UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

CENTRO DE INVESTIGACIONES EN CIENCIAS

"Contribución al estudio del problema de Sturm–Liouville y sus matrices de transferencia."

TESIS
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRA EN CIENCIAS
PRESENTA:

Miladys Despaigne Rosell

DIRECTOR DE TESIS
Dr. C. Rolando Pérez Álvarez

CUERNAVACA, MORELOS AGOSTO, 2019

JURADO

- Dr. Luis M. Gaggero Sager (CIICAp-UAEM)
- Dra. Gabriela Hinojosa Palafox (CInC-UAEM)
- Dr. José A. Otero Hernández (ITESM-EdoMex)
- Dr. Outmane Oubram (FCQeI-UAEM)
- Dr. Rolando Pérez Álvarez (CInC-UAEM)

Resumen

En el presente trabajo de investigación se realiza un análisis bibliográfico de las diferentes definiciones del problema de Sturm–Liouville y se confecciona un pequeño catálogo de las diversas definiciones que se dan en la literatura del problema de Sturm–Liouville y de sus implicaciones.

Se realiza una revisión bibliográfica de las distintas matrices de transferencia que se introducen en la literatura para caracterizar las soluciones del problema de Sturm–Liouville matricial.

La aportación de este trabajo de investigación es la obtención de las principales matrices de transferencia para el caso $N = 1$ homogéneo y el hallazgo de las relaciones entre algunas matrices de transferencia en el problema de Sturm–Liouville matricial.

Se demostró explícitamente para N cualquiera la invariancia de varias matrices respecto de la base de soluciones LI escogida para construirlas. Además se analizaron algunos problemas de contorno en términos de las distintas matrices de transferencia.

Agradecimientos

A CONACYT por brindarme el apoyo económico para la realización de mis estudios de posgrado.

Al Dr. Rolando Pérez Álvarez, director de este trabajo de investigación, por la orientación y consejos para la realización y culminación del mismo.

A los integrantes del comité tutoral y del jurado revisor de la tesis: Dra. Gabriela Hinojosa Palafox, Dr. Miguel E. Mora Ramos, Dr. Rolando Pérez Álvarez, Dr. Luis M. Gaggero Sager, Dr. José A. Otero Hernández, Dr. Outmane Oubram, por sus comentarios, orientación y consejos para la realización de este trabajo de investigación.

A los profesores Dr. Rogelio Valdez, Dr. Oscar G. Sotolongo Costa y Dr. Rolando Pérez Álvarez, por su paciencia y su ayuda.

A la Lic. Cristina Aranda, a la secretaria Dulce Verónica y a Omar García por su apoyo y ayuda.

Dedicatorias

A Dios por todo.

A mi familia, especialmente a mi mamá y mi hija, por estar presente siempre en todos mis logros.

Al Dr. Rolando Pérez Álvarez por ser un profesional ejemplar, por su apoyo, comprensión y consejos que han sido útiles en mi desarrollo profesional. Por su gran ayuda desde el principio.

A mis amigas Damiris Herrra, Arelis Miyar, Lency Vargas y Yunay Hernández por toda su ayuda.

A mis amigos Liván Rivero y Esley Torres por su ayuda.

A los profesores de la UO Sandy Sánchez, Larisa Zamora, Juana Bermúdez, Miguel Borges, Godehardo Betancourt, Mijail Borges, Arturo García.

A Nolite Duverné y su familia por su gran ayuda.

A mis hermanos y hermanas en Cristo por sus oraciones.

A todos los que de alguna forma me han ayudado.

Índice

1. Introducción

1.1 Sistemas estratificados

En muchos problemas de la física y la tecnología, las heteroestructuras de interés poseen una geometría plana. En particular, los sistemas a capas consisten en placas bidimensionales que pueden tener diferentes anchos, y que están apiladas a lo largo de una dirección perpendicular a sus caras, digamos, la dirección del eje *z*. Este tipo de sistemas, dispuesto en capas, es un sistema estratificado.

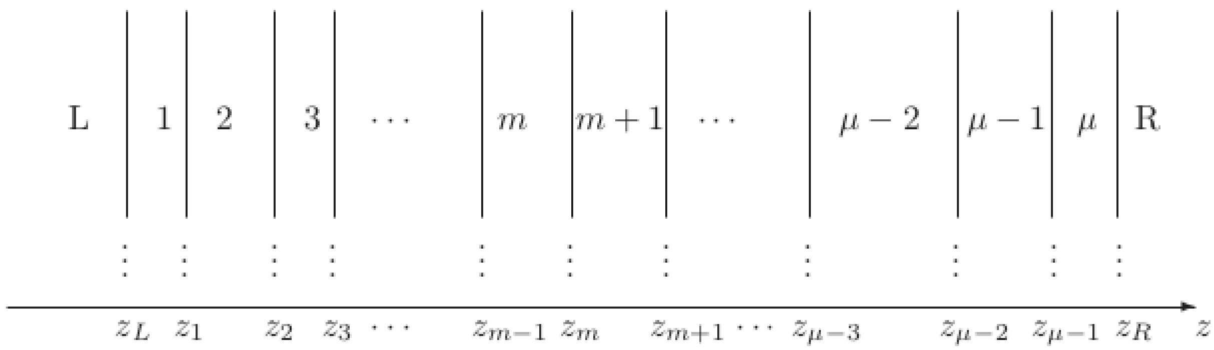

Figura 1.1 Ejemplo de sistema estratificado.

En estos sistemas se considera que las capas de los medios constitutivos son distintos, aunque se pueden encontrar capas de medios constitutivos iguales. Cada capa, independientemente que sea o no del mismo material, representa un dominio de constitución.

1.2 Breve historia del problema de Sturm–Liouville

Los trabajos de Sturm y Liouville de 1836–1837 sobre ecuaciones diferenciales abarcan la expansión de funciones en series y el hoy bien conocido problema de Sturm–Liouville, que es un problema de valores propios en ecuaciones diferenciales de segundo orden.

En física matemática la Teoría de Sturm–Liouville es un procedimiento estándar para resolver cierto tipo de ecuaciones integrales.

Jacques Charles François Sturm nació el 29 de septiembre de 1803 en Ginebra, Suiza, falleció el 15 de diciembre de 1855 en París, Francia. Fue un matemático francés de ascendencia alemana. En 1829, descubrió el teorema que lleva su nombre y que permite hallar el número de raíces reales de una función polinómica. Sturm sacó provecho de la revolución de 1830, ya que su fe protestante le impedía conseguir empleo en las escuelas secundarias públicas. A finales de 1830, comenzó a desempeñarse como profesor de Matemáticas Especiales en el College Rollin. Él se convirtió en un ciudadano francés en 1833. Ingresó en la Academia de Ciencias en 1836, ocupando el lugar de Ampere, en 1840 fue designado profesor titular de la Escuela Politécnica. Entre otros reconocimientos recibió la Legión de Honor en 1837 y la Medalla Copley de la Real Sociedad de Londres en 1840. El nombre de Sturm es parte de la lista de los 72 nombres grabada en la Torre Eiffel.

Joseph Liouville nació el 24 de marzo de 1809 en Saint-Omer, Francia, falleció el 8 de septiembre de 1882 en París, Francia. Se graduó en la Escuela Politécnica de París en 1827. Tras varios años como asistente en varias instituciones logró ser profesor de la Escuela Politécnica en 1838. Obtuvo la cátedra de Matemáticas en el colegio de Francia en 1850 y la de Mecánica en la Facultad de Ciencias en 1857. Organizó el *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* publicación que obtuvo una muy grande reputación, y que se mantiene hoy en día. Fue uno de los primeros en leer y reconocer el mérito de las obras inéditas de Evariste Galois y que publicó posteriormente en su *journal* en el año 1846. Trabajó en una cantidad muy diversa de campos en matemáticas, incluyendo Teoría de números, Análisis complejo, Topología diferencial, pero también en Física matemática e incluso Astronomía. Hay dos teoremas que llevan su nombre uno en Análisis complejo y otro en Mecánica hamiltoniana. Un cráter lunar y un asteroide llevan su nombre.

1.3 Breve introducción a la teoría de Sturm–Liouville clásica

Una ecuación de Sturm–Liouville es una ecuación diferencial lineal de segundo orden de la forma

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+q(x)y=\lambda w(x)y \quad (1.1)$$

donde las funciones p(x) y w(x) son positivas y q(x) es real. En el caso más simple, estas funciones son continuas en un intervalo finito cerrado [a, b], en el que, por lo general, se definen unas condiciones de contorno o frontera, es decir, se concretan unos valores específicos que adoptan las funciones y y $\frac{dy}{dx}$ en los extremos de dicho intervalo. La función w(x) es llamada función de densidad o función peso.

Encontrar los valores λ para los que exista una solución no trivial de la ecuación que satisfaga las condiciones de frontera se denomina el **problema de Sturm–Liouville** (S–L).

Tales valores de λ son llamados valores propios del problema de S–L que plantea (1.1) conjuntamente con las condiciones de frontera. Las soluciones correspondientes son las funciones propias o vectores propios del problema.

Bajo suposiciones normales en los coeficientes de las funciones p(x), q(x) y w(x), estas inducen operadores diferenciales hermíticos en algunas funciones definidas por las condiciones de frontera.

La teoría resultante de la existencia y el comportamiento asintótico de los valores propios, la teoría cualitativa correspondiente de las funciones propias y sus funciones adecuadas completas se conoce como teoría de Sturm–Liouville. Esta teoría es importante en matemática aplicada, donde los problemas S–L ocurren muy comúnmente, particularmente al resolver ecuaciones diferenciales parciales con separación de variables.

Forma de Sturm–Liouville.

La ecuación diferencial

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}y(x)\right]+q(x)y(x)=\lambda w(x)y(x)$$

Se dice que es de la forma de S–L o de la forma autoadjunta. Toda ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden puede ser llevada a esta forma al multiplicarle un factor integrante apropiado.

Ejemplos.

- La ecuación de Bessel:

  $$x^2y'' + xy' + (\lambda^2x^2 - v^2)y = 0$$

  Puede ser escrita en la forma de S–L así:

  $$(xy')' + (\lambda^2x - v^2/x)y = 0$$

- La ecuación de Legendre:
$$(1-x^2)y'' - 2xy' + v(v+1)y = 0$$
Puede ser transformada fácilmente en una forma de S–L, ya que $(1-x^2)' = -2x$; así la ecuación de Legendre equivalente es:
$$[(1-x^2)y']' + v(v+1)y = 0$$
- Otro ejemplo simple es una ecuación diferencial de la forma
$$x^3y'' - xy' + 2y = 0$$
Si dividimos por x^3 tenemos
$$y'' - \frac{x}{x^3}y' + \frac{2}{x^3}y = 0$$
Multiplicando por un factor integrante:
$$e^{\int -x/x^3 dx} = e^{\int -1/x^2 dx} = e^{1/x},$$
Nos da
$$e^{1/x}y'' - \frac{e^{1/x}}{x^2}y' + \frac{2e^{1/x}}{x^3}y = 0$$
Que puede ponerse fácilmente en la forma de S-L así:
$$\left(e^{1/x}y'\right)' + \frac{2e^{1/x}}{x^3}y = 0.$$
- En general, dada una ecuación diferencial
$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$
Al dividirla por P(x) y multiplicarla por un **factor integrante** $e^{\int Q(x)/P(x)dx}$ obtenemos la forma de S–L de la misma.

Operadores diferenciales Sturm–Liouville.

El operador lineal:

$$Lu = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + q(x)u$$

Puede ser visto como una transformación de una función u en otra función Lu. Si ponemos $w(x) = 1$ en la ecuación (1.1), podemos escribirla:

$$Lu = \lambda u.$$

Este es precisamente un problema de valores propios; donde se trata de hallar valores propios λ y vectores propios u del operador L. Sin embargo, también se debe incluir las condiciones de frontera. Como ejemplo se dirá que vamos a evaluar el problema en el intervalo [0, 1] y se pondrá condiciones de frontera $u(0) = u(1) = 0$.

La importancia de problemas de valores propios está en el hecho que nos ayuda a resolver problemas asociados no homogéneos:

$$Lu = f$$

En el intervalo [0, 1]

$$u = 0$$

en 0 y 1.

Aquí f es la función en el espacio L^2. Si una solución u existe y es única, se la puede escribir de la forma:

$$u = Af$$

porque la transformación de f a u debe ser lineal. El hallar los vectores propios y los valores propios de A es esencialmente lo mismo que hallar los valores y vectores propios de L. Si u es un vector propio de L con valor propio λ, entonces u también es vector propio de A con valor propio $\frac{1}{\lambda}$.

Operadores de Sturm–Liouville como operadores Hermíticos.

Muchas de las propiedades de los operadores de S–L vienen del hecho de que estos son operadores hermíticos con respecto al producto interno

$$\langle u, v \rangle_w = \int_a^b w(x)u(x)v(x)dx\,.$$

Y así los valores propios de los operadores de S–L son reales, las funciones propias corresponden a diferentes valores propios y son ortogonales.

