

**DR. JEAN MICHEL GRÉVY MACQUART  
COORDINADOR DEL POSGRADO EN CIENCIAS  
PRESENTE**

Atendiendo a la solicitud para emitir DICTAMEN sobre la revisión de la TESIS titulada **Invariantes de 2-nudos cubulados**, que presenta la alumna **Ana Silvia Baray Esparza (10010087)** para obtener el título de **Doctor en Ciencias**.

Nos permitimos informarle que nuestro voto es:

NOMBRE	DICTAMEN	FIRMA
Dr. Antonio Daniel Rivera López CInC-UAEM	APROBADO	
Dra. Larissa Viacheslavovna Sbitneva CInC-UAEM	APROBADO	
Dra. Liudmila Lvovna Sabinina CInC-UAEM	APROBADO	
Dr. Santiago Alberto Verjovsky Solá Instituto de Matemáticas -UNAM	APROBADO	
Dra. Fabiola Manjarrez Gutiérrez Instituto de Matemáticas -UNAM	APROBADO	
Dr. Rogelio Valdez Delgado CInC-UAEM	APROBADO	
Dra. Gabriela Guadalupe Hinojosa Palafox CInC-UAEM	APROBADO	



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

### Sello electrónico

**SANTIAGO ALBERTO VERJOVSKY SOLA | Fecha:2022-05-02 14:00:17 | Firmante**

OPVxBi+FZ2DxoWolRqrh7rljBnLWovNzKsSGCvxK4s2BTvRH9WY/4vtAu1dPJsfgVJvduNT0vfcgNkxeRILoFIHnHvbRH7tgTOKOmepp1ZnKHz6XnwFv3VPBE/rZO44fecYVg97wUhpahdLFmm2QWYQUUBNxuTgCsomk4XgmNo6KTg5dszDBvhuQY1I0eUfJ64whWTKRTERTPUIUCAAt8KxRMSKatgRydm2QepRugQ6Gxo0uN4R9pec+Wfs/kGsent55iSiKseaiCsAkvgli6dj+N4UG9C1BXHRHYNjn/Tcfrgp/YwTKzu9AYeASE1PDb2opOjPhz2/B77hZLe4yw==

**LARISSA VIACHESLAVOVNA SBITNEVA | Fecha:2022-05-02 15:26:15 | Firmante**

sGBcxqkWyZTS/dn2p6KlyP6Ug+j5qfvCnE8zdWUupn54DeScrg3TiB8RdscJhZRB5hiUUpv+dT5X3nKcnClvzMQRjtYX032nq8vU7/22Pb7LGLJXRdNwB6xPCoJPrRnGRTh7dna0i/q6/q5MzF/0qAecwmGdDktSVubOBLw3IKuXxmD374eB0te+9kZjUxkl79kFFnXIU3RgU1e2UsYgDHO05ol1mO7WO3VYWPkI8v3UCHHLEs2z7v6lyUMsqOFEI78Fz4feD6WpwnJcelpM0c/KZ37jQxx6Mlj0qfa3/9h3gckG1MdqLu/ADV9iBRyfhHlBp4i2rdcV2jx4IUqQ==

**GABRIELA GUADALUPE HINOJOSA PALAFOX | Fecha:2022-05-02 16:18:18 | Firmante**

CCSmVj+5dpHj/hHas7mvNqW6NcV6kqMF4G/7BUhdsE6WAgvgX/8MPqJ1vifNSVaXguLK+HEU4Uv2yELBe3vFWV6DKTHRt3CTtyz+dOafeNA+yvdGRw6ff2paj/EjT42HcmTPb/l8JwXUYnQEJDNEEcZe4s9lZFM4RTJkLj7D6UCKLmr88+taRn2bVnEgs+ITaHnTGUT5fb4vefd9zNHk3oc6b/s2ZVR1nzsMycr1RTUSezggQi4NwZSGTWtqkqC+z4NKDSRmOzuzUvLANuUCB45XaXvkw8o2vh3jUdBV0EkkfFyIOYA0sux4LU51ejY9K9KSSOSM5yOLbmOmrXqg==

**ROGELIO VALDEZ DELGADO | Fecha:2022-05-02 17:23:46 | Firmante**

HlfzOic7N0dOij6glGkxkKDe1gd6FoO9QrwZBIDKRBAoIF7IkYdWQdbCObtRWoNjaYa+e9w0yjVtHqEFmR8yXXStGwW2RGahdVpHAM0DBhZ3s7pHzIsY63JRh/lwSQN4dUDI+uqmcI/GHFkzhZnZlbrEpBoWLLapK3WiZwqPhyKfo6aRxXczTweO+i8m5C7p4cTQv0x8ZNM+meRBs/bZOJZ8+8V2kQ5T1JffOzr3lrveFqsMDKN2OmrODWLT4U+8SRGzMzt87FX2bSU+U5NsXXGSK1QG3sbmrawtoa+27/x1GjeQQGL8ii7Q62tg0WsqCQubVKGM/7yHzm/BQ==

**LIUDMILA LVOVNA SABININA | Fecha:2022-05-02 20:39:05 | Firmante**

D4iYLAS3QX5auB2l48dqy2NBQR8l0Mio1bEtauS65PFIINDNHuaAikqbAb5a35mCHVWLSrYnOFoFIZYqlv+QOyYs+J1ahY/d/Gs9nW5SHsS/WxpbD25ly5YzDgiYC6Lfw1MgHumotAik/AB1jzJhhGggf1gp7JoUeXvfYqxu0WdEfelrG2S0VI8PBm65loLXAJwW6BqTB84lcnDpsrQgF4rSMIRX9w2tG73JDrxjWFRGqFK1jYy+blceSSsRKNb0M3ekH0pz4NoHfFoHYOGq67XgD8HRK215bhX2+9ycDHEfMIICf/hkefCLJp5Ug9HRdiffidVf/dpXcHRnKQ==

**ANTONIO DANIEL RIVERA LOPEZ | Fecha:2022-05-03 21:53:30 | Firmante**

pzG+5ZuJer3XPCf1t8z+jY143qJqAbC1mejk09sjVbLxci65Vev0XiLecQ/Hmzy4/Zw74f12JFP4thruSrdupflraU9mn+xE7QpXr1Er+lcfE0bm+NoZwYM6soNHmqmUs9cLisx58THU9DjQBZ1c41YlYlRrU3xi5Zq4ayV2TpHBXrCbbT3vrclYkweMlbAJKdF16x6UOKZqA0UfFScdbh20kAqkW3ZRICKsFAfRrHnZK63r3Am2i7WcJebxGb18ho40F7X6uldvgM55+IbybXh0gTQBmGCM39jG00cA8/RyJRMDDNKBoyGBcXoObqGRONv+itt5JDMX4vzk3K3gw==

**FABIOLA MANJARREZ GUTIÉRREZ | Fecha:2022-05-22 08:45:21 | Firmante**

MJz7K311/LWNLVMxZqHsUVX0QZvV7oCreP6DVT5D7MstlXdgMx6ppqERjtdHEeyWhWyh6HbSCW6G9NQRL088B9Xwx8MflfBSqHJK7ctq57QpVqGlnzBPUURos8Hjwel6zQq5LdEckx05lPzBzsHXzv/Pc5PwN6Cds7SjNyZyy3SoxOA+4iMoymk/azkJPmT+ggRtdK6O/i5ID7zgzlZzh8oxZ+vt6doZndGkvadXsJGRhaRaYQEvCfWrRKMzBtdMmURbTTdaz7qpyBKKMqer6EvwXqHdEqZ0tb4v3jobMVVXtqoJfeNG7NQTxlyZNhgxxUT+qg1j2jJAG2MVoBug==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



BLFIK4uXd

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/Svru0ocq0EDOAd8VgyzBF56dQJ2DZJc>





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MORELOS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS  
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y  
APLICADAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

INVARIANTES DE 2-NUDOS CUBULADOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTORA EN CIENCIAS

PRESENTA

M.C. ANA SILVIA BARAY ESPARZA

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. GABRIELA GUADALUPE HINOJOSA PALAFOX

CUERNAVACA, MORELOS

MAYO DE 2022



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1. Superficie anudada y diagramas . . . . .	5
1.2. Diagramas de superficies anudadas y Movidas de Roseman . .	10
1.3. 2-Nudos Cubulados . . . . .	11
1.3.1. Movidas cubuladas . . . . .	13
<b>2. El invariante área para 2-nudos cubulados</b>	<b>17</b>
2.1. Construcción del spin del nudo trébol . . . . .	19
2.2. Área minimal débil del spin del nudo trébol . . . . .	28
2.3. Área mínima del spin del nudo trébol . . . . .	35
<b>3. Discretización de 2-nudos cubulados</b>	<b>55</b>
3.1. Descripción discreta de 2-nudos cubulados. . . . .	57
3.2. Movidas cubuladas en baricentros . . . . .	59
3.3. Descripción de una proyección genérica . . . . .	61
3.4. Proyección de los ejes y planos coordenados . . . . .	63
3.5. Ecuaciones de los planos paralelos . . . . .	64
3.6. Algoritmo para calcular el grupo fundamental . . . . .	68
<b>Apéndice</b>	<b>83</b>



# Introducción

A pesar de que la humanidad ha hecho uso de nudos desde el comienzo de nuestra existencia, el estudio matemático de éstos es relativamente joven, teniendo sus inicios hace aproximadamente 200 años. La teoría de nudos es la rama de la topología que se encarga de estudiar al objeto matemático que abstrae la noción cotidiana de nudo.

Un nudo es una curva cerrada, simple en el espacio; o de forma más precisa, es un encaje de la circunferencia en  $\mathbb{R}^3$  o en  $\mathbb{S}^3$ . Poder diferenciar y clasificar nudos en dimensión 3 ha sido una tarea compleja para la cual ya contamos con una serie de invariantes. Por otro lado, en dimensión cuatro, cualquier circunferencia anudada es equivalente al nudo trivial. Sin embargo, la teoría de nudos se puede generalizar a encajes de subvariedades en variedades, por ejemplo, una 2-esfera encajada en una 4-esfera, este tipo de encajes se les denomina 2-nudos, y serán el objeto de estudio a lo largo de este trabajo.

A principios de la década de 1960 se inició el estudio de polígonos en la cubulación canónica de  $\mathbb{R}^3$ . Desde entonces, ha habido muchos estudios teóricos y simulaciones dedicadas a este tema (ver [5]). Existen muchas preguntas interesantes sobre el comportamiento topológico de tales polígonos, por ejemplo: ¿Cuál es la longitud mínima de un polígono en la cubulación canónica de  $\mathbb{R}^3$  que se requiere para que esté anudado? Dada una clase de nudo, ¿cuál es

la longitud mínima necesaria para que un polígono en la cubulación canónica de  $\mathbb{R}^3$  sea un nudo de la misma clase dada? Y. Diao probó en [5] que la longitud mínima para que un polígono en la retícula de  $\mathbb{R}^3$  este anudado es 24. Estamos ahora interesados en estas preguntas para 2-nudos cúbicos.

M. Boege, G. Hinojosa y A. Verjovsky [2] mostraron el siguiente resultado.

**Teorema A.** *Todo  $n$ -nudo suave  $K^n : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$  puede deformarse isotópicamente en el  $n$ -esqueleto de la cubulación canónica de  $\mathbb{R}^{n+2}$ .*

Esta copia isotópica es llamado un  $n$ -nudo cúbico o cubulado. En particular, todo 1-nudo o 2-nudo suave  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+2}$  ( $n = 1, 2$ ) es isotópico a un nudo cúbico de la dimensión correspondiente.

Hay dos tipos de “movidas cubuladas” elementales ([11]) para 1-nudos. El primer movimiento ( $M1$ ) se obtiene dividiendo cada cubo de la cubulación canónica de  $\mathbb{R}^3$  en  $m^3$  cubos, lo que significa que cada arista del 1-nudo se subdivide en  $m$  segmentos iguales. El segundo movimiento ( $M2$ ) consiste en intercambiar un conjunto conexo de aristas en una cara de la cubulación o una subdivisión de la cubulación por las aristas complementarias en esa cara. Si dos 1-nudos cúbicos  $K_1$  y  $K_2$  son tales que podemos convertir  $K_1$  en  $K_2$  usando una sucesión finita de movidas cubuladas, entonces decimos que son *equivalentes vía movidas cubuladas* y lo denotamos por  $K_1 \stackrel{c}{\sim} K_2$ .

El siguiente resultado se probó por G. Hinojosa, A. Verjovsky y C. Verjovsky en [11].

**Teorema B.** *Dados dos 1-nudos cúbicos  $K_1$  y  $K_2$  en  $\mathbb{R}^3$ , éstos son isotópicos si y sólo si  $K_1$  es equivalente a  $K_2$  por medio de una sucesión finita de movidas cubuladas; es decir,  $K_1 \sim K_2 \iff K_1 \stackrel{c}{\sim} K_2$ .*



El resultado anterior es análogo a las movidas de Reidemeister para 1-nudos mansos cubulados.

Las movidas cubuladas se pueden extender a los 2-nudos cúbicos de manera natural ([6]): El primer movimiento ( $M1$ ) se obtiene dividiendo cada hipercubo de la cubulación canónica de  $\mathbb{R}^4$  en  $m^4$  hipercubos, y el segundo ( $M2$ ) consiste en intercambiar un conjunto conexo de caras cuadradas homeomorfas a un disco  $\mathbb{D}^2$  en un cubo de la cubulación por las caras complementarias en ese cubo. Esto lo veremos con mayor detalle en la sección 1.3.1.

El estudio de 2-nudos en  $\mathbb{R}^4$  ha sido considerado por varios autores, por ejemplo en [3], [4], [12] y [14].

Observemos que un 2-nudo cúbico  $K^2$  es la unión de  $m(K^2)$  cuadrados unitarios, por lo que decimos que  $m(K^2)$  es el *área* de  $K^2$ . Un 2-nudo cúbico que consiste de  $n$  cuadrados se denota por  $K^2(n)$  y surgen las siguientes preguntas: ¿Cuál es el área mínima para que una 2-esfera en la cubulación canónica de  $\mathbb{R}^4$  esté anudado? Dada una clase de nudos cúbicos, ¿cuál es el área mínima necesaria para que un 2-nudo cúbico en la cubulación canónica de  $\mathbb{R}^4$  pertenezca a la clase dada?

En esta tesis abordaremos los conceptos necesarios para estudiar 2-nudos cubulados, definimos un nuevo invariante y utilizaremos la combinatoria de la cubulación para discretizar los 2-nudos. Utilizando esta discretización daremos un algoritmo para calcular el grupo fundamental de 2-nudos cubulados. Así mismo, mostramos que el área mínima del spin del nudo trébol es 256. El contenido de esta tesis está dividido en tres capítulos que se describen a continuación.

En el Capítulo 1, presentamos los conceptos básicos de la teoría de 2-nudos, como son las movidas de Roseman, e introducimos las definiciones básicas de 2-nudos cubulados.

En el Capítulo 2, construimos y presentamos dos invariantes para los 2-nudos cubulados: el área minimal débil, el área mínima, y calculamos ambos invariantes para el spin del nudo trébol cubulado.

En el Capítulo 3, damos una descripción discreta de 2-nudos cúbicos y presentamos un algoritmo para calcular el grupo fundamental de los mismos.

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo introduciremos algunos conceptos básicos de la teoría de 2-nudos, que nos serán de mucha utilidad a lo largo de esta tesis.

### 1.1. Superficie anudada y diagramas

El tema principal de este trabajo son los 2-nudos en dimensión cuatro. Llamamos a un encaje  $K : F \rightarrow \mathbb{R}^4$  de una superficie cerrada  $F$  (conexa, compacta, sin frontera) una **superficie anudada**. Cuando la superficie  $F$  es homeomorfa a la 2-esfera, es llamada un **nudo 2-dimensional**, un **2-nudo** o un  **$\mathbb{S}^2$ -nudo**.

Si dos superficies anudadas  $F$  y  $F'$  son isotópicas en  $\mathbb{R}^4$ , decimos que  $F$  y  $F'$  son **equivalentes** y lo denotamos por  $F \cong F'$ . La clase de equivalencia de  $F$ , es decir, la clase de isotopía de  $F$ , es llamada la *clase* de  $F$ .

Antes de poder definir el diagrama de una superficie anudada será necesario revisar algunas definiciones previas.

**Definición 1.1.1.** *Sea  $F$  una superficie cerrada (conexa, compacta sin fron-*

tera). Decimos que una transformación suave  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^3$  denota una **superficie genérica** si para cada punto  $x \in F$  existe una vecindad (de hecho una 3-bola)  $N(y)$  que contiene a  $y = f(x)$ , tal que la pareja  $(N(y), f(F) \cap N(y))$  es difeomorfa a:

- $(\mathbb{B}^3, \text{la intersección de } i \text{ planos coordenados})$ , donde  $\mathbb{B}^3$  es una 3-bola que contiene al origen,  $i = 1, 2, 3$ .
- $(\mathbb{B}^3, \text{el cono en una figura 8})$ , donde la curva de la figura 8 está en la frontera de  $N(y)$ .

Un nudo  $K$  es usualmente representado por medio de una proyección  $P(K)$ , por ejemplo, la figura 1.1 muestra imágenes proyectadas del nudo trébol y el nudo ocho, respectivamente.

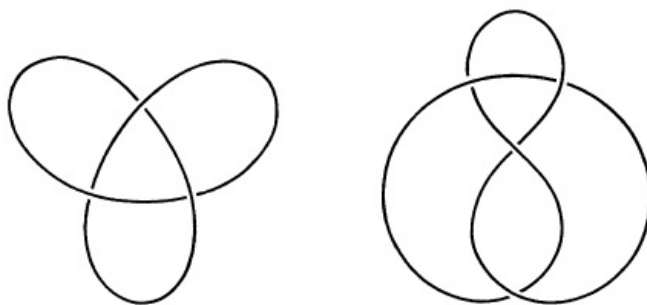


Figura 1.1: Diagrama nudo trébol y nudo ocho

**Definición 1.1.2.** Un punto  $p$  en la imagen de  $P(K)$  es llamado un **punto múltiple** si la imagen inversa  $P^{-1}(p)$  contiene más de un punto de  $K$ . El **orden** de  $p \in P(K)$  es la cardinalidad de  $P^{-1}(p) \cap K$ . Por lo tanto, un **punto doble** es un punto múltiple de orden 2, un **punto triple** es un punto de orden 3, y así sucesivamente.

Sea  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie genérica dada. Consideremos  $y \in \mathbb{R}^3$  un punto singular de  $f(F)$ ; entonces el punto  $y$  es un punto doble, un punto triple o un punto de ramificación de la transformación. Sea  $N(y)$  una vecindad de  $y$ . Un **diagrama local de superficie quebrada** cerca de  $y$  se forma al reemplazar la intersección  $f(F) \cap N(y)$  por una superficie cuya frontera posee una de las siguientes formas:

- Si  $y$  es un punto doble, reemplazamos  $f(F) \cap N(y)$  por tres discos encajados al remover una vecindad tubular abierta del arco 2-cubriente en una de las hojas que forman el conjunto de puntos dobles.
- Si  $y$  es un punto triple, reemplazamos la intersección por siete discos encajados.
- Y si  $y$  es un punto de ramificación, reemplazamos la intersección por un solo disco encajado con  $y$  en su frontera.

**Definición 1.1.3.** *Un **diagrama de superficie quebrada** consiste en una superficie genérica en  $\mathbb{R}^3$ , donde cada punto singular tiene una vecindad que tiene un diagrama local de superficie quebrada.*

A continuación construiremos el diagrama de una superficie anudada. Sea  $F$  una superficie suave encajada en  $\mathbb{R}^4$ . Elegimos un vector unitario  $v$  en el espacio tetra dimensional y un hiperplano tridimensional  $P$  en  $\mathbb{R}^4$  tales que  $F$  y  $P$  son disjuntos y la proyección  $\pi$  de  $F$  en la dirección  $v$  sobre  $P$  es una superficie genérica. Denotemos por  $g : F \rightarrow P$  a esta superficie genérica ( $g = \pi|_F$ ). (Estrictamente hablando, una superficie anudada se define por el encaje de una superficie suave  $K : F \rightarrow \mathbb{R}^4$ , pero aquí solo consideramos la imagen de  $F$  que denotaremos también por  $F$  para simplificar notación.)

Para cada punto doble de  $g$ , podemos calcular la distancia en  $\mathbb{R}^4$  de  $P$  a los dos puntos correspondientes en  $F$ ; sean  $x_1$  y  $x_2$  los puntos en  $F$  que se pro-

yectan al mismo punto en  $P$  y sea  $x_2$  el punto más alejado de  $P$ . Entonces, para obtener el diagrama local de superficie quebrada de  $F$  en una vecindad de  $g(x_1) = g(x_2)$ , eliminamos de  $g(F)$  la imagen de una pequeña vecindad abierta de  $x_2$  en  $F$ . Ver la figura 1.1 inciso (A).

Para cada punto triple de  $g$ , realizamos la construcción análoga. Sean  $x_1, x_2$  y  $x_3$  tres puntos en  $F$  con la misma imagen bajo  $g$ ; supongamos que  $x_1$  es el más cercano de los tres puntos en cuestión. El diagrama en una vecindad del punto triple  $g(x_1) = g(x_2) = g(x_3)$  se obtiene al eliminar de  $g(F)$  la imagen de pequeñas vecindades de  $x_2$  y  $x_3$ . Ver figura 1.1 inciso (B).

Para puntos de ramificación, podemos usar la misma construcción. Eliminamos una vecindad abierta en una de las hojas que involucra un punto de ramificación. Ver figura 1.1 inciso (C).

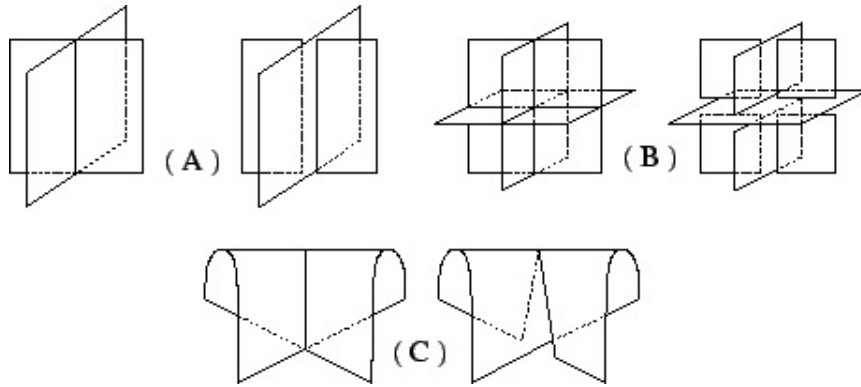


Figura 1.2: Diagrama de superficie anudada

**Definición 1.1.4.** *Un **diagrama de una superficie anudada** se obtiene al eliminar pequeñas vecindades abiertas para cada punto doble, triple y de ramificación en la imagen de la transformación genérica.*

Consideremos a  $\mathbb{R}^4$  como el producto  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$  de los espacios euclídeos  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}$ . Consideremos que  $\mathbb{R}$  es el parámetro tiempo. Una superficie anudada puede ser descrita dando sus secciones transversales en cada  $t \in \mathbb{R}$ . Este método es llamado la **película**.

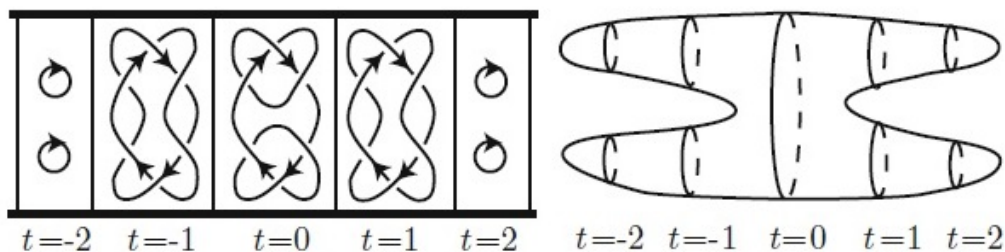


Figura 1.3: Una película de un 2-nudo spin del nudo trébol.

Sea  $F$  una superficie anudada. Sea  $h : F \rightarrow \mathbb{R}$  la restricción de la proyección  $pr : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  a  $F$ . Llamamos a  $h : F \rightarrow \mathbb{R}$  la **función altura** de  $F$  (con respecto a la cuarta coordenada de  $\mathbb{R}^4$ ).

Para una superficie suave  $F$ , los puntos regulares y críticos de  $h : F \rightarrow \mathbb{R}$  se definen utilizando diferenciales. Para superficies PL anudadas  $F$ , los puntos regulares y críticos se definen de la siguiente manera.

**Definición 1.1.5.** Sea  $K$  un complejo simplicial  $F = |K|$ . Sea  $p$  un punto de  $F$  y sea  $D$  el poliedro estrella (la unión de todos los simplejos que contienen a  $p$  y todas sus caras en  $p$ ). Entonces  $D$  es un 2-disco encajado en  $\mathbb{R}^4$ . Cuando  $h^{-1}(h(p)) \cap D$  es un arco de  $D$  y  $h(D)$  es un intervalo que contiene a  $h(p)$ . Entonces decimos que  $p$  es un **punto regular** de  $h$ , en otro caso es un **punto crítico**.

**Definición 1.1.6.** Sea  $p \in F$  un punto crítico de  $h : F \rightarrow \mathbb{R}$ . Existe un sistema de coordenadas locales  $(x_1, x_2)$  de  $F$  en  $p$  con  $p = (0, 0)$ , tal que la función altura se escribe localmente alrededor de  $p$  de alguna de las siguientes maneras:

a.  $x_1^2 + x_2^2 + h(p)$

b.  $x_1^2 - x_2^2 + h(p)$

c.  $-x_1^2 - x_2^2 + h(p)$

Llamamos a  $p$  un **punto minimal**, un **punto silla** o un **punto maximal** respectivamente.

La figura 1.4 muestra las películas alrededor de  $p$

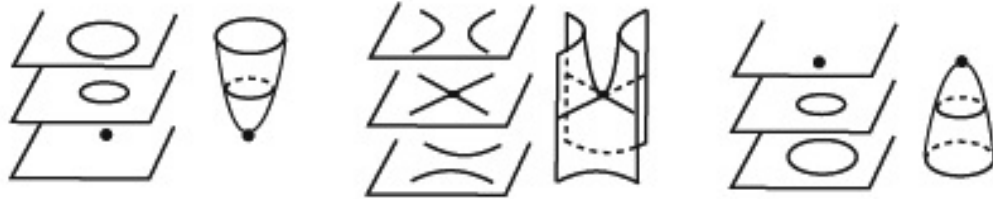


Figura 1.4: Una película de un punto minimal, un punto silla y un punto maximal, respectivamente

## 1.2. Diagramas de superficies anudadas y Movidas de Roseman

En la teoría clásica de nudos, un subconjunto  $K$  de un espacio  $X = \mathbb{R}^n$  o  $X = \mathbb{S}^n$  es un **nudo** si  $K$  es homeomorfo a una esfera  $p$ -dimensional  $\mathbb{S}^p$  encajada en el espacio euclideo  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$  o la  $n$ -esfera  $\mathbb{S}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ , donde  $p = n - 2$ . Dos nudos  $K_1, K_2$  son **equivalentes** o **isotópicos** si existe un homeomorfismo  $h : X \hookrightarrow X$  tal que  $h(K_1) = K_2$ ; denotado por  $(X, K_1) \cong (X, K_2)$ . Equivalentemente, un nudo  $K$  se define como un encaje  $K : \mathbb{S}^p \hookrightarrow \mathbb{S}^n \cong \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  (ver [?], [13]). Por lo tanto, en ocasiones, usaremos



el mismo símbolo para denotar la transformación  $K$  o su imagen  $K(\mathbb{S}^p)$  en  $\mathbb{S}^n$ .

