC-UAEM	APROBADO	



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

Sello electrónico

ROLANDO PEREZ ALVAREZ | Fecha:2022-06-29 13:02:22 | Firmante

iozoC/kgtbX2EH0rWoEbu1Euqk55BTIE2TdaIWx7bKgPHklZBNgEivavfrYvTNSAwcd9RpnLYPZ0hO3CPuJABgEDNQgrSOGsjyxK8J+Qn0N5ShBcsr/BK7akp6njugvEqmF7KJ5LmZkUK6ixiQlJFKYVDTnTDoo/tKEdY9otKiCAq0Mcl02VZWaEyh3YCbua0wzslJTFForcJ1ngBhY1pJHwBEljw4JbZ6hNpCdAH+sizAAWRii+1XIRiceNa0SL/Ko3mWVN65g05erLxZ4zeGNY3pONQL5NwT9vZbPWGgD.JmCQhiJM5+5ODZC31RpixSl3Xw++uOwhjsaqyc+7w==

HERNÁN LARRALDE RIDAURA | Fecha:2022-06-29 13:10:34 | Firmante

IK7oelvs3PHDIIP9uXtOG1se9oULZXFheOEYU+YVdt8+iS+rtbXw9oF6yWIE7PsN1iXSkLy/Qkg4kP2ssInlB0DWJAPyyzdyTnv6b4flyXacmgtZqZLC2Jjj2pi2V9DqN1MYlaPbWvnlIDgisdHftxApsOaiBJ23i3OQEbH86sSazTm8CVIN1e0XpkRdq8V/UAYwJ5VftOEBvznTk35shJUp+M9JV3VngXa3PbYMDA0KlvtGdO+ESk6gkO7J9XcrY/9n0RHh6l23UBNsS2hCEzsXyHIRWOjnlH10ttMcyNSg0WU11cxBoGsVVzscdvB6hiS13CGmhSINTiaADYw==

MARKUS FRANZISKUS MULLER | Fecha:2022-06-29 13:21:46 | Firmante

H4MX6UumffmdVgD3euTfVgu56Z2dYe9sHGH83+jQhHOisFTPgSJVz+FGBCq7Hj1BnB+ZLTt89m/Jww4NfyB29b6JGOSgdTn3W0RGu8LSAbb4vsZhdld8kzSa8Gqq8iOqmWeMRqT3Z69xb4W/2azYDn9FDXvinbO0P65UxcEtPgdEP7o/7YITb20lVY3SBjPtXlYEnfTYWO+RLeTxwAwOC+5m0wdw2Y6zBJkKisJLq+1EdtjEFLN4L7d9HJYtxDKwRgao8nmpJ3zRFfn7bOYMctk1yaknmxm/7ILu3xV4gmHmRKNBPbopA+pC6YJnNPxR2K/yrTBkFn2JXFS3Rwig==

FEDERICO VAZQUEZ HURTADO | Fecha:2022-06-29 13:55:46 | Firmante

mYaKavxFv5Z6IOQkSIJRFy4Ho0ANfmFePfdUE1YEWc3gY29VbCHMn5Ajw1ZueO85DRH5huclVmq5Ap7ITCYugHbN7HtxCEY0ZcqmTewVpJPqbMg0P8Yb54OxWhea3dAMNGgPXuB6vcS9sPaf/xD8kYlJRJSJSXSBw2Goy800RsRdO/zFXhdJqJxvJZiWbaVklSMMWwFsjvW1hioTIVM83/K3RncNT3trbwaBEKntygqdfXLS9RCJQ4grWDY/ruRX+wRgclepeag3r4MjGelsf8Lv4bgtJqkChL8Ht0LdWYyZFSpr9PdH1BwlKvuiQ/7INWYnd2kpxopxY/61A==

FRANCOIS ALAIN LEYVRAZ WALTZ | Fecha:2022-06-29 15:23:03 | Firmante

eLe3GvY3ikvsbDadIFMsbYHz20d9zvR9asO5zoY5U9tXrGdFD/qQ31GEPw9CBqmRK/V0Zc4HQwq3Jl+RtK1XvKzZ8jkemjO5xI8ixiyWZaq6Cwvhy9wHhOJ6Lx9SyLORo74o4jpoC4LcXJcv1mr1p6oCv8F9MNSBgNBZr8sZsPHxuC+LalOx0tgu4R0s00pHuAGwqTeeVWJ4vapluF19lG/VGYU33clhs6NnyTDot8QnWyOmbYBRSenr3frtVwRjHU8SZ2UYCXOKICUqVP+5qPHi7b+s6nOzL+SQIFDAjdveM8ZFAu+Sr1+wGMHBWPv/1SVS7Pnm7hiDRc3ycQ==

MIGUEL EDUARDO MORA RAMOS | Fecha:2022-06-29 15:48:05 | Firmante

WUTfIEyC3lGAXjme5KXhjqvBmzvOZVz4mkSi+7lCnT7OaxGvU+kuWXpnguZ0eTndGBV9NnJXqLpJkC4TJuGdo/3WGo4rjSpEkHRixE3l9OxpFYecp96+6r218nQTWakZ73XxRcUlqDBygRC4TWAZamSd3ETIlhjlDGA9jSRzINEQj9/lhldra61UYl7Lb4rYGDc4uDH/Z6d5hL4J59G1EEhxWwU8QW7WFIY9UzgrLJ1x5fAvhWjIBgnCDQlqnKTMJCGj0/R1ByeRsVfXO8A86BKOWftynbdvRMR86L7of8JvM3HpOa+kdRW1MUOX87bElyftd5Y06fn10vgw==

RAUL SALGADO GARCIA | Fecha:2022-06-30 10:11:40 | Firmante

vbvKORuxrf/yX4iLBlL7mQZbU0GXRQs1paEMqmVDHeJdKfRp8o8WIEMAKeACBkq9bixF1mfnQrH4Csaew04sqX0Frhs0EAlH0Bz2Nnzwi2MvWC3dkIYUKrIZ18CBWRp4ojgoaybzumVrM06tUMSuQz1Y37dCcaZUsFO/T2DrUYKL0zGzzV/i7W6wGooBtsOepIIPQSHqSHBRyBJ0wReJ2Mf1lw3d0F7z5vxSn7AG2c8kQxq7SRq2IEBw6guyMhMnwIV04HQwllqEraraho8rR942/6q86WZjH7r6G5PccqlaqJzHew/8lSPFaMJKJ7dTVicWWSxulKdt8zLmC1A==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



kmahJTK7r

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/bHSOWIPBoVJ54t4lOcu8CqJ8GQEI5Arc>