Algunas de las ecuaciones diferenciales del tipo de Sturm–Liouville son:

Nombre	Forma canónica	Forma de S–L
Fourier	$y'' + \lambda y = 0$	$(y')' + \lambda y = 0$
Euler	$x^2 y'' + x y' + \lambda y = 0$	$(x y')' + \lambda \frac{1}{x} y = 0$
Bessel	$x^2 y'' + x y' + (\lambda x^2 - \nu^2) y = 0$	$(x y')' + (\lambda x - \frac{\nu^2}{x}) y = 0$
Legendre	$(1-x^2) y'' - 2x y' + \lambda y = 0$	$((1-x^2) y')' + \lambda y = 0$
Tchebychev	$(1-x^2) y'' - x y' + \lambda y = 0$	$\left((1-x^2)^{1/2} y'\right)' + \lambda(1-x^2)^{-1/2} y = 0$
Tchebychev II	$(1-x^2) y'' - 3 x y' + \lambda y = 0$	$\left((1-x^2)^{3/2} y'\right)' + \lambda(1-x^2)^{1/2} y = 0$
Mathieu	$y'' + (\lambda - 2a \cos x) y = 0$	$(y')' + (\lambda - 2a \cos x) y = 0$
Weber-Hermite	$y'' - x y' + \lambda y = 0$	$\left(e^{-x^2/2} y'\right)' + \lambda e^{-x^2/2} y = 0$
Jacobi	$x(1-x)y'' + [a - (a+b)x]y' + \lambda y = 0$	$(x^a(1-x)^b y')' + \lambda x^{a-1}(1-x)^{b-1} y = 0$
Laguerre	$y'' + (1-x) y' + \lambda y = 0$	$\left(e^{-(1-x)^2/2} y'\right)' + \lambda e^{-(1-x)^2/2} y = 0$

El modelo de Sturm–Liouville busca establecer hipótesis para que las ecuaciones diferenciales del tipo anterior, acompañadas con determinadas condiciones de contorno se comporten como operadores Hermíticos.

A la ecuación de Sturm–Liouville

$$Ly + \lambda w(x) y = 0 \quad (1.2)$$

se le llama regular en un intervalo finito cerrado [a, b] si las funciones p(x) y w(x) son positivas en el intervalo [a, b]. Así, para un valor propio λ dado, existen dos soluciones linealmente independientes de una ecuación regular de Sturm–Liouville en [a, b]. [1]

A la ecuación de Sturm–Liouville (1.2) en [a, b] junto con dos condiciones de frontera

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0, \quad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0,$$

donde a_1, a_2, b_1, b_2 son constantes reales dadas tales que $a_1^2 + a_2^2 > 0 \; y \; b_1^2 + b_2^2 > 0$ se le llama un Sistema de Sturm–Liouville Regular.

Al conjunto de todos los valores propios λ de un problema de Sturm–Liouville regular se le llama el Espectro del problema. [1]

A la ecuación de Sturm–Liouville (1.2) se le llama singular cuando se cumple uno de los siguientes casos:

- La ecuación está dada en un intervalo semi-infinito o infinito.
- El coeficiente p(x) o w(x) son iguales a cero en algún punto.
- Uno de los coeficientes se va al infinito en uno o ambos extremos de un intervalo finito.

Una ecuación de Sturm–Liouville singular junto con las condiciones de frontera lineales homogéneas apropiadas es llamada un Sistema de Sturm–Liouville Singular. [1]

La ecuación de Sturm–Liouville (1.2) en la cual $p(a) = p(b)$, junto con las condiciones de frontera periódicas $y(a) = y(b), y'(a) = y'(b)$, es llamada un Sistema periódico de Sturm–Liouville.

Para el problema regular de Sturm–Liouville, denotamos el dominio de L por D(L), esto es, D(L) es el espacio para todas las funciones complejas definidas en [a, b], para las cuales

$y'' \in L^2$([a, b]), y las cuales satisfacen las condiciones de frontera

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0, \quad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0.$$

Teorema (Identidad de Lagrange). [1]

Para cualesquiera u, v ∈ D(L), tenemos

$$uLv - vLu = \frac{d}{dx}[p(uv' - vu')].$$

Demostración.

Tenemos que

$$\begin{aligned} uLv - vLu &= u\frac{d}{dx}\left(p\frac{dv}{dx}\right) + quv - v\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) - quv \\ &= \frac{d}{dx}[p(uv' - vu')]\,. \end{aligned}$$

El operador L de Sturm–Liouville es auto-adjunto. En otras palabras, para cualesquiera dos funciones u, v ∈ D(L), tenemos

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle$$

donde $\langle\ ,\ \rangle$ denota el producto interior en L^2([a, b]) definido por

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Propiedades Importantes de Sistemas de Sturm–Liouville. [1]

Existen varias e importantes propiedades de los valores propios y las funciones propias de muchos sistemas de Sturm–Liouville:

- Los valores propios son reales: Ésta es una propiedad fundamental y es consecuencia de la forma de la ecuación diferencial.
- El valor más pequeño de valor propio es la unidad, pero no existe el valor más grande de valor propio. En general el valor propio más pequeño existe, pero no existe el valor propio más grande. Para este problema λ_n se incrementa como n^2 para *n* grande.
- Para cada valor propio existe una función propia. Esto es cierto para una amplia variedad de problemas de Sturm–Liouville, pero no es una verdad universal.
- Para el problema de S–L en el intervalo [*a; b*], la n-ésima función propia tiene *n*–1 ceros en el intervalo abierto (*a; b*).
- Los ceros se entrelazan, entonces hay uno y sólo un cero de $y_{n+1}(x)$ entre los ceros adyacentes de $y_n(x)$.
- El producto interior de dos funciones propias con distintos valores propios es cero.

Separación de Variables y Problemas de Sturm–Liouville.

El trabajo original de Sturm–Liouville fue motivado por el problema de la conducción de calor. Un problema que Sturm trabajó es la distribución de la temperatura en una barra unidimensional, descrita por la ecuación diferencial parcial lineal

$$h(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - l(x)u, \qquad (1.3)$$

donde $u(x;t)$ denota la temperatura de la barra en el punto *x* al tiempo *t*, y *h*, *p* y *l* son funciones positivas. [1]

Si alrededor de la barra se mantiene la temperatura constante y los extremos de la barra, en $x = 0$ y $x = L$, están en contacto con cuerpos grandes a diferentes temperaturas, entonces las condiciones a la frontera son

$$\begin{aligned} p(0)\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \alpha u(0,t) &= 0, \\ p(L)\frac{\partial u(L,t)}{\partial x} + \beta u(L,t) &= 0, \end{aligned} \qquad (1.4)$$

para algunas constantes α *y* β.

Finalmente es necesario especificar la temperatura inicial de la barra. Tomemos

$$u(x;\ 0) = f(x),$$

donde *f*(*x*) es la temperatura inicial conocida.

Sturm intentó resolver esta ecuación, primero utilizando una función de la forma

$$u(x,t) = X(x)e^{-\lambda t}$$

la cual al sustituirla en (1.3) obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX}{dx}\right) + (\lambda h(x) - l(x))X = 0$$

para *X*(*x*) en términos de la constante desconocida λ, junto con las condiciones a la frontera

$$p(0)X'(0) + \alpha X(0) = 0,$$
$$p(L)X'(L) + \beta X(L) = 0.$$

Éste es un problema de valores propios. Asumiendo que existen soluciones $X_k(x)$ con valores propios λ_k para $k = 1, 2, \ldots$ Sturm utilizó la linealidad de la ecuación original para escribir una solución general como la suma

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x) e^{-\lambda_k t} \,,$$

donde los coeficientes A_k son arbitrarios. Esta solución satisface formalmente la ecuación diferencial y las condiciones a la frontera, y satisfará la condición inicial $u(x;\ 0)=f(x)$ sólo si

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x).$$

Entonces el problema se reduce a encontrar los valores de los A_k que satisfacen la ecuación.
J. Fourier y S.D. Poisson encontraron expresiones para los coeficientes A_k para funciones particulares $h(x)$, $p(x)$ y $l(x)$, pero Sturm y Liouville determinaron la solución general.
Usualmente, las ecuaciones Sturm–Liouville aparecen cuando el método de separación de variables se aplica para resolver ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden.
Algunos ejemplos de ellos son:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k^2\psi=0 \,,$$

ecuación de Helmholtz,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=-F(r) \,,$$

ecuación de Poisson,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0 \,,$$

ecuación de Laplace,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0 \,,$$

ecuación de onda,
donde k es una constante y la constante c representa la velocidad de propagación de pequeñas perturbaciones en el medio. [1]
Problema. [1]
Demuestre que si $p(x)$ es periódica y las condiciones a la frontera son periódicas, entonces L es auto-adjunto.
Solución.
Tenemos que

$$\begin{gathered} u(a)=u(b), \\ u'(a)=u'(b), \\ p(a)=p(b), \end{gathered}$$

Para demostrar que $\langle Lu,v\rangle=\langle u,Lv\rangle$. Es suficiente ver que $\langle Lu,v\rangle-\langle u,Lv\rangle=0$.

$$\begin{aligned} \langle Lu,v\rangle-\langle u,Lv\rangle &= \int_a^b (\bar{v}Lu-uL\bar{v})dx \\ &= \left[p(x)(\bar{v}(x)u'(x)-u(x)\bar{v}'(x))\right]_a^b . \end{aligned}$$

Por la identidad de Lagrange. Ahora, evaluando y tomando en cuenta las hipótesis, obtenemos que

$$p(b)[\bar{v}(b)u'(b)-u(b)\bar{v}'(b)]-\ p(a)[\bar{v}(a)u'(a)-u(a)\bar{v}'(a)]=0 \,.$$

Por lo, tanto L es auto–adjunto.
Problema. [1]
Muestre que el operador L definido por

$$Ly = \frac{d^2y}{dx^2} + \alpha y, \qquad y(0) = A, \quad y'(\pi) = B,$$
donde α, A y B son constantes diferentes de cero, no es autoadjunto.
Solución.
Sabemos que
$$\langle Lu, v\rangle - \langle u, Lv\rangle = \int_0^\pi (\bar{v}Lu - uL\bar{v})dx.$$
Ahora
$$\begin{aligned}\bar{v}Lu - uL\bar{v} &= \bar{v}\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \alpha u\right) - u\left(\frac{d^2\bar{v}}{dx^2} + \alpha\bar{v}\right)\\ &= \bar{v}\frac{d^2u}{dx^2} + \alpha\bar{v}u - u\frac{d^2\bar{v}}{dx^2} + \alpha\bar{v}u\\ &= \bar{v}\frac{d^2u}{dx^2} - u\frac{d^2\bar{v}}{dx^2}\\ &= \frac{d\bar{v}}{dx}\frac{du}{dx} + \bar{v}\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d\bar{v}}{dx}\frac{du}{dx} - u\frac{d^2\bar{v}}{dx^2}\\ &= \frac{d}{dx}\left(\bar{v}\frac{du}{dx} - u\frac{d\bar{v}}{dx}\right),\end{aligned}$$
por lo que volviendo al a integral, tenemos que
$$\langle Lu, v\rangle - \langle u, Lv\rangle = \int_0^\pi (\bar{v}Lu - uL\bar{v})dx = \left[\bar{v}\frac{du}{dx} - u\frac{d\bar{v}}{dx}\right]_0^\pi.$$
Evaluando en la expresión anterior, obtenemos
$$\bar{v}(\pi)u'(\pi) - u(\pi)\bar{v}'(\pi) - \big(\bar{v}(0)u'(0) - u(0)\bar{v}'(0)\big),$$
luego, evaluando las condiciones a la frontera, obtenemos
$$B[\bar{v}(\pi) - u(\pi)] - A[u'(0) - \bar{v}'(0)] \neq 0.$$
Este problema muestra por qué las condiciones de frontera necesitan ser homogéneas para que el operador sea autoadjunto.

Teorema de Sturm–Liouville. [1]
Las soluciones de un sistema regular de Sturm–Liouville
$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + \big(q(x) + \lambda w(x)\big)y = 0$$
con las condiciones de frontera homogéneas
$$a_1y(a) + a_2y'(a) = 0, \quad b_1y(b) + b_2y'(b) = 0,$$
$$a_1^2 + a_2^2 \neq 0 \ y \ b_1^2 + b_2^2 \neq 0.$$
tiene las siguientes propiedades:

1. Funciones propias correspondientes a distintos valores propios son ortogonales con respecto a la función de peso w(x),
$$\int_a^b y_n(x)y_m(x)w(x)dx = 0, \ \lambda_m \neq \lambda_n,$$
2. Todos los valores propios son reales.
3. Para cada valor propio λ_j le corresponde una única (salvo una constante multiplicativa) función propia y_j(x), esto es, el sistema es no degenerado.