Una superficie anudada es una superficie conexa, cerrada y orientada encajada en  $\mathbb{R}^4$ . Sea  $\pi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la proyección definida por  $\pi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3)$ . Una proyección de una superficie anudada en  $\mathbb{R}^3$  es *genérica* si cada punto es, ya sea un punto regular, un punto doble, triple o un punto de ramificación. Una proyección genérica de una superficie anudada  $F$  con la información de los cruces, es llamada un *diagrama de la superficie* y lo denotamos por  $D_F$ . Dos superficies anudadas  $F_1$  y  $F_2$  son *equivalentes* si existe una isotopía entre ellas. Para superficies anudadas equivalentes  $F_1$  y  $F_2$ , sus diagramas  $D_{F_1}$  y  $D_{F_2}$  se dice que son *equivalentes*. Roseman [14] obtuvo siete tipos de deformaciones locales para diagramas de superficies anudadas, generalizando así las movidas de Reidemeister en la teoría clásica de nudos. Tales deformaciones se conocen como *Movidas de Roseman*.

**Lema 1.2.1** (D. Roseman). *Sean  $F_1$  y  $F_2$  superficies anudadas equivalentes y sean  $D_{F_1}$  y  $D_{F_2}$  sus diagramas de superficie respectivamente. Existe una sucesión finita de siete tipos de deformaciones locales tales que deforman  $D_{F_1}$  en  $D_{F_2}$ .*

La figura 1.5 muestra los 7 tipos de movidas de Roseman en diagramas de superficies.

### 1.3. 2-Nudos Cubulados

La cubulación canónica  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^4$  es su descomposición en hipercubos que son las imágenes del hipercubo o 4-cubo unitario.

$$I^4 = [0, 1]^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 0 \leq x_i \leq 1\}$$

por traslaciones vía vectores con coeficientes enteros. Por lo que todos los vértices de  $\mathcal{C}$  tienen coordenadas enteras.

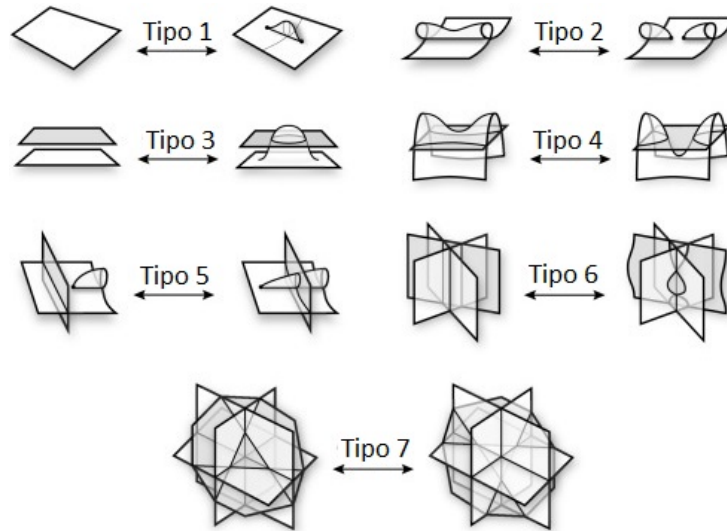


Figura 1.5: Movidas de Roseman.

En general, la cubulación hipercúbica regular, cuyo símbolo de Schläfli es  $\{4, 3, 3, 4\}$ , es llamado una *cubulación* de  $\mathbb{R}^4$ . En otras palabras, una cubulación de  $\mathbb{R}^4$  es una descomposición en una colección de hipercubos de 4 dimensiones en ángulo recto  $\{4, 3, 3\}$  llamadas *celdas* tales que cualesquiera dos son disjuntos o tienen por intersección una  $k$ -cara común de dimensión  $k$ . Esto proporciona a  $\mathbb{R}^4$  la estructura de un complejo cúbico cuya categoría es similar a la categoría simplicial  $PL$ .

La estructura combinatoria de la cubulación euclidiana regular  $\{4, 3, 3, 4\}$  es la siguiente: alrededor de cada vértice hay 8 aristas, 24 cuadrados, 32 cubos y 16 hipercubos. Alrededor de cada arista hay 6 cuadrados, 12 cubos y 8 hipercubos. Alrededor de cada cuadrado hay 4 cubos y 4 hipercubos. Finalmente alrededor de cada cubo hay 2 hipercubos (ver por ejemplo [6] y [7]).

Toda cubulación de  $\mathbb{R}^4$  se obtiene de la cubulación canónica aplicando una transformación conforme. Recordemos que una transformación conforme es de la forma  $x \mapsto \lambda A(x) + a$ , donde  $\lambda \neq 0$ ,  $a \in \mathbb{R}^4$ ,  $A \in SO(4)$ .

**Definición 1.3.1.** *El  $k$ -esqueleto de  $\mathcal{C}$ , denotado por  $\mathcal{S}^k$ , consiste de la unión de los  $k$ -esqueletos de los hipercubos en  $\mathcal{C}$ , es decir, la unión de todos los cubos de dimensión  $k$  contenidos en las caras de los 4-cubos en  $\mathcal{C}$ . Llamaremos al 2-esqueleto  $\mathcal{S}^2$  de  $\mathcal{C}$  el 2-esqueleto canónico de  $\mathbb{R}^4$ .*

Notemos que todas las definiciones anteriores se pueden extender de manera natural a  $\mathbb{R}^{n+2}$ .

**Definición 1.3.2.** *Una **superficie cuadriculada**  $S$  en  $\mathcal{S}^2$  de  $\mathcal{C}$  en  $\mathbb{R}^4$ , es una superficie lineal por pedazos tal que cada pieza es un cuadrado unitario con vértices en la retícula  $\mathbb{Z}^4$  de  $\mathbb{R}^4$  (ver [7]).*

**Definición 1.3.3.** *Sea  $K^2$  un nudo 2-dimensional en  $\mathbb{R}^4$ . Si  $K^2$  está contenido en el 2-esqueleto canónico  $\mathcal{S}^2$ , decimos que  $K^2$  es un **2-nudo cúbico** o un **2-nudo cubulado**.*

### 1.3.1. Movidas cubuladas

Sea  $\mathcal{C}$  la cubulación canónica de  $\mathbb{R}^4$ .

**Definición 1.3.4.** *Las siguientes son las movidas cubuladas permitidas.*

**M1** Subdivisión: *Dado un entero  $m > 1$ , consideremos la subcubulación  $\mathcal{C}_m$  de  $\mathcal{C}$  subdividiendo cada celda  $k$ -dimensional de  $\mathcal{C}$  en  $m^k$   $k$ -celdas congruentes en  $\mathcal{C}_m$ , en particular, cada hipercubo en  $\mathcal{C}$  se subdivide en  $m^4$  hipercubos congruentes en  $\mathcal{C}_m$ . Además, como un complejo cúbico, cada cara  $k$ -dimensional del 2-nudo  $K^2$  se subdivide en  $m^k$   $k$ -caras congruentes. Dado que  $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_m$ , entonces  $K^2$  está contenido en el andamio  $\mathcal{S}_m^2$  (el 2-esqueleto) de  $\mathcal{C}_m$ .*

**M2** Movimiento de frontera: Supongamos que  $K^2$  está contenido en alguna subcubulación  $\mathcal{C}_m$  de la cubulación canónica  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^4$ . Sea  $Q^4 \in \mathcal{C}_m$  un 4-cubo tal que  $A^2 = K^2 \cap Q^4$  contiene una 2-cara. Podemos asumir, aplicando el movimiento elemental M1 si es necesario, que  $A^2$  consiste en uno, dos o tres cuadrados de manera que sea una superficie conexa y está contenido en la frontera de un 3-cubo  $F^3 \subset Q^4$ ; en otras palabras  $A^2$  es un disco cúbico contenido en la frontera de  $F^3$ . La frontera  $\partial F^3$  está dividida por  $\partial A^2$  en dos superficies cubuladas, una de ellas es  $A^2$  y denotaremos a la otra por  $B^2$ . Observemos que las dos superficies cubuladas comparten un círculo frontera común. El movimiento de frontera consiste en reemplazar  $A^2$  por  $B^2$  (ver figura 1.6). Existen cuatro tipos de movimientos de frontera dependiendo del número de 2-caras en  $A^2$  y  $B^2$ . Si  $A^2$  tiene  $p$  cuadrados, entonces  $B^2$  tiene  $6 - p$  cuadrados.

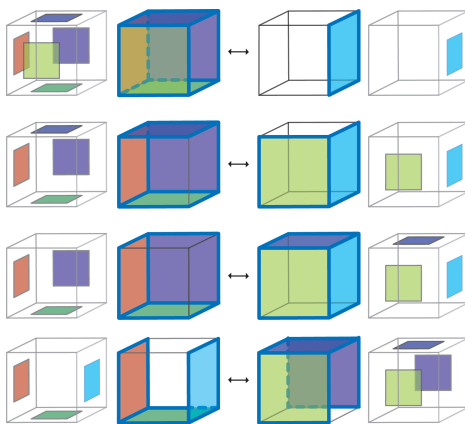


Figura 1.6: Los cuatro tipos de movimientos de frontera.

**Observación 1.3.5.** La subdivisión (M1) es necesaria para garantizar que no creamos singularidades. Se puede mostrar fácilmente que el movimiento (M2) puede extenderse a una isotopía ambiente de  $\mathbb{R}^4$ .

**Definición 1.3.6.** Consideremos dos 2-nudos cúbicos  $K_1^2$  y  $K_2^2$  en  $\mathbb{R}^4$ . Decimos que  $K_1^2$  es **equivalente** a  $K_2^2$  vía movidas cubuladas, denotado por  $K_1^2 \sim K_2^2$ , si podemos transformar  $K_1^2$  en  $K_2^2$  por un número finito de movidas cubuladas.

En [6] se probó el siguiente teorema para 2-nudos en  $\mathbb{R}^4$ .

**Teorema C.** Dados dos 2-nudos cúbicos  $K_1^2$  y  $K_2^2$  en  $\mathbb{R}^4$ , son isotópicos si y sólo si  $K_1^2$  es equivalente a  $K_2^2$  por medio de una sucesión finita de movidas cubuladas; es decir,  $K_1^2 \sim K_2^2 \iff K_1^2 \sim K_2^2$ .

Este teorema es análogo a las movidas de Roseman en el caso de 2-nudos cúbicos mansos clásicos.

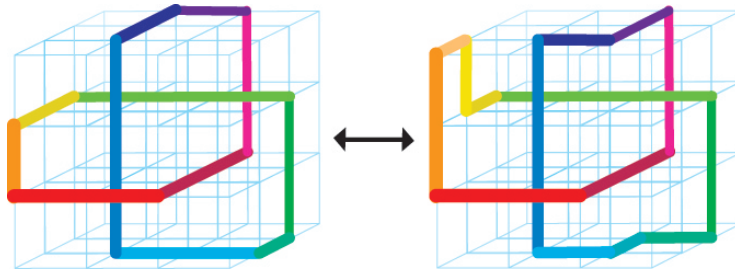


Figura 1.7: Dos nudos isotópicos son equivalentes via movidas cubuladas.



## Capítulo 2

# El invariante área para 2-nudos cubulados

Recordemos que un 2-nudo cúbico  $K^2$  es un encaje de la 2-esfera en el 2-esqueleto de la cubulación canónica de  $\mathbb{R}^4$ , por lo que  $K^2$  es la unión de  $m(K^2)$  cuadrados unitarios, por lo que su área es  $m(K^2)$ . Diremos que  $m(K^2)$  es el **área** de  $K^2$ .

Un 2-nudo cúbico que consta de  $n$  cuadrados lo denotaremos por  $K^2(n)$ .

**Definición 2.0.7.** *Un 2-nudo cúbico  $K^2$  es llamado **reducible** si existe un 2-nudo cúbico con menor área que es isotópico, a  $K^2$ .*

**Definición 2.0.8.** *Definimos el **área mínima** del 2-nudo cúbico  $K^2$ , denotado por  $A(K^2)$ , de la siguiente manera*

$$A(K^2) = \min\{m(T^2) : T^2 \text{ es un 2-nudo cúbico isotópico a } K^2\}.$$

**Definición 2.0.9.** *Un 2-nudo cúbico  $K^2$  es llamado **minimal** si el área de  $K^2$  no se reduce por medio de una sucesión de movidas cubuladas.*

**Definición 2.0.10.** *Un 2-nudo cúbico  $K^2$  es llamado **minimal débil** si el área de  $K^2$  no se reduce por medio de un solo tipo de movida cubulada.*

**Observaciones 2.0.11.** .

- a. Por definición, si un 2-nudo cúbico es minimal, entonces es minimal débil.
- b. Por el Teorema C, tenemos que  $A(K^2)$  es un invariante.
- c. El Teorema A nos permite definir el **área mínima de un 2-nudo suave**  $\tilde{K}^2$ , denotado por  $A(\tilde{K}^2)$ , como

$$A(\tilde{K}^2) = \min\{m(K^2) : K^2 \text{ es un nudo cúbico isotópico a } \tilde{K}^2\}.$$

Notemos que  $A(\tilde{K}^2)$  es también un invariante.

- d. Podemos extender nuestra definición de **área** a cualquier superficie cuadriculada de la misma manera.

**Ejemplos 2.0.12.** a. El área mínima de la 2-esfera es 6 (ver Figura 2.1).

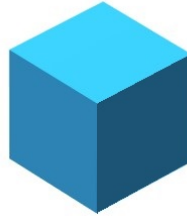


Figura 2.1: La 2-esfera con área mínima.

- b. El área mínima del toro es 32 (ver figura 2.2).

Nuestro objetivo en este capítulo es demostrar que el área minimal débil del spin del nudo trébol es 256. Para hacer esto, iniciaremos por construir un 2-nudo cúbico  $K^2$  isotópico al spin del trébol, de forma que  $K^2$  sea minimal



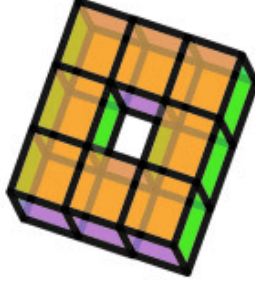


Figura 2.2: El toro cubulado con área mínima.

débil. En esta construcción usaremos fuertemente que la *longitud* (mínimo número de aristas) del nudo trébol en  $\mathbb{R}^3$  es 24 (ver [5]).

## 2.1. Construcción del spin del nudo trébol cubulado

Artin [1] construyó por primera vez ejemplos de nudos de dimensión mayor (ver también [13] p.85) usando el método spin de nudos, en español se conoce como 2-nudos en revolución, pero a lo largo de este trabajo conservaremos la notación usual en la literatura. La construcción de estas superficies, a grandes rasgos, es de la siguiente manera: La mitad superior del espacio tridimensional  $\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, z, 0) \in \mathbb{R}^4 : z \geq 0\}$  se rota alrededor de su frontera  $\mathbb{R}^2 = \{x, y, 0, 0\}$  enviando un punto  $x = (x, y, z, 0)$  al conjunto  $x_\theta = (x, y, z \cos \theta, z \sin \theta)$ . Consideremos un arco  $A$  (posiblemente anudado) que está contenido en  $\mathbb{R}_+^3$  con sus puntos extremos en  $\mathbb{R}^2$  (ver figura 2.3). El spin de  $A$  es el conjunto

$$A^* = \{x_\theta : x \in A, \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Cuando un nudo  $K$  se elige de manera que un segmento no anudado de  $K$  está contenido en el plano  $(x, y, 0, 0)$  y el resto del nudo  $K$  es el arco  $A$  en  $\mathbb{R}_+^3$ , entonces llamamos a  $A^*$  el **spin del nudo**  $K$ . El spin del nudo  $K$  tiene muchas de las propiedades que tiene  $K$ . En particular sus grupos fundamentales son isotópicos (ver [3]).

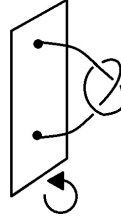


Figura 2.3: Esquema del spin de un nudo trébol.

Ahora vamos a contruir el spin del nudo trébol. Consideremos el arco cúbico del trébol  $T$  en  $\mathbb{R}_+^3$  representado en la figura 2.4. Así, sus puntos extremos están en el plano  $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}_+^3$ . Observemos que la longitud de  $T$  es 21 y si agregamos las tres aristas punteadas que están en  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ , obtenemos un nudo trébol cuya longitud es 24, la longitud mínima necesaria para que un polígono en la cubulación canónica de  $\mathbb{R}^3$  este anudado (ver [5]).

Existe un arco suave  $\tilde{T}$  isotópico a  $T$  tal que  $\tilde{T}$  es  $\mathcal{C}^0$ -arbitrariamente cerca a  $T$ . Ésto es consecuencia de que podemos redondear las esquinas en los vértices de  $T$  en vecindades arbitrariamente pequeñas de ellos (ver [8]). Ahora, aplicaremos la transformación  $\psi : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  dada por  $(x, y, z, 0) \mapsto (x, y, z \cos \theta, z \sin \theta)$  para obtener el spin de  $\tilde{T}$ ,  $\text{spin}(\tilde{T})$ , en  $\mathbb{R}^4$ .

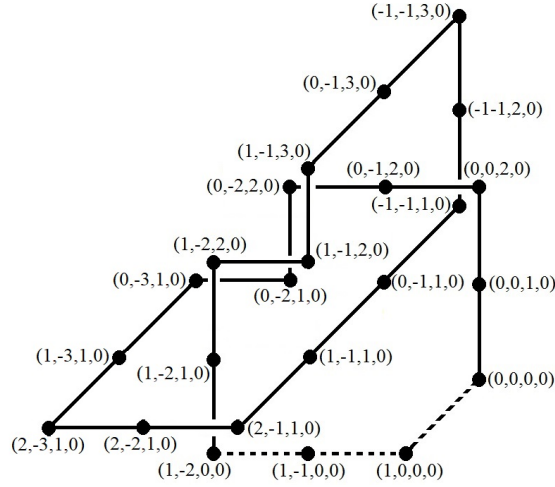


Figura 2.4: Arco trébol con longitud mínima.

Observemos que  $\text{spin}(\tilde{T})$  es un 2-nudo suave. En [2] se probó el siguiente resultado.

**Teorema 2.1.1.** *Sea  $\mathcal{C}$  la cubulación canónica de  $\mathbb{R}^{n+2}$ . Sea  $K \subset \mathbb{R}^{n+2}$  un nudo suave de dimensión  $n$ . Dada cualquier vecindad tubular cerrada  $V(K)$  de  $K$  existe una isotopía ambiente  $f_t : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$  con soporte en  $V(K)$  y  $t \in [0, 1]$ , tal que  $f_0 = \text{Id}$  y  $f_1(K) := K$  está contenido en el  $n$ -esqueleto de la subcubulación  $\mathcal{C}_m$  para algún entero  $m$ . De hecho,  $K$  está contenido en la frontera de los cubos de  $\mathcal{C}_m$  que están contenidos en  $V(K)$  e intersectan  $K$ . En particular, usando la homotecia  $h_m(x) = mx$  vemos que existe un nudo  $\tilde{K}$  isotópico a  $K$ , el cual está contenido en el  $n$ -esqueleto de la cubulación canónica  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^{n+2}$ .*

Este teorema implica que  $\text{spin}(\tilde{T})$  es isotópico a un 2-nudo cúbico  $T^2$ . Nuestra estrategia es obtener  $T^2$  por pasos.

Paso 1. Consideremos la arista  $l_1$  del arco  $T$  que va de  $(1, -2, 0, 0)$  a  $(1, -2, 1, 0)$  y a  $(1, -2, 2, 0)$  (ver figura 2.4). Entonces las coordenadas de  $\psi(l_1)$  cumplen

que  $x = 1$ ,  $y = -2$  and  $z \in [0, 2]$ , lo que significa que  $\psi(l_1)$  es un círculo centrado en  $(1, -2, 0, 0)$  y radio 2. Observemos que el mínimo número de cuadrados que necesitamos para cubular este círculo es 16 (ver figura 2.5).

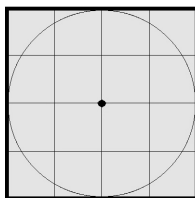


Figura 2.5: Paso 1. Necesitamos 16 cuadrados para cubular  $\psi(l_1)$ .

Paso 2. Consideremos la arista  $l_2$  de  $T$  que va de  $(1, -2, 2, 0)$  a  $(1, -1, 2, 0)$ . Entonces, las coordenadas de  $\psi(l_2)$  cumplen que  $x = 1$ ,  $y \in [-1, -2]$  y  $z = 2$ , por lo tanto obtenemos un cilindro con altura de -2 a -1 y radio 2. Notemos que el mínimo número de cuadrados para cubular este cilindro es 16 (ver figura 2.6).

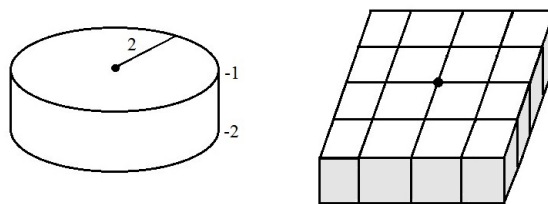


Figura 2.6: Paso 2. Necesitamos 16 cuadrados para cubular  $\psi(l_2)$ .

Paso 3. Consideremos la arista  $l_3$  de  $T$  que va de  $(1, -1, 2, 0)$  a  $(1, -1, 3, 0)$ . Entonces las coordenadas de  $\psi(l_3)$  cumplen que  $x = 1$ ,  $y = -1$ ,  $z \in [2, 3]$ ,

por lo que tenemos ahora un anillo de radio menor 2 y radio mayor 3. Esto implica que el mínimo número de cuadrados que se necesitan para cubular  $\psi(l_3)$  es 20 (ver figura 2.7).

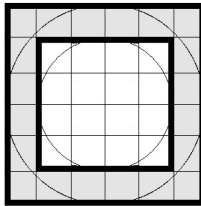


Figura 2.7: Paso 3. Necesitamos 20 cuadrados para cubular  $\psi(l_3)$ .

Paso 4. Tomemos la arista  $l_4$  de  $T$  que va de  $(1, -1, 3, 0)$  a  $(0, -1, 3, 0)$  y a  $(-1, -1, 3, 0)$ . Por lo tanto los puntos de  $\psi(l_4)$  satisfacen que  $x \in [-1, 1]$ ,  $y = -1$  y  $z = 3$ , por lo que tenemos un cilindro de altura 2 y radio 3. Así el mínimo número de cuadrados que necesitamos para cubularlo es 48 (ver figura 2.8).

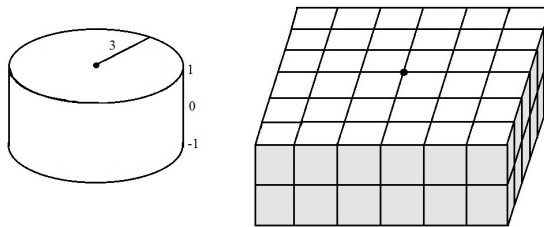


Figura 2.8: Paso 4. Necesitamos 48 cuadrados para cubular  $\psi(l_4)$ .

Paso 5. Tomemos la arista  $l_5$  de  $T$  que va de  $(-1, -1, 3, 0)$  a  $(-1, -1, 2, 0)$  a  $(-1, -1, 1, 0)$ . Así, los puntos de  $\psi(l_5)$  cumplen que  $x = -1$ ,  $y = -1$  y

$z \in [1, 3]$ , por lo tanto tenemos un anillo con radio menor 1 y radio mayor 3. Entonces el mínimo número de cuadrados que necesitamos para cubular este anillo es 32 (ver figura 2.9).

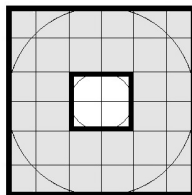


Figura 2.9: Paso 5. Necesitamos 32 cuadrados para cubular  $\psi(l_5)$ .

Paso 6. Tomemos la arista  $l_6$  de  $T$  que va de  $(-1, -1, 1, 0)$  a  $(0, -1, 1, 0)$  a  $(1, -1, 1, 0)$  a  $(2, -1, 1, 0)$ . Entonces las coordenadas de  $\psi(l_6)$  satisfacen que  $x \in [-1, 1]$ ,  $y = -1$  y  $z = 1$ . Por lo tanto tenemos un cilindro con altura 3 y radio 1. El mínimo número de cuadrados necesarios para cubular  $\psi(l_6)$  es 24 (ver figura 2.10).

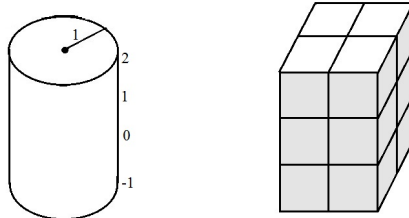


Figura 2.10: Paso 6. Necesitamos 24 cuadrados para cubular  $\psi(l_6)$ .

Paso 7. Consideremos la arista  $l_7$  de  $T$  que va de  $(2, -1, 1, 0)$  a  $(2, -2, 1, 0)$  a  $(2, -3, 1, 0)$ . Tenemos que  $\psi(l_7)$  satisface que  $x = 2$ ,  $y \in [-3, -1]$  y  $z = 1$ , entonces tenemos un cilindro con altura 2 y radio 1. El mínimo número de

cuadrados que se necesitan para cubular este cilindro es 16 (ver figura 2.11).

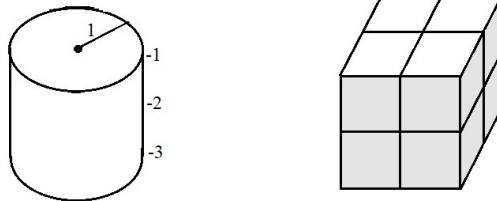


Figura 2.11: Paso 7. Necesitamos 16 cuadrados para cubular  $\psi(l_7)$ .

Paso 8. Tomemos la arista  $l_8$  de  $T$  que va de  $(2, -3, 1, 0)$  a  $(1, -3, 1, 0)$  a  $(0, -3, 1, 0)$ . Tenemos que las coordenadas de  $\psi(l_8)$  cumplen que  $x \in [0, 2]$ ,  $y = -3$  y  $z = 1$ , entonces obtenemos un cilindro de altura 2 y radio 1. El mínimo número de cuadrados necesarios para cubular este cilindro es 16 (ver figura 2.12).

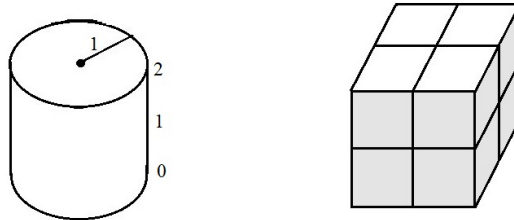


Figura 2.12: Paso 8. Necesitamos 16 cuadrados para cubular  $\psi(l_8)$ .

Paso 9. Consideremos la arista  $l_9$  de  $T$  que va de  $(0, -3, 1, 0)$  a  $(0, -2, 1, 0)$ . Tenemos que las coordenadas de  $\psi(l_9)$  satisfacen que  $x = 0$ ,  $y \in [-3, -2]$  y  $z = 1$  por lo que obtenemos un cilindro de altura 1 y radio 1. Entonces el mínimo número de cuadrados necesarios para cubular  $\psi(l_9)$  es 8 (ver figura 2.13).

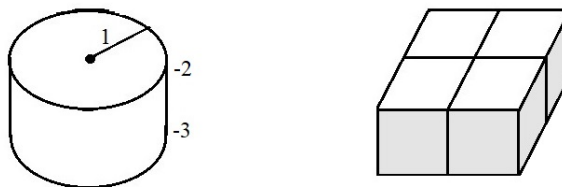


Figura 2.13: Paso 9. Necesitamos 8 cuadrados para cubular  $\psi(l_9)$ .