4. Cualquier valor propio se puede relacionar con su función propia mediante el cociente de Rayleigh
$\lambda_n = \frac{-p(x)y_n(x)y'_n(x)\,|_a^b + \int_a^b [p(x)y'_n(x)^2 + q(x)y_n(x)^2]dx}{\int_a^b y_n(x)^2 w(x)dx}$.
5. Existe una sucesión infinita de valores propios $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$. Si $y_j$es una función propia del sistema regular correspondiente a λ_j, entonces la sucesión $(w^{1/2}y_j)_{j=1}^{\infty}$es un sistema ortogonal completo en el espacio $L^2(a, b)$. [1]

El teorema de Sturm–Liouville es muy poderoso pero es válido solamente para problemas regulares, y muchos casos importantes que surgen en la práctica son singulares o tienen condiciones a la frontera periódicas. [1]

La extensión a sistemas singulares generales es problemática porque no todos los sistemas singulares tienen valores propios. Sin embargo, casi todas las ecuaciones diferenciales que ocurren en aplicaciones físicas surgen de tipos particulares de principios de variaciones, los cuales también pueden utilizarse para mostrar que el sistema de Sturm–Liouville resultante es completo y que las propiedades de las funciones propias son similares a las propiedades de un sistema de Sturm–Liouville regular. [1]

1.4 Objetivos

(a) Confeccionar un pequeño catálogo de las diversas definiciones que se dan en la literatura del problema de Sturm–Liouville y de sus implicaciones.
(b) Revisión bibliográfica de las distintas matrices de transferencia que se introducen en la literatura para caracterizar las soluciones del problema de S–L matricial.
(c) Hallar las relaciones entre matrices de transferencia en el problema de S–L matricial.

2. Diferentes definiciones del problema de Sturm–Liouville en la literatura

En las definiciones vistas en la literatura, se plantea el problema de Sturm–Liouville como un problema en el que hay que resolver una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden con ciertas condiciones de frontera. En unas no se especifica que es un problema donde hay que determinar los autovalores y las autofunciones correspondientes. En ellas hay diferencias en los signos que preceden a las funciones. Se pide que las funciones p, q y w sean reales y continuas y en algunas se específica que p' sea continua. Se especifica que p y w sean positivas. Pero en unas solo se pide que las funciones sean reales.

Para que se cumplan los postulados de existencia y unicidad cada función de la ecuación debe ser continua y otra condición que se debe cumplir es la continuidad de la derivada de p(x), también puede pedirse que esta derivada sea acotada ya que esto garantiza la unicidad aunque es una condición un poco más débil.

2.1 Pequeño catálogo de diversas definiciones.

Def.	Ecuación	Intervalo	Condición sobre p	Condición sobre q	Condición sobre w	Enfoque de autovalores	Ref.
1	$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y+\lambda w(x)y=0$	$a \leq x \leq b$	Real, continua, positiva y con derivada continua.	Real y continua	Real, continua y positiva.	no	[1]
2	$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y+\lambda w(x)y=0$	$a < x < b$	continua y positiva.	continua	continua y positiva.	si	[2]
3	$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y+\lambda w(x)y=0$	$a < x < b$	Real, continua, positiva y con derivada continua.	Real y continua	Real, continua y positiva.	si	[3], [16]
4	$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y-\lambda w(x)y=0$	$a \leq x \leq b$	Real	Real	Real	si	[4]
5	$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)-q(x)y+\lambda w(x)y=0$	$a \leq x \leq b$	continua, positiva y con derivada continua.	continua	continua y positiva.	si	[5], [9]
6	$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)-q(x)y+\lambda y=0$	$a \leq x \leq b$	Constante e igual a 1	Acotada y continua	Constante e igual a 1	no	[6]

7	$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y+\lambda w(x)y=0$	$a<x<b$	Continua con derivada continua.	continua	continua.	si	[7]
8	$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)+\lambda y=0$	$0\leq x\leq l$	Constante e igual a 1	Constante e igual a 0	Constante e igual a 1	si	[8]
9	$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y+\lambda w(x)y=0$	$a\leq x\leq b$	Real	Real	Real	si	[10]
10	$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y-\lambda y=0$	$a\leq x\leq b$	Continua con derivada continua.	continua	Constante e igual a 1	si	[11]
11	$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)-q(x)y+\lambda w(x)y=0$	$0\leq x\leq l$	Continua con derivada continua.	continua	continua.	si	[12]
12	$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y+\lambda w(x)y=0$	$a\leq x\leq b$	Real, continua, positiva y con derivada continua.	Real y continua	Real, continua y positiva.	si	[13]
13	$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)-q(x)y+\lambda w(x)y=0$	$0\leq x\leq \pi$	positiva.	continua	positiva.	si	[14]
14	$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)-q(x)y+\lambda w(x)y=0$	$a\leq x\leq b$	positiva	positiva	positiva	si	[15]

2.2 Implicaciones de las diversas definiciones.

El comportamiento de los autovalores puede depender del signo de $q(x)$, por lo que hay que tener mucho cuidado al usar diferentes definiciones. [1]

Si p no es positiva en uno o en ambos extremos del intervalo, entonces el sistema deja de ser regular y pasa a ser singular. [1]

En los artículos escritos por Sturm y Liouville solamente se especifica que las funciones p, q y w sean positivas y el signo de q se toma negativo y aunque no se utiliza el término de autovalores, ya que su uso es de comienzos del siglo XX, si se le da ese enfoque.

Aunque en varias de las definiciones vistas no se especifica la continuidad de las funciones implicadas en la ecuación de S-L es evidente que dadas las características de la misma las funciones p, p', q y w deben ser continuas.

Tomando como $Ly=\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]\pm q(x)y$, podemos escribir la ecuación de S-L así: $Ly+\lambda w(x)y=0$.

Cuando p y q son reales entonces L es formalmente hermítico, como puede verse en [16] y esto ocurre para las definiciones 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13 y 14. La definición 7 dada en [7], no especifica que sean reales pero después de dada la definición se plantea un teorema en el que si se especifica que si p, q y w son reales y p y w positivas entonces L es hermítico. Tampoco la definición 11 dada en [12] especifica que sean reales pero más adelante toma a p y a w positivas y enuncia un teorema con propiedades para las autofunciones que se cumplen cuando el operador L es hermítico. La definición 10 dada en [11] no especifica que p y q sean reales y tampoco se hace en [11] ninguna mención al respecto en otro momento.

Para que el operador L sea totalmente hermítico, véase [16], debe ser formalmente hermítico y ocurrir que $p(f'\overline{g} - f\overline{g}')]_a^b = 0$, es decir: $p(b)[f'(b)g(b) - f(b)g'(b)] = p(a)[f'(a)g(a) - f(a)g'(a)]$.

Si $y(a) = y(b),\ y'(a) = y'(b)$ entonces el operador L será totalmente hermítico.

Esto sería:

$$\begin{aligned}
\langle Lf, g\rangle = \int_a^b [(pf')' + qf]g dx = \int_a^b (pf'' + p'f' + qf)g dx = \int_a^b pf''g dx + \int_a^b p'f'g dx + \int_a^b qfg dx \\
= pgf'|_a^b - \int_a^b f'(pg)'dx + p'gf|_a^b - \int_a^b f(p'g)'dx + \int_a^b fqg dx \\
= pgf'|_a^b - (pg)'f|_a^b + \int_a^b f(pg)''dx + p'gf|_a^b - \int_a^b f(p'g)'dx + \int_a^b fqg dx \\
= \int_a^b [(pg)'' - (p'g)' + qg]f dx + [pgf' - (pg)'f + p'gf]|_a^b \\
= \langle f, (pg)'' - (p'g)' + qg\rangle + [pgf' - p'gf - pg'f + p'gf]|_a^b \\
= \langle f, L^* g\rangle + [p(gf' - g'f)]|_a^b
\end{aligned}$$

$$Lf = pf'' + p'f' + qf\ ,\quad L^* g = (pg)'' - (p'g)' + qg = pg'' + p'g' + qg.$$

3. Matrices de transferencia en el caso $N = 1$.

3.1 Soluciones LI del problema homogéneo

Partiendo de la ecuación del movimiento que adopta una forma de Sturm–Liouville matricial:

$$\mathbf{L}\cdot\mathbb{F}=\frac{d}{dz}\left[\boldsymbol{B}(z)\cdot\frac{d\mathbb{F}(z)}{dz}+\boldsymbol{P}(z)\cdot\mathbb{F}(z)\right]+\boldsymbol{Y}(z)\cdot\frac{d\mathbb{F}(z)}{dz}+\boldsymbol{W}(z)\cdot\mathbb{F}(z)=0 \qquad (3.1)$$

Para $N = 1$, obtenemos:

$$\frac{d}{dz}\left(B(z)\frac{dF(z)}{dz}+P(z)F(z)\right)+Y(z)\frac{dF(z)}{dz}+W(z)F(z)=0.$$

Para simplificar el análisis, consideremos que todos los coeficientes son constantes, situación que corresponde a un medio infinito homogéneo. Así, la ecuación anterior se reduce a la siguiente:

$$\frac{d}{dz}\left(B\frac{dF(z)}{dz}+PF(z)\right)+Y\frac{dF(z)}{dz}+WF(z)=0.$$

Para encontrar la solución, partimos de suponer que la función F(z) está dada por $F(z) = F_0 e^{ikz}$, lo que se justifica en la teoría de ecuaciones diferenciales [22]. La derivada de esta función es

$$\frac{dF(z)}{dz}=ikF_0e^{ikz}=ikF(z).$$

Al sustituir este resultado en la ecuación de movimiento, obtenemos que

$$\frac{d}{dz}\big(ikBF(z)+PF(z)\big)+ikYF(z)+WF(z)$$

$$=ikB\frac{dF(z)}{dz}+P\frac{dF(z)}{dz}+ikYF(z)+WF(z)$$

$$=-k^2BF(z)+ikPF(z)+ikYF(z)+WF(z)=0$$

Esto implica que

$$Bk^2-i(P+Y)k-W=0,$$

cuyas raíces son

$$k_1=\frac{i(P+Y)+\sqrt{-(P+Y)^2+4BW}}{2B} \quad y \quad k_2=\frac{i(P+Y)-\sqrt{-(P+Y)^2+4BW}}{2B}$$

Por lo tanto, las soluciones LI son:

$$F_j(z)=F_{0j}e^{ik_jz},$$

para $j = 1, 2$.

Bajo las condiciones de hermeticidad del operador L, tenemos que $Y = -P^{\dagger}$ y que W y B resultan ser números reales, de modo que tenemos los siguientes casos particulares en las raíces k_j:

1. Si **P** es igual a su adjunto se cumple que $P + Y = P - P^{\dagger} = 0$. En este caso

$$k_1 = \sqrt{\frac{W}{B}} \;\; y \;\; k_2 = -\sqrt{\frac{W}{B}}.$$

Si B y W tienen signos opuestos, las raíces serán números imaginarios puros, por lo que k_2 será el simétrico de k_1, respecto del eje real. Esto quiere decir que uno se encuentra en un semiplano opuesto al que pertenece el otro. Por otro lado, cuando B y W tienen signos iguales, las raíces k_1 y k_2 serán reales opuestos. Entonces, sin pérdida de generalidad, consideremos para los análisis posteriores, con el supuesto $P + Y = 0$, que k_1 se encuentra en el semiplano superior o en la parte positiva del eje real.

2. Si **P** no es igual a su adjunto se cumple que $P + Y = P - P^{\dagger} \neq 0$. En este caso, las raíces son

$$k_1 = \frac{i\left(P - P^{\dagger}\right) + \sqrt{-(P - P^{\dagger})^2 + 4BW}}{2B} \quad y \quad k_2 = \frac{i\left(P - P^{\dagger}\right) - \sqrt{-(P - P^{\dagger})^2 + 4BW}}{2B}$$

Poniendo $P = P_R + iP_I$, entonces $P - P^{\dagger} = \; i2P_I$. Entonces las raíces toman la siguiente forma:

$$q_1 = -\frac{P_I}{B} + \sqrt{\frac{W}{B} + \frac{P_I^2}{B^2}} \;\; y \;\; q_2 = -\frac{P_I}{B} - \sqrt{\frac{W}{B} + \frac{P_I^2}{B^2}}.$$

Estos valores son simétricos ya no respecto del origen sino del número real $-P_I/B$. Entonces, cuando B y W tienen signos contrarios y W/B es mayor que P_I^2/B^2 las raíces serán complejas y se encontrarán en un semiplano opuesto al de la otra. Tales semiplanos están determinados por la recta real. Así mismo, si B y W tienen el mismo signo, entonces q_1 y $q_2$son reales opuestos respecto al número $-P_I/B$.

3.2 Matrices de transferencia en el caso homogéneo

Matriz de transferencia completa M

Tenemos que la expresión para la matriz de transferencia completa **M** es:

$$\begin{vmatrix} \mathbb{F}(\alpha{:}\, z) \\ \mathbb{F}'(\alpha{:}\, z) \end{vmatrix} = \boldsymbol{M}(\alpha{:}\, z, z_0) \cdot \begin{vmatrix} \mathbb{F}(\alpha{:}\, z_0) \\ \mathbb{F}'(\alpha{:}\, z_0) \end{vmatrix}.$$

De donde **M** va a ser igual a:

$$\boldsymbol{M}(\alpha{:}\, z, z_0) = \begin{pmatrix} F_1(z) & F_2(z) \\ F_1'(z) & F_2'(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(z_0) & F_2(z_0) \\ F_1'(z_0) & F_2'(z_0) \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\boldsymbol{M}(\alpha{:}\, z, z_0) = \frac{1}{F_1(z_0)F_2'(z_0) - F_1'(z_0)F_2(z_0)} \begin{pmatrix} F_1(z) & F_2(z) \\ F_1'(z) & F_2'(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2'(z_0) & -F_2(z_0) \\ -F_1'(z_0) & F_1(z_0) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}(\alpha\colon z, z_0) =$$
$$= \frac{1}{F_1(z_0)F_2^{\prime}(z_0) - F_1^{\prime}(z_0)F_2(z_0)} \begin{pmatrix} F_1(z)F_2^{\prime}(z_0) - F_1^{\prime}(z_0)F_2(z) & F_1(z_0)F_2(z) - F_1(z)F_2(z_0) \\ F_1^{\prime}(z)F_2^{\prime}(z_0) - F_1^{\prime}(z_0)F_2^{\prime}(z) & F_1(z_0)F_2^{\prime}(z) - F_1^{\prime}(z)F_2(z_0) \end{pmatrix}$$

Poniendo

$$\boldsymbol{M}(\alpha\colon z, z_0) = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo

$$F_j(z) = F_{0j}e^{ik_jz}, \qquad F_j^{\prime}(z) = ik_jF_{0j}e^{ik_jz}$$

para $j = 1, 2$, $z = z_0 + d$, para el caso en que $P + Y = P - P^{\dagger} = 0$, es decir $k_2 = -k_1$,y tras realizar algunas operaciones algebraicas, tenemos:

$$D = -2ik_1F_{01}F_{02}$$

$$m_{11} = -2ik_1F_{01}F_{02}\cos k_1d$$

$$m_{12} = -2iF_{01}F_{02}\sin k_1d$$

$$m_{21} = 2ik_1^2F_{01}F_{02}\sin k_1d$$

$$m_{22} = -2ik_1F_{01}F_{02}cosk_1d$$

Donde **M** nos queda:

$$\boldsymbol{M}(\alpha\colon z_0 + d, z_0) = \begin{pmatrix} \cos k_1d & \dfrac{\sin k_1d}{k_1} \\ -k_1\sin k_1d & \cos k_1d \end{pmatrix}.$$

Matriz de transferencia asociada T

Tenemos que la expresión para la matriz de transferencia asociada **T** es:

$$\begin{vmatrix} \mathbb{F}(\alpha\colon z) \\ \mathbb{A}(\alpha\colon z) \end{vmatrix} = \boldsymbol{T}(\alpha\colon z, z_0) \cdot \begin{vmatrix} \mathbb{F}(\alpha\colon z_0) \\ \mathbb{A}(\alpha\colon z_0) \end{vmatrix}.$$

De donde **T** va a ser igual a:

$$\boldsymbol{T}(\alpha\colon z, z_0) = \begin{pmatrix} F_1(z) & F_2(z) \\ A_1(z) & A_2(z) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_1(z_0) & F_2(z_0) \\ A_1(z_0) & A_2(z_0) \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\boldsymbol{T}(\alpha\colon z, z_0) = \frac{1}{A_2(z_0)F_1(z_0) - A_1(z_0)F_2(z_0)}\begin{pmatrix} F_1(z) & F_2(z) \\ A_1(z) & A_2(z) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_2(z_0) & -F_2(z_0) \\ -A_1(z_0) & F_1(z_0) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}(\alpha: z, z_0) =$$
$$= \frac{1}{A_2(z_0)F_1(z_0) - A_1(z_0)F_2(z_0)} \begin{pmatrix} A_2(z_0)F_1(z) - A_1(z_0)F_2(z) & F_1(z_0)F_2(z) - F_1(z)F_2(z_0) \\ A_1(z)A_2(z_0) - A_1(z_0)A_2(z) & A_2(z)F_1(z_0) - A_1(z)F_2(z_0) \end{pmatrix}$$

Poniendo

$$\boldsymbol{T}(\alpha: z, z_0) = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo

$$F_j(z) = F_{0j} e^{ik_j z}, \qquad A_j(z) = B \frac{dF_j(z)}{dz} + PF_j(z) = (ik_j B + P) F_{0j} e^{ik_j z}$$

para $j = 1, 2$, $z = z_0 + d$, para el caso en que $P + Y = P - P^{\dagger} = 0$, es decir $k_2 = -k_1$,y tras realizar algunas operaciones algebraicas, tenemos:

$$D = -2ik_1 B F_{01} F_{02}$$

$$t_{11} = -2iF_{01}F_{02}(k_1 B cos k_1 d - P \sin k_1 d)$$

$$t_{12} = -2iF_{01}F_{02} \sin k_1 d$$

$$t_{21} = 2iF_{01}F_{02}(k_1^2 B^2 + P^2) \sin k_1 d$$

$$t_{22} = -2iF_{01}F_{02}(k_1 B cos k_1 d + P \sin k_1 d)$$

Donde **T** nos queda:

$$\boldsymbol{T}(\alpha: z_0 + d, z_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{k_1 B \cos k_1 d - P \sin k_1 d}{k_1 B} & \dfrac{\sin k_1 d}{k_1 B} \\ \dfrac{(P^2 + k_1^2 B^2) \sin k_1 d}{-k_1 B} & \dfrac{k_1 B \cos k_1 d + P \sin k_1 d}{k_1 B} \end{pmatrix}.$$

Matriz de rigidez E

Tenemos que la expresión para la matriz de rigidez **E** es:

$$\begin{vmatrix} \mathbb{A}(z_0) \\ \mathbb{A}(z) \end{vmatrix} = \boldsymbol{E}(z, z_0) \cdot \begin{vmatrix} \mathbb{F}(z_0) \\ \mathbb{F}(z) \end{vmatrix}.$$

De donde **E** va a ser igual a:

$$\boldsymbol{E}(z, z_0) = \begin{pmatrix} A_1(z_0) & A_2(z_0) \\ A_1(z) & A_2(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(z_0) & F_2(z_0) \\ F_1(z) & F_2(z) \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\boldsymbol{E}(z,z_0)=\frac{1}{F_1(z_0)F_2(z)-F_1(z)F_2(z_0)}\begin{pmatrix}A_1(z_0) & A_2(z_0)\\ A_1(z) & A_2(z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_2(z) & -F_2(z_0)\\ -F_1(z) & F_1(z_0)\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}(z,z_0)=$$
$$=\frac{1}{F_1(z_0)F_2(z)-F_1(z)F_2(z_0)}\begin{pmatrix}A_1(z_0)F_2(z)-A_2(z_0)F_1(z) & A_2(z_0)F_1(z_0)-A_1(z_0)F_2(z_0)\\ A_1(z)F_2(z)-A_2(z)F_1(z) & A_2(z)F_1(z_0)-A_1(z)F_2(z_0)\end{pmatrix}$$

Poniendo

$$\boldsymbol{E}(z,z_0)=\frac{1}{D}\begin{pmatrix}e_{11} & e_{12}\\ e_{21} & e_{22}\end{pmatrix}$$

Y sustituyendo

$$F_j(z)=F_{0j}e^{ik_jz},\qquad A_j(z)=\ B\frac{dF_j(z)}{dz}+PF_j(z)=(ik_jB+P)F_{0j}e^{ik_jz}$$

para $j=1,2$, $z=z_0+d$, para el caso en que $P+Y=P-P^{\dagger}=0$, es decir $k_2=-k_1$,y tras realizar algunas operaciones algebraicas, tenemos:

$$D=-2iF_{01}F_{02}\sin k_1d$$

$$e_{11}=2iF_{01}F_{02}(k_1Bcosk_1d-P\sin k_1d)$$

$$e_{12}=-2ik_1BF_{01}F_{02}$$

$$e_{21}=2ik_1BF_{01}F_{02}$$

$$e_{22}=\ -2iF_{01}F_{02}(k_1Bcosk_1d+P\sin k_1d)$$

Donde **E** nos queda:

$$\boldsymbol{E}(z_0+d,z_0)=\begin{pmatrix}\dfrac{-k_1B\cos k_1d+P\sin k_1d}{\sin k_1d} & \dfrac{k_1B}{\sin k_1d}\\ \dfrac{-k_1B}{\sin k_1d} & \dfrac{k_1B\cos k_1d+P\sin k_1d}{\sin k_1d}\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{E}(z_0+d,z_0)=\begin{pmatrix}P-k_1B\cot k_1d & \dfrac{k_1B}{\sin k_1d}\\ \dfrac{-k_1B}{\sin k_1d} & P+k_1B\cot k_1d\end{pmatrix}.$$

Matriz de transferencia híbrida H

Tenemos que la expresión para la matriz de transferencia híbrida **H** es:

$$\begin{vmatrix} \mathbb{F}(\alpha: z_0) \\ \mathbb{A}(\alpha: z) \end{vmatrix} = \boldsymbol{H}(\alpha: z, z_0) \cdot \begin{vmatrix} \mathbb{A}(\alpha: z_0) \\ \mathbb{F}(\alpha: z) \end{vmatrix}$$

De donde **H** va a ser igual a:

$$\boldsymbol{H}(\alpha: z, z_0) = \begin{pmatrix} F_1(z_0) & F_2(z_0) \\ A_1(z) & A_2(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1(z_0) & A_2(z_0) \\ F_1(z) & F_2(z) \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\boldsymbol{H}(\alpha: z, z_0) = \frac{1}{A_1(z_0)F_2(z) - A_2(z_0)F_1(z)} \begin{pmatrix} F_1(z_0) & F_2(z_0) \\ A_1(z) & A_2(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2(z) & -A_2(z_0) \\ -F_1(z) & A_1(z_0) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}(\alpha: z, z_0) =$$
$$= \frac{1}{A_1(z_0)F_2(z) - A_2(z_0)F_1(z)} \begin{pmatrix} F_1(z_0)F_2(z) - F_1(z)F_2(z_0) & A_1(z_0)F_2(z_0) - A_2(z_0)F_1(z_0) \\ A_1(z)F_2(z) - A_2(z)F_1(z) & A_1(z_0)A_2(z) - A_1(z)A_2(z_0) \end{pmatrix}$$

Poniendo

$$\boldsymbol{H}(\alpha: z, z_0) = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo

$$F_j(z) = F_{0j} e^{ik_j z}, \qquad A_j(z) = B \frac{dF_j(z)}{dz} + PF_j(z) = (ik_j B + P) F_{0j} e^{ik_j z}$$

para $j = 1, 2$, $z = z_0 + d$ y tras realizar algunas operaciones algebraicas, tenemos:

$$D = (Bik_1 + P) F_{01} e^{ik_1 z_0} F_{02} e^{ik_2 (z_0 + d)} - (Bik_2 + P) F_{01} e^{ik_1 (z_0 + d)} F_{02} e^{ik_2 z_0}$$

$$h_{11} = F_{01} F_{02} \left(e^{ik_1 z_0} e^{ik_2 (z_0 + d)} - e^{ik_1 (z_0 + d)} e^{ik_2 z_0} \right)$$

$$h_{12} = BiF_{01} F_{02} (k_1 - k_2) e^{ik_1 z_0} e^{ik_2 z_0}$$

$$h_{21} = BiF_{01} F_{02} (k_1 - k_2) e^{ik_1 z_0 + d} e^{ik_2 z_0 + d}$$

$$h_{22} = \left(Bik_1 + P\right)(Bik_2 + P) F_{01} F_{02}) (e^{ik_1 z_0} e^{ik_2 (z_0 + d)} - e^{ik_1 (z_0 + d)} e^{ik_2 z_0} \right)$$