Paso 10. Tomemos la arista  $l_{10}$  de  $T$  que va de  $(0, -2, 1, 0)$  a  $(0, -2, 2, 0)$ . Tenemos que las coordenadas de  $\psi(l_{10})$  cumplen con  $x = 0$ ,  $y = -1$  y  $z \in [1, 2]$ , por lo que obtenemos un anillo con radio menor 1 y radio mayor 2. Entonces el mínimo número de cuadrados necesarios para cubular  $\psi(l_{10})$  es 12 (ver figura 2.14).

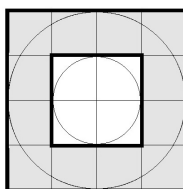


Figura 2.14: Paso 10. Necesitamos 12 cuadrados para cubular  $\psi(l_{10})$ .

Paso 11. Tomemos la arista  $l_{11}$  de  $T$  que va de  $(0, -2, 2, 0)$  a  $(0, -1, 2, 0)$  a  $(0, 0, 2, 0)$ . Tenemos que las coordenadas de  $\psi(l_{11})$  satisfacen que  $x = 0$ ,  $y \in [-2, 0]$  y  $z = 2$ , por lo que tenemos un cilindro con altura 2 y radios 2. El mínimo número de cuadrados necesarios para cubular este cilindro es 32 (ver figura 2.15).



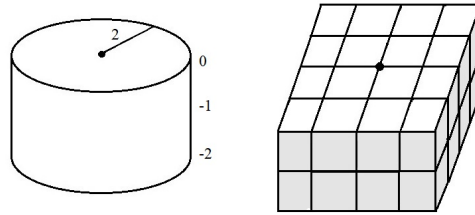


Figura 2.15: Paso 11. Necesitamos 32 cuadrados para cubular  $\psi(l_{11})$ .

Paso 12. Consideremos la arista  $l_{12}$  de  $T$  que va de  $(0, 0, 2, 0)$  a  $(0, 0, 1, 0)$  a  $(0, 0, 0, 0)$ . Tenemos que las coordenadas de  $\psi(l_{12})$  satisfacen que  $x = 0$ ,  $y = 0$  y  $z \in [0, 2]$ , por lo que obtenemos un círculo centrado en  $(0, 0, 0, 0)$  y radio 2. El mínimo número de cuadrados necesarios para cubular este círculo es 16 (ver figura 2.16).

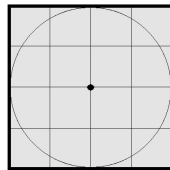


Figura 2.16: Paso 12. Necesitamos 16 cuadrados para cubular  $\psi(l_{12})$ .

Observemos que cada paso de nuestra construcción es compatible con el paso anterior. Por lo tanto, hemos cubulado el 2-nudo  $\text{spin}(\tilde{T})$  en  $\mathbb{R}^4$  para obtener el 2-nudo cúbico  $T^2$ . Es fácil ver que el área de  $T^2$  es 256. En la siguiente sección, vamos a probar que  $T^2$  es minimal débil.

## 2.2. Área minimal débil del spin del nudo trébol

En esta sección probaremos lo siguiente

**Teorema 2.2.1.** *El área minimal débil del spin del nudo trébol es 256.*

**Demostración.** Supongamos que nuestro 2-nudo cúbico  $T^2$  no es minimal débil. Notemos que si aplicamos un movimiento  $(M1)$  a  $T^2$ , por construcción, su área aumentará; de hecho, para poder reducir el área, debemos usar el movimiento inverso a  $(M1)$ , pero debido a los pasos 6, 9 y 10 de nuestra construcción, es imposible, ya que habría autointersecciones, por lo cual no podemos disminuir el área con el inverso a  $(M1)$ . Ahora aplicaremos el movimiento  $(M2)$ .

Consideremos el diagrama de la figura 2.17, donde podemos observar todos los cuadrados de la cubulación canónica  $\mathcal{C}$  contenidos en nuestro 2-nudo cúbico  $T^2$ . Notemos que tenemos arcos trébol cubulados  $T_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) en los cuatro ejes de nuestro diagrama, donde cada  $T_i$  es una copia de nuestro arco trébol cúbico original  $T \subset \mathbb{R}_+^3$ . Además  $T_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) está contenido en una copia de  $\mathbb{R}_+^3$ , digamos  $\mathbb{R}_{+,i}^3$ , la cual tiene una cubulación canónica  $\mathcal{C}_i$  dada por la restricción de la cubulación canónica  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^4$  a ésta.

Para reducir el área de  $T^2$ , debemos aplicar movidas del tipo  $(M2)$  en cubos de  $\mathcal{C}$  que contengan al menos tres cuadrados de  $T^2$ .

Por ejemplo, podemos aplicar movidas  $(M2)$  en los cubos que se intersectan (o comparten) una arista dada, digamos  $e$ , de  $T^2$  tal que cada extremo de  $e$  pertenece a tres cuadrados de  $T^2$  (ver figura 2.18). De hecho, sean  $p_1$  y  $p_2$  los extremos de  $e$  y ordenamos todos los cubos  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  de  $\mathcal{C}$  que intersectan a  $e$  de tal forma que  $p_1 \in Q_1$ ,  $p_2 \in Q_n$  y  $Q_i \cap Q_{i+1}$  consiste de

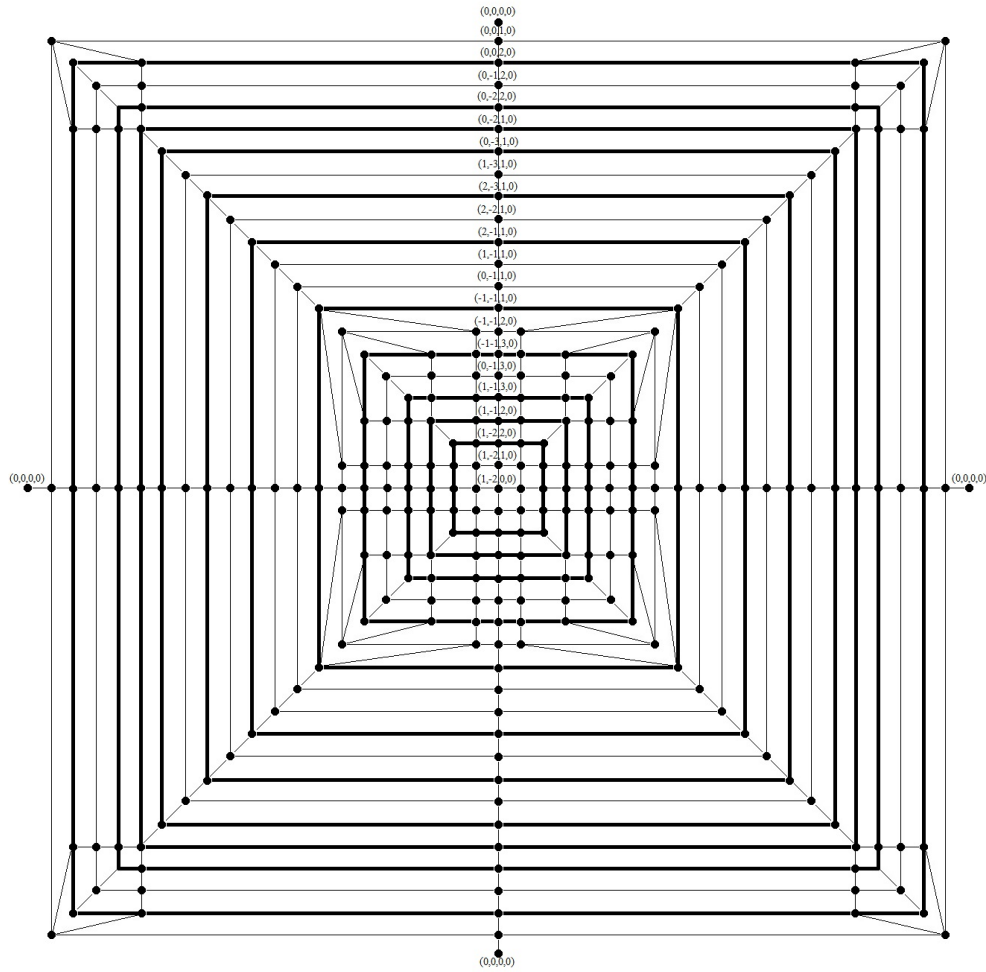


Figura 2.17: Diagrama de nuestro  $(T^2)$  cubulado.

una 2-cara. Observemos que  $Q_i \cap T^2$  ( $i = 1, n$ ), consiste de tres cuadrados y  $Q_i \cap T^2$ , ( $i = 2, n - 1$ ) consiste de dos cuadrados. Ahora, aplicamos una movida ( $M2$ ) en  $Q_1$  para que los tres cuadrados de  $T^2$  sean reemplazados por los tres cuadrados restantes de  $Q_1$  obteniendo un nuevo 2-nudo cúbico  $T_1^2$ , isotópico a  $T^2$  tales que sus áreas son iguales, *i.e.*,  $m(T_1^2) = m(T^2)$ . Ahora  $Q_2$  contiene tres cuadrados de  $T_1^2$ , así que aplicamos una movida ( $M2$ ) en  $Q_2$  para obtener un nuevo 2-nudo cúbico  $T_2^2$  isotópico a  $T_2$  tal que  $m(T_2^2) = m(T^2)$ . Continuamos con este proceso y el último cubo  $Q_n$  contiene cuatro cuadrados del 2-nudo cúbico  $T_{n-1}^2$ , por lo tanto aplicamos una movida ( $M2$ ) en  $Q_n$  para obtener un nuevo 2-nudo cúbico  $T_n^2$  isotópico a  $T_2$  pero  $m(T_n^2) = m(T^2) - 2$ . Notemos que la arista  $e$  se elimina, en otras palabras  $e \notin T_n^2$ .

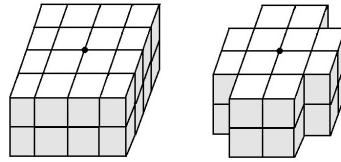


Figura 2.18: Una sucesión de movidas ( $M2$ ) aplicadas a cubos que comparten una arista de  $T^2$ .

Por construcción de  $T^2$ , tenemos que si un cubo  $Q$  de  $\mathcal{C}$  cumple que  $Q \cap T^2 \neq \emptyset$ , entonces  $Q \cap T^2$  puede ser un vértice, una arista, un cuadrado, dos cuadrados o tres cuadrados. Por lo tanto, la única manera en la que podemos reducir su área es removiendo una, o algunas aristas de él de la manera descrita anteriormente. Ahora, analizaremos todos los posibles casos.

**Caso 1.** *La arista  $e$  está contenida en algún arco trébol cubulado  $T_i$ . Sea  $C$  un cuadrado de  $T_i$  tal que  $C \cap e \neq \emptyset$  y supongamos que hemos aplicado una movida ( $M2$ ) a  $T^2$  para obtener un nuevo 2-nudo cúbico  $F$  tal que  $C \cap e$  es eliminado. Esto implica que el arco trébol cubulado  $T_i$  ha sido reemplazado por un arco trébol cubulado  $A_i$ .*

Notemos que la longitud de  $A_i$  ( $l(A_i)$ ) debe ser mayor o igual a la longitud de  $T_i$  ( $l(T_i)$ ), esto es por construcción, ya que  $T_i$  es de longitud mínima. De hecho, cada  $T_i$  es un arco cúbico contenido en el 1-esqueleto de la cubulación canónica  $\mathcal{C}_i$  de  $\mathbb{R}_{+,i}^3$ , así podemos agregar tres aristas a  $T_i$  que estén contenidas en  $\partial\mathbb{R}_{+,i}^3$ , de manera que obtenemos un nudo trébol cúbico en  $\overline{\mathbb{R}_{+,i}^3}$  con longitud 24, y por [5] esta es la mínima longitud del nudo trébol en  $\mathbb{R}^3$ . Por lo tanto si removemos un cuadrado que contiene una arista de  $T_i$ , entonces este cuadrado debe ser reemplazado por al menos un cuadrado de manera que la longitud del nuevo arco  $A_i = F \cap \mathbb{R}_{+,i}^3$  es mayor o igual a  $l(T_i)$ . Claramente, si  $l(A_i) > l(T_i)$  entonces  $m(F) \geq m(T^2)$ .

Observemos que la igualdad  $l(A_i) = l(T_i)$  se cumple si aplicamos una movida (M2) en un cubo  $Q$  que contiene dos aristas adyacentes de  $T_i$ , puesto que son reemplazadas por las dos aristas restantes. Sin embargo, nos gustaría señalar que dado que  $T^2$  no debe auto-intersectarse, esto sólo sucede en los siguientes casos, los cuales por simplicidad describiremos en el arco trébol cúbico  $T$ , pero se aplica a cada  $T_i$  (ver figura 2.19).

- a) Las dos aristas adyacentes de  $T$ ,  $\gamma_1$  de  $(1, -2, 2, 0)$  a  $(1, -1, 2, 0)$  y  $\gamma_2$  de  $(1, -1, 2, 0)$  a  $(1, -1, 3, 0)$  son reemplazadas por las dos aristas adyacentes en  $A$ ,  $\tilde{\gamma}_1$  de  $(1, -2, 2, 0)$  a  $(1, -2, 3, 0)$  y  $\tilde{\gamma}_2$  de  $(1, -2, 3, 0)$  a  $(1, -1, 3, 0)$
- b) La unión de cuatro aristas (o algunas de ellas) de  $T$  que va por los vértices  $(2, -1, 1, 0)$ ,  $(2, -2, 1, 0)$ ,  $(2, -3, 1, 0)$ ,  $(1, -3, 1, 0)$ ,  $(0, -3, 1, 0)$ ,  $(0, -2, 1, 0)$  y  $(0, -2, 2, 0)$  es reemplazada vía una sucesión de movidas (M2) en la unión de cuatro aristas (o las correspondientes aristas) en  $A$  que van de  $(2, -1, 1, 0)$  a  $(2, -1, 2, 0)$  a  $(2, -2, 2, 0)$  a  $(2, -3, 2, 0)$  a  $(1, -3, 2, 0)$  a  $(0, -3, 2, 0)$  a  $(0, -2, 2, 0)$ .

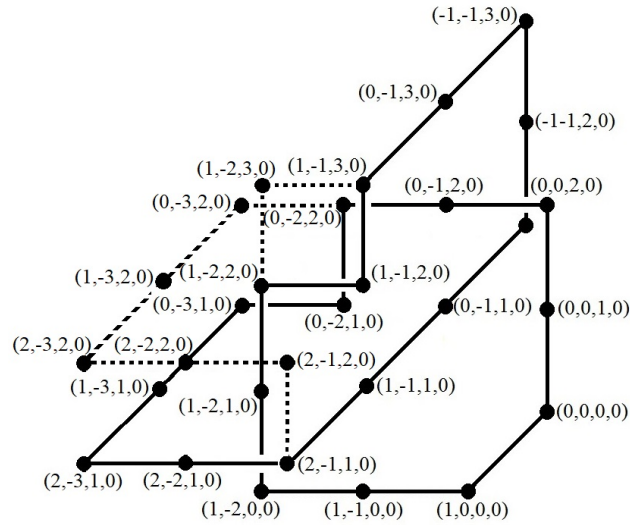


Figura 2.19: Una sucesión de movidas ( $M2$ ) aplicadas al arco trébol  $T$  manteniendo su número de aristas.

En cada caso, obtenemos un 2-nudo cúbico  $F$  isotópico al  $spin(A)$  cuya área es mayor al área de  $T^2$ . Esto es debido a la fórmula de  $spin(A)$ , ya que la distancia de al menos una de las aristas reemplazadas al plano  $xy$  es mayor que la distancia de la arista original, por lo tanto necesitamos más cuadrados para cubular  $F$ .

### Observaciones 2.2.2. .

- *Notemos que otras aristas de interés podrían ser las dos aristas que unen  $(1, -1, 0, 0)$  a  $(1, 0, 0, 0)$  a  $(0, 0, 0, 0)$  y reemplazarlas por las dos aristas que unen  $(1, -1, 0, 0)$  a  $(0, -1, 0, 0)$  a  $(0, 0, 0, 0)$ , pero ninguna de estas aristas forman parte del arco trébol  $T$ , ya que se encuentran en el plano  $xy$ , sobre el cual estamos rotando para construir el  $spin$  del nudo trébol.*
- *Más aún, uno podría explorar la idea de cambiar el plano de rotación al notar este posible movimiento, en vez de rotar sobre el*

plano  $xy$  que contiene las dos aristas que no forman parte de  $T$  arriba mencionadas, rotar sobre el plano  $xz$  que contiene a las dos aristas que unen  $(1, 0, 0, 0)$  a  $(0, 0, 0, 0)$  a  $(0, 0, 1, 0)$  a  $(0, 0, 2, 0)$ , pero dada la simetría de nuestro trébol, salvo una rotación, obtendríamos el mismo arco trébol inicial.

**Caso 2.** *La intersección  $e \cap T_i$  consiste en un vértice  $v_i$ .* Como mencionamos anteriormente, si aplicamos una movida  $(M2)$  en  $T^2$  para reemplazar el vértice  $v_i$ , obtenemos un nuevo arco  $A_i$  con longitud mayor o igual a la longitud de  $T_i$ , por lo tanto la única posibilidad para reducir el área de  $T^2$  es cuando  $l(A_i) = l(T_i)$ . Como discutimos en el Caso 1(a), esta igualdad se cumple solo cuando reemplazamos el vértice  $(1, -1, 2, 0) \in T$  (o el correspondiente en  $T_i$ ) por el vértice  $(1, -2, 3, 0)$  (o el correspondiente en  $\mathbb{R}_{+,i}^3$ ) ya que si aplicamos una movida  $(M2)$  en  $T^2$  para reemplazar otro vértice tal que  $l(A_i) = l(T_i)$ , el arco  $A_i$  se intersecta a si mismo (ver Figura 2.19). En cualquier caso, obtenemos un 2-nudo cúbico  $F$  isotópico a  $spin(A)$  cuya área es mayor al área de  $T^2$ .

**Caso 3.** *La intersección  $e \cap T_i$  es vacía.* Notemos que  $e$  debe ser paralelo a una arista  $e_i$  de  $T_i$ . Si la distancia entre  $e$  y  $e_i$  es uno, entonces no podemos aplicar una movida  $(M2)$  para eliminar  $e_i$ , ya que el nuevo 2-nudo cúbico  $F$  tendría auto-intersecciones. Entonces, la distancia entre  $e$  y  $e_i$  debe ser 2 o 3. Así, solo podemos remover cuadrados que se encuentren en cualquier diagonal del diagrama en la figura 2.17. Debido a la simetría en nuestra construcción, solamente consideraremos un cuadrante (ver figura 2.20). Tenemos los siguientes casos.

- a) La arista  $e_a$  que va de  $(1, -2, 2, -2)$  a  $(1, -1, 2, -2)$  descrita en la cubulación de  $\psi(l_2)$  (paso 2). Para reducir el área de  $T^2$ , debemos reemplazar  $e_a$  vía movidas  $(M2)$  por  $e'_a$  de  $(1, -2, 1, -1)$  a

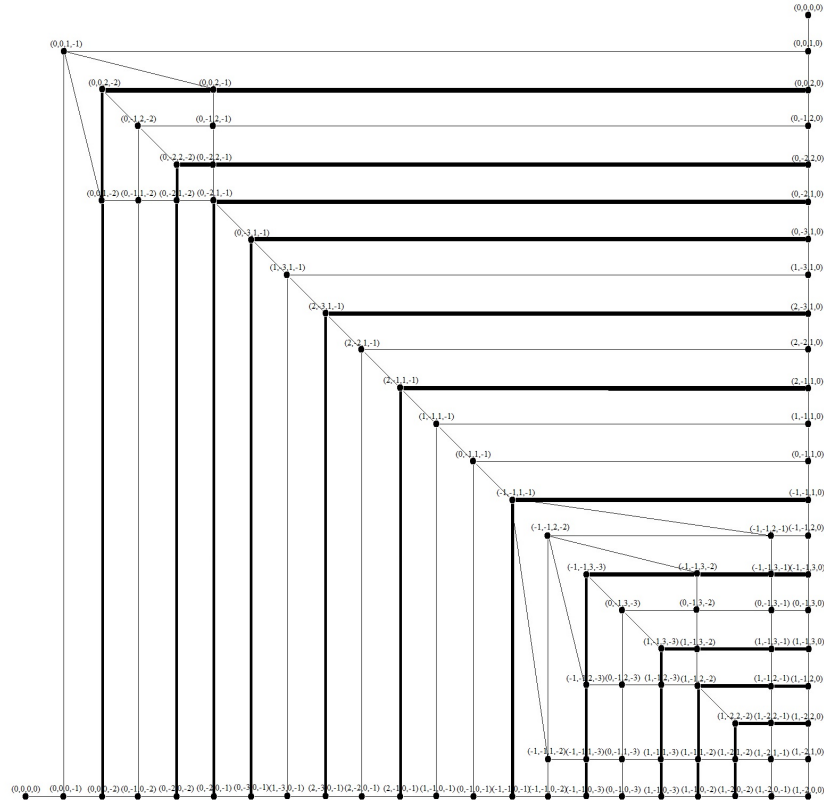


Figura 2.20: Un cuadrante de nuestro diagrama.

$(1, -1, 1, -1)$ , pero el nuevo 2-nudo cubulado se intersecta a si mismo, ya que  $e'_a$  intersecta  $\psi(l_6)$  cúbica en el punto  $(1, -1, 1, 1)$  (un punto del cuadrante I de nuestro diagrama).

- b) La arista  $e_b$  que pasa por los vértices  $(1, -1, 3, -3)$ ,  $(0, -1, 3, -3)$ ,  $(-1, -1, 3, -3)$  descrita en la cubulación de  $\psi(l_4)$  (paso 4). Para reducir el área de  $T^2$ , debemos reemplazar  $e_b$  vía movidas  $(M2)$  por  $e'_b$  que va de  $(1, -1, 2, -2)$  to  $(0, -1, 2, -2)$  to  $(-1, -1, 2, -2)$ , pero el nuevo 2-nudo cúbico se auto-intersecta, ya que  $e'_b$  intersecta  $\psi(l_{11})$  cúbica en el punto  $(0, -1, 2, -2)$  (un punto del cuadrante II



de nuestro diagrama).

- c) La arista  $e_c$  que pasa por los vértices  $(1, -1, 3, -2)$ ,  $(0, -1, 3, -2)$ ,  $(-1, -1, 3, -2)$  descrita en la cubulación de  $\psi(l_4)$  (paso 4). La única manera de reemplazar  $e_c$  es aplicar movidas ( $M2$ ) en los cubos que intersectan esta arista, pero algunos de éstos también intersectan la arista  $e_b$ . Por lo tanto para reducir el área de  $T^2$ , es necesario primero remover la arista  $e_b$ ; sin embargo, como mencionamos anteriormente, no es posible.
- d) La arista  $e_d$  que pasa por  $(0, -2, 2, -2)$ ,  $(0, -1, 2, -2)$  y  $(0, 0, 2, -2)$  descrita en la cubulación de  $\psi(l_{11})$  (paso 11). Para reducir el área de  $T^2$ , debemos reemplazar  $e_d$  vía movidas ( $M2$ ) por  $e'_d$  que une a  $(0, -2, 1, -1)$  con  $(0, -1, 1, -1)$  y con  $(0, 0, 1, -1)$ , pero el nuevo 2-nudo cúbico se auto-intersecta, ya que  $e'_d$  intersecta la cubulación de  $\psi(l_6)$  en el punto  $(0, -1, 1, -1)$  (un punto del cuadrante II de nuestro diagrama).

En todo caso, obtenemos un 2-nudo cúbico  $F$  isotópico a  $T^2$  cuya área es mayor al área de  $T^2$ . Por lo tanto,  $T^2$  es minimal débil.  $\square$

## 2.3. Área mínima del spin del nudo trébol

Como ya lo hemos mencionado, Diao [5] probó que el mínimo número de aristas requeridas para un encaje del nudo trébol en la cubulación canónica de  $\mathbb{R}^3$  es 24, y esto lo obtuvo probando primero que el siguiente diagrama del nudo trébol en el plano del nudo trébol, minimiza su longitud.

Como podemos observar, este diagrama es simétrico con respecto a la recta  $x = y$  y el número de aristas paralelas al vector canónico  $e_1$  es igual al número de aristas paralelas al vector canónico  $e_2$  (ver figura 2.21). Nuestro objetivo

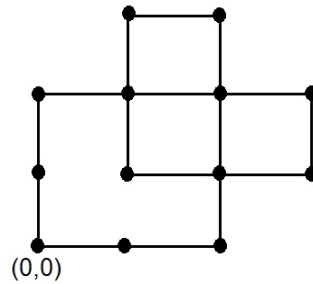


Figura 2.21: Diagrama del nudo trébol.

es probar que el área del spin del trébol es 256, por lo que iniciaremos con algunos resultados preliminares.

**Afirmación 2.3.1.** *La longitud mínima del arco trébol en  $\mathbb{R}_+^3$  es 21.*

En efecto, consideremos el diagrama del nudo trébol anterior (figura 2.21). Notemos que para eliminar los tres cruces, necesitamos en cada dirección coordenada, segmentos del nudo formados por al menos tres aristas. Esto implica que el mínimo número de aristas que podemos remover del nudo trébol cubulado para obtener el arco trébol, y que estén contenidas en una misma dirección canónica, es tres.

**Observación 2.3.2.** *La afirmación anterior sigue siendo cierta si consideramos  $\mathbb{R}^4$ , en el sentido de minimizar el número de aristas requeridas para que a partir del diagrama de la figura 2.21, se remuevan los cruces y se obtenga el nudo trébol.*

**Teorema 2.3.3.** *El área del spin del nudo trébol es 256.*

*Demostración.* Probaremos que la cota inferior para el área del spin del nudo trébol es 256, misma que es realizada por el encaje utilizado en la sección anterior. Sea  $L$  un 2-nudo isotópico al spin del nudo trébol, entonces

$L : \mathbb{S}^1 \times A \rightarrow \mathbb{R}^4$ , donde  $A$  es un arco trébol  $A : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^3$ . Notemos que para cada  $e^{2\pi i\theta_0} \in \mathbb{S}^1$ , el encaje  $L(e^{2\pi i\theta_0}, t)$   $t \in [0, 1]$ , es una copia del arco trébol contenido en  $L$ , de aquí que este arco está cubulado. Además, tenemos que para cada  $t_0$  fijo,  $L_{t_0} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^4$  es homeomorfo a un círculo, por lo que debe estar conformado por al menos 4 segmentos rectilíneos.

Por lo anterior, podemos escoger cuatro arcos tréboles disjuntos  $L_1, L_2, L_3$  y  $L_4 \subset L$ , de tal forma que  $L_i \cap L_{t_0}$  es un punto para  $i = 1, 2, 3, 4$ , y estos cuatro puntos se encuentran en diferentes aristas de  $L_{t_0}, t_0 \in \mathbb{S}^1$ . Más aún, podemos escoger  $L_i \cap L_{t_0}$  en el 1-esqueleto de la cubulación  $\mathcal{C}^4$ . Notemos que  $L_i$  es un arco trébol cubulado, por lo tanto, por la afirmación anterior, su longitud  $l(L_i) \geq 21$ .

Con el fin de minimizar el área de  $L$ , asumiremos que  $l(L_i) = 21, i = 1, \dots, 4$ . Observemos que podemos enumerar cada arista de  $L_i$  usando la orientación del arco  $A$ . Además, podemos asumir que  $L_{t_0}$  está orientado en sentido antihorario. Notemos que  $L_i \cup L_{i+1} \subset L$  es la frontera de un disco anudado  $D_i \subset L$ .