Para el caso en que $P + Y = P - P^{\dagger} = 0$, es decir $k_2 = -k_1$, nos queda:

$$\begin{aligned} D &= F_{01} F_{02} \left[(ik_1 B + P) e^{-ik_1 d} - (-ik_1 B + P) e^{ik_1 d} \right] \\ &= F_{01} F_{02} \left[ik_1 B \left(e^{-ik_1 d} + e^{ik_1 d} \right) + P \left(e^{-ik_1 d} - e^{ik_1 d} \right) \right] \\ &= 2iF_{01} F_{02} [k_1 B \cos k_1 d - P \sin k_1 d] \end{aligned}$$

$$h_{11} = -2iF_{01} F_{02} \sin k_1 d$$

$$h_{12} = 2ik_1 B F_{01} F_{02}$$

$$h_{21} = 2ik_1 B F_{01} F_{02}$$

$$h_{22} = -2iF_{01}F_{02}(P^2 + k_1^2B^2)\sin k_1 d$$

Donde **H** nos queda:

$$\boldsymbol{H}(\alpha: z_0 + d, z_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{-\sin k_1 d}{k_1 B\cos k_1 d - P\sin k_1 d} & \dfrac{k_1 B}{k_1 B\cos k_1 d - P\sin k_1 d} \\ \dfrac{k_1 B}{k_1 B\cos k_1 d - P\sin k_1 d} & \dfrac{-(P^2 + k_1^2B^2)\sin k_1 d}{k_1 B\cos k_1 d - P\sin k_1 d} \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{H}(\alpha: z_0 + d, z_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{P - k_1 B\cot k_1 d} & \dfrac{k_1 B}{k_1 B\cos k_1 d - P\sin k_1 d} \\ \dfrac{k_1 B}{k_1 B\cos k_1 d - P\sin k_1 d} & \dfrac{P^2 + k_1^2B^2}{P - k_1 B\cot k_1 d} \end{pmatrix}.$$

Matriz de conformidad o admitancia L

Tenemos que la expresión para la matriz de conformidad o admitancia **L** es:

$$\begin{vmatrix} \mathbb{F}(z_0) \\ \mathbb{F}(z) \end{vmatrix} = \boldsymbol{L}(z, z_0) \cdot \begin{vmatrix} \mathbb{A}(z_0) \\ \mathbb{A}(z) \end{vmatrix}.$$

De donde **L** va a ser igual a:

$$\boldsymbol{L}(z, z_0) = \begin{pmatrix} F_1(z_0) & F_2(z_0) \\ F_1(z) & F_2(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1(z_0) & A_2(z_0) \\ A_1(z) & A_2(z) \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\boldsymbol{L}(z, z_0) = \frac{1}{A_1(z_0)A_2(z) - A_1(z)A_2(z_0)} \begin{pmatrix} F_1(z_0) & F_2(z_0) \\ F_1(z) & F_2(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2(z) & -A_2(z_0) \\ -A_1(z) & A_1(z_0) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}(z, z_0) = \\ = \frac{1}{A_1(z_0)A_2(z) - A_1(z)A_2(z_0)} \begin{pmatrix} A_2(z)F_1(z_0) - A_1(z)F_2(z_0) & A_1(z_0)F_2(z_0) - A_2(z_0)F_1(z_0) \\ A_2(z)F_1(z) - A_1(z)F_2(z) & A_1(z_0)F_2(z) - A_2(z_0)F_1(z) \end{pmatrix}$$

Poniendo

$$\boldsymbol{L}(z, z_0) = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo

$$F_j(z) = F_{0j}e^{ik_j z}, \qquad A_j(z) = B\frac{dF_j(z)}{dz} + PF_j(z) = (ik_jB + P)F_{0j}e^{ik_j z}$$

para $j = 1, 2$, $z = z_0 + d$, para el caso en que $P + Y = P - P^{\dagger} = 0$, es decir $k_2 = -k_1$,y tras realizar algunas operaciones algebraicas, tenemos:

$$D = -2iF_{01}F_{02}(P^2 + k_1^2B^2)\sin k_1 d$$

$$l_{11} = -2iF_{01}F_{02}(k_1 B cos k_1 d + P\sin k_1 d)$$

$$l_{12} = 2ik_1BF_{01}F_{02}$$

$$l_{21} = -2ik_1BF_{01}F_{02}$$

$$l_{22} = 2iF_{01}F_{02}(k_1 B cos k_1 d - P\sin k_1 d)$$

Donde **L** nos queda:

$$\boldsymbol{L}(z_0 + d, z_0) = \begin{pmatrix} \frac{k_1 B\cos k_1 d + P\sin k_1 d}{(P^2 + k_1^2B^2)\sin k_1 d} & \frac{-k_1 B}{(P^2 + k_1^2B^2)\sin k_1 d} \\ \frac{k_1 B}{(P^2 + k_1^2B^2)\sin k_1 d} & \frac{P\sin k_1 d - k_1 B\cos k_1 d}{(P^2 + k_1^2B^2)\sin k_1 d} \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{L}(z_0 + d, z_0) = \begin{pmatrix} \frac{P + k_1 B\cot k_1 d}{P^2 + k_1^2B^2} & \frac{-k_1 B}{(P^2 + k_1^2B^2)\sin k_1 d} \\ \frac{k_1 B}{(P^2 + k_1^2B^2)\sin k_1 d} & \frac{P - k_1 B\cot k_1 d}{P^2 + k_1^2B^2} \end{pmatrix}.$$

3.3 Relaciones entre las matrices de transferencia en el caso homogéneo

Hemos podido comprobar que las relaciones existentes entre estas matrices para cualquier N se cumplen también para $N = 1$.

Relación entre M y T

Tenemos de [20] que

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{R}(z)^{-1} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{R}(z_0)$$

Donde $\boldsymbol{R}(z) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_N & \boldsymbol{0}_N \\ \boldsymbol{P}(z) & \boldsymbol{B}(z) \end{pmatrix}$

Para este caso $\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P & B \end{pmatrix}$ $\quad y \quad$ $\boldsymbol{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{P}{B} & \frac{1}{B} \end{pmatrix}$

Entonces

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{P}{B} & \frac{1}{B} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{k_1 B \cos k_1 d - P \sin k_1 d}{k_1 B} & \frac{\sin k_1 d}{k_1 B} \\ \frac{(P^2 + k_1^2 B^2) \sin k_1 d}{-k_1 B} & \frac{k_1 B \cos k_1 d + P \sin k_1 d}{k_1 B} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P & B \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \frac{k_1 B \cos k_1 d - P \sin k_1 d}{k_1 B} & \frac{\sin k_1 d}{k_1 B} \\ \frac{P \cos k_1 d + k_1 B \sin k_1 d}{-B} & \frac{\cos k_1 d}{B} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P & B \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \cos k_1 d & \frac{\sin k_1 d}{k_1} \\ -k_1 \sin k_1 d & \cos k_1 d \end{pmatrix}.$$

Relación entre E y T

Tenemos de [20] que

$$E_{11} = -[T_{AD}]^{-1} \cdot T_{AA}$$

$$E_{12} = [T_{AD}]^{-1}$$

$$E_{21} = T_{DA} - T_{DD} \cdot [T_{AD}]^{-1} \cdot T_{AA}$$

$$E_{22} = T_{DD} \cdot [T_{AD}]^{-1}$$

Siendo $\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} T_{AA} & T_{AD} \\ T_{DA} & T_{DD} \end{pmatrix}$

Entonces

$$E_{11} = -\frac{k_1 B}{\sin k_1 d} \cdot \frac{k_1 B \cos k_1 d - P \sin k_1 d}{k_1 B} = P - k_1 B \cot k_1 d$$

$$E_{12} = \frac{k_1 B}{\sin k_1 d}$$

$$E_{21} = \frac{(P^2 + k_1^2 B^2) \sin k_1 d}{-k_1 B} - \frac{k_1 B \cos k_1 d + P \sin k_1 d}{k_1 B} \cdot \frac{k_1 B}{\sin k_1 d} \cdot \frac{k_1 B \cos k_1 d - P \sin k_1 d}{k_1 B}$$

$$= -\frac{(P^2 + k_1^2 B^2) \sin k_1 d}{k_1 B} - \frac{k_1^2 B^2 cos^2 k_1 d - P^2 \sin^2 k_1 d}{k_1 B \sin k_1 d} = \frac{-k_1 B}{\sin k_1 d}$$

$$E_{22} = \frac{k_1 B \cos k_1 d + P \sin k_1 d}{k_1 B} \cdot \frac{k_1 B}{\sin k_1 d} = P + k_1 B \cot k_1 d$$

Relación entre H y T

Tenemos de [20] que

$$H_{11} = -[T_{AA}]^{-1} \cdot T_{AD}$$

$$H_{12} = [T_{AA}]^{-1}$$

$$H_{21} = T_{DD} - T_{DA} \cdot [T_{AA}]^{-1} \cdot T_{AD}$$

$$H_{22} = T_{DA} \cdot [T_{AA}]^{-1}$$

Entonces

$$H_{11} = -\frac{k_1 B}{k_1 B \cos k_1 d - P \sin k_1 d} \cdot \frac{\sin k_1 d}{k_1 B} = \frac{1}{P - k_1 B \cot k_1 d}$$

$$H_{12} = \frac{k_1 B}{k_1 B \cos k_1 d - P \sin k_1 d}$$

$$H_{21} = \frac{k_1 B \cos k_1 d + P \sin k_1 d}{k_1 B} + \frac{(P^2 + k_1^2 B^2)\sin k_1 d}{k_1 B} \cdot \frac{k_1 B}{k_1 B \cos k_1 d - P \sin k_1 d} \cdot \frac{\sin k_1 d}{k_1 B}$$

$$= \frac{k_1^2 B^2 cos^2 k_1 d - P^2 \sin^2 k_1 d + (P^2 + k_1^2 B^2)\sin^2 k_1 d}{k_1 B (k_1 B \cos k_1 d - P \sin k_1 d)} = \frac{k_1 B}{k_1 B \cos k_1 d - P \sin k_1 d}$$

$$H_{22} = \frac{(P^2 + k_1^2 B^2)\sin k_1 d}{-k_1 B} \cdot \frac{k_1 B}{k_1 B \cos k_1 d - P \sin k_1 d} = \frac{P^2 + k_1^2 B^2}{P - k_1 B \cot k_1 d}$$

Relación entre L y T

Tenemos de [20] que

$$L_{11} = -[T_{DA}]^{-1} \cdot T_{DD}$$

$$L_{12} = [T_{DA}]^{-1}$$

$$L_{21} = T_{AD} - T_{AA} \cdot [T_{DA}]^{-1} \cdot T_{DD}$$

$$L_{22} = T_{AA} \cdot [T_{DA}]^{-1}$$

Entonces

$$L_{11} = \frac{k_1 B}{(P^2 + k_1^2 B^2)\sin k_1 d} \cdot \frac{k_1 B \cos k_1 d + P \sin k_1 d}{k_1 B} = \frac{P + k_1 B \cot k_1 d}{P^2 + k_1^2 B^2}$$

$$L_{12} = \frac{-k_1 B}{(P^2 + k_1^2 B^2)\sin k_1 d}$$

$$L_{21} = \frac{\sin k_1 d}{k_1 B} - \frac{k_1 B \cos k_1 d - P \sin k_1 d}{k_1 B} \cdot \frac{-k_1 B}{(P^2 + k_1^2 B^2)\sin k_1 d} \cdot \frac{k_1 B \cos k_1 d + P \sin k_1 d}{k_1 B}$$

$$= \frac{\sin k_1 d}{k_1 B} + \frac{k_1^2 B^2 cos^2 k_1 d - P^2 \sin^2 k_1 d}{k_1 B (P^2 + k_1^2 B^2)\sin k_1 d} = \frac{k_1 B}{(P^2 + k_1^2 B^2)\sin k_1 d}$$

$$L_{22} = \frac{k_1 B \cos k_1 d - P \sin k_1 d}{k_1 B} \cdot \frac{-k_1 B}{(P^2 + k_1^2 B^2)\sin k_1 d} = \frac{P - k_1 B \cot k_1 d}{P^2 + k_1^2 B^2}$$

4. Problema de Sturm-Liouville matricial

4.1Pequeño catálogo de problemas de Sturm-Liouville matricial

Ecuación del movimiento.

Imaginemos un sistema a capas donde las intercaras son planos perpendiculares al eje z. Ver figura 4.1.
Cada capa es en principio de un material distinto, aunque se dan casos como los que siguen:
(a) LMR (Left, Middle, Right)
(b) LABR (Left, capa A, capa B, Right)
(c) LABABABABABABR (Left, pedazo de un sistema periódico de dos capas como periodo, Right)
(c) Etcétera.