A continuación probaremos que el disco  $D_i$  tiene área mínima si el arco trébol  $L_i$  es congruente al arco trébol  $L_{i+1}$ ; *i.e.*,  $L_i$  se puede transformar en  $L_{i+1}$  por medio de movidas cubuladas en  $\mathbb{R}^4$ . Sean  $L_i = \bigcup_{k=1}^{21} v_k$  y  $L_{i+1} = \bigcup_{k=1}^{21} w_k$  donde  $v_k$  y  $w_k$  son aristas contenidas en el 1-esqueleto de la cubulación canónica  $\mathcal{C}^4$  de  $\mathbb{R}^4$ . Consideremos un “camino”  $C_k$  uniendo los correspondientes segmentos  $v_k$  y  $w_k$ , consistente de 2-caras  $F_i$  en  $D_i$ . Más precisamente,  $C_k = \cup F_{k_m}^l$ , donde  $F_{l_m} \in D_i$  y  $v_k \in F_{k_1}^l, w_k \in F_{k_m}^l, F_{k_t}^l \cap F_{k_{t+1}}^l$  es una arista que pertenece al 1-esqueleto de  $\mathcal{C}^4$  y  $F_{k_t} \cap F_{k_r} = \{\emptyset \text{ o a un vértice}\}$ , si  $r \neq t + 1$ .

De esta forma, para minimizar el área de  $D_i$  necesitamos que cada camino  $C_k$  sea de la menor longitud posible, donde la longitud de  $C_k$ ,  $l(C_k)$ , se define como el número de caras que lo conforman. Notemos que dados dos caminos  $\alpha$  y  $\beta$  entre las aristas  $v_k$  y  $w_k$  contenidos en  $D_i$ , si  $\alpha$  realiza más cambios de dirección que  $\beta$ , entonces la longitud de  $\alpha$  ( $l(\alpha)$ ) es mayor a la longitud del camino  $\beta$  ( $l(\beta)$ ).

Esto implica que para que  $l(C_k)$  sea lo más pequeña posible requerimos minimizar su número de cambios de dirección. Observemos que por construcción el mínimo número de cambios de direcciones que cada camino  $C_k$ ,  $k \in \{2, \dots, 20\}$  puede realizar es 1. Para  $k = 1$  y  $21$ , el mínimo número de cambios que el correspondiente camino  $C_k$  puede realizar es 0 y su longitud mínima es 1.

También requerimos que la intersección de dos caminos distintos  $C_j$  y  $C_k$  esté contenida en el 1-esqueleto de  $\mathcal{C}^4$ . De esta forma  $D_i = \cup C_k$  y el área de  $D_i$  será igual a  $\sum l(C_k)$ , donde  $l(C_k)$  denota el número de caras  $F_{km}$  que lo conforman.

Esto lo logramos de dos maneras.

- a. El camino  $C_k$  está contenido en el mismo plano.
- b. El camino  $C_k$  está contenido en dos planos ortogonales.

En ambos casos, la longitud de  $C_k$  se reduce si la longitud del camino antes y después del cambio de dirección coinciden.

Vamos a comparar  $L_i$  y  $L_{i+1}$ . Usando movidas cubuladas podemos hacer coincidir  $v_1$  con  $w_1$ , obteniendo un arco  $L'_i$ . Notemos que  $L'_i$  también está contenido en el 1-esqueleto de la cubulación  $\mathcal{C}^4$ . Así, si  $L'_i$  no coincide con  $L_{i+1}$

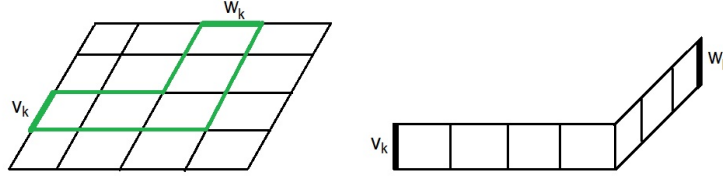


Figura 2.22: Opciones de cambios de dirección.

tenemos que  $L'_i \cup L_{i+1}$  es la frontera de un número finito de 2-discos contenidos en el 2-esqueleto de  $\mathcal{C}^4$ ; por lo tanto, si queremos minimizar el área de  $D_i$ , necesitamos que  $L'_i$  coincida con  $L_{i+1}$ . Veamos esta afirmación con más detalle.

Notemos que por el Teorema B podemos transformar  $L_i$  en  $L_{i+1}$  por medio de movidas cubuladas. Dado que los dos arcos tienen la misma longitud, y la única movida cubulada que preserva longitud es aquella que intercambia dos aristas adyacentes  $A$  de la frontera de una cara  $F \in \mathcal{C}^4$ , por las dos aristas restantes de  $F$ ; hemos reducido el número de posibles arcos tréboles cubulados de longitud 21 a un total de 10 (ver figura 2.23). Los incisos a) y b) nos muestran dos arcos equivalentes via una movida cubulada, y el inciso c) nos muestra los 10 posibles arcos a través de las líneas punteadas.

Notemos que estos tres arcos coinciden en las primeras 4 aristas. Vamos a probar que el arco que minimiza el área es el arco  $K$  cuyo diagrama es el (inciso a) de la figura 2.23, por lo que analizaremos los “posibles” caminos  $C_i$  y veremos que el camino  $C_i$  determina el siguiente camino  $C_{i+1}$ . Sin pérdida de generalidad, asumiremos que el arco  $K$  posee las coordenadas señaladas en la figura 2.4.

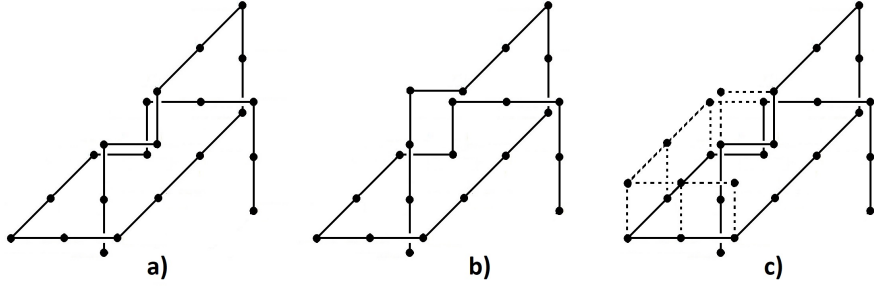
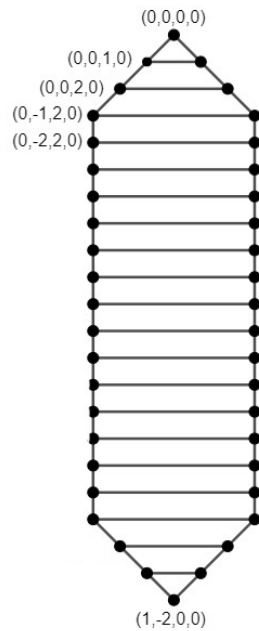


Figura 2.23: Posibilidades de arco trébol.

Consideremos de nuevo, nuestros cuatro arcos preferenciales  $L_i$ , cuyos vértices están dados por  $e_j^i$  para  $i = 1, 2, 3, 4$  y  $j = 0, \dots, 21$ . Siendo  $e_0^1 = e_0^2$  y  $e_{21}^1 = e_{21}^2$ , para  $i \in \{2, 3, 4\}$ . Supondremos que  $L_1$  coincide con el arco trébol  $K$  en los primeros cinco índices  $j$  y veremos que para minimizar el área de  $L$ , el sexto vértice de  $L_1$  coincide con el correspondiente de  $K$ . De esta forma, tenemos que  $e_0^2 = (0, 0, 0, 0)$  y  $e_{21}^2 = (1, -2, 0, 0)$ ; además sabemos que se puede transformar  $L_1$  en  $L_2$  por medio de movidas cubuladas, minimizando área y respetando que  $L$  es una superficie conexa. Para esto conectaremos cada  $e_j^1$  con su correspondiente  $e_j^2$ , por medio del camino  $C_j$ .

*Paso 1.* Sabemos que  $e_0^i = (0, 0, 0, 0)$  y  $e_{21}^i = (1, -2, 0, 0)$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Vamos a construir ahora el disco  $D_1$ , buscando minimizar la longitud de los  $C_i$  y por tanto minimizar el área de  $L$ .

Existen 8 vértices a longitud uno (longitud mínima) del vértice  $e_0^i$  en la cubulación canónica, los cuatro vértices  $e_1^i$  deben estar en el mismo plano (ya que provienen de una rotación). Tenemos ahora tres posibles combinaciones para los dos vértices restantes:  $(1, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 0, 1)$  y sus correspondientes negativos. Digamos que  $e_1^2 = (0, 0, 0, 1)$ , notemos que cualquiera de las otras dos opciones son posibles, fijamos una de manera aleatoria pa-

Figura 2.24: Arcos  $L_1$  y  $L_2$ .

ra facilitar los cálculos, ya que utilizar alguna de las otras dos opciones nos llevaría al mismo resultado final (salvo rotación) pasando por otras coordenadas.

Dado que  $L$  es una superficie cubulada y conexa, debemos unir los puntos  $e_1^1$  y  $e_1^2$  por medio de aristas contenidas en la cubulación canónica. De esta forma, para que el camino  $C_1$  sea de longitud mínima (y que por tanto minimice el área) requerimos que pase por el vértice  $(0, 0, 1, 1)$ , obteniendo así un único cuadrado (ver figura 2.25).

*Paso 2.* Para cada índice  $j$ , tenemos que  $e_j^i$  ( $i = 1, 2$ ) están en el mismo plano, los vértices a longitud uno de  $e_1^2$  son  $\{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 2), (0, 0, 1, 1), (0, 0, -1, 1)\}$ , así, tenemos cuatro opciones para nuestro siguiente vértice y

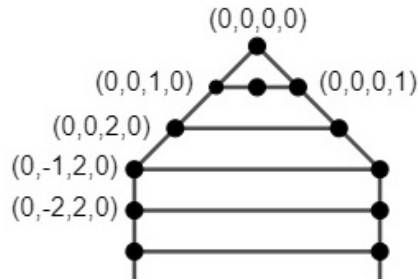


Figura 2.25: Paso 1. Arcos  $L_1$  y  $L_2$ .

claramente el origen no es una opción. Veamos ahora las otras posibilidades.

- Vértice  $(0,0,1,1)$ : Este vértice ya lo utilizamos en el paso anterior para formar  $C_1$ , utilizarlo como  $e_2^2$  aumenta el número de aristas de  $L_2$ , lo cual no es posible ya que sabemos que  $L_2$  consiste de 21 aristas, por lo que este vértice no es una opción.
- Vértice  $(0,0,-1,1)$ : El camino con longitud mínima al punto  $e_2^1$  es 4, pero nos obliga a pasar por al menos un vértice que ya utilizamos antes, el siguiente camino más corto tiene longitud 6.
- Vértice  $(0,0,0,2)$ : El camino con longitud mínima al punto  $e_2^1$  es 4 y no pasamos por ningún vértice utilizado previamente. Este es nuestro vértice  $e_2^2$ .

Como  $l(C_2) = 4$  requerimos 3 vértices más para formar este camino, los cuáles aparecen de manera natural al respetar las coordenadas de los vértices ya dados. Así  $C_2$  está formado por  $e_2^1$ ,  $(0,0,2,1)$ ,  $(0,0,2,2)$ ,  $(0,0,1,2)$  y  $e_2^2$ . Tenemos entonces tres cuadrados en este nivel (ver figura 2.26).

*Paso 3.* Contruiremos el camino  $C_3$ , para esto necesitamos encontrar las coordenadas de  $e_3^2$ , para lo cual notemos que de manera natural se forma un



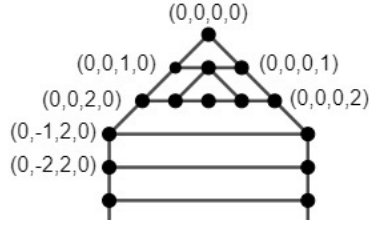


Figura 2.26: Paso 2. Arcos  $L_1$  y  $L_2$ .

cuadrado con los vértices  $e_2^1, e_3^1$  y  $(0, 0, 2, 1)$ , por lo que el vértice  $(0, -1, 2, 1)$  también forma parte de  $L$ , así como el vértice  $(0, -1, 2, 2)$ , por lo que los vértices en  $C_3$  tiene coordenadas del tipo  $(0, -1, a, b)$ . Existen 8 puntos a distancia 1 de  $e_2^2$ , pero sólo uno cumple la característica anterior, por lo que  $e_3^2 = (0, -1, 0, 2)$ . Así,  $C_3$  está formado por  $e_3^1, (0, -1, 2, 1), (0, -1, 2, 2), (0, -1, 1, 2)$  y  $e_3^2$ . Tenemos entonces cuatro cuadrados en este nivel (ver figura 2.27).

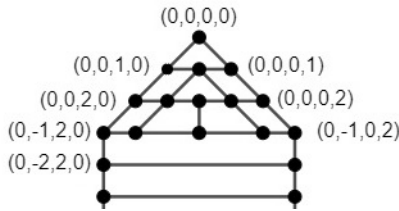


Figura 2.27: Paso 3. Arcos  $L_1$  y  $L_2$ .

*Paso 4.* Construiremos el camino  $C_4$ . De nuevo, notemos que  $C_3$  y  $e_4^1$  forman un cuadrado con el vértice  $(0, -2, 2, 1)$ , de la misma manera se forma otro cuadrado con el vértice  $(0, -2, 2, 2)$ . Así,  $C_4$  tiene vértices con coordenadas del tipo  $(0, -2, a, b)$ . Sólo un vértice de los ocho que se encuentran a distancia

uno de  $e_3^2$  lo cumple, por lo que  $e_4^2 = (0, -2, 0, 2)$ . Por lo que  $C_4$  está formado por  $e_4^1, (0, -2, 2, 1), (0, -2, 2, 2), (0, -2, 1, 2)$  y  $e_4^2$ . Tenemos cuatro cuadrados en este nivel (ver figura 2.28).

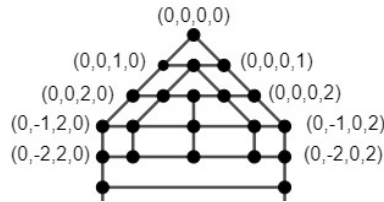


Figura 2.28: Paso 4. Arcos  $L_1$  y  $L_2$ .

*Paso 5.* Construiremos el camino  $C_5$ . Tenemos dos opciones, supongamos primero que  $e_5^1 = (0, -2, 2, 0)$ , luego tenemos que  $C_4$  y  $e_5^1$  forman un cuadrado con el vértice  $(0, -2, 1, 1)$ . Notemos que este vértice está a distancia uno del vértice  $(0, -2, 1, 2) \in C_4$ , por lo que de manera natural se completa otro cuadrado. De los 8 vértices a distancia uno de  $e_4^2$ , el que minimiza longitud para llegar a  $(0, -2, 1, 1)$  es  $(0, -2, 0, 1)$ , a este vértice llamaremos  $e_5^2$ ; así,  $C_5$  está formado por los vértices  $e_5^1, (0, -2, 1, 1)$  y  $e_5^2$ . Tenemos tres cuadrados en este nivel (ver figura 2.29).

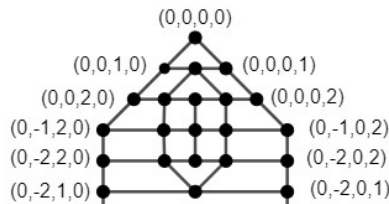


Figura 2.29: Paso 5. Arcos  $L_1$  y  $L_2$ .

Consideremos ahora que  $e_5^1 = (0, -3, 2, 0)$ . Luego, a partir de  $C_4$ , se forma un cuadrado con  $e_5^1$  y el vértice  $(0, -3, 2, 1)$ , de la misma manera se forma otro cuadrado con el vértice  $(0, -3, 2, 2)$ . De esta forma,  $C_5$  tiene vértices con coordenadas del tipo  $(0, -3, a, b)$ . Sólo un vértice de los ocho que se encuentran a distancia uno de  $e_4^2$  lo cumple, por lo que  $e_5^2 = (0, -3, 0, 2)$ . Así,  $C_5$  está formado por  $e_5^1$ ,  $(0, -3, 2, 1)$ ,  $(0, -3, 2, 2)$ ,  $(0, -3, 1, 2)$  y  $e_5^2$ , por lo que tenemos cinco cuadrados en este nivel (ver figura 2.29). Lo anterior, implica que si  $e_5^1 = (0, -3, 2, 0)$  entonces el número de cuadrados que conforman  $L$  es mayor; por lo que elegimos  $e_5^1 = (0, -2, 2, 0)$  con el fin de minimizar el área. Esto implica que los vértices de  $L_1$  coinciden con el arco trébol  $K$  en los índices  $j = 0, 1, 2, \dots, 17$ .

*Paso 6.* Construiremos el camino  $C_6$ . Recordemos que  $e_6^1 = (0, -3, 1, 0)$ . De manera natural se completa un cuadrado con el vértice  $(0, -3, 1, 1)$  y este vértice está a distancia uno de una de las 8 opciones a distancia uno de  $e_5^2$ , por lo que  $e_6^2 = (0, -3, 0, 1)$ . Tenemos dos cuadrados en este nivel (ver figura 2.30).

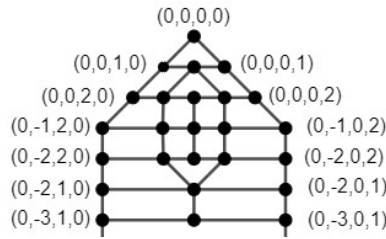


Figura 2.30: Paso 6. Arcos  $L_1$  y  $L_2$ .

*Paso 7 al 13.* Estos pasos son análogos al Paso 6, con un sólo vértice se obtiene el correspondiente  $e_i^2$  al tener una única opción que minimiza la longitud

de los respectivos caminos. Así tenemos  $e_7^2 = (1, -3, 1, 1)$ ,  $e_8^2 = (2, -3, 0, 1)$ ,  $e_9^2 = (2, -2, 0, 1)$ ,  $e_{10}^2 = (2, -1, 0, 1)$ ,  $e_{11}^2 = (1, -1, 0, 1)$ ,  $e_{12}^2 = (0, -1, 0, 1)$ ,  $e_{13}^2 = (-1, -1, 1, 1)$ . Tenemos catorce cuadrados en estos niveles (ver figura 2.31).

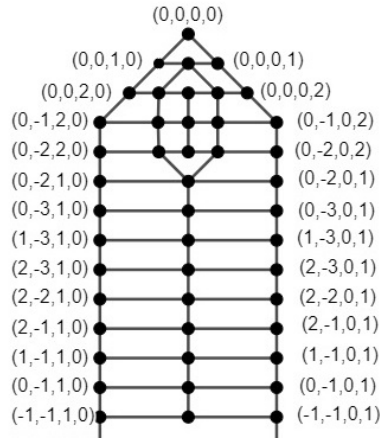


Figura 2.31: Paso 13. Arcos  $L_1$  y  $L_2$ .

*Paso 14.* Construiremos el camino  $C_{14}$ . Tenemos que  $e_{14}^1 = (-1, -1, 2, 0)$ . Utilizando  $C_{13}$  y el vértice  $e_{14}^1$  completamos un cuadrado con el vértice  $(-1, -1, 2, 1)$ . A continuación, consideremos los ocho vértices que se encuentran a distancia uno de  $e_{13}^2$ :  $(-1, -1, 0, 0)$ ,  $(-1, -1, 0, 2)$ ,  $(-1, -1, -1, 1)$ ,  $(-1, -1, 1, 1)$ ,  $(-1, -2, 0, 1)$ ,  $(-1, 0, 0, 1)$ ,  $(-2, -1, 0, 1)$ ,  $(0, -1, 0, 1)$ . Tres de estos vértices ya se utilizaron en pasos anteriores, por lo que restan cinco posibilidades, mismas que se encuentran a distancia tres del vértice  $(-1, -1, 2, 1)$ , por lo que debe haber dos vértices más en  $C_{14}$ . Sabemos entonces que  $l(C_{14}) = 4$ , por lo que en este paso se deben generar tres cuadrados; por lo tanto  $e_{14}^2$  debe estar a distancia dos del vértice  $(-1, -1, 1, 1)$ , pero todas las opciones restantes cumplen esta condición, por ahora no tenemos más

información (ver figura 2.32).

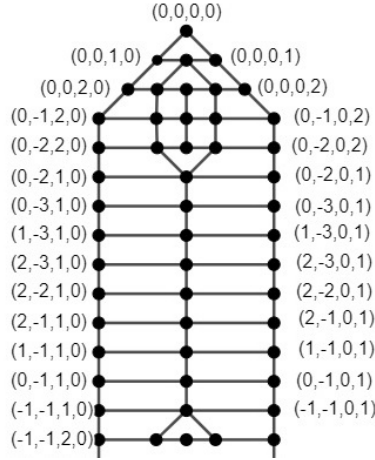
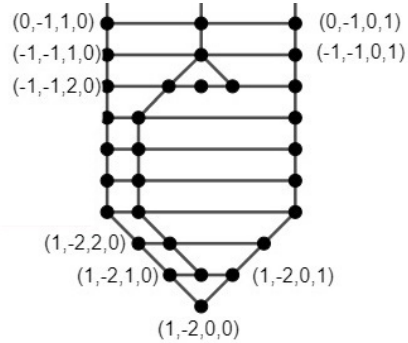


Figura 2.32: Paso 14. Arcos  $L_1$  y  $L_2$ .

En los siguientes pasos, procederemos a completar los cuadrados del lado izquierdo de nuestros diagramas para obtener más información sobre los  $e_i^2$ 's restantes, pero ahora iniciaremos con el vértice final  $e_{21}^1 = (1, -2, 0, 0)$ . Notemos que los arcos  $L_1$  y  $K$  coinciden en los vértices cuyos índices son  $j = 19, 20$  y  $21$ .

*Paso 15.* Construcción del camino  $C_{20}$ . Consideremos el vértice  $e_{21}^1 = (1, -2, 0, 0)$ , el cual debe ser vértice de un cuadrado, por la misma razón que  $e_0^1$  lo es. Así, obtenemos el valor de  $e_{20}^2 = (1, -2, 0, 1)$ , ya que  $e_{20}^1 = (1, -2, 1, 0)$  (ver figura 2.33).

*Paso 16.* Construcción del camino  $C_{19}$ . Tomemos el vértice  $e_{19}^1 = (1, -2, 2, 0)$ . Luego los vértices a longitud uno de  $e_{20}^2$  que se encuentran en el mismo plano son:  $(1, -2, 0, 0)$ ,  $(1, -2, 0, 2)$ ,  $(1, -2, -1, 1)$ ,  $(1, -2, 1, 1)$ . Recordemos

Figura 2.33: Paso 15. Arcos  $L_1$  y  $L_2$ .

que esta última opción ya se utilizó en un paso anterior. Analizemos ahora las otras posibilidades.

- Vértice  $(1, -2, -1, 1)$ . Por la simetría de la construcción, este vértice es utilizado de forma análoga al vértice  $(1, -2, 1, 1)$  en el paso 16, pero en el disco  $D_3$  cuya frontera es la unión de los arcos  $L_3$  y  $L_4$ , por lo que no es una opción.
- Vértice  $(1, -2, 0, 0)$ . En este caso, el camino con longitud mínima al punto  $e_{19}^1$  tiene longitud cuatro, pero nos obliga a pasar por al menos un vértice que ya utilizamos antes, y el siguiente camino tiene longitud seis, por lo que no es una opción.
- Vértice  $(1, -2, 0, 2)$ . La longitud mínima al punto  $e_{19}^1 = (1, -2, 2, 0)$  es cuatro y no pasamos por ningún vértice utilizado previamente. Por lo tanto, este es nuestro vértice  $e_{19}^2$ .

Como  $l(C_{19}) = 4$ , sabemos que requerimos dos vértices más para formar este camino, los cuales aparecen de manera natural al respetar las coordenadas de los vértices ya dados. Así  $C_{19}$  está formado por  $(e_{19}^1)$ ,  $(1, -2, 2, 1)$ ,  $(1, -2, 2, 2)$ ,  $(1, -2, 1, 2)$ ,  $e_{19}^2$ . Tenemos entonces tres cuadrados en este nivel

(ver figura 2.34).

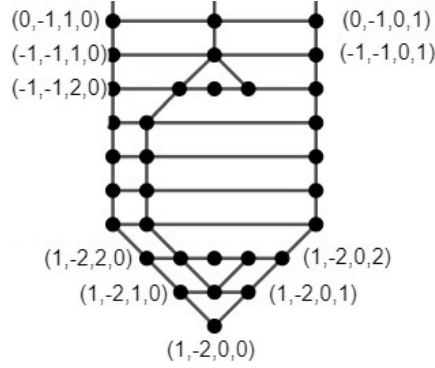


Figura 2.34: Paso 16. Arcos  $L_1$  y  $L_2$ .

*Paso 17.* Vamos a formar ahora  $C_{18}$ , para lo cual requerimos encontrar las coordenadas de  $e_{18}^2$ . Consideremos primero que  $e_{18}^1 = (1, -1, 2, 0)$  y notemos que de manera natural los vértices  $(1, -1, 2, 1)$ ,  $(1, -2, 2, 1)$ ,  $(1, -2, 2, 2)$  de pasos anteriores, forman un cuadrado por lo que el vértice  $(1, -1, 2, 2)$  restante también debe pertenecer a  $L$ . Existen ocho vértices a distancia uno de  $e_{19}^2$ , de los cuales sólo dos están a longitud dos del vértice  $(1, -1, 2, 2)$ , los otros seis vértices están a distancia cuatro, por lo cual no los consideraremos. Las dos opciones restantes son los vértices  $(1, -2, 1, 2)$  y  $(1, -1, 0, 2)$ , la primer opción ya la utilizamos en el paso anterior, por lo que  $e_{18}^2 = (1, -1, 0, 2)$ . Completamos  $C_{18}$  con el vértice  $(1, -1, 1, 2)$  y de esta forma tenemos cuatro cuadrados en este nivel.

Consideremos ahora que  $e_{18}^1 = (1, -2, 3, 0)$ . Notemos que los vértices  $e_{21} = (1, -2, 0, 0)$ ,  $e_{20}^2 = (1, -2, 0, 1)$  y  $e_{19}^2 = (1, -2, 0, 2)$  se encuentran en el mismo segmento de recta  $b$ ; de la misma manera que los vértices  $e_{21} = (1, -2, 0, 0)$ ,  $e_{20}^1 = (1, -2, 1, 0)$ ,  $e_{19}^1 = (1, -2, 2, 0)$  y  $e_{18}^1 = (1, -2, 3, 0)$  se encuentran en

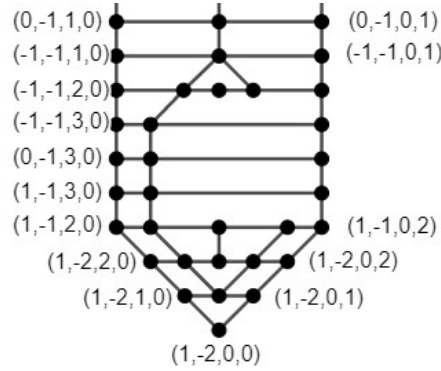


Figura 2.35: Paso 17. Arcos  $L_1$  y  $L_2$ .

el segmento  $a$  de tal manera que si rotamos  $a$  noventa grados, a través del vértice  $e_{21}$ , tenemos que el vértice  $e_{20}^1$  coincide con  $e_{20}^2$ , de manera análoga  $e_{19}^1$  coincide  $e_{19}^1$ ; esto nos lleva a que  $e_{18}^1$  debe coincidir con  $e_{18}^2$ ; por lo que sería igual a  $(1, -2, 0, 3)$ . Esto implica que, el camino  $C_{18}$  consistirá de 5 cuadrados, incrementando con ello el área de  $L$ . Por lo que elegimos como  $e_{18}^2 = (1, -1, 0, 2)$  (ver figura 2.35).

*Paso 18.* Vamos a construir el camino  $C_{17}$  a partir del vértice  $e_{17}^1 = (1, -1, 3, 0)$ . Las coordenadas en este camino son del tipo  $(1, -1, a, b)$ , y podemos completar un cuadrado con el vértice  $(1, -1, 3, 2)$ . Revisamos ahora las ocho opciones que tenemos para el vértice  $e_{17}^2$ , sólo cuatro opciones cumplen con la condición anterior. De éstos, dos vértices ya fueron utilizados en pasos anteriores, sólo restan  $(1, -1, 0, 1)$  y  $(1, -1, 0, 3)$ . A continuación, buscaremos el vértice tal que el camino al vértice  $(1, -1, 3, 2)$  sea lo mas pequeño posible, y no pase por vértices que hemos utilizado antes; por lo que  $e_{17}^2 = (1, -1, 0, 3)$  se encuentra a distancia cuatro de  $(1, -1, 3, 2)$  (la menor posible), necesitamos agregar tres vértices para obtener  $C_{17}$ ;  $(1, -1, 3, 3)$ ,  $(1, -1, 2, 3)$  y  $(1, -1, 1, 3)$ . Por lo que tenemos cinco cuadrados en este nivel (ver figura 2.36).



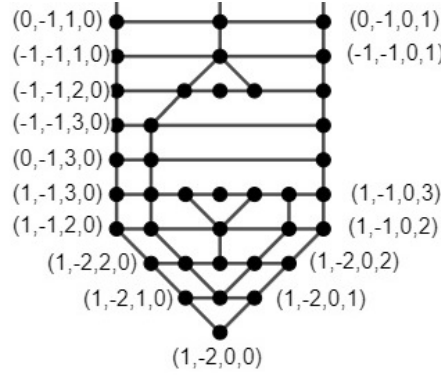


Figura 2.36: Paso 18. Arcos  $L_1$  y  $L_2$ .

*Paso 19.* Para construir  $C_{16}$  a partir del vértice  $e_{16}^1 = (0, -1, 3, 0)$ , consideramos los ocho vértices que se encuentran a distancia uno de  $e_{17}^2$ , y de estas ocho posibilidades trazamos el camino más corto que los una a  $e_{16}^1$ . Encontramos que la longitud de cinco de estos caminos es 8, y los otros tres caminos tienen longitud 6, por lo que los vértices con caminos de longitud 8 no son una opción que minimice el área. En las tres opciones restantes, dos son vértices que ya han sido utilizados, por lo que  $e_{16}^2 = (0, -1, 0, 3)$ , y requerimos cuatro vértices más para formar  $C_{16}$ , cuyas coordenadas se obtienen de manera natural al completar los cuadrados con  $C_{17}$ , por lo que  $(0, -1, 3, 2), (0, -1, 3, 3), (0, -1, 2, 3), (0, -1, 1, 3) \in C_{16}$ . Tenemos, por lo tanto 6 cuadrados en este nivel (ver figura 2.37).

*Paso 20.* Para construir el camino  $C_{15}$ , una vez más revisamos las opciones de vértices que se encuentran a distancia uno de  $e_{16}^2$  y encontramos el camino más corto que lo une a  $e_{15}^1 = (-1, -1, 3, 0)$ . Como en el caso anterior, cinco caminos tienen longitud ocho y no son una opción que minimice el área. Revisamos las otras tres opciones con longitud seis:

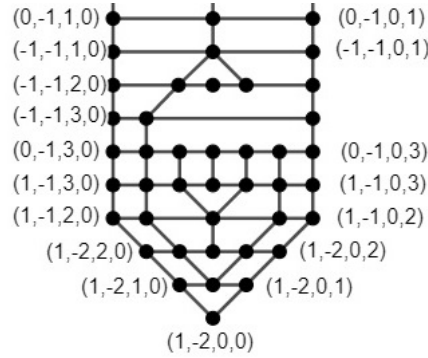


Figura 2.37: Paso 19. Arcos  $L_1$  y  $L_2$ .

- Opción  $(0, -1, 0, 2)$ : Este vértice es  $e_3^2$ .
- Opción  $(0, -1, 1, 3)$ : Este vértice pertenece a  $C_{16}$ .
- Opción  $(-1, -1, 0, 3)$ : Minimiza la longitud de  $C_{15}$  y no ha sido utilizado en otro paso.

Así  $e_{15}^2 = (-1, -1, 0, 3)$ . Dado que  $l(C_{15}) = 6$ , necesitamos agregar cuatro vértices más, los cuales surgen de manera natural al completar cuadrados con  $C_{16}$ . Así  $\{(-1, 1, 3, 2), (-1, -1, 3, 3), (-1, -1, 2, 3), (-1, -1, 1, 3)\} \in C_{15}$ . Tenemos 6 cuadrados en este nivel (ver figura 2.38).

*Paso 21.* Como paso final nos resta encontrar  $C_{14}$ , para esto necesitamos encontrar  $e_{14}^2$ , una vez más consideramos todos los vértices que se encuentren a distancia uno de  $e_{15}^2$ , pero esta vez, simultáneamente debe estar a distancia uno de  $e_{13}^2$ . Sólo un vértice cumple con estas condiciones, por lo que  $e_{14}^2 = (-1, -1, 0, 2)$ . Resta completar los correspondientes cuadrados con los vértices  $(-1, -1, 2, 2)$  y  $(-1, -1, 1, 2)$ . Por lo que tenemos 5 cuadrados en este nivel (ver figura 2.39).

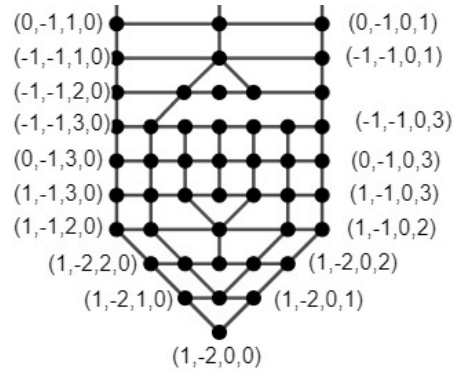


Figura 2.38: Paso 20. Arcos  $L_1$  y  $L_2$ .

Por lo tanto el área del disco  $D_i$  es mayor o igual a 64, lo que implica que el área de  $L$  es mayor o igual a 256. Por lo tanto, el resultado se sigue. ■

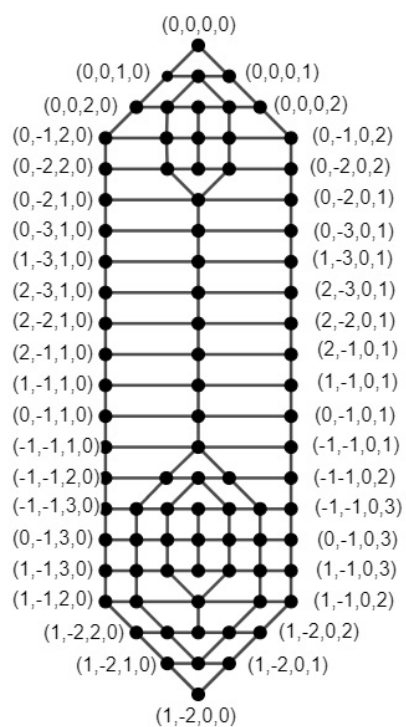


Figura 2.39: Paso 21. Arcos  $L_1$  y  $L_2$ .

# Capítulo 3

## Discretización de 2-nudos cubulados

En este capítulo vamos a usar el hecho de que todo nudo es isotópico a un nudo cúbico para desarrollar una versión discreta del nudo. Empezamos revisando el caso de 1-nudos. Ya que un 1-nudo cubulado está descrito por una sucesión de aristas cuyas fronteras están en la retícula canónica de puntos con coeficientes enteros en  $\mathbb{R}^3$ , *i.e.*, en el grupo abeliano  $\mathbb{Z}^3$ , de esta forma, cada 1-nudo cúbico está completamente descrito por una permutación cíclica  $(a_1, \dots, a_n)$  (con algunas restricciones) con  $a_i \in \mathbb{Z}^3$ . Se puede describir un diagrama regular de un 1-nudo cubulado en términos de estas permutaciones cíclicas proyectando en un plano  $P$ , tal que dicha proyección es inyectiva cuando se restringe a la  $\mathbb{Z}^3$ -retícula y la imagen de la  $\mathbb{Z}^3$ -retícula,  $\Lambda_P$  es densa en  $P$  [11]. De manera más precisa, la proyección de cada 1-nudo cubulado está determinada por una permutación cíclica  $(w_1, \dots, w_n)$  (con algunas restricciones),  $w_i \in \Lambda_P$ .

En el caso de 2-nudos, un 2-nudo cúbico está dado por una sucesión de caras cuyas fronteras son aristas con extremos en la retícula canónica de puntos

con coeficientes enteros en  $\mathbb{R}^4$ , *i.e.*, en el grupo  $\mathbb{Z}^4$ . En este caso, cada cara está determinada por cuatro puntos en la retícula canónica, por lo que utilizar permutaciones como en el caso 1 dimensional no es tan sencillo, y surge la necesidad de buscar otra forma de discretizar a los 2-nudos.

Más precisamente, sea  $\mathcal{C}$  la cubulación canónica de  $\mathbb{R}^4$  y sea  $\mathcal{S}^2$  el correspondiente 2-esqueleto de  $\mathcal{C}$ , el cual por definición está determinado por los vértices en la retícula  $\mathbb{Z}^4$ , que consiste de puntos con coeficientes enteros, por aristas que están contenidas en líneas rectas paralelas a los ejes coordenados y que pasan por puntos en la retícula  $\mathbb{Z}^4$ , y por caras que están contenidas en planos paralelos a los planos coordenados y que pasan por puntos en la retícula. Estas líneas rectas pertenecen a cuatro familias de líneas paralelas: la familia  $\mathcal{F}_1^1$  de líneas paralelas al eje  $x$ , la familia  $\mathcal{F}_2^1$  de líneas paralelas al eje  $y$ , la familia  $\mathcal{F}_3^1$  de líneas paralelas al eje  $z$  y la familia  $\mathcal{F}_4^1$  de líneas paralelas al eje  $t$ . Las caras pertenecen a seis familias de planos paralelos: la familia  $\mathcal{F}_1^2$  de planos paralelos al plano  $xy$ , la familia  $\mathcal{F}_2^2$  de planos paralelos al plano  $xz$ , la familia  $\mathcal{F}_3^2$  de planos paralelos al plano  $xt$ , la familia  $\mathcal{F}_4^2$  de planos paralelos al plano  $yz$ , la familia  $\mathcal{F}_5^2$  de planos paralelos al plano  $yt$  y la familia  $\mathcal{F}_6^2$  de planos paralelos al plano  $zt$ . Notemos que en las familias  $\mathcal{F}$  el superíndice hace referencia a la dimensión de las familias (una recta o un plano) mientras que el subíndice hace referencia al orden en el que tomamos los ejes y planos.

A lo largo de este capítulo usaremos la siguiente notación:

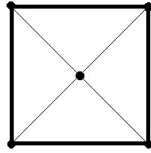
$$a := \pi^6 + 1, \quad b := \pi^6 + \pi^4 + 1, \quad c := \pi^6 + \pi^4 + \pi^2 + 1$$

Donde  $\pi$  es el conocido número trascendental.

### 3.1. Descripción discreta de 2-nudos cubulados.

Dado que cualquier 2-nudo cúbico está definido por una sucesión de caras, las cuales están determinadas por 4 puntos en la retícula canónica  $\mathbb{Z}^4$  de puntos con coeficientes enteros en  $\mathbb{R}^4$ , es posible describir estas caras por medio de sus baricentros, con lo que disminuimos el número de puntos necesarios para poder reproducir el 2-nudo. Todo cuadrado de la retícula está definido por su baricentro, así podemos dar una lista “ordenada” de todos los baricentros que forman el 2-nudos cúbico.

Tenemos un “orden parcial” para estos baricentros, primero damos todos los baricentros de la familia  $\mathcal{F}_1^2$ , seguimos con la familia  $\mathcal{F}_2^2, \mathcal{F}_3^2, \dots, \mathcal{F}_6^2$ .



Sea  $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$  una familia de seis baricentros de caras de un hipercubo con vértices en  $\mathbb{Z}^4$ , donde cada  $b_i$  tiene coordenadas  $b_i = (b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}, b_{i4})$ ,  $i \in [1, 6]$ .

Las familias  $\{b_i\}, i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  que están en el mismo cubo cumplen lo siguiente:

- Tienen una entrada  $b_{ij} \in \mathbb{Z}$  constante,  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, j \in \{1, 2, 3, 4\}$  fijo.
- Tienen dos entradas del tipo  $\frac{q_k}{2}, q_k \in \mathbb{Z}, k \in \{1, 2, 3\}$ .

- La entrada restante, sea  $b_{mn}$ , es entera,  $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, n \in \{1, 2, 3, 4\}, n \neq m$ .
  
- Más aún, sea  $F$  la cara cuyo baricentro es  $b_{mn}$ . Así  $b_{mn}$  satisface que  $|b_{mn} - b_{pn}| = \frac{1}{2}$  para caras  $F'$  adyacentes a  $F$  con  $p \neq m, p \in [1, 6]$  y  $|b_{mn} - b_{pn}| = 1$  sólo cuando  $F'$  es opuesta a  $F$ .

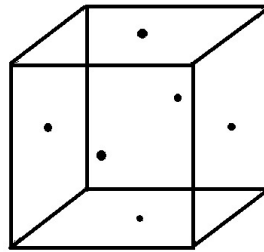


Figura 3.1: 8 vértices y 6 baricentros en el cubo.

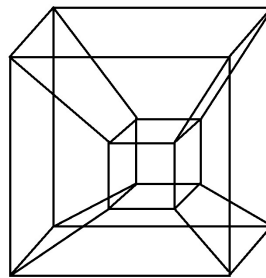


Figura 3.2: 16 vértices y 24 baricentros en el hipercubo.

De esta forma, podemos representar a un 2-nudo  $K$  como una sucesión de puntos  $K = (b_1, b_1, \dots, b_m)$  acorde al orden parcial de las familias de baricentros.



### 3.2. Movidas cubuladas en baricentros

Reescribimos las movidas cubuladas para 2-nudos cúbicos en términos de baricentros.

M1 *Subdivisión*: Dado un entero  $m > 1$ , consideramos la subcubulación  $\mathcal{C}_m$  de  $\mathcal{C}$ . Sea  $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$  un baricentro, la subdivisión permite cambiar las entradas  $(b_i, b_j), i, j \in [1, 2, 3, 4], i \neq j$  del tipo  $(\frac{p}{2}, \frac{q}{2})$  por  $\{(\frac{p-1}{2} + \frac{2r+1}{2m}, \frac{q-1}{2} + \frac{2s+1}{2m})\}$ , con  $r, s \in [0, \dots, m-1]$ . Denotaremos este cambio como  $(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}) \Leftrightarrow \{(\frac{p-1}{2} + \frac{2r+1}{2m}, \frac{q-1}{2} + \frac{2s+1}{2m})\}_{r,s \in \Pi}$ .

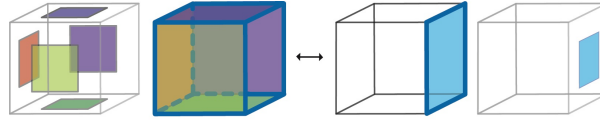
Por ejemplo, si el baricentro es  $(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3)$  y  $m=2$  obtenemos el siguiente cambio.

$$\left(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3\right) \Leftrightarrow \left\{ \left(2, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 3\right), \left(2, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 3\right), \left(2, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 3\right), \left(2, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 3\right) \right\}.$$

M2 *Movimientos de frontera*: Consiste en intercambiar baricentros de un conjunto conexo de caras cuadradas homeomorfo a un disco  $\mathbb{D}^2$  en un cubo  $C$  de la cubulación por las caras complementarias de  $C$ . Existen tres tipos de movidas **M2**.

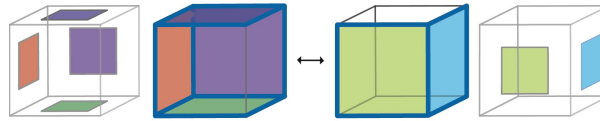
- Movimiento 1  $\Leftrightarrow$  5

Sea  $F$  una cara del cubo  $C$  con baricentro  $b_i = (b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}, b_{i4}), i \in [1, 6]$ , existen cinco baricentros en el mismo cubo  $C$ ,  $b_j, j \in [1, 6], i \neq j$  tales que  $b_{ik} = b_{jk}$ , para algún  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$  (esto pasa ya que los cinco baricentros que están en el mismo cubo  $C$ ). El movimiento 1  $\Leftrightarrow$  5 consiste en cambiar el baricentro  $b_i$  por la familia de baricentros  $b_j$ .

Figura 3.3: *Movimiento 1 ⇔ 5.*

- Movimiento 2 ⇔ 4.

Sean  $F_i$  y  $F_j$  dos caras adyacentes del cubo  $C$ , sean  $b_i$  y  $b_j$  sus respectivos baricentros. Entonces  $|b_{ik} - b_{jk}| = \frac{1}{2}$  para dos  $k's \in \{1, 2, 3, 4\}$ . El movimiento  $2 \rightleftharpoons 4$  consiste en cambiar los baricentros  $b_i$  y  $b_j$  por el resto de los baricentros en  $C$ .

Figura 3.4: *Movimiento 2 ⇔ 4.*

- Movimiento 3 ⇔ 3.

Sean  $F_i, F_j, F_k$  tres caras adyacentes del cubo  $C$ , sean  $b_i, b_j, b_k$  sus respectivos baricentros. El movimiento  $3 \rightleftharpoons 3$  consiste en cambiar los baricentros  $b_i, b_j, b_k$  por el resto de los baricentros en  $C$ . En este tipo de movimiento tenemos dos opciones:

- Las tres caras  $F_i, F_j, F_k$  son adyacentes entre si.
- La cara  $F_i$  es adyacente a las caras  $F_j, F_k$  y estas son caras opuestas entre si.

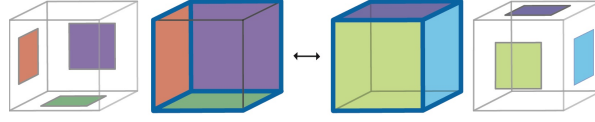


Figura 3.5: *Movimiento  $3 \rightleftharpoons 3$ .*

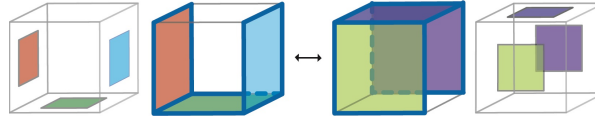


Figura 3.6: *Movimiento  $3 \rightleftharpoons 3$ .*

### 3.3. Descripción de una proyección genérica para 2-nudos cubulados.

Muchos invariantes de nudos se calculan usando proyecciones genéricas, en particular el grupo fundamental. Empezaremos mostrando que para cualquier 2-nudo cúbico  $K = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ , existe una proyección genérica  $p$  sobre un hiperplano fijo adecuado  $P$ . Después, representaremos  $\widehat{K} = p(K)$  como una lista de puntos  $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ , donde  $w_i = p(b_i)$ .

**Proposición 3.3.1.** *Existe un hiperplano  $P \in \mathbb{R}^4$  tal que la proyección ortogonal  $p : \mathbb{R}^4 \rightarrow P$  es inyectiva en los vértices de  $\mathcal{S}^2$  (la retícula  $\mathbb{Z}^4$ ) y también es inyectiva en cada una de las familias  $\mathcal{F}_i^1$  y  $\mathcal{F}_j^2$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .*

*Demostración.* Sea  $N = (1, \pi, \pi^2, \pi^3)$ , donde  $\pi$  es el conocido número trascendental. Sea  $P$  el hiperplano que pasa por el origen en  $\mathbb{R}^4$  y es ortogonal a  $N$ . Vamos a mostrar que  $p : \mathbb{R}^4 \rightarrow P$  es inyectiva cuando lo restringimos a la retícula  $\mathbb{Z}^4$ . Sea  $(x_0, y_0, z_0, t_0)$  un punto en  $P$  y  $L = \{t(1, \pi, \pi^2, \pi^3) + (x_0, y_0, z_0, t_0) : t \in \mathbb{R}\}$  sea la línea que es ortogonal a  $P$  y pasa por el punto  $(x_0, y_0, z_0, t_0)$ . Supongamos que  $L$  contiene dos puntos con coeficientes

enteros  $P_1 = (M, N, R, S) = (x_0 + t_1, y_0 + \pi(t_1), z_0 + \pi^2(t_1), t_0 + \pi^3(t_1))$  y  $P_2 = (M', N', R', S') = (x_0 + t_2, y_0 + \pi(t_2), z_0 + \pi^2(t_2), t_0 + \pi^3(t_2))$ . Si consideramos el punto  $P_1 - P_2$  que pertenece a  $L$ , debemos obtener que  $P_1 = P_2$  ya que de otra forma  $\pi$ ,  $\pi^2$  y  $\pi^3$  serían números algebraicos. Por lo tanto  $p$  restringido a la retícula  $\mathbb{Z}^4$  es inyectivo. Ahora vamos a probar que la proyección restringida a la familia  $\mathcal{F}_i^1$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  es inyectiva. Primero vamos a considerar el caso  $i = 1$ . Sean  $l$  y  $l'$  dos rectas que pertenecen a  $\mathcal{F}_1^1$ . Supongamos que  $p(l) = p(l')$ . Sea  $Q$  el plano en  $\mathbb{R}^4$  que contiene a  $l$  y  $l'$ . Dado que  $p$  restringido a los planos coordenados es inyectivo, podemos asumir que  $Q$  no es paralelo a un plano coordenado. Por lo tanto, un vector normal a  $Q$  es de la forma  $(0, a, b, c)$  con  $a, b$  y  $c \neq 0$ . Además  $p(Q)$  es la recta  $p(l) = p(l')$ . Esto significa que  $Q$  contiene una traslación del vector  $(1, \pi, \pi^2, \pi^3)$  normal a  $P$ . Esto es,  $(1, \pi, \pi^2, \pi^3) + x$  pertenece a  $Q$  (aquí  $x$  es un punto en  $Q$ ). Por lo tanto el producto interno de  $(1, \pi, \pi^2, \pi^3)$  con  $(0, a, b, c)$  es cero, lo que es imposible, ya que eso significaría que  $\pi$  es la suma de un número racional y un múltiplo racional de  $\pi^2$ . Por un argumento similar  $p$  restringido a cada una de las familias  $\mathcal{F}_2^1, \mathcal{F}_3^1$  y  $\mathcal{F}_4^1$  es también inyectiva.  $\square$

### Matriz de proyección

Sea  $M$  es la matriz de proyección de  $\mathbb{R}^4$  sobre el hiperplano  $P$ , donde  $P$  está dado por la ecuación  $x + \pi y + \pi^2 z + \pi^3 t = 0$ , es decir, el hiperplano que pasa por el origen y es normal a  $N = (1, \pi, \pi^2, \pi^3)$ .

$$M = \begin{pmatrix} \frac{-\pi^3}{\sqrt{a}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \\ \frac{-\pi^2}{\sqrt{ab}} & 0 & \sqrt{\frac{a}{b}} & \frac{-\pi^5}{\sqrt{ab}} \\ \frac{-\pi}{\sqrt{bc}} & \sqrt{\frac{b}{c}} & \frac{-\pi^3}{\sqrt{bc}} & \frac{-\pi^4}{\sqrt{bc}} \end{pmatrix}$$

### 3.4. Proyección de los ejes y planos coordenados de $\mathbb{R}^4$ en $P$ .

A continuación se muestran las ecuaciones de la proyección de los ejes coordenados de  $\mathbb{R}^4$  en  $P$

$$x(1, 0, 0, 0) \rightarrow \left( \frac{-\pi^3}{\sqrt{a}}, \frac{-\pi^2}{\sqrt{ab}}, \frac{-\pi}{\sqrt{bc}} \right)$$

$$y(0, 1, 0, 0) \rightarrow \left( 0, 0, \sqrt{\frac{b}{c}} \right)$$

$$z(0, 0, 1, 0) \rightarrow \left( 0, \sqrt{\frac{a}{b}}, \frac{-\pi^3}{\sqrt{bc}} \right)$$

$$t(0, 0, 0, 1) \rightarrow \left( \frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{-\pi^5}{\sqrt{ab}}, \frac{-\pi^4}{\sqrt{bc}} \right).$$

Ahora, las ecuaciones de la proyección de los planos coordenados de  $\mathbb{R}^4$  en  $\mathbb{R}^3$ .

$$xy \rightarrow x - \pi\sqrt{b}y = 0$$

$$xz \rightarrow \sqrt{b}x - \pi^5y - \pi^2\sqrt{ac}z = 0$$

$$xt \rightarrow \sqrt{a}y - \pi\sqrt{c}z = 0$$

$$yz \rightarrow x = 0$$

$$yt \rightarrow \pi^5x + \sqrt{b}y = 0$$

$$zt \rightarrow \pi^4\sqrt{b}x + \pi^3y + \sqrt{ac}z = 0$$

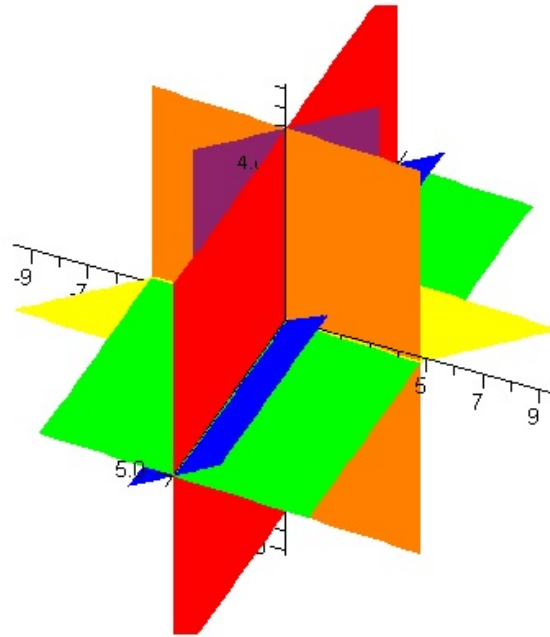


Figura 3.7: *Proyección de los seis planos coordenados en  $\mathbb{R}^4$ .*

En la figura 3.7, el plano rojo representa la proyección del plano  $xy$ , el plano verde la proyección del plano  $xz$ , el plano azul la proyección del plano  $xt$ , el plano naranja la proyección del plano  $yz$ , el plano morado la proyección del plano  $yt$  y el plano amarillo la proyección del plano  $zt$ . Esta asignación de colores se respeta a lo largo del resto del trabajo.

### 3.5. Ecuaciones de los planos paralelos a los planos coordenados.

Ahora mostramos las ecuaciones de la proyección de los planos paralelos a los planos coordenados.

- Ecuaciones de planos paralelos al  $xy$ 
  - Generado por  $xy$  moviendo  $z = k_1$ , donde  $k_1 \in \mathbb{Z}$

$$x - \pi\sqrt{b}y + k_1\pi\sqrt{a} = 0,$$

- Generado por  $xy$  moviendo  $t = k_2$ , donde  $k_2 \in \mathbb{Z}$

$$x - \pi\sqrt{b}y + k_2\sqrt{a} = 0.$$

De donde es claro que estas dos familias de planos nunca se intersectan, ya que para que se intersecten deberíamos tener  $k_1\pi = k_2$  lo cual es imposible, ya que  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ . No hay intersección en la proyección de planos paralelos al  $xy$ .