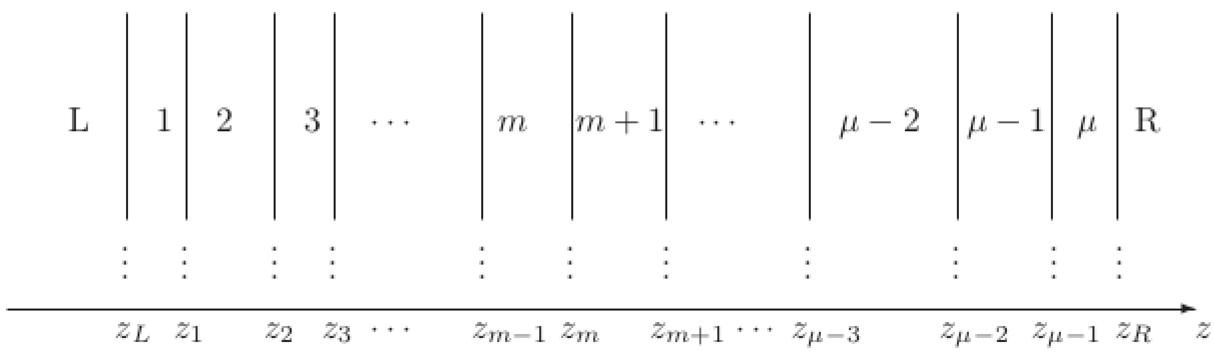

Figura 4.1: Forma general de una heteroestructura con capas extremas L (izquierda), R (derecha) y desde 1 hasta μ son las distintas capas intermedias entre z_L y z_R. A menos que se indique otra cosa, la capa L va de $-\infty$ a z_L mientras que R va de z_R a $+\infty$. $z_0 \equiv z_L$ y $z_\mu \equiv z_R$.

Estudiemos la situación en que se propagan ondas electromagnéticas en dicho sistema. La constante dieléctrica $\epsilon(z)$ es una característica de cada material por lo que hablando en términos matemáticos diríamos que en este caso es una función de z seccionalmente constante, o constante a trozos. Lo mismo sucede con otros parámetros electromagnéticos como la permeabilidad magnética $\mu(z)$, conductividad eléctrica $\sigma(z)$, etc.
Pero si estudiamos la propagación de ondas de sonido en este mismo sistema nos encontramos con que los parámetros elásticos son seccionalmente constantes. Nos referimos al módulo de Young $Y(z)$, módulo de Poisson $\nu(z)$, etc.
Se puede demostrar que en estos casos, y en muchos otros, [17, 21] la ecuación del movimiento adopta una forma de Sturm-Liouville matricial, a saber:

$$\mathbf{L}\cdot\mathbb{F}=\frac{d}{dz}\left[\boldsymbol{B}(z)\cdot\frac{d\mathbb{F}(z)}{dz}+\boldsymbol{P}(z)\cdot\mathbb{F}(z)\right]+\boldsymbol{Y}(z)\cdot\frac{d\mathbb{F}(z)}{dz}+\boldsymbol{W}(z)\cdot\mathbb{F}(z)=0 \qquad (4.1)$$

donde los coeficientes $\boldsymbol{B}(z);\boldsymbol{P}(z);\boldsymbol{Y}(z);\boldsymbol{W}(z)$ son matrices N x N y $\mathbb{F}(z)$ es un vector columna Nx1 cuyas componentes son los campos que se estudian (electromagnéticos, de sonido, etc.). En las matrices coeficientes están los parámetros característicos (constante dieléctrica, módulo de Young,

etc.), por lo que típicamente son funciones de z seccionalmente constantes. Si pedimos que el operador $\mathbf{L}$ sea formalmente hermítico tendremos que $\mathbf{B}$ y $\mathbf{W}$ son matrices hermíticas y que $\boldsymbol{Y} = -\boldsymbol{P}^{\dagger}$. [17, 3]
La forma lineal

$$\mathbb{A}(z) = \boldsymbol{B}(z) \cdot \frac{d\mathbb{F}(z)}{dz} + \boldsymbol{P}(z) \cdot \mathbb{F}(z)$$

es muy importante en lo que sigue, sobre todo porque se puede demostrar bajo condiciones bastante generales que es una función continua para todo valor de z.

I. Sistemas piezoeléctricos multicapas: Curvas de dispersión de velocidades superficiales de ondas SH.

Las ondas transversales horizontales SH, tales como las ondas superficiales transversales electroacústicas, pueden ser guiadas por la superficie libre y por la intercara entre capas de medios piezoeléctricos cuyos cristales presentan simetría 6 mm. Debido a este particular comportamiento de las ondas SH, estas encuentran aplicaciones en algunos tipos de dispositivos como sensores electromecánicos, dispositivos filtradores de ondas acústicas superficiales y transductores, de ahí el interés en el estudio de este tema en los últimos 10 años. [18]
Considérese un sistema piezoeléctrico compuesto de m capas (región M) que alterna los materiales A y B. Los materiales piezoeléctricos A y B presentan simetría 6 mm y sus respectivos ejes principales de orden 6 se han orientado en la dirección del eje x. Como resultado se tendría una onda transversal polarizada en la dirección x para toda dirección de propagación en el plano yz , y cuya ecuación de movimiento puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} &c\nabla^2 u + e\nabla^2\phi = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ &e\nabla^2 u + \epsilon\nabla^2\phi = 0; \end{aligned} \qquad (4.2)$$

Donde:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$u \equiv u_x(y;\, z)$ es el desplazamiento transversal en la dirección x y $\phi \equiv \phi(y;\, z)$ el potencial eléctrico. Los parámetros ρ, c, e y ϵ son la densidad de masa, el módulo elástico, el coeficiente piezoeléctrico y la constante dieléctrica respectivamente.
El sistema de ecuaciones expresado en (4.2) puede ser escrito en la forma Sturm–Liouville matricial:

$$\frac{d}{dz}\left[B(z) \cdot \frac{dF(z)}{dz} + P(z) \cdot F(z)\right] + Y(z) \cdot \frac{dF(z)}{dz} + W(z) \cdot F(z) = 0_{2x1}$$

Donde $F(z) = [u(z), \phi(z)]^T$ y los coeficientes matriciales son:

$$B = \begin{pmatrix} c & e \\ e & -\epsilon \end{pmatrix};$$
$$P + Y = 0;$$
$$W = \begin{pmatrix} \rho\omega^2 - ck_y^2 & -ek_y^2 \\ -ek_y^2 & \epsilon k_y^2 \end{pmatrix}.$$

II. Ecuación de difusión.

La ecuación de difusión tiene gran importancia en la física matemática ya que ésta se utiliza para modelar diferentes fenómenos. Por ejemplo, en mecánica de fluidos permite describir cómo cambia

en el tiempo la concentración de una sustancia química, como un tinte, que se vierte en un líquido; en termodinámica, se utiliza para describir cómo se distribuye la temperatura en el espacio mientras transcurre el tiempo. En mecánica cuántica describe la evolución en el espacio y el tiempo de las probabilidades de una partícula. Esta ecuación también describe el movimiento browniano y los modelos de difusión para dinámica de la población. [23]
En un medio homogéneo e isótropo la ecuación de difusión toma la siguiente forma general:

$$\frac{\partial u(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t} = D\nabla^2 u(\vec{\boldsymbol{r}},t),$$

en donde $u(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ es la cantidad de interés y D se conoce como factor de difusión. Por ejemplo, en el caso termodinámico u representa la temperatura y en el cuántico es la función de onda. Si suponemos que $u(\vec{\boldsymbol{r}},t) = F(\vec{\boldsymbol{r}})T(t)$, obtenemos que

$$F(\vec{\boldsymbol{r}})T'(t) = DT(t)\nabla^2 F(\vec{\boldsymbol{r}})$$

$$\frac{T'(t)}{DT(t)} = \frac{\nabla^2 F(\vec{\boldsymbol{r}})}{F(\vec{\boldsymbol{r}})}.$$

Como el lado izquierdo y el lado derecho de la última ecuación dependen de variables diferentes, ambos deben ser contantes. Entonces, si dejamos de lado la parte temporal y hacemos a $-\lambda^2$ esa constante, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\nabla^2 F(\vec{\boldsymbol{r}}) + \lambda^2 F(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0.$$

Entonces, cuando estudiamos un sistema a capas tal que la dirección z es perpendicular a las interfaces, la función $F(\vec{\boldsymbol{r}})$ es tal que

$$F(\vec{\boldsymbol{r}}) = F(z)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{\rho})},$$

con $\vec{\boldsymbol{k}} = (k_x, k_y)$ y $\vec{\boldsymbol{\rho}} = (x, y)$.
Así, obtenemos:

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{dF(z)}{dz}\right] + (\lambda^2 - k^2)F(z) = 0.$$

III. Ecuación de masa efectiva en coordenadas cartesianas.

El estudio dinámico de los átomos en los sólidos cristalinos, es decir, en aquellos que tienen una estructura periódica y ordenada, resulta complejo debido a que la ecuación de Schrödinger asociada contiene las interacciones electrón–electrón, electrón–ion e ion–ion. Por esta razón, se recurre al uso de métodos aproximados que ayuden a estudiar de manera más sencilla el problema. Uno de estos métodos se conoce como el cálculo de masa efectiva. En él, se define un cuasi-electrón cuya masa es $m*$, que en principio es diferente de la masa m_e del electrón libre. Entonces, introduciendo $m*$, la ecuación de Schrödinger del cristal, para describir al electrón, se convierte en una relación particular que no contiene explícitamente su interacción con la red y con sus propiedades. Esto es particularmente útil al estudiar el problema del electrón en un cristal cuando hay presencia de campos externos [24].

En general, para sistemas con parámetros que varían suavemente con la posición, la ecuación para la función envolvente, denotada por $F(\vec{\boldsymbol{r}})$, es:

$$\frac{1}{2}\hat{\vec{\boldsymbol{p}}}\cdot\left[\frac{\hat{\vec{\boldsymbol{p}}}F(\vec{\boldsymbol{r}})}{m(\vec{\boldsymbol{r}})}\right] + V(\vec{\boldsymbol{r}})F(\vec{\boldsymbol{r}}) = EF(\vec{\boldsymbol{r}}), \tag{4.3}$$

donde $m(\vec{\boldsymbol{r}})$ es la masa efectiva.

Supongamos un sistema a capas en el que la dirección z es perpendicular a las interfaces. En ese caso, $m(\vec{\boldsymbol{r}}) = m(z), V(\vec{\boldsymbol{r}}) = V(z)$ y las soluciones se pueden buscar en la forma

$$F(\vec{\boldsymbol{r}}) = F(z)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{\rho})},$$

con $\vec{\boldsymbol{k}} = (k_x, k_y)$ y $\vec{\boldsymbol{\rho}} = (x, y)$.

En coordenadas cartesianas el operador de momento lineal es:

$$\widehat{\vec{\boldsymbol{p}}} = -i\hbar\nabla = -i\hbar\left[\frac{\partial}{\partial x}\vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\boldsymbol{e}}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{\boldsymbol{e}}_z\right].$$

Al aplicar este operador a la función $F(\vec{\boldsymbol{r}})$, obtenemos:

$$\widehat{\vec{\boldsymbol{p}}}F(\vec{\boldsymbol{r}}) = -i\hbar\big(F(z)ik_x\vec{\boldsymbol{e}}_x + F(z)ik_y\vec{\boldsymbol{e}}_y + F'(z)ik_z\vec{\boldsymbol{e}}_z\big)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{\rho})}.$$

Sustituyendo este resultado en el primer término de la ecuación (4.3), se obtiene que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\widehat{\vec{\boldsymbol{p}}}\cdot\left[\frac{\widehat{\vec{\boldsymbol{p}}}F(\vec{\boldsymbol{r}})}{m(z)}\right] &= -\frac{\hbar^2}{2}\left[ik_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F(z)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{\rho})}}{m(z)}\right) + ik_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F(z)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{\rho})}}{m(z)}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{F'(z)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{\rho})}}{m(z)}\right)\right]\\ &= -\frac{\hbar^2}{2}\left[i^2k_x^2\frac{F(z)}{m(z)} + i^2k_x^2\frac{F(z)}{m(z)} + \frac{d}{dz}\left(\frac{F'(z)}{m(z)}\right)\right]e^{i(\vec{k}\cdot\vec{\rho})}\\ &= -\frac{\hbar^2}{2}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{m(z)}\frac{dF(z)}{dz}\right) - k^2\frac{F(z)}{m(z)}\right]e^{i(\vec{k}\cdot\vec{\rho})}.\end{aligned}$$

Aquí hemos utilizado $\kappa = |\vec{\boldsymbol{\kappa}}|$. Entonces, con este resultado, podemos escribir la ecuación (4.3) como:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{m(z)}\frac{dF(z)}{dz}\right) - \left[\frac{k^2}{m(z)} + \frac{2}{\hbar^2}(V(z)-E)\right]F(z) = 0.$$

4.2 Matrices de transferencia en el problema de Sturm–Liouville matricial

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales, como el que se presenta en el problema de S–L matricial, conocer la matriz de transferencia es equivalente a tener un método para integrar dicho sistema.

Si tenemos cuatro magnitudes y queremos encontrar como se pueden relacionar de la forma:

$$\begin{pmatrix}Posición\ 1\\ posición\ 2\end{pmatrix} = Matriz\begin{pmatrix}Posición\ 3\\ posición\ 4\end{pmatrix}$$

Vemos que hay 24 variantes para colocar estas cuatro magnitudes en estas posiciones. Algunas de estas variantes no son significativas; por ejemplo, si hacemos una selección y después otra cambiando simplemente la magnitud que estaba en la posición 1/2 a la posición 3/4 obtenemos una matriz que es la inversa de la anterior. Esto último deja solo 12 variantes. Algo parecido sucede si dejamos las magnitudes de las posiciones 1 y 2 (3 y 4) e intercambiamos las de las posiciones 3 y 4 (1 y 2). En resumen solo hay tres relevantes que llamamos **T**, **E** y **H**. Por su uso agregamos **M**.

Matriz de transferencia completa **M** (FTM: Full Transfer Matrix):

Transfiere amplitudes $\mathbb{F}$ y sus derivadas de z_0 a z en el correspondiente medio extendido de un dominio α. Es decir:

$$\begin{vmatrix}\mathbb{F}(\alpha: z)\\ \mathbb{F}'(\alpha: z)\end{vmatrix} = \boldsymbol{M}(\alpha: z, z_0)\cdot\begin{vmatrix}\mathbb{F}(\alpha: z_0)\\ \mathbb{F}'(\alpha: z_0)\end{vmatrix}.$$

Para el caso $N = 1$ y para $P + Y = 0$. Se obtiene:

$$\boldsymbol{M}(\alpha\colon z_0 + d, z_0) = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\cos k_1 d & \dfrac{\sin k_1 d}{k_1} \\ -k_1 \sin k_1 d & \cos k_1 d \end{pmatrix}.$$

Matriz de transferencia asociada **T** (ATM: Associated Transfer Matrix):

Transfiere la amplitud $\mathbb{F}$ y la forma diferencial lineal $\mathbb{A}$ de la coordenada z_0 a la coordenada z.

$$\begin{vmatrix} \mathbb{F}(\alpha\colon z) \\ \mathbb{A}(\alpha\colon z) \end{vmatrix} = \boldsymbol{T}(\alpha\colon z, z_0) \cdot \begin{vmatrix} \mathbb{F}(\alpha\colon z_0) \\ \mathbb{A}(\alpha\colon z_0) \end{vmatrix}.$$

Para el caso $N = 1$ y para $P + Y = 0$. Se obtiene:

$$\boldsymbol{T}(\alpha\colon z_0 + d, z_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{k_1 B \cos k_1 d - P \sin k_1 d}{k_1 B} & \dfrac{\sin k_1 d}{k_1 B} \\ \dfrac{(P^2 + k_1^2 B^2) \sin k_1 d}{-k_1 B} & \dfrac{k_1 B \cos k_1 d + P \sin k_1 d}{k_1 B} \end{pmatrix}.$$

Matriz de Rigidez **E** (StM: Stiffness Matrix):

En este caso se toman las formas diferenciales lineales $\mathbb{A}(z_0)$ y $\mathbb{A}(z)$ como variables dependientes de las amplitudes $\mathbb{F}(z_0)$ y $\mathbb{F}(z)$.

$$\begin{vmatrix} \mathbb{A}(z_0) \\ \mathbb{A}(z) \end{vmatrix} = \boldsymbol{E}(z, z_0) \cdot \begin{vmatrix} \mathbb{F}(z_0) \\ \mathbb{F}(z) \end{vmatrix}.$$

Para el caso $N = 1$ y para $P + Y = 0$. Se obtiene:

$$\boldsymbol{E}(z_0 + d, z_0) = \begin{pmatrix} P - k_1 B \cot k_1 d & \dfrac{k_1 B}{\sin k_1 d} \\ \dfrac{-k_1 B}{\sin k_1 d} & P + k_1 B \cot k_1 d \end{pmatrix}.$$

Matriz Compliance–stiffness híbrida de una capa o simplemente matriz híbrida de capa **H** (HTM: Hybrid Transfer Matrix):

Los elementos de esta matriz son una mezcla de la matriz de Conformidad, de Rigidez y de magnitudes de transferencia adimensionales. Para una capa o dominio α, la expresión que define a esta matriz es la siguiente:

$$\begin{vmatrix} \mathbb{F}(\alpha : z_0) \\ \mathbb{A}(\alpha : z) \end{vmatrix} = \boldsymbol{H}(\alpha : z_0, z) \cdot \begin{vmatrix} \mathbb{A}(\alpha : z_0) \\ \mathbb{F}(\alpha : z) \end{vmatrix}.$$

Para el caso $N = 1$ y para $P + Y = 0$. Se obtiene:

$$\boldsymbol{H}(\alpha : z_0 + d, z_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{P - k_1 B \cot k_1 d} & \dfrac{k_1 B}{k_1 B \cos k_1 d - P \sin k_1 d} \\ \dfrac{k_1 B}{k_1 B \cos k_1 d - P \sin k_1 d} & \dfrac{P^2 + k_1^2 B^2}{P - k_1 B \cot k_1 d} \end{pmatrix}.$$

Matriz de Conformidad o Admitancia **L** (Compliance Matrix):

En este caso se toman las amplitudes $\mathbb{F}(z_0)$ y $\mathbb{F}(z)$ como variables dependientes de $\mathbb{A}(z_0)$ y $\mathbb{A}(z)$.

$$\begin{vmatrix} \mathbb{F}(z_0) \\ \mathbb{F}(z) \end{vmatrix} = \boldsymbol{L}(z, z_0) \cdot \begin{vmatrix} \mathbb{A}(z_0) \\ \mathbb{A}(z) \end{vmatrix}.$$

Para el caso $N = 1$ y para $P + Y = 0$. Se obtiene:

$$\boldsymbol{L}(z_0 + d, z_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{P + k_1 B \cot k_1 d}{P^2 + k_1^2 B^2} & \dfrac{-k_1 B}{(P^2 + k_1^2 B^2) \sin k_1 d} \\ \dfrac{k_1 B}{(P^2 + k_1^2 B^2) \sin k_1 d} & \dfrac{P - k_1 B \cot k_1 d}{P^2 + k_1^2 B^2} \end{pmatrix}.$$

Cuando tenemos una estructura multicapas emparedada por sendas capas semiinfinitas a la izquierda (L) y derecha (R), las soluciones LI en estas dos capas extremas se suelen dividir en las que se propagan de izquierda a derecha (con supra índice +) y las que se propagan de derecha a izquierda (con supra índice –). Entre los coeficientes de estas ondas existen relaciones que se pueden compactar de dos maneras sustancialmente diferentes, a saber:

Matriz de Dispersión **S** (ScM: Scattering Matrix):

Sean $a^+(R), a^+(L)$ los coeficientes de las soluciones LI que viajan hacia la derecha en los dominios R y L respectivamente y $a^-(R), a^-(L)$ los coeficientes de las soluciones LI que viajan hacia la izquierda. Normalmente, en los sistemas a capas, se suelen escoger las dos soluciones LI de forma que la primera sea una perturbación que se propaga de izquierda a derecha y la segunda una que se propaga de derecha a izquierda. De este modo podemos definir la llamada matriz de dispersión, que denotamos por $\boldsymbol{S}(R, L)$, como aquella que relaciona los coeficientes de las ondas salientes y las ondas entrantes. Entonces:

$$\begin{vmatrix} a^-(L) \\ a^+(R) \end{vmatrix} = \boldsymbol{S}(R, L) \cdot \begin{vmatrix} a^+(L) \\ a^-(R) \end{vmatrix}.$$

Matriz de transferencia de coeficientes **K** (CTM: Coefficient Transfer Matrix):

Transfiere el conjunto de coeficientes a_j desde el dominio α al dominio α'. Se supone que los medios α, α' pueden ser tratados analíticamente. Sea $a(\alpha)$ el vector formado por los $a_j(\alpha) y\ \mathbb{F}_j(\alpha{:}\,z), \mathbb{F}_j(\alpha'{:}\,z)$ los vectores LI que satisfacen el sistema diferencial y que forman una base:

$$\mathbb{F}(\alpha{:}\,z) = \sum_{j=1}^{2N} a_j(\alpha)\mathbb{F}_j(\alpha{:}\,z)$$

$$\mathbb{F}(\alpha'{:}\,z) = \sum_{j=1}^{2N} a_j(\alpha')\mathbb{F}_j(\alpha'{:}\,z)$$

Entonces:

$$a(\alpha') = \boldsymbol{K}(\alpha', \alpha) \cdot a(\alpha).$$

Como la matriz $\boldsymbol{K}(R, L)$ transfiere los coeficientes de las ondas dentro del dominio L a otro R puede escribirse como:

$$\begin{vmatrix} a^+(R) \\ a^-(R) \end{vmatrix} = \boldsymbol{K}(R, L) \cdot \begin{vmatrix} a^+(L) \\ a^-(L) \end{vmatrix}.$$

Esto puede verse en [17, 18, 19].

4.3 Importancia de las matrices Q y el cambio de base en ellas

Definición de las matrices Q.

Sean $\boldsymbol{F_i}(z)$ las soluciones LI de orden N×1 y $\boldsymbol{A_i}(z)$ las correspondientes formas lineales con $i = 1, 2, \cdots, 2N$; de modo que

$$\boldsymbol{A_i}(z) = \boldsymbol{B}(z) \cdot \frac{d\boldsymbol{F_i}(z)}{dz} + \boldsymbol{P}(z) \cdot \boldsymbol{F_i}(z);\ i = 1, 2, \cdot\cdot\cdot, 2N$$

Asimismo se pueden definir los bicampos $2N \times 1$

$$\boldsymbol{\Psi}_i(z) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F_i}(z) \\ \boldsymbol{A_i}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F_i}(z) \\ \boldsymbol{B}(z) \cdot \frac{d\boldsymbol{F_i}(z)}{dz} + \boldsymbol{P}(z) \cdot \boldsymbol{F_i}(z) \end{pmatrix}.$$

Definamos la matriz $\boldsymbol{Q}(z)$ de orden $2N \times 2N$ con estas soluciones y formas lineales

$$\boldsymbol{Q}(z) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F_1}(z) & \boldsymbol{F_2}(z) & \cdots & \boldsymbol{F_{2N-1}}(z) & \boldsymbol{F_{2N}}(z) \\ \boldsymbol{A_1}(z) & \boldsymbol{A_2}(z) & \cdots & \boldsymbol{A_{2N-1}}(z) & \boldsymbol{A_{2N}}(z) \end{pmatrix}$$

$$= (\boldsymbol{\Psi}_1(z) \quad \boldsymbol{\Psi}_2(z) \qquad \cdots \quad \boldsymbol{\Psi}_{2N-1}(z) \quad \boldsymbol{\Psi}_{2N}(z)).$$

Estas matrices construidas con las bases de soluciones LI tienen una gran relevancia. La matriz de transferencia asociada **T**, por ejemplo, se expresa como

$$\boldsymbol{T}(z, z_0) = \boldsymbol{Q}(z) \cdot [\boldsymbol{Q}(z_0)]^{-1},$$

mientras que la matriz de coeficientes se puede poner como

$$\boldsymbol{K}(R, L) = [\boldsymbol{Q}_R(z_R)]^{-1} \cdot \boldsymbol{T}(z_R, z_L) \cdot \boldsymbol{Q}_L(z_L).$$

Cambio de base y sus efectos en las matrices Q, la matriz de transferencia asociada T y la matriz de transferencia de coeficientes K.

Veamos cómo cambian las matrices **Q** cuando pasamos de la base de las soluciones **F** a otra base cuyas componentes denotamos por $F_i(z)$, sus formas lineales por $A_i(z)$ y sus bicampos por $\boldsymbol{\Phi_i}(z)$.

$$F_i(z) = \sum_{j=1}^{2N} c_{ij} \boldsymbol{F}_j(z)$$

$$A_i(z) = \sum_{j=1}^{2N} c_{ij} \boldsymbol{A}_j(z)$$

$$i = 1,2, \cdots ,2N-1,2N.$$

Por tanto,

$$\boldsymbol{\Phi_i}(z) = \begin{pmatrix} F_i(z) \\ A_i(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{2N} c_{ij} \boldsymbol{F}_j(z) \\ \sum_{j=1}^{2N} c_{ij} \boldsymbol{A}_j(z) \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{2N} c_{ij} \boldsymbol{\Psi}_j(z) \qquad\qquad i = 1,2, \cdots ,2N.$$

Escribamos ahora la relación entre las matrices **Q** en una base y otra; en dicha matriz cada función base ocupa una columna. Por tanto la relación es

$$\mathcal{Q}(z) = \boldsymbol{Q}(z) \cdot \boldsymbol{C}$$

$$[\mathcal{Q}(z_0)]^{-1} = \boldsymbol{C}^{-1} \cdot [\boldsymbol{Q}(z_0)]^{-1}.$$

Ahora tenemos que al cambiar de base la matriz de transferencia asociada **T** cumple que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(z, z_0) &= \mathcal{Q}(z) \cdot [\mathcal{Q}(z_0)]^{-1} \\ &= \boldsymbol{Q}(z) \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{C}^{-1} \cdot [\boldsymbol{Q}(z_0)]^{-1} \\ &= \boldsymbol{Q}(z) \cdot [\boldsymbol{Q}(z_0)]^{-1} \\ &= \boldsymbol{T}(z, z_0). \end{aligned}$$

El resultado es muy importante: la matriz de transferencia asociada **T** no depende de la base escogida para construirla. Realmente esta demostración no es necesaria pues de los teoremas de existencia y unicidad sabemos que de las cuatro magnitudes $\boldsymbol{F}(z_0), \boldsymbol{A}(z_0), \boldsymbol{F}(z), \boldsymbol{A}(z)$, basta conocer dos (usualmente las dos primeras) para conocer las dos restantes.