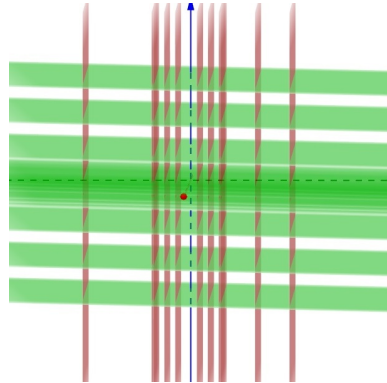


Figura 3.8: Proyección de planos paralelos a  $xy$  y  $xz$ .

- Ecuaciones de planos paralelos al  $xz$ 
  - Generado por  $xz$  moviendo  $y = k_1$ , donde  $k_1 \in \mathbb{Z}$

$$\sqrt{b}x - \pi^5y - \pi^2\sqrt{ac} + k_1\pi^2\sqrt{ab} = 0,$$

- Generado por  $xz$  moviendo  $t = k_2$ , donde  $k_2 \in \mathbb{Z}$

$$\sqrt{b}x - \pi^5 y - \pi^2 \sqrt{ac} + k_2 \sqrt{ab} = 0.$$

De donde, una vez más, es claro que estas dos familias de planos nunca se intersectan. No hay intersección en la proyección de planos paralelos al  $xz$ .

- Ecuaciones de planos paralelos al  $xt$

- Generado por  $xt$  moviendo  $y = k_1$ , donde  $k_1 \in \mathbb{Z}$

$$\sqrt{a}y - \pi\sqrt{c}z + k_1\pi\sqrt{b} = 0,$$

- Generado por  $xt$  moviendo  $z = k_2$ , donde  $k_2 \in \mathbb{Z}$

$$\sqrt{a}y - \pi\sqrt{c}z - k_2\sqrt{b} = 0.$$

De donde, una vez más, es claro que estas dos familias de planos nunca se intersectan. No hay intersección en la proyección de planos paralelos al  $xt$ .

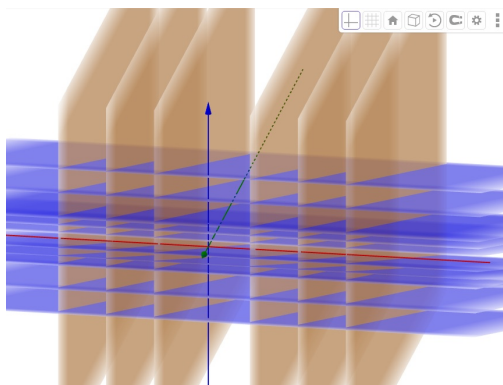


Figura 3.9: Proyección de planos paralelos a  $xt$  y  $yz$ .



- Ecuaciones de planos paralelos al  $yz$ 
  - Generado por  $yz$  moviendo  $x = k_1$ , donde  $k_1 \in \mathbb{Z}$

$$\sqrt{a}x + k_1\pi^3 = 0,$$

- Generado por  $yz$  moviendo  $t = k_2$ , donde  $k_2 \in \mathbb{Z}$

$$\sqrt{a}x - k_2 = 0.$$

De donde es claro que estas dos familias de planos nunca se intersectan. No hay intersección en la proyección de planos paralelos al  $yz$ .

- Ecuaciones de planos paralelos al  $yt$ 
  - Generado por  $yt$  moviendo  $x = k_1$ , donde  $k_1 \in \mathbb{Z}$

$$\pi^5x + \sqrt{b}y + k_1\pi^2\sqrt{a} = 0$$

- Generado por  $yt$  moviendo  $z = k_2$ , donde  $k_2 \in \mathbb{Z}$  es una constante

$$\pi^5x + \sqrt{b}y - k_2\sqrt{a} = 0$$

De donde, una vez más, es claro que estas dos familias de planos nunca se intersectan. No hay intersección en la proyección de planos paralelos al  $yt$ .

- Ecuaciones de planos paralelos al  $zt$ 
  - Generado por  $zt$  moviendo  $x = k_1$ , donde  $k_1 \in \mathbb{Z}$

$$\pi^4\sqrt{b}x + \pi^3y + \sqrt{ac}z + k_1\pi\sqrt{ab} = 0,$$

- Generado por  $zt$  moviendo  $y = k_2$ , donde  $k_2$  es una constante

$$\pi^4\sqrt{b}x + \pi^3y + \sqrt{ac}z - k_2\sqrt{ab} = 0.$$

De donde, una vez más, es claro que estas dos familias de planos nunca se intersectan. No hay intersección en la proyección de planos paralelos al  $zt$ .

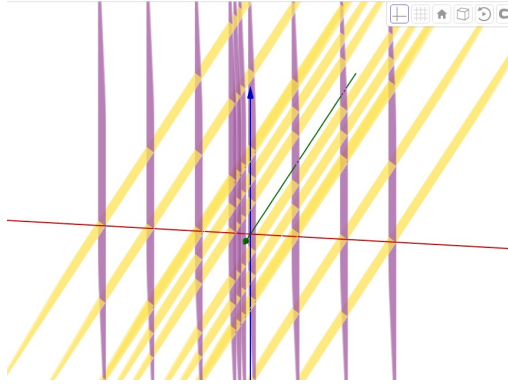


Figura 3.10: *Proyección de planos paralelos a  $yt$  y  $zt$ .*

### 3.6. Algoritmo para calcular el grupo fundamental de 2-nudos cubulados.

En esta sección desarrollaremos un algoritmo para calcular el grupo fundamental de un 2-nudo cúbico  $K$  utilizando su representación discreta, que aplicaremos al método descrito por Fox, “*secciones transversales por hiperplanos*” (ver [9]). A groso modo, este método consiste en colocar a  $K$  en posición general en  $\mathbb{R}^4$  e intersectarlo con la familia de hiperplanos paralelos  $\mathbb{R}_t^3$ ,  $-\infty < t < \infty$ , perpendicular a una dirección apropiadamente elegida. Si  $\mathbb{R}_t^3$  intersecta a  $K$ , esta intersección generalmente será un nudo o un enlace cubulado en  $\mathbb{R}_t^3$ . Notemos que existe un número finito de valores de  $t$  para los cuales  $\mathbb{R}_t^3$  intersecta a  $K$ , por lo que sabemos que nuestro proceso (algoritmo) es finito. Los hiperplanos dividen a  $\mathbb{R}^4$  en secciones, por lo que el grupo del complemento de  $K$  en cada uno de estos cortes es el grupo fundamental del nudo o enlace que se encuentra en la sección representativa del hiperplano (a no ser que el hiperplano no intersecte a  $K$ ). El grupo fundamental de  $K$  en  $\mathbb{R}^4$  se obtiene pegando estos cortes y aplicando el teorema de Van Kampen.

### 3.6. ALGORITMO PARA CALCULAR EL GRUPO FUNDAMENTAL 69

El método de Fox consiste en lo siguiente: Sea  $K$  un 2-nudo contenido en  $\mathbb{S}^4$ , tal que sus puntos críticos ocurren en  $t \in \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\}$  tal que  $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ . Entonces el grupo fundamental  $\Pi(\mathbb{S}^4 - K)$  se puede calcular de la siguiente manera.

- a. Calcular la presentación de Wirtinger  $W$  de una sección de  $K$  que sea un nudo  $L = \mathbb{R}_t^3 \cap K$ .
- b. Avanzar en la dirección negativa de  $t$  en el nudo  $K$  hasta llegar a un punto crítico  $p$  y aplicar uno de los siguientes cambios.
  - a) Si  $p$  es un máximo o  $p$  es un mínimo, no hay ningún cambio.
  - b) Si  $p$  es un punto silla, agregar la relación  $\alpha_1 = \alpha_2$  a  $W$ ; donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son expresiones en  $W$  para caminos alrededor de dos elementos  $a_1$  y  $a_2$  que se unen en un punto silla.
- c. Repetir el paso anterior hasta llegar al último valor de  $t$ .
- d. Avanzar en la dirección positiva de  $t$  en el nudo hasta que llegue a un punto crítico  $p$  y aplicar uno de los siguientes cambios en  $W$ .
  - a) Si  $p$  es un máximo o  $p$  es un mínimo, no hay ningún cambio.
  - b) Si  $p$  es un punto silla agrega una relación como en el paso 2 b).

Consideremos un 2-nudo cubulado  $K$  orientado. Entonces  $K$  está completamente determinado por sus vértices; en particular, está completamente determinado por los baricentros de las caras que lo conforman. A continuación aplicaremos el método de Fox para obtener su grupo fundamental, por lo que iniciaremos con el estudio de sus secciones transversales, mismas que están dadas por coordenadas del tipo  $w = (x, y, z, t)$ , donde  $t$  toma un número finito de valores.

Observemos que los puntos críticos en nudos cubulados se localizan para  $t$  enteros; en cuyo caso, los puntos críticos consisten de uniones de caras que conforman componentes conexas. Sea  $P$  una componente crítica en  $t = s_j$ , cuya frontera consiste de segmentos rectilíneos  $l_P$ , así  $P$  es un máximo si todos estos segmentos son aristas de caras de  $K$  cuyos baricentros se encuentran en el hiperplano  $\mathbb{R}_t^3$  con  $t = s_j - \frac{1}{2}$ .  $P$  es un mínimo si  $l_P$  está conformado por aristas de caras de  $K$  cuyos baricentros se encuentran en  $\mathbb{R}_t^3$  para  $t = s_j + \frac{1}{2}$ , y es punto silla si  $l_P$  está conformado por aristas que son comunes a caras de  $K$  tal que algunos de sus baricentros se encuentran en  $\mathbb{R}_t^3$ , con  $t = s_j - \frac{1}{2}$  y los restantes en  $\mathbb{R}_t^3$ , con  $t = s_j + \frac{1}{2}$ . Sin pérdida de generalidad, podemos considerar nudos cuya última coodenada sea positiva.

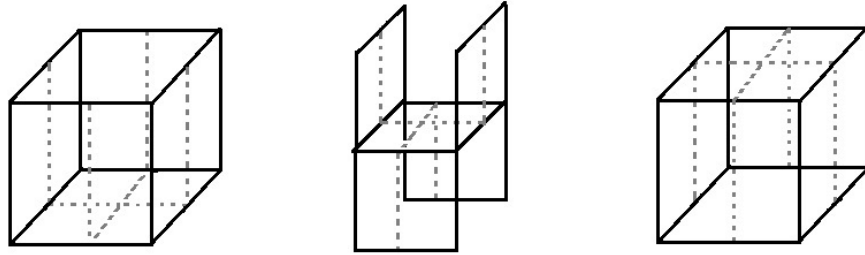


Figura 3.11: Esquema de un punto mínimo, un punto silla y un punto máximo.

**Paso 1.** Obtenemos los baricentros correspondientes a cada sección transversal, así como el rango de valores que puede tomar  $t$ .

**Algoritmo 1:** Coordenadas de las secciones transversales de  $K$

*Require:* Lista de baricentros de  $K$  en  $\mathbb{R}^4$ ,  $L[w_1, w_2, \dots, w_n]$ ,  $w_j = (a_j, b_j, c_j, d_j)$ .

### 3.6. ALGORITMO PARA CALCULAR EL GRUPO FUNDAMENTAL 71

state  $m \rightarrow \min\{d_j\}$ ,  $M \rightarrow \max\{d_j\}$

$m + j \rightarrow t_j$ , donde  $j \in \{\frac{k-1}{2}, |k = 1, 2, \dots, 2(M - m) + 1\}$

Create lists

for all  $j$

$L_j[w_{j_1}, w_{j_2}, \dots, w_{j_{m_j}}]$ , donde  $w_{j_s} = (a_{j_s}, b_{j_s}, c_{j_s}, t_j)$

print Sección transversal en el nivel  $j$ ,  $L_j[w_{j_1}, w_{j_2}, \dots, w_{j_{m_j}}]$

**Paso 2.** Ordenamos los baricentros de cada sección transversal  $L_j$  de tal forma que baricentros consecutivos corresponden a 2-caras consecutivas de  $K$ . De esta forma particionamos el conjunto  $L_j$  en componentes conexas  $C_j$ .

Consideramos  $L_j[w_{j_1}, w_{j_2}, \dots, w_{j_{m_j}}]$ . A cada baricentro  $w_{j_s} = (a_{j_s}, b_{j_s}, c_{j_s}, t_j)$  le asociamos  $W_{j_s}$ : los cuatro vértices de la 2-cara correspondiente.

for all  $s$

if  $a_{j_s} - [a_{j_s}] = \frac{1}{2}$  and  $b_{j_s} - [b_{j_s}] = \frac{1}{2}$  then

$$W_{j_s} = \{(a_{j_s} - \frac{1}{2}, b_{j_s} - \frac{1}{2}, c_{j_s}, t_j), (a_{j_s} + \frac{1}{2}, b_{j_s} - \frac{1}{2}, c_{j_s}, t_j), (a_{j_s} - \frac{1}{2}, b_{j_s} + \frac{1}{2}, c_{j_s}, t_j), (a_{j_s} + \frac{1}{2}, b_{j_s} + \frac{1}{2}, c_{j_s}, t_j)\}$$

if  $a_{j_s} - [a_{j_s}] = \frac{1}{2}$  and  $c_{j_s} - [c_{j_s}] = \frac{1}{2}$  then

$$W_{j_s} = \{(a_{j_s} - \frac{1}{2}, b_{j_s}, c_{j_s} - \frac{1}{2}, t_j), (a_{j_s} + \frac{1}{2}, b_{j_s}, c_{j_s} - \frac{1}{2}, t_j), (a_{j_s} - \frac{1}{2}, b_{j_s}, c_{j_s} + \frac{1}{2}, t_j), (a_{j_s} + \frac{1}{2}, b_{j_s}, c_{j_s} + \frac{1}{2}, t_j)\}$$

if  $a_{j_s} - [a_{j_s}] = \frac{1}{2}$  and  $t_j - [t_j] = \frac{1}{2}$  then

$$W_{j_s} = \{(a_{j_s} - \frac{1}{2}, b_{j_s}, c_{j_s}, t_j - \frac{1}{2}), (a_{j_s} + \frac{1}{2}, b_{j_s}, c_{j_s}, t_j - \frac{1}{2}), (a_{j_s} - \frac{1}{2}, b_{j_s}, c_{j_s}, t_j + \frac{1}{2}), (a_{j_s} + \frac{1}{2}, b_{j_s}, c_{j_s}, t_j + \frac{1}{2})\}$$

if  $b_{j_s} - [b_{j_s}] = \frac{1}{2}$  and  $c_{j_s} - [c_{j_s}] = \frac{1}{2}$  then

$$W_{j_s} = \{(a_{j_s}, b_{j_s} - \frac{1}{2}, c_{j_s} - \frac{1}{2}, t_j), (a_{j_s}, b_{j_s} + \frac{1}{2}, c_{j_s} - \frac{1}{2}, t_j), (a_{j_s}, b_{j_s} - \frac{1}{2}, c_{j_s} + \frac{1}{2}, t_j), (a_{j_s}, b_{j_s} + \frac{1}{2}, c_{j_s} + \frac{1}{2}, t_j)\}$$

$$\frac{1}{2}, t_j), (a_{j_s}, b_{j_s} + \frac{1}{2}, c_{j_s} + \frac{1}{2}, t_j)\}$$

if  $b_{j_s} - [b_{j_s}] = \frac{1}{2}$  and  $t_j - [t_j] = \frac{1}{2}$  then

$$W_{j_s} = \{(a_{j_s}, b_{j_s} - \frac{1}{2}, c_{j_s}, t_j - \frac{1}{2}), (a_{j_s}, b_{j_s} + \frac{1}{2}, c_{j_s}, t_j - \frac{1}{2}), (a_{j_s}, b_{j_s} - \frac{1}{2}, c_{j_s}, t_j + \frac{1}{2}), (a_{j_s}, b_{j_s} + \frac{1}{2}, c_{j_s}, t_j + \frac{1}{2})\}$$

if  $c_{j_s} - [c_{j_s}] = \frac{1}{2}$  and  $t_j - [t_j] = \frac{1}{2}$  then

$$W_{j_s} = \{(a_{j_s}, b_{j_s}, c_{j_s} - \frac{1}{2}, t_j - \frac{1}{2}), (a_{j_s}, b_{j_s}, c_{j_s} + \frac{1}{2}, t_j - \frac{1}{2}), (a_{j_s}, b_{j_s}, c_{j_s} - \frac{1}{2}, t_j + \frac{1}{2}), (a_{j_s}, b_{j_s}, c_{j_s} + \frac{1}{2}, t_j + \frac{1}{2})\}$$

Seleccionamos un primer baricentro y ordenamos los restantes. Notemos que dos baricentros  $w_{j_i}$  y  $w_{j_k}$  son consecutivos si  $W_{j_i} \cap W_{j_k} = 2$

**Algoritmo 2:** Sección transversal de  $K$  con baricentros ordenados.

*Require* Lista de baricentros de la sección en el nivel  $j$ ,  $L_j[w_{j_1}, w_{j_2}, \dots, w_{j_m}]$ ,

donde  $w_{j_s} = (a_{j_s}, b_{j_s}, c_{j_s}, t_j)$

*Require* Lista de los cuatro vértices asociados a la 2-cara  $w_{j_s}$  correspondiente,

$L_{W_j}[W_{j_1}, W_{j_2}, \dots, W_{j_m}]$

state  $w_{j_1} = v_{j_1}$ ,  $L_{j_1} = [v_{j_1}]$

for all  $s$  do

for all  $r$  do

$W_{j_r} \cap W_{j_s}$  until  $\#(W_{j_r} \cap W_{j_s}) = 2$

then  $w_{j_r} = v_{j_{s+1}}$  y agregar  $v_{j_{s+1}}$  a  $L_{j_1}$ ,

if  $L_{j_1}[v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_{m_j}}] - L_j[w_{j_1}, w_{j_2}, \dots, w_{j_{m_j}}] = \emptyset$  then

print Sección transversal en el nivel  $j$ ,  $L_{j_1}[v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_{m_j}}]$ , donde

$v_{j_s} = (a_{j_s}, b_{j_s}, c_{j_s}, t_j)$

else Consider  $L_{j_2} = L_j[w_{j_1}, w_{j_2}, \dots, w_{j_{m_j}}] - L_{j_1}[v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_{m_j}}]$  and repeat

### 3.6. ALGORITMO PARA CALCULAR EL GRUPO FUNDAMENTAL 73

Create lists

$L_{j_1}, L_{j_2}, \dots, L_{j_c}$

state  $j_c \rightarrow C_j$

print Secciones transversales en el nivel  $j$ ,  $L_{j_1}, L_{j_2}, \dots, L_{j_c}$

**Paso 3:** Encontramos el primer  $C_i = 1$  con  $m + i - [m + i] = \frac{1}{2}$  y aplicamos el algoritmo para calcular el grupo fundamental al 1-nudo  $\widetilde{L}_{i_1}[\widetilde{v}_{i_1}, \widetilde{v}_{i_2}, \dots, \widetilde{v}_{i_{m_i}}]$  descrito en [10]. En esta parte debemos considerar los vértices correspondientes a cada baricentro  $\widetilde{v}_{i_s}$ .

**Algoritmo 3:** [10] Cálculo del grupo fundamental para el 1-nudo  $\widetilde{L}_{i_1}[\widetilde{v}_{i_1}, \widetilde{v}_{i_2}, \dots, \widetilde{v}_{i_{m_i}}]$  donde  $\widetilde{v}_{i_s}$  se obtiene de  $v_{i_s} = (a_{s_j}, b_{s_j}, c_{s_j}, t_s)$  suprimiendo la última coordenada, ésto es  $\widetilde{v}_{i_s} = (a_{s_j}, b_{s_j}, c_{s_j})$ .

Buscar  $C_i$  tal que  $C_i = 1$  y  $C_k > 1$ , para  $k < i$  con  $m + i - [m + i] = \frac{1}{2}$ , y  $m + k - [m + k] = \frac{1}{2}$ , donde  $[\bullet]$  denota la función parte entera.

*Proyección y Cruces*

*Require:*  $\widetilde{L}_i[\widetilde{v}_1, \widetilde{v}_2, \dots, \widetilde{v}_{m_i}]$  lista de puntos en  $\mathbb{R}^3$ , donde  $\widetilde{v}_i = (a_i, b_i, c_i)$ .

A cada baricentro  $\widetilde{v}_{i_s}$  le asociamos sus vértices, para obtener  $L_i[v_1, v_2, \dots, v_n]$ .

Lista de puntos en  $\mathbb{R}^2$ ,  $I$  es un conjunto vacío,  $A = \sqrt{\pi^2 + 1}$ ,  
 $B = \sqrt{2\pi^2 + 2\pi^4 + \pi^6 + 1}$

for all  $v_s \in L$

$w_s \leftarrow \left( \frac{a_s \pi}{A}, \frac{a_s \pi^2 + b_s \pi^3 - c_s - c_s \pi^2}{B} \right)$

for all  $w_i, w_j \in L_1$

Crear una matriz, donde  $w_s = (x_s, y_s)$  y  $w_s - w_r = (x_s - x_r, y_s - y_r)$

$$M = \begin{bmatrix} (w_{i+1} - w_j) \\ (w_{j+1} - w_j) \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} (w_i - w_j) \\ (w_{j+1} - w_j) \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} (w_j - w_i) \\ (w_{i+1} - w_i) \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} (w_{j+1} - w_i) \\ (w_{i+1} - w_i) \end{bmatrix}$$

if  $(\det(M) * \det(N) < 0)$  y  $(\det(O) * \det(P) < 0)$

if  $(i, j) \notin I$  y  $(j, i) \notin I$

add  $(i, j)$  to  $I$ .

*Criterio para cruces*

*Require:*  $I[(i_1, j_1), (i_2, j_2) \dots (i_k, j_k)]$  puntos de intersección,  $L[v_1, v_2, \dots, v_n]$  lista de puntos en  $\mathbb{R}^3$ , donde  $v_i = (a_i, b_i, c_i)$

for all  $(i, j) \in I$

donde  $u_s = v_{s+1} - v_s = (x_s, y_s, z_s)$

$u_i \leftarrow v_{i+1} - v_i$

$u_j \leftarrow v_{j+1} - v_j$

if  $x_i = x_j$

if  $a_i < a_j$

print  $\overline{w_i w_i + 1}$  cruza por debajo

else

print  $\overline{w_j w_j + 1}$  cruza por debajo

if  $y_i = y_j$

if  $b_i < b_j$

print  $\overline{w_i w_i + 1}$  cruza por debajo

else

print  $\overline{w_j w_j + 1}$  cruza por debajo



### 3.6. ALGORITMO PARA CALCULAR EL GRUPO FUNDAMENTAL 75

```

if  $z_i = z_j$ 
if  $c_i < c_j$ 
print  $\overline{w_i w_i + 1}$  cruza por debajo
else
print  $\overline{w_j w_j + 1}$  cruza por debajo

```

*Grupo Fundamental*

*Require:*  $L[(i_1, j_1), (i_2, j_2) \dots (i_k, j_k)]$  puntos de intersección

Crear listas

$$\gamma_1 = (i_1 + 1, i_1 + 2, \dots, i_2)$$

$$\gamma_2 = (i_2 + 1, i_2 + 2, \dots, i_3)$$

...

$$\gamma_k = (i_k + 1, i_k + 2, \dots, i_1)$$

for all  $i_s, j_s \in L$

Buscar  $r$  y  $l$  tal que  $j_s \in \gamma_r$  y  $i_s \in \gamma_l$ .

Crear una matriz, donde  $w_{i_s} = (x, y)$  y  $w_{i_s+1} - w_{i_s} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$

$$A = \begin{bmatrix} (w_{i_s+1} - w_{i_s}) \\ (w_{j_s+1} - w_{j_s}) \end{bmatrix}$$

if  $\det(A) < 0$

print  $\alpha_r \alpha_l = \alpha_{l+1} \alpha_r$

else

print  $\alpha_l \alpha_r = \alpha_r \alpha_{l+1}$

**Paso 4:** A continuación determinaremos los puntos silla. Notemos que dichos puntos ocurren cuando la última coordenada  $t$  es entera, en cuyo caso la sección  $\mathbb{R}_t \cup K$  posee caras, el número de componentes  $C_{t-\frac{1}{2}}$  es distinto al

número  $C_{t+\frac{1}{2}}$ .

**Algoritmo 4:** Encontrar los puntos silla de  $K$ .

*Require:* Lista de baricentros de  $K$  en  $\mathbb{R}^4$ ,  $L[w_1, w_2, \dots, w_n]$ ,  $w_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$  y  $d_i - [d_i] = 0$ , donde  $[•]$  denota parte entera.

*state*  $m \rightarrow \min\{d_j\}$ ,  $M \rightarrow \max\{d_j\}$

Create lists

*for all*  $t_j$  tal que  $m \leq t_j \leq M$  con  $t_j$  entero

$L_j[w_{j_1}, w_{j_2}, \dots, w_{j_{m_j}}]$ , donde  $w_{j_s} = (a_{j_s}, b_{j_s}, c_{j_s}, t_j)$

*print* Sección transversal en el nivel  $j$ ,  $L_j[w_{j_1}, w_{j_2}, \dots, w_{j_{m_j}}]$

*for all*  $j \neq i$  entero *do*

*if*  $C_{j-\frac{1}{2}} - C_{j+\frac{1}{2}} \neq 0$  then  $K$  tiene posiblemente un punto silla en el nivel  $j$

*Determinar el posible punto crítico  $P_j$  de  $K$  en el nivel  $j$ .*

Consideramos  $L_j[w_{j_1}, w_{j_2}, \dots, w_{j_{m_j}}]$ . A cada baricentro  $w_{j_s} = (a_{j_s}, b_{j_s}, c_{j_s}, t_j)$  le asociamos los cuatro vértices de la 2-cara correspondiente.

*if*  $a_{j_s} - [a_{j_s}] = \frac{1}{2}$  and  $b_{j_s} - [b_{j_s}] = \frac{1}{2}$  *then*

$W_{j_s} = \{(a_{j_s} - \frac{1}{2}, b_{j_s} - \frac{1}{2}, c_{j_s}, t_j), (a_{j_s} + \frac{1}{2}, b_{j_s} - \frac{1}{2}, c_{j_s}, t_j), (a_{j_s} - \frac{1}{2}, b_{j_s} + \frac{1}{2}, c_{j_s}, t_j), (a_{j_s} + \frac{1}{2}, b_{j_s} + \frac{1}{2}, c_{j_s}, t_j)\}$

*if*  $a_{j_s} - [a_{j_s}] = \frac{1}{2}$  and  $c_{j_s} - [c_{j_s}] = \frac{1}{2}$  *then*

$W_{j_s} = \{(a_{j_s} - \frac{1}{2}, b_{j_s}, c_{j_s} - \frac{1}{2}, t_j), (a_{j_s} + \frac{1}{2}, b_{j_s}, c_{j_s} - \frac{1}{2}, t_j), (a_{j_s} - \frac{1}{2}, b_{j_s}, c_{j_s} + \frac{1}{2}, t_j), (a_{j_s} + \frac{1}{2}, b_{j_s}, c_{j_s} + \frac{1}{2}, t_j)\}$

*if*  $a_{j_s} - [a_{j_s}] = \frac{1}{2}$  and  $t_j - [t_j] = \frac{1}{2}$  *then*

### 3.6. ALGORITMO PARA CALCULAR EL GRUPO FUNDAMENTAL 77

$$W_{j_s} = \{(a_{j_s} - \frac{1}{2}, b_{j_s}, c_{j_s}, t_j - \frac{1}{2}), (a_{j_s} + \frac{1}{2}, b_{j_s}, c_{j_s}, t_j - \frac{1}{2}), (a_{j_s} - \frac{1}{2}, b_{j_s}, c_{j_s}, t_j + \frac{1}{2}), (a_{j_s} + \frac{1}{2}, b_{j_s}, c_{j_s}, t_j + \frac{1}{2})\}$$

if  $b_{j_s} - [b_{j_s}] = \frac{1}{2}$  and  $c_{j_s} - [c_{j_s}] = \frac{1}{2}$  then

$$W_{j_s} = \{(a_{j_s}, b_{j_s} - \frac{1}{2}, c_{j_s} - \frac{1}{2}, t_j), (a_{j_s}, b_{j_s} + \frac{1}{2}, c_{j_s} - \frac{1}{2}, t_j), (a_{j_s}, b_{j_s} - \frac{1}{2}, c_{j_s} + \frac{1}{2}, t_j), (a_{j_s}, b_{j_s} + \frac{1}{2}, c_{j_s} + \frac{1}{2}, t_j)\}$$

if  $b_{j_s} - [b_{j_s}] = \frac{1}{2}$  and  $t_j - [t_j] = \frac{1}{2}$  then

$$W_{j_s} = \{(a_{j_s}, b_{j_s} - \frac{1}{2}, c_{j_s}, t_j - \frac{1}{2}), (a_{j_s}, b_{j_s} + \frac{1}{2}, c_{j_s}, t_j - \frac{1}{2}), (a_{j_s}, b_{j_s} - \frac{1}{2}, c_{j_s}, t_j + \frac{1}{2}), (a_{j_s}, b_{j_s} + \frac{1}{2}, c_{j_s}, t_j + \frac{1}{2})\}$$

if  $c_{j_s} - [c_{j_s}] = \frac{1}{2}$  and  $t_j - [t_j] = \frac{1}{2}$  then

$$W_{j_s} = \{(a_{j_s}, b_{j_s}, c_{j_s} - \frac{1}{2}, t_j - \frac{1}{2}), (a_{j_s}, b_{j_s}, c_{j_s} + \frac{1}{2}, t_j - \frac{1}{2}), (a_{j_s}, b_{j_s}, c_{j_s} - \frac{1}{2}, t_j + \frac{1}{2}), (a_{j_s}, b_{j_s}, c_{j_s} + \frac{1}{2}, t_j + \frac{1}{2})\}$$

state  $P_j = W_{j_1}$

for all  $s$  do

if  $\#(P_j \cap W_{j_s}) = 2$  then  $P_j \cup W_{j_s} \rightarrow P_j$

Verificar que  $P_j$  sea un punto silla

state  $j - \frac{1}{2} \rightarrow j^-$

Require  $L_{j^-} [w_{j^-_1}, w_{j^-_2}, \dots, w_{j^-_{m_{j^-}}}]$ . A cada baricentro  $w_{j^-_s} = (a_{j^-_s}, b_{j^-_s}, c_{j^-_s}, t_{j^-})$  le asociamos los dos vértices de la 2-cara correspondiente cuya última coordenada es  $t_j$ .

if  $a_{j^-_s} - [a_{j^-_s}] = \frac{1}{2}$  then

$$W_{j^-_s} = \{(a_{j^-_s} - \frac{1}{2}, b_{j^-_s}, c_{j^-_s}, t_j), (a_{j^-_s} + \frac{1}{2}, b_{j^-_s}, c_{j^-_s}, t_j)\}$$

if  $b_{j^-_s} - [b_{j^-_s}] = \frac{1}{2}$  then

$$W_{j^-_s} = \{(a_{j^-_s}, b_{j^-_s} - \frac{1}{2}, c_{j^-_s}, t_j), (a_{j^-_s}, b_{j^+_s} + \frac{1}{2}, c_{j^-_s}, t_j)\}$$

if  $c_{j^-_s} - [c_{j^-_s}] = \frac{1}{2}$  then

$$W_{j^-_s} = \{(a_{j^-_s}, b_{j^-_s}, c_{j^-_s} - \frac{1}{2}, t_j), (a_{j^-_s}, b_{j^-_s}, c_{j^-_s} + \frac{1}{2}, t_j)\}$$

for all  $s$  do

$$\text{state } B_{J^-} = \cup W_{j^-_s}$$

$$\text{state } j + \frac{1}{2} \rightarrow j^+$$

Require  $L_{j^+}[w_{j^+_1}, w_{j^+_2}, \dots, w_{j^+_{m_{j^+}}}]$ . A cada baricentro  $w_{j^+_s} = (a_{j^+_s}, b_{j^+_s}, c_{j^+_s}, t_{j^+})$  le asociamos los dos vértices de la 2-cara correspondiente cuya última coordenada es  $t_j$ .

if  $a_{j^+_s} - [a_{j^+_s}] = \frac{1}{2}$  then

$$W_{j^+_s} = \{(a_{j^+_s} - \frac{1}{2}, b_{j^+_s}, c_{j^+_s}, t_j), (a_{j^+_s} + \frac{1}{2}, b_{j^+_s}, c_{j^+_s}, t_j)\}$$

if  $b_{j^+_s} - [b_{j^+_s}] = \frac{1}{2}$  then

$$W_{j^+_s} = \{(a_{j^+_s}, b_{j^+_s} - \frac{1}{2}, c_{j^+_s}, t_j), (a_{j^+_s}, b_{j^+_s} + \frac{1}{2}, c_{j^+_s}, t_j)\}$$

if  $c_{j^+_s} - [c_{j^+_s}] = \frac{1}{2}$  then

$$W_{j^+_s} = \{(a_{j^+_s}, b_{j^+_s}, c_{j^+_s} - \frac{1}{2}, t_j), (a_{j^+_s}, b_{j^+_s}, c_{j^+_s} + \frac{1}{2}, t_j)\}$$

for all  $s$  do

$$\text{state } B_{J^+} = \cup W_{j^+_s}$$

if  $P_j \cap B_{J^-} \neq \emptyset$  and  $P_j \cap B_{J^+} \neq \emptyset$  print  $P_j$  es un punto silla.

**Paso 5:** Obtener las nuevas relaciones entre los generados del grupo funda-

### 3.6. ALGORITMO PARA CALCULAR EL GRUPO FUNDAMENTAL 79

mental obtenido en el paso 3, que provienen de los caminos que se unen en cada punto silla  $P_j$ ; y con ello, obtener el grupo fundamental del nudo  $K$ .

**Algoritmo 5:** Encontrar las relaciones adicionales que corresponden a cada punto silla

*Require:* Lista de baricentros de  $K$  en  $\mathbb{R}^4$ ,  $L[w_1, w_2, \dots, w_n]$ ,  $w_j = (a_j, b_j, c_j, d_j)$ .

*state*  $m \rightarrow \min\{d_j\}$ ,  $M \rightarrow \max\{d_j\}$ .

$m + j \rightarrow t_j$ , donde  $j \in \{\frac{k+1}{2}, |k = 0, 1, \dots, 2(M - m) - 1\}$

Create lists

*for all*  $j$

$L_j[w_{j_1}, w_{j_2}, \dots, w_{j_{m_j}}]$ , donde  $w_{j_s} = (a_{j_s}, b_{j_s}, c_{j_s}, t_j)$

*state*  $w_{j_s} \longleftrightarrow W_{j_s}$  donde  $W_{j_s}$  es el conjunto de vértices correspondientes a 2-cara respectiva.

*start*  $C_i$

*search*  $j$  tal que  $j < i$  y  $P_j \subset K \cap \mathbb{R}_{t_j}^3$  es un punto silla

*for all*  $j \leq r \leq i$

$N_j = P_j$

*for all*  $1 \leq s \leq m_r$

*if*  $\#(W_{j_s} \cap N_{r-1}) = 2$  *then*  $N_r \cup W_{j_s} \rightarrow N_r$

*Determinar los generadores que corresponden a los dos caminos que se intersectan en  $P_j$ .*

*state* A cada camino  $\gamma_s$  de la sección Grupo Fundamental le asociamos los vértices de las 2-caras correspondientes de  $K$  y lo denotamos por  $\Gamma_s$

search  $r$  y  $l$  tal que  $\Gamma_r \cap N_i \neq \emptyset$  y  $\Gamma_l \cap N_i \neq \emptyset$

print  $\alpha_r = \alpha_l$ .

repeat para  $j$  tal que  $j > i$

**Ejemplo.-** Consideremos una vez más a  $T^2$  el 2-nudo cúbico isotópico al spin del nudo trébol. Los hiperplanos paralelos  $\mathbb{R}_t^3$  son de la forma  $\{(x, y, z, t) | t \in (-3, 3)\}$ . Notemos que es suficiente trabajar con  $t \in \mathbb{Z}$  ya que al tener un 2-nudo cubulado, no puede haber ningún cambio en el diagrama en algún punto  $p \notin \mathbb{Z}$ . Utilizaremos el algoritmo anterior para calcular su grupo fundamental. La sección central ( $t = 0$ ) es el nudo cubulado que se muestra en la figura 3.12.

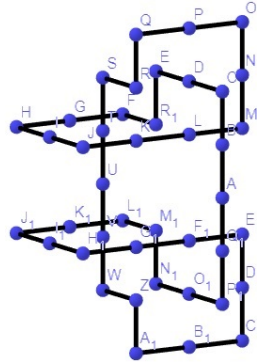


Figura 3.12: Sección central del spin del nudo trébol

Al calcular su grupo fundamental obtenemos las siguientes relaciones y generadores ( $a, b, f : aba = bab, afa = faf$ ). Este será nuestro grupo fundamental base. Después mientras vamos moviendonos en la dirección negativa encontramos un punto silla en los cuales los arcos  $b$  y  $f$  se cruzan. Esta identidad simplifica nuestro grupo fundamental a sólo dos generadores y una relación:

### 3.6. ALGORITMO PARA CALCULAR EL GRUPO FUNDAMENTAL 81

$(a, b : aba = bab)$ . Mientras continuamos en la dirección negativa, las dos componentes desaparecen. Este mínimo no tiene efecto en el grupo fundamental, de acuerdo con el algoritmo.

Ahora nos movemos en la dirección positiva desde  $t = 0$ , de nuevo nos encontramos con un punto silla en donde los arcos  $b$  y  $f$  se cruzan. La relación  $b = f$  ya se había agregado a nuestra presentación; nuestro grupo fundamental no cambiará. Finalmente, las dos componentes desaparecen en la parte superior de nuestro nudo. Cuando avanzamos en la dirección positiva en la dirección  $t$ , el máximo no tiene efecto en el grupo fundamental. Por lo que el grupo fundamental del spin del nudo trébol es

$$(a, b : aba = bab)$$

Este grupo es el mismo que el grupo fundamental del nudo trébol en dimensión 3.





# Apéndice

**Ejemplo de un 2-nudo en su presentación discreta en baricentros.**

La siguiente lista de baricentros son los necesarios para poder reproducir un diagrama del spin del nudo trébol.

	Cuadrado	Baricentro
1	$(0,0,0,0),(0,0,1,0),(0,0,1,1),(0,0,0,1)$	$(0,0,1/2,1/2)$
2	$(0,0,1,0),(0,0,2,0),(0,0,2,1),(0,0,1,1)$	$(0,0,3/2,1/2)$
3	$(0,0,1,1),(0,0,2,1),(0,0,2,2),(0,0,1,2)$	$(0,0,3/2,3/2)$
4	$(0,0,1,2),(0,0,0,2),(0,0,0,1),(0,0,1,1)$	$(0,0,1/2,3/2)$
5	$(0,0,2,0),(0,-1,2,0),(0,-1,2,1),(0,0,2,1)$	$(0,-1/2,2,1/2)$
6	$(0,0,2,1),(0,-1,2,1),(0,-1,2,2),(0,0,2,2)$	$(0,-1/2,2,3/2)$
7	$(0,-1,2,2),(0,-1,1,2),(0,0,1,2),(0,0,2,2)$	$(0,-1/2,3/2,2)$
8	$(0,-1,1,2),(0,-1,0,2),(0,0,0,2),(0,0,1,2)$	$(0,-1/2,1/2,2)$
9	$(0,-1,2,0),(0,-2,2,0),(0,-2,2,1),(0,-1,2,1)$	$(0,-3/2,2,1/2)$
10	$(0,-1,2,1),(0,-2,2,1),(0,-2,2,2),(0,-1,2,2)$	$(0,-3/2,2,3/2)$
11	$(0,-2,2,2),(0,-2,1,2),(0,-1,1,2),(0,-1,2,2)$	$(0,-3/2,3/2,2)$
12	$(0,-2,1,2),(0,-2,0,2),(0,-1,0,2),(0,-1,1,2)$	$(0,-3/2,1/2,2)$
13	$(0,-2,2,0),(0,-2,1,0),(0,-2,1,1),(0,-2,2,1)$	$(0,-2,3/2,1/2)$
14	$(0,-2,2,1),(0,-2,1,1),(0,-2,1,2),(0,-2,2,2)$	$(0,-2,3/2,3/2)$

	Cuadrado	Baricentro
15	$(0,-2,1,1),(0,-2,0,1),(0,-2,0,2),(0,-2,1,2)$	$(0,-2,1/2,3/2)$
16	$(0,-2,1,0),(0,-3,1,0),(0,-3,1,1),(0,-2,1,1)$	$(0,-5/2,1,1/2)$
17	$(0,-3,1,1),(0,-3,0,1),(0,-2,0,1),(0,-2,1,1)$	$(0,-5/2,1/2,1)$
18	$(0,-3,1,0),(1,-3,1,0),(1,-3,1,1),(0,-3,1,1)$	$(1/2,-3,1,1/2)$
19	$(1,-3,1,1),(1,-3,0,1),(0,-3,0,1),(0,-3,1,1)$	$(1/2,-3,1/2,1)$
20	$(1,-3,1,0),(2,-3,1,0),(2,-3,1,1),(1,-3,1,1)$	$(3/2,-3,1,1/2)$
21	$(2,-3,1,1),(2,-3,0,1),(1,-3,0,1),(1,-3,1,1)$	$(1/2,-3,1/2,1)$
22	$(2,-3,1,0),(2,-2,1,0),(2,-2,1,1),(2,-3,1,1)$	$(2,-5/2,1,1/2)$
23	$(2,-2,1,1),(2,-2,0,1),(2,-3,0,1),(2,-3,1,1)$	$(2,-5/2,1/2,1)$
24	$(2,-2,1,0),(2,-1,1,0),(2,-1,1,1),(2,-2,1,1)$	$(2,-3/2,1,1/2)$
25	$(2,-1,1,1),(2,-1,0,1),(2,-2,0,1),(2,-2,1,1)$	$(2,-3/2,1/2,1)$
26	$(2,-1,1,0),(1,-1,1,0),(1,-1,1,1),(2,-1,1,1)$	$(3/2,-1,1,1/2)$
27	$(1,-1,1,1),(1,-1,0,1),(2,-1,0,1),(2,-1,1,1)$	$(3/2,-1,1/2,1)$
28	$(1,-1,1,0),(0,-1,1,0),(0,-1,1,1),(1,-1,1,1)$	$(1/2,-1,1,1/2)$
29	$(0,-1,1,1),(0,-1,0,1),(1,-1,0,1),(1,-1,1,1)$	$(1/2,-1,1/2,1)$
30	$(0,-1,1,0),(-1,-1,1,0),(-1,-1,1,1),(0,-1,1,1)$	$(-1/2,-1,1,1/2)$
31	$(-1,-1,1,1),(-1,-1,0,1),(0,-1,0,1),(0,-1,1,1)$	$(-1/2,-1,1/2,1)$
32	$(-1,-1,1,0),(-1,-1,2,0),(-1,-1,2,1),(-1,-1,1,1)$	$(-1,-1,3/2,1/2)$
33	$(-1,-1,2,1),(-1,-1,2,2),(-1,-1,1,2),(-1,-1,1,1)$	$(-1,-1,3/2,3/2)$
34	$(-1,-1,1,2),(-1,-1,0,2),(-1,-1,0,1),(-1,-1,1,1)$	$(-1,-1,1/2,3/2)$
35	$(-1,-1,2,0),(-1,-1,3,0),(-1,-1,3,1),(-1,-1,2,1)$	$(-1,-1,5/2,1/2)$
36	$(-1,-1,2,1),(-1,-1,3,1),(-1,-1,3,2),(-1,-1,2,2)$	$(-1,-1,5/2,3/2)$
37	$(-1,-1,3,2),(-1,-1,3,3),(-1,-1,2,3),(-1,-1,2,2)$	$(-1,-1,5/2,5/2)$
38	$(-1,-1,2,3),(-1,-1,1,3),(-1,-1,1,2),(-1,-1,2,2)$	$(-1,-1,3/2,5/2)$
39	$(-1,-1,1,3),(-1,-1,0,3),(-1,-1,0,2),(-1,-1,1,2)$	$(-1,-1,1/2,5/2)$
40	$(-1,-1,3,0),(0,-1,3,0),(0,-1,3,1),(-1,-1,3,1)$	$(-1/2,-1,3,1/2)$

	Cuadrado	Baricentro
41	$(-1,-1,3,1),(0,-1,3,1),(0,-1,3,2),(-1,-1,3,2)$	$(-1/2,-1,3,3/2)$
42	$(-1,-1,3,2),(0,-1,3,2),(0,-1,3,3),(-1,-1,3,3)$	$(-1/2,-1,3,5/2)$
43	$(0,-1,3,3),(0,-1,2,3),(-1,-1,2,3),(-1,-1,3,3)$	$(-1/2,-1,5/2,3)$
44	$(0,-1,2,3),(0,-1,1,3),(-1,-1,1,3),(-1,-1,2,3)$	$(-1/2,-1,3/2,3)$
45	$(0,-1,1,3),(0,-1,0,3),(-1,-1,0,3),(-1,-1,1,3)$	$(-1/2,-1,1/2,3)$
46	$(0,-1,3,0),(1,-1,3,0),(1,-1,3,1),(0,-1,3,1)$	$(1/2,-1,3,1/2)$
47	$(0,-1,3,1),(1,-1,3,1),(1,-1,3,2),(0,-1,3,2)$	$(1/2,-1,3,3/2)$
48	$(0,-1,3,2),(1,-1,3,2),(1,-1,3,3),(0,-1,3,3)$	$(1/2,-1,3,5/2)$
49	$(1,-1,3,3),(1,-1,2,3),(0,-1,2,3),(0,-1,3,3)$	$(1/2,-1,5/2,3)$
50	$(1,-1,2,3),(1,-1,1,3),(0,-1,1,3),(0,-1,2,3)$	$(1/2,-1,3/2,3)$
51	$(1,-1,1,3),(1,-1,0,3),(0,-1,0,3),(0,-1,1,3)$	$(1/2,-1,1/2,3)$
52	$(1,-1,3,0),(1,-1,2,0),(1,-1,2,1),(1,-1,3,1)$	$(1,-1,5/2,1/2)$
53	$(1,-1,3,1),(1,-1,2,1),(1,-1,2,2),(1,-1,3,2)$	$(1,-1,5/2,3/2)$
54	$(1,-1,3,2),(1,-1,2,2),(1,-1,2,3),(1,-1,3,3)$	$(1,-1,5/2,5/2)$
55	$(1,-1,2,2),(1,-1,1,2),(1,-1,1,3),(1,-1,2,3)$	$(1,-1,3/2,5/2)$
56	$(1,-1,1,2),(1,-1,0,2),(1,-1,0,3),(1,-1,1,3)$	$(1,-1,1/2,5/2)$
57	$(1,-1,2,0),(1,-2,2,0),(1,-2,2,1),(1,-1,2,1)$	$(1,-3/2,2,1/2)$
58	$(1,-1,2,1),(1,-2,2,1),(1,-2,2,2),(1,-1,2,2)$	$(1,-3/2,2,3/2)$
59	$(1,-2,2,2),(1,-2,1,2),(1,-1,1,2),(1,-1,2,2)$	$(1,-3/2,3/2,2)$
60	$(1,-2,1,2),(1,-2,0,2),(1,-1,0,2),(1,-1,1,2)$	$(1,-3/2,1/2,2)$
61	$(1,-2,2,0),(1,-2,1,0),(1,-2,1,1),(1,-2,2,1)$	$(1,-2,3/2,1/2)$
62	$(1,-2,2,1),(1,-2,1,1),(1,-2,1,2),(1,-2,2,2)$	$(1,-2,3/2,3/2)$
63	$(1,-2,1,1),(1,-2,0,1),(1,-2,0,2),(1,-2,1,2)$	$(1,-2,1/2,3/2)$
64	$(1,-2,1,0),(1,-2,0,0),(1,-2,0,1),(1,-2,1,1)$	$(1,-2,1/2,1/2)$
65	$(0,0,0,0),(0,0,1,0),(0,0,1,-1),(0,0,0,-1)$	$(0,0,1/2,-1/2)$
66	$(0,0,1,-1),(0,0,2,-1),(0,0,2,0),(0,0,1,0)$	$(0,0,3/2,-1/2)$

	Cuadrado	Baricentro
67	$(0,0,1,-1),(0,0,1,-2),(0,0,2,-2),(0,0,2,-1)$	$(0,0,3/2,-3/2)$
68	$(0,0,1,-1),(0,0,0,-1),(0,0,0,-2),(0,0,1,-2)$	$(0,0,1/2,-3/2)$
69	$(0,0,2,-1),(0,-1,2,-1),(0,-1,2,0),(0,0,2,0)$	$(0,-1/2,2,-1/2)$
70	$(0,0,2,-2),(0,-1,2,-2),(0,-1,2,-1),(0,0,2,-1)$	$(0,-1/2,2,-3/2)$
71	$(0,0,2,-2),(0,0,1,-2),(0,-1,1,-2),(0,-1,2,-2)$	$(0,-1/2,3/2,-2)$
72	$(0,0,1,-2),(0,0,0,-2),(0,-1,0,-2),(0,-1,1,-2)$	$(0,-1/2,1/2,-2)$
73	$(0,-1,2,-1),(0,-2,2,-1),(0,-2,2,0),(0,-1,2,0)$	$(0,-3/2,2,-1/2)$
74	$(0,-1,2,-2),(0,-2,2,-2),(0,-2,2,-1),(0,-1,2,-1)$	$(0,-3/2,2,-3/2)$
75	$(0,-1,2,-2),(0,-1,1,-2),(0,-2,1,-2),(0,-2,2,-2)$	$(0,-3/2,3/2,-2)$
76	$(0,-1,1,-2),(0,-1,0,-2),(0,-2,0,-2),(0,-2,1,-2)$	$(0,-3/2,1/2,-2)$
77	$(0,-2,2,-1),(0,-2,1,-1),(0,-2,1,0),(0,-2,2,0)$	$(0,-2,3/2,-1/2)$
78	$(0,-2,2,-2),(0,-2,1,-2),(0,-2,1,-1),(0,-2,2,-1)$	$(0,-2,3/2,-3/2)$
79	$(0,-2,1,-2),(0,-2,0,-2),(0,-2,0,-1),(0,-2,1,-1)$	$(0,-2,1/2,-3/2)$
80	$(0,-2,1,-1),(0,-3,1,-1),(0,-3,1,0),(0,-2,1,0)$	$(0,-5/2,1,-1/2)$
81	$(0,-2,1,-1),(0,-2,0,-1),(0,-3,0,-1),(0,-3,1,-1)$	$(0,-5/2,1/2,-1)$
82	$(0,-3,1,-1),(1,-3,1,-1),(1,-3,1,0),(0,-3,1,0)$	$(1/2,-3,1,-1/2)$
83	$(0,-3,1,-1),(0,-3,0,-1),(1,-3,0,-1),(1,-3,1,-1)$	$(1/2,-3,1/2,-1)$
84	$(1,-3,1,-1),(2,-3,1,-1),(2,-3,1,0),(1,-3,1,0)$	$(3/2,-3,1,-1/2)$
85	$(1,-3,1,-1),(1,-3,0,-1),(2,-3,0,-1),(2,-3,1,-1)$	$(3/2,-3,1/2,-1)$
86	$(2,-3,1,-1),(2,-2,1,-1),(2,-2,1,0),(2,-3,1,0)$	$(2,-5/2,1,-1/2)$
87	$(2,-3,1,-1),(2,-3,0,-1),(2,-2,0,-1),(2,-2,1,-1)$	$(2,-5/2,1/2,-1)$
88	$(2,-2,1,-1),(2,-1,1,-1),(2,-1,1,0),(2,-2,1,0)$	$(2,-3/2,1,-1/2)$
89	$(2,-2,1,-1),(2,-2,0,-1),(2,-1,0,-1),(2,-1,1,-1)$	$(2,-3/2,1/2,-1)$
90	$(2,-1,1,-1),(1,-1,1,-1),(1,-1,1,0),(2,-1,1,0)$	$(1/2,-1,1,-1/2)$
91	$(2,-1,1,-1),(2,-1,0,-1),(1,-1,0,-1),(1,-1,1,-1)$	$(3/2,-1,1/2,-1)$
92	$(1,-1,1,-1),(0,-1,1,-1),(0,-1,1,0),(1,-1,1,0)$	$(1/2,-1,1,-1/2)$

	Cuadrado	Baricentro
93	$(1,-1,1,-1),(1,-1,0,-1),(0,-1,0,-1),(0,-1,1,-1)$	$(1/2,-1,1/2,-1)$
94	$(0,-1,1,-1),(-1,-1,1,-1),(-1,-1,1,0),(0,-1,1,0)$	$(-1/2,-1,1,-1/2)$
95	$(0,-1,1,-1),(0,-1,0,-1),(-1,-1,0,-1),(-1,-1,1,-1)$	$(-1/2,-1,1/2,-1)$
96	$(-1,-1,1,-1),(-1,-1,2,-1),(-1,-1,2,0),(-1,-1,1,0)$	$(-1,-1,3/2,-1/2)$
97	$(-1,-1,1,-1),(-1,-1,1,-2),(-1,-1,2,-2),(-1,-1,2,-1)$	$(-1,-1,3/2,-3/2)$
98	$(-1,-1,1,-1),(-1,-1,0,-1),(-1,-1,0,-2),(-1,-1,1,-2)$	$(-1,-1,1/2,-3/2)$
99	$(-1,-1,2,-1),(-1,-1,3,-1),(-1,-1,3,0),(-1,-1,2,0)$	$(-1,-1,5/2,-1/2)$
100	$(-1,-1,2,-2),(-1,-1,3,-2),(-1,-1,3,-1),(-1,-1,2,-1)$	$(-1,-1,5/2,-3/2)$
101	$(-1,-1,2,-2),(-1,-1,2,-3),(-1,-1,3,-3),(-1,-1,3,-2)$	$(-1,-1,5/2,-5/2)$
102	$(-1,-1,2,-2),(-1,-1,1,-2),(-1,-1,1,-3),(-1,-1,2,-3)$	$(-1,-1,3/2,-5/2)$
103	$(-1,-1,1,-2),(-1,-1,0,-2),(-1,-1,0,-3),(-1,-1,1,-3)$	$(-1,-1,1/2,-5/2)$
104	$(-1,-1,3,-1),(0,-1,3,-1),(0,-1,3,0),(-1,-1,3,0)$	$(-1/2,-1,3,-1/2)$
105	$(-1,-1,3,-2),(0,-1,3,-2),(0,-1,3,-1),(-1,-1,3,-1)$	$(-1/2,-1,3,-3/2)$
106	$(-1,-1,3,-3),(0,-1,3,-3),(0,-1,3,-2),(-1,-1,3,-2)$	$(-1/2,-1,3,-5/2)$
107	$(-1,-1,3,-3),(-1,-1,2,-3),(0,-1,2,-3),(0,-1,3,-3)$	$(-1/2,-1,5/2,-3)$
108	$(-1,-1,2,-3),(-1,-1,1,-3),(0,-1,1,-3),(0,-1,2,-3)$	$(-1/2,-1,3/2,-3)$
109	$(-1,-1,1,-3),(-1,-1,0,-3),(0,-1,0,-3),(0,-1,1,-3)$	$(-1/2,-1,1/2,-3)$
110	$(0,-1,3,-1),(1,-1,3,-1),(1,-1,3,0),(0,-1,3,0)$	$(1/2,-1,3,-1/2)$
111	$(0,-1,3,-2),(1,-1,3,-2),(1,-1,3,-1),(0,-1,3,-1)$	$(1/2,-1,3,-3/2)$
112	$(0,-1,3,-3),(1,-1,3,-3),(1,-1,3,-2),(0,-1,3,-2)$	$(1/2,-1,3,-5/2)$
113	$(0,-1,3,-3),(0,-1,2,-3),(1,-1,2,-3),(1,-1,3,-3)$	$(1/2,-1,5/2,-3)$
114	$(0,-1,2,-3),(0,-1,1,-3),(1,-1,1,-3),(1,-1,2,-3)$	$(1/2,-1,3/2,-3)$
115	$(0,-1,1,-3),(0,-1,0,-3),(1,-1,0,-3),(1,-1,1,-3)$	$(1/2,-1,1/2,-3)$
116	$(1,-1,3,-1),(1,-1,2,-1),(1,-1,2,0),(1,-1,3,0)$	$(1,-1,5/2,-1/2)$
117	$(1,-1,3,-2),(1,-1,2,-2),(1,-1,2,-1),(1,-1,3,-1)$	$(1,-1,5/2,-3/2)$
118	$(1,-1,3,-3),(1,-1,2,-3),(1,-1,2,-2),(1,-1,3,-2)$	$(1,-1,5/2,-5/2)$

	Cuadrado	Baricentro
119	$(1,-1,2,-3),(1,-1,1,-3),(1,-1,1,-2),(1,-1,2,-2)$	$(1,-1,3/2,-5/2)$
120	$(1,-1,1,-3),(1,-1,0,-3),(1,-1,0,-2),(1,-1,1,-2)$	$(1,-1,1/2,-5/2)$
121	$(1,-1,2,-1),(1,-2,2,-1),(1,-2,2,0),(1,-1,2,0)$	$(1,-3/2,2,-1/2)$
122	$(1,-1,2,-2),(1,-2,2,-2),(1,-2,2,-1),(1,-1,2,-1)$	$(1,-3/2,2,-3/2)$
123	$(1,-1,2,-2),(1,-1,1,-2),(1,-2,1,-2),(1,-2,2,-2)$	$(1,-3/2,3/2,-2)$
124	$(1,-1,1,-2),(1,-1,0,-2),(1,-2,0,-2),(1,-2,1,-2)$	$(1,-3/2,1/2,-2)$
125	$(1,-2,2,-1),(1,-2,1,-1),(1,-2,1,0),(1,-2,2,0)$	$(1,-2,3/2,-1/2)$
126	$(1,-2,2,-2),(1,-2,1,-2),(1,-2,1,-1),(1,-2,2,-1)$	$(1,-2,3/2,-3/2)$
127	$(1,-2,1,-2),(1,-2,0,-2),(1,-2,0,-1),(1,-2,1,-1)$	$(1,-2,1/2,-3/2)$
128	$(1,-2,1,-1),(1,-2,0,-1),(1,-2,0,0),(1,-2,1,0)$	$(1,-2,1/2,-1/2)$
129	$(0,0,0,0),(0,0,-1,0),(0,0,-1,-1),(0,0,0,-1)$	$(0,0,-1/2,-1/2)$
130	$(0,0,0,-1),(0,0,-1,-1),(0,0,-1,-2),(0,0,0,-2)$	$(0,0,-1/2,-3/2)$
131	$(0,0,-1,-2),(0,0,-1,-1),(0,0,-2,-1),(0,0,-2,-2)$	$(0,0,-3/2,-3/2)$
132	$(0,0,-2,-1),(0,0,-1,-1),(0,0,-1,0),(0,0,-2,0)$	$(0,0,-3/2,-1/2)$
133	$(0,0,0,-2),(0,0,-1,-2),(0,-1,-1,-2),(0,-1,0,-2)$	$(0,-1/2,-1/2,-2)$
134	$(0,0,-1,-2),(0,0,-2,-2),(0,-1,-2,-2),(0,-1,-1,-2)$	$(0,-1/2,-3/2,-2)$
135	$(0,-1,-2,-2),(0,0,-2,-2),(0,0,-2,-1),(0,-1,-2,-1)$	$(0,-1/2,-2,-3/2)$
136	$(0,-1,-2,-1),(0,0,-2,-1),(0,0,-2,0),(0,-1,-2,0)$	$(0,-1/2,-2,-1/2)$
137	$(0,-1,0,-2),(0,-1,-1,-2),(0,-2,-1,-2),(0,-2,0,-2)$	$(0,-3/2,-1/2,-2)$
138	$(0,-1,-1,-2),(0,-1,-2,-2),(0,-2,-2,-2),(0,-2,-1,-2)$	$(0,-3/2,-3/2,-2)$
139	$(0,-2,-2,-2),(0,-1,-2,-2),(0,-1,-2,-1),(0,-2,-2,-1)$	$(0,-3/2,-2,-3/2)$
140	$(0,-2,-2,-1),(0,-1,-2,-1),(0,-1,-2,0),(0,-2,-2,0)$	$(0,-3/2,-2,-1/2)$
141	$(0,-2,0,-2),(0,-2,-1,-2),(0,-2,-1,-1),(0,-2,0,-1)$	$(0,-2,-1/2,-3/2)$
142	$(0,-2,-1,-2),(0,-2,-2,-2),(0,-2,-2,-1),(0,-2,-1,-1)$	$(0,-2,-3/2,-3/2)$
143	$(0,-2,-1,-1),(0,-2,-2,-1),(0,-2,-2,0),(0,-2,-1,0)$	$(0,-2,-3/2,-1/2)$
144	$(0,-2,0,-1),(0,-2,-1,-1),(0,-3,-1,-1),(0,-3,0,-1)$	$(0,-5/2,-1/2,-1)$

	Cuadrado	Baricentro
145	$(0,-3,-1,-1),(0,-2,-1,-1),(0,-2,-1,0),(0,-3,-1,0)$	$(0,-5/2,-1,-1/2)$
146	$(0,-3,0,-1),(0,-3,-1,-1),(1,-3,-1,-1),(1,-3,0,-1)$	$(1/2,-3,-1/2,-1)$
147	$(1,-3,-1,-1),(0,-3,-1,-1),(0,-3,-1,0),(1,-3,-1,0)$	$(1/2,-3,-1,-1/2)$
148	$(1,-3,0,-1),(1,-3,-1,-1),(2,-3,-1,-1),(2,-3,0,-1)$	$(3/2,-3,-1/2,-1)$
149	$(2,-3,-1,-1),(1,-3,-1,-1),(1,-3,-1,0),(2,-3,-1,0)$	$(3/2,-3,-1,-1/2)$
150	$(2,-3,0,-1),(2,-3,-1,-1),(2,-2,-1,-1),(2,-2,0,-1)$	$(2,-5/2,-1/2,-1)$
151	$(2,-2,-1,-1),(2,-3,-1,-1),(2,-3,-1,0),(2,-2,-1,0)$	$(2,-5/2,-1,-1/2)$
152	$(2,-2,0,-1),(2,-2,-1,-1),(2,-1,-1,-1),(2,-1,0,-1)$	$(2,-3/2,-1/2,-1)$
153	$(2,-1,-1,-1),(2,-2,-1,-1),(2,-2,-1,0),(2,-1,-1,0)$	$(2,-3/2,-1,-1/2)$
154	$(2,-1,0,-1),(2,-1,-1,-1),(1,-1,-1,-1),(1,-1,0,-1)$	$(3/2,-1,-1/2,-1)$
155	$(1,-1,-1,-1),(2,-1,-1,-1),(2,-1,-1,0),(1,-1,-1,0)$	$(3/2,-1,-1,-1/2)$
156	$(1,-1,0,-1),(1,-1,-1,-1),(0,-1,-1,-1),(0,-1,0,-1)$	$(1/2,-1,-1/2,-1)$
157	$(0,-1,-1,-1),(1,-1,-1,-1),(1,-1,-1,0),(0,-1,-1,0)$	$(1/2,-1,-1,-1/2)$
158	$(0,-1,0,-1),(0,-1,-1,-1),(-1,-1,-1,-1),(-1,-1,0,-1)$	$(-1/2,-1,-1/2,-1)$
159	$(-1,-1,-1,-1),(0,-1,-1,-1),(0,-1,-1,0),(-1,-1,-1,0)$	$(-1/2,-1,-1,-1/2)$
160	$(-1,-1,0,-1),(-1,-1,-1,-1),(-1,-1,-1,-2),(-1,-1,0,-2)$	$(-1,-1,-1/2,-3/2)$
161	$(-1,-1,-1,-2),(-1,-1,-1,-1),(-1,-1,-2,-1),(-1,-1,-2,-2)$	$(-1,-1,-3/2,-5/2)$
162	$(-1,-1,-2,-1),(-1,-1,-1,-1),(-1,-1,-1,0),(-1,-1,-2,0)$	$(-1,-1,-3/2,-1/2)$
163	$(-1,-1,0,-2),(-1,-1,-1,-2),(-1,-1,-1,-3),(-1,-1,0,-3)$	$(-1,-1,-1/2,-5/2)$
164	$(-1,-1,-1,-2),(-1,-1,-2,-2),(-1,-1,-2,-3),(-1,-1,-1,-3)$	$(-1,-1,-3/2,-5/2)$
165	$(-1,-1,-2,-3),(-1,-1,-2,-2),(-1,-1,-3,-2),(-1,-1,-3,-3)$	$(-1,-1,-5/2,-5/2)$
166	$(-1,-1,-3,-2),(-1,-1,-2,-2),(-1,-1,-2,-1),(-1,-1,-3,-1)$	$(-1,-1,-5/2,-3/2)$
167	$(-1,-1,-3,-1),(-1,-1,-2,-1),(-1,-1,-2,0),(-1,-1,-3,0)$	$(-1,-1,-5/2,-1/2)$
168	$(-1,-1,0,-3),(-1,-1,-1,-3),(0,-1,-1,-3),(0,-1,0,-3)$	$(-1/2,-1,-1/2,-3)$
169	$(-1,-1,-1,-3),(-1,-1,-2,-3),(0,-1,-2,-3),(0,-1,-1,-3)$	$(-1/2,-1,-3/2,-3)$
170	$(-1,-1,-2,-3),(-1,-1,-3,-3),(0,-1,-3,-3),(0,-1,-2,-3)$	$(-1/2,-1,-5/2,-3)$

	Cuadrado	Baricentro
171	$(0,-1,-3,-3),(-1,-1,-3,-3),(-1,-1,-3,-2),(0,-1,-3,-2)$	$(-1/2,-1,-3,-5/2)$
172	$(0,-1,-3,-2),(-1,-1,-3,-2),(-1,-1,-3,-1),(0,-1,-3,-1)$	$(-1/2,-1,-3,-3/2)$
173	$(0,-1,-3,-1),(-1,-1,-3,-1),(-1,-1,-3,0),(0,-1,-3,0)$	$(-1/2,-1,-3,-1/2)$
174	$(0,-1,0,-3),(0,-1,-1,-3),(1,-1,-1,-3),(1,-1,0,-3)$	$(1/2,-1,-1/2,-3)$
175	$(0,-1,-1,-3),(0,-1,-2,-3),(1,-1,-2,-3),(1,-1,-1,-3)$	$(1/2,-1,-3/2,-3)$
176	$(0,-1,-2,-3),(0,-1,-3,-3),(1,-1,-3,-3),(1,-1,-2,-3)$	$(1/2,-1,-5/2,-3)$
177	$(1,-1,-3,-3),(0,-1,-3,-3),(0,-1,-3,-2),(1,-1,-3,-2)$	$(1/2,-1,-3,-5/2)$
178	$(1,-1,-3,-2),(0,-1,-3,-2),(0,-1,-3,-1),(1,-1,-3,-1)$	$(1/2,-1,-3,-3/2)$
179	$(1,-1,-3,-1),(0,-1,-3,-1),(0,-1,-3,0),(1,-1,-3,0)$	$(1/2,-1,-3,-1/2)$
180	$(1,-1,0,-3),(1,-1,-1,-3),(1,-1,-1,-2),(1,-1,0,-2)$	$(1,-1,-1/2,-5/2)$
181	$(1,-1,-1,-3),(1,-1,-2,-3),(1,-1,-2,-2),(1,-1,-1,-2)$	$(1,-1,-3/2,-5/2)$
182	$(1,-1,-2,-3),(1,-1,-3,-3),(1,-1,-3,-2),(1,-1,-2,-2)$	$(1,-1,-5/2,-5/2)$
183	$(1,-1,-2,-2),(1,-1,-3,-2),(1,-1,-3,-1),(1,-1,-2,-1)$	$(1,-1,-5/2,-3/2)$
184	$(1,-1,-2,-1),(1,-1,-3,-1),(1,-1,-3,0),(1,-1,-2,0)$	$(1,-1,-5/2,-1/2)$
185	$(1,-1,0,-2),(1,-1,-1,-2),(1,-2,-1,-2),(1,-2,0,-2)$	$(1,-3/2,-1/2,-2)$
186	$(1,-1,-1,-2),(1,-1,-2,-2),(1,-2,-2,-2),(1,-2,-1,-2)$	$(1,-3/2,-3/2,-2)$
187	$(1,-2,-2,-2),(1,-1,-2,-2),(1,-1,-2,-1),(1,-2,-2,-1)$	$(1,-3/2,-2,-3/2)$
188	$(1,-2,-2,-1),(1,-1,-2,-1),(1,-1,-2,0),(1,-2,-2,0)$	$(1,-3/2,-2,-1/2)$
189	$(1,-2,0,-2),(1,-2,-1,-2),(1,-2,-1,-1),(1,-2,0,-1)$	$(1,-2,-1/2,-3/2)$
190	$(1,-2,-1,-2),(1,-2,-2,-2),(1,-2,-2,-1),(1,-2,-1,-1)$	$(1,-2,-3/2,-3/2)$
191	$(1,-2,-1,-1),(1,-2,-2,-1),(1,-2,-2,0),(1,-2,-1,0)$	$(1,-2,-3/2,-1/2)$
192	$(1,-2,0,-1),(1,-2,-1,-1),(1,-2,-1,0),(1,-2,0,0)$	$(1,-2,-1/2,-1/2)$
193	$(0,0,-1,0),(0,0,0,0),(0,0,0,1),(0,0,-1,1)$	$(0,0,-1/2,1/2)$
194	$(0,0,-2,0),(0,0,-1,0),(0,0,-1,1),(0,0,-2,1)$	$(0,0,-3/2,1/2)$
195	$(0,0,-2,1),(0,0,-1,1),(0,0,-1,2),(0,0,-2,2)$	$(0,0,-3/2,3/2)$
196	$(0,0,0,2),(0,0,-1,2),(0,0,-1,1),(0,0,0,1)$	$(0,0,-1/2,3/2)$



	Cuadrado	Baricentro
197	$(0,-1,-2,0),(0,0,-2,0),(0,0,-2,1),(0,-1,-2,1)$	$(0,-1/2,-2,1/2)$
198	$(0,-1,-2,1),(0,0,-2,1),(0,0,-2,2),(0,-1,-2,2)$	$(0,-1/2,-2,3/2)$
199	$(0,-1,-1,2),(0,-1,-2,2),(0,0,-2,2),(0,0,-1,2)$	$(0,-1/2,-3/2,2)$
200	$(0,-1,0,2),(0,-1,-1,2),(0,0,-1,2),(0,0,0,2)$	$(0,-1/2,-1/2,2)$
201	$(0,-2,-2,0),(0,-1,-2,0),(0,-1,-2,1),(0,-2,-2,1)$	$(0,-3/2,-2,1/2)$
202	$(0,-2,-2,1),(0,-1,-2,1),(0,-1,-2,2),(0,-2,-2,2)$	$(0,-3/2,-2,3/2)$
203	$(0,-2,-1,2),(0,-2,-2,2),(0,-1,-2,2),(0,-1,-1,2)$	$(0,-3/2,-3/2,2)$
204	$(0,-2,0,2),(0,-2,-1,2),(0,-1,-1,2),(0,-1,0,2)$	$(0,-3/2,-1/2,2)$
205	$(0,-2,-1,0),(0,-2,-2,0),(0,-2,-2,1),(0,-2,-1,1)$	$(0,-2,-3/2,1/2)$
206	$(0,-2,-1,1),(0,-2,-2,1),(0,-2,-2,2),(0,-2,-1,2)$	$(0,-2,-3/2,3/2)$
207	$(0,-2,0,1),(0,-2,-1,1),(0,-2,-1,2),(0,-2,0,2)$	$(0,-2,-1/2,3/2)$
208	$(0,-3,-1,0),(0,-2,-1,0),(0,-2,-1,1),(0,-3,-1,1)$	$(0,-5/2,-1,1/2)$
209	$(0,-3,0,1),(0,-3,-1,1),(0,-2,-1,1),(0,-2,0,1)$	$(0,-5/2,-1/2,1)$
210	$(1,-3,-1,0),(0,-3,-1,0),(0,-3,-1,1),(1,-3,-1,1)$	$(1/2,-3,-1,1/2)$
211	$(1,-3,0,1),(1,-3,-1,1),(0,-3,-1,1),(0,-3,0,1)$	$(1/2,-3,-1/2,1)$
212	$(2,-3,-1,0),(1,-3,-1,0),(1,-3,-1,1),(2,-3,-1,1)$	$(3/2,-3,-1,1/2)$
213	$(2,-3,0,1),(2,-3,-1,1),(1,-3,-1,1),(1,-3,0,1)$	$(3/2,-3,-1/2,1)$
214	$(2,-2,-1,0),(2,-3,-1,0),(2,-3,-1,1),(2,-2,-1,1)$	$(2,-5/2,-1,1/2)$
215	$(2,-2,0,1),(2,-2,-1,1),(2,-3,-1,1),(2,-3,0,1)$	$(2,-5/2,-1/2,1)$
216	$(2,-1,-1,0),(2,-2,-1,0),(2,-2,-1,1),(2,-1,-1,1)$	$(2,-3/2,-1,1/2)$
217	$(2,-1,0,1),(2,-1,-1,1),(2,-2,-1,1),(2,-2,0,1)$	$(2,-3/2,-1/2,1)$
218	$(1,-1,-1,0),(2,-1,-1,0),(2,-1,-1,1),(1,-1,-1,1)$	$(3/2,-1,-1,1/2)$
219	$(1,-1,0,1),(1,-1,-1,1),(2,-1,-1,1),(2,-1,0,1)$	$(3/2,-1,-1/2,1)$
220	$(0,-1,-1,0),(1,-1,-1,0),(1,-1,-1,1),(0,-1,-1,1)$	$(1/2,-1,-1,1/2)$
221	$(0,-1,0,1),(0,-1,-1,1),(1,-1,-1,1),(1,-1,0,1)$	$(1/2,-1,-1/2,1)$
222	$(-1,-1,-1,0),(0,-1,-1,0),(0,-1,-1,1),(-1,-1,-1,1)$	$(-1/2,-1,-1,1/2)$

	Cuadrado	Baricentro
223	$(-1,-1,0,1),(-1,-1,-1,1),(0,-1,-1,1),(0,-1,0,1)$	$(-1/2,-1,-1/2,1)$
224	$(-1,-1,-2,0),(-1,-1,-1,0),(-1,-1,-1,1),(-1,-1,-2,1)$	$(-1,-1,-3/2,1/2)$
225	$(-1,-1,-2,1),(-1,-1,-1,1),(-1,-1,-1,2),(-1,-1,-2,2)$	$(-1,-1,-3/2,3/2)$
226	$(-1,-1,0,2),(-1,-1,-1,2),(-1,-1,-1,1),(-1,-1,0,1)$	$(-1,-1,1/2,3/2)$
227	$(-1,-1,-3,0),(-1,-1,-2,0),(-1,-1,-2,1),(-1,-1,-3,1)$	$(-1,-1,-5/2,1/2)$
228	$(-1,-1,-3,1),(-1,-1,-2,1),(-1,-1,-2,2),(-1,-1,-3,2)$	$(-1,-1,-5/2,3/2)$
229	$(-1,-1,-3,2),(-1,-1,-2,2),(-1,-1,-2,3),(-1,-1,-3,3)$	$(-1,-1,-5/2,5/2)$
230	$(-1,-1,-1,3),(-1,-1,-2,3),(-1,-1,-2,2),(-1,-1,-1,2)$	$(-1,-1,-3/2,5/2)$
231	$(-1,-1,0,3),(-1,-1,-1,3),(-1,-1,-1,2),(-1,-1,0,2)$	$(-1,-1,-1/2,5/2)$
232	$(0,-1,-3,0),(-1,-1,-3,0),(-1,-1,-3,1),(0,-1,-3,1)$	$(-1/2,-1,-3,1/2)$
233	$(0,-1,-3,1),(-1,-1,-3,1),(-1,-1,-3,2),(0,-1,-3,2)$	$(-1/2,-1,-3,3/2)$
234	$(0,-1,-3,2),(-1,-1,-3,2),(-1,-1,-3,3),(0,-1,-3,3)$	$(-1/2,-1,-3,5/2)$
235	$(0,-1,-2,3),(0,-1,-3,3),(-1,-1,-3,3),(-1,-1,-2,3)$	$(-1/2,-1,-5/2,3)$
236	$(0,-1,-1,3),(0,-1,-2,3),(-1,-1,-2,3),(-1,-1,-1,3)$	$(-1/2,-1,-3/2,3)$
237	$(0,-1,0,3),(0,-1,-1,3),(-1,-1,-1,3),(-1,-1,0,3)$	$(-1/2,-1,-1/2,3)$
238	$(1,-1,-3,0),(0,-1,-3,0),(0,-1,-3,1),(1,-1,-3,1)$	$(1/2,-1,-3,1/2)$
239	$(1,-1,-3,1),(0,-1,-3,1),(0,-1,-3,2),(1,-1,-3,2)$	$(1/2,-1,-3,3/2)$
240	$(1,-1,-3,2),(0,-1,-3,2),(0,-1,-3,3),(1,-1,-3,3)$	$(1/2,-1,-3,5/2)$
241	$(1,-1,-2,3),(1,-1,-3,3),(0,-1,-3,3),(0,-1,-2,3)$	$(1/2,-1,-5/2,3)$
242	$(1,-1,-1,3),(1,-1,-2,3),(0,-1,-2,3),(0,-1,-1,3)$	$(1/2,-1,-3/2,3)$
243	$(1,-1,0,3),(1,-1,-1,3),(0,-1,-1,3),(0,-1,0,3)$	$(1/2,-1,-1/2,3)$
244	$(1,-1,-2,0),(1,-1,-3,0),(1,-1,-3,1),(1,-1,-2,1)$	$(1,-1,-5/2,1/2)$
245	$(1,-1,-2,1),(1,-1,-3,1),(1,-1,-3,2),(1,-1,-2,2)$	$(1,-1,-5/2,3/2)$
246	$(1,-1,-2,2),(1,-1,-3,2),(1,-1,-3,3),(1,-1,-2,3)$	$(1,-1,-5/2,5/2)$
247	$(1,-1,-1,2),(1,-1,-2,2),(1,-1,-2,3),(1,-1,-1,3)$	$(1,-1,-3/2,5/2)$
248	$(1,-1,0,2),(1,-1,-1,2),(1,-1,-1,3),(1,-1,0,3)$	$(1,-1,-1/2,5/2)$

	Cuadrado	Baricentro
249	$(1,-2,-2,0), (1,-1,-2,0), (1,-1,-2,1), (1,-2,-2,1)$	$(1,-3/2,-2,1/2)$
250	$(1,-2,-2,1), (1,-1,-2,1), (1,-1,-2,2), (1,-2,-2,2)$	$(1,-3/2,-2,3/2)$
251	$(1,-2,-1,2), (1,-2,-2,2), (1,-1,-2,2), (1,-1,-1,2)$	$(1,-3/2,-3/2,2)$
252	$(1,-2,0,2), (1,-2,-1,2), (1,-1,-1,2), (1,-1,0,2)$	$(1,-3/2,-1/2,2)$
253	$(1,-2,-1,0), (1,-2,-2,0), (1,-2,-2,1), (1,-2,-1,1)$	$(1,-2,-3/2,1/2)$
254	$(1,-2,-1,1), (1,-2,-2,1), (1,-2,-2,2), (1,-2,-1,2)$	$(1,-2,-3/2,3/2)$
255	$(1,-2,0,1), (1,-2,-1,1), (1,-2,-1,2), (1,-2,0,2)$	$(1,-2,-1/2,3/2)$
256	$(1,-2,0,0), (1,-2,-1,0), (1,-2,-1,1), (1,-2,0,1)$	$(1,-2,-1/2,1/2)$



# Bibliografía

- [1] Artin, E., *Theory of braids*. Ann. of Math. 48 (1947), 101-126
- [2] M. Boege, G. Hinojosa, and A. Verjovsky. *Any smooth knot  $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$  is isotopic to a cubic knot contained in the canonical scaffolding of  $\mathbb{R}^{n+2}$* . Rev. Mat Complutense (2011) 24: 1–13. DOI 10.1007/s13163-010-0037-4.
- [3] J. S. Carter, J. Rieger, M. Saito, *A combinatorial descriptions of knotted surfaces and their isotopies*, Adv. in Math 127 (1997), 1–51.
- [4] J.S. Carter, Masahico Saito. *Knotted Surfaces and Their Diagrams*. Mathematical Surveys and Monographs AMS, Vol. 55, 1998.
- [5] Yuanan Diao. *Minimal Knotted Polygons on the Cubic Lattice*. Journal of Knot Theory and Its Ramifications, vol. 2, no. 4 (1993) 413–425.
- [6] J. P. Díaz, G. Hinojosa, A. Verjovsky *Cubulated moves for 2-knots*. arXiv: 1708.07761
- [7] J. P. Díaz, G. Hinojosa, A. Verjovsky *Topological surfaces as gridded surfaces in geometrical spaces*. arXiv: 1703.06944
- [8] A. Douady. *Arrondissement des arêtes*. (French) 1961/1962 Séminaire Henri Cartan, 1961/62, Exp. 3 25 pp. Secrétariat mathématique, Paris.

- [9] Fox R.H., *A quick trip through knot theory. Topology of 3-manifolds and Related Topics*, Prentice-Hall, 1962.
- [10] G. Hinojosa, D. Torres, R. Valdez. *Algorithms for Computing Some Invariants for Discrete Knots*. Applied Mathematics, 2013.
- [11] G. Hinojosa, A. Verjovsky, C. Verjovsky Marcotte. *Cubulated moves and discrete knots*. Journal of knot theory and its ramifications, Vol 22, No. 14 (2013) 1350079 (26 pages). DOI: 10.1142/S021821651350079X
- [12] S. Kamada, *Surface-Knots in 4-Space. An Introduction* Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag 2017.
- [13] D. Rolfsen. *Knots and Links*. Publish or Perish, Inc. 1976.
- [14] D. Roseman, *Reidemeister-type moves of surfaces in four-dimensional space, Knot Thoery*, Banach Center Publications, Volume 42, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warszawa (1998), p. 347–380.