Lo mismo no sucede con la matriz de coeficientes. Conocemos que

$$\boldsymbol{K}(R, L) = [\boldsymbol{Q}_R(z_R)]^{-1} \cdot \boldsymbol{T}(z_R, z_L) \cdot \boldsymbol{Q}_L(z_L).$$

La matriz $\boldsymbol{Q}_L(z)$ está construida con cierta base en $(-\infty;\ z_L)$, mientras que para tener $\boldsymbol{Q}_R(z)$ se ha escogido cierta base en $(z_R;\ +\infty)$. Entre estas dos bases no hay ninguna conexión *a priori*; de hecho existen en intervalos distintos de la recta real. La matriz $\boldsymbol{K}(R;\ L)$ conecta los coeficientes $\boldsymbol{a}_R$ con los $\boldsymbol{a}_L$.

$$\boldsymbol{a}_R = \boldsymbol{K}(R, L) \cdot \boldsymbol{a}_L.$$

Un caso particular es cuando escogemos en L/R la base canónica en $z_L = z_R$. Entonces

$$\boldsymbol{K}_{can_R, can_L}(R, L) = \boldsymbol{T}(z_R, z_L).$$

Se obtiene la expresión más sencilla para **K.**

Si hacemos un cambio de base en ambos lados del sistema se obtiene la relación entre la matriz de coeficientes vieja y nueva.

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}(R, L) = [\boldsymbol{Q}_R(z_R)]^{-1} \cdot \boldsymbol{T}(z_R, z_L) \cdot \boldsymbol{Q}_L(z_L)$$

$$= \boldsymbol{C}_R^{-1} \cdot [\boldsymbol{Q}_R(z_R)]^{-1} \cdot \boldsymbol{T}(z_R, z_L) \cdot \boldsymbol{Q}_L(z_L) \cdot \boldsymbol{C}_L$$

$$= \boldsymbol{C}_R^{-1} \cdot \boldsymbol{K}(R, L) \cdot \boldsymbol{C}_L.$$

4.4 Relaciones entre matrices de transferencia en el problema de Sturm-Liouville matricial

	Matriz **T**	Matriz **E**	Matriz **H**	Matriz **S**	Matriz **K**
Matriz **T**	I	[18,20]	[18,20]	[20]	[18,20]
Matriz **E**	[18,20]	I	[20]		
Matriz **H**	[18,20]	[20]	I	[18]	
Matriz **S**	[20]		[18]	I	[17,20]
Matriz **K**	[18,20]			[17,20]	I

Relación entre **H** y **K.**

Tenemos que

$$\begin{vmatrix} a^+(R) \\ a^-(R) \end{vmatrix} = \boldsymbol{K}(R, L) \cdot \begin{vmatrix} a^+(L) \\ a^-(L) \end{vmatrix}$$

Y que

$$\begin{vmatrix} \mathbb{F}(R\colon z_R) \\ \mathbb{A}(R\colon z_R) \end{vmatrix} = \boldsymbol{H}(z_R, z_L) \cdot \begin{vmatrix} \mathbb{A}(L\colon z_L) \\ \mathbb{F}(L\colon z_L) \end{vmatrix}$$

En [18] encontramos que

$$\boldsymbol{Q}(\alpha\colon z) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F_1}(\alpha\colon z) & \cdots & \boldsymbol{F_N}(\alpha\colon z) & \boldsymbol{F_{N+1}}(\alpha\colon z) & \cdots & \boldsymbol{F_{2N}}(\alpha\colon z) \\ \boldsymbol{A_1}(\alpha\colon z) & \cdots & \boldsymbol{A_N}(\alpha\colon z) & \boldsymbol{A_{N+1}}(\alpha\colon z) & \cdots & \boldsymbol{A_{2N}}(\alpha\colon z) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}(\alpha\colon z) = \boldsymbol{Q}_{11}(\alpha\colon z)\boldsymbol{a}^{+}(\alpha) + \boldsymbol{Q}_{12}(\alpha\colon z)\boldsymbol{a}^{-}(\alpha);$$

$$\boldsymbol{A}(\alpha\colon z) = \boldsymbol{Q}_{21}(\alpha\colon z)\boldsymbol{a}^{+}(\alpha) + \boldsymbol{Q}_{22}(\alpha\colon z)\boldsymbol{a}^{-}(\alpha);$$

De donde puede obtenerse

$$\begin{vmatrix} \mathbb{F}(R\colon z_R) \\ \mathbb{A}(R\colon z_R) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{11}(R\colon z_R) & \boldsymbol{Q}_{12}(R\colon z_R) \\ \boldsymbol{Q}_{21}(R\colon z_R) & \boldsymbol{Q}_{22}(R\colon z_R) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^{+}(R) \\ a^{-}(R) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbb{A}(L\colon z_L) \\ \mathbb{F}(L\colon z_L) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{21}(L\colon z_L) & \boldsymbol{Q}_{22}(L\colon z_L) \\ \boldsymbol{Q}_{11}(L\colon z_L) & \boldsymbol{Q}_{12}(L\colon z_L) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^{+}(L) \\ a^{-}(L) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{11}(R\colon z_R) & \boldsymbol{Q}_{12}(R\colon z_R) \\ \boldsymbol{Q}_{21}(R\colon z_R) & \boldsymbol{Q}_{22}(R\colon z_R) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^{+}(R) \\ a^{-}(R) \end{vmatrix} = \boldsymbol{H}(z_R, z_L) \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{21}(L\colon z_L) & \boldsymbol{Q}_{22}(L\colon z_L) \\ \boldsymbol{Q}_{11}(L\colon z_L) & \boldsymbol{Q}_{12}(L\colon z_L) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^{+}(L) \\ a^{-}(L) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a^{+}(R) \\ a^{-}(R) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^{+}(L) \\ a^{-}(L) \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{11}(R\colon z_R) & \boldsymbol{Q}_{12}(R\colon z_R) \\ \boldsymbol{Q}_{21}(R\colon z_R) & \boldsymbol{Q}_{22}(R\colon z_R) \end{vmatrix}^{-1} \cdot \boldsymbol{H}(z_R, z_L) \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{21}(L\colon z_L) & \boldsymbol{Q}_{22}(L\colon z_L) \\ \boldsymbol{Q}_{11}(L\colon z_L) & \boldsymbol{Q}_{12}(L\colon z_L) \end{vmatrix}$$

Por lo que

$$\boldsymbol{K}(R, L) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{11}(R\colon z_R) & \boldsymbol{Q}_{12}(R\colon z_R) \\ \boldsymbol{Q}_{21}(R\colon z_R) & \boldsymbol{Q}_{22}(R\colon z_R) \end{vmatrix}^{-1} \cdot \boldsymbol{H}(z_R, z_L) \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{21}(L\colon z_L) & \boldsymbol{Q}_{22}(L\colon z_L) \\ \boldsymbol{Q}_{11}(L\colon z_L) & \boldsymbol{Q}_{12}(L\colon z_L) \end{vmatrix}.$$

Relación entre **E** y **K.**

Tenemos que

$$\begin{vmatrix} a^{+}(R) \\ a^{-}(R) \end{vmatrix} = \boldsymbol{K}(R, L) \cdot \begin{vmatrix} a^{+}(L) \\ a^{-}(L) \end{vmatrix}$$

Y que

$$\begin{vmatrix} \mathbb{A}(L\colon z_L) \\ \mathbb{A}(R\colon z_R) \end{vmatrix} = \boldsymbol{E}(z_R, z_L) \cdot \begin{vmatrix} \mathbb{F}(L\colon z_L) \\ \mathbb{F}(R\colon z_R) \end{vmatrix}$$

Como

$$\boldsymbol{Q}(\alpha\colon z) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F_1}(\alpha\colon z) & \cdots & \boldsymbol{F_N}(\alpha\colon z) & \boldsymbol{F_{N+1}}(\alpha\colon z) & \cdots & \boldsymbol{F_{2N}}(\alpha\colon z) \\ \boldsymbol{A_1}(\alpha\colon z) & \cdots & \boldsymbol{A_N}(\alpha\colon z) & \boldsymbol{A_{N+1}}(\alpha\colon z) & \cdots & \boldsymbol{A_{2N}}(\alpha\colon z) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}(\alpha\colon z) = \boldsymbol{Q}_{11}(\alpha\colon z)\boldsymbol{a}^{+}(\alpha) + \boldsymbol{Q}_{12}(\alpha\colon z)\boldsymbol{a}^{-}(\alpha);$$

$$\boldsymbol{A}(\alpha\colon z) = \boldsymbol{Q}_{21}(\alpha\colon z)\boldsymbol{a}^{+}(\alpha) + \boldsymbol{Q}_{22}(\alpha\colon z)\boldsymbol{a}^{-}(\alpha);$$

Se obtiene

$$\begin{vmatrix} \mathbb{A}(L\colon z_L) \\ \mathbb{A}(R\colon z_R) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \\ \boldsymbol{Q}_{21}(R\colon z_R) & \boldsymbol{Q}_{22}(R\colon z_R) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^{+}(R) \\ a^{-}(R) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{21}(L\colon z_L) & \boldsymbol{Q}_{22}(L\colon z_L) \\ \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^{+}(L) \\ a^{-}(L) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbb{F}(L\colon z_L) \\ \mathbb{F}(R\colon z_R) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \\ \boldsymbol{Q}_{11}(R\colon z_R) & \boldsymbol{Q}_{12}(R\colon z_R) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^{+}(R) \\ a^{-}(R) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{11}(L\colon z_L) & \boldsymbol{Q}_{12}(L\colon z_L) \\ \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^{+}(L) \\ a^{-}(L) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \\ \boldsymbol{Q}_{21}(R\colon z_R) & \boldsymbol{Q}_{22}(R\colon z_R) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^{+}(R) \\ a^{-}(R) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{21}(L\colon z_L) & \boldsymbol{Q}_{22}(L\colon z_L) \\ \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^{+}(L) \\ a^{-}(L) \end{vmatrix} \\ &= \boldsymbol{E}(z_R, z_L) \\ &\cdot \left\{ \begin{vmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \\ \boldsymbol{Q}_{11}(R\colon z_R) & \boldsymbol{Q}_{12}(R\colon z_R) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^{+}(R) \\ a^{-}(R) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{11}(L\colon z_L) & \boldsymbol{Q}_{12}(L\colon z_L) \\ \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^{+}(L) \\ a^{-}(L) \end{vmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \\ \boldsymbol{Q}_{21}(R\colon z_R) & \boldsymbol{Q}_{22}(R\colon z_R) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^{+}(R) \\ a^{-}(R) \end{vmatrix} - \boldsymbol{E}(z_R, z_L) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \\ \boldsymbol{Q}_{11}(R\colon z_R) & \boldsymbol{Q}_{12}(R\colon z_R) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^{+}(R) \\ a^{-}(R) \end{vmatrix} \\ &= \boldsymbol{E}(z_R, z_L) \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{11}(L\colon z_L) & \boldsymbol{Q}_{12}(L\colon z_L) \\ \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^{+}(L) \\ a^{-}(L) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{21}(L\colon z_L) & \boldsymbol{Q}_{22}(L\colon z_L) \\ \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^{+}(L) \\ a^{-}(L) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left[\begin{vmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \\ \boldsymbol{Q}_{21}(R\colon z_R) & \boldsymbol{Q}_{22}(R\colon z_R) \end{vmatrix} - \boldsymbol{E}(z_R, z_L) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \\ \boldsymbol{Q}_{11}(R\colon z_R) & \boldsymbol{Q}_{12}(R\colon z_R) \end{vmatrix} \right] \cdot \begin{vmatrix} a^{+}(R) \\ a^{-}(R) \end{vmatrix} \\ &= \left[\boldsymbol{E}(z_R, z_L) \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{11}(L\colon z_L) & \boldsymbol{Q}_{12}(L\colon z_L) \\ \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{21}(L\colon z_L) & \boldsymbol{Q}_{22}(L\colon z_L) \\ \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \end{vmatrix} \right] \cdot \begin{vmatrix} a^{+}(L) \\ a^{-}(L) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a^{+}(R) \\ a^{-}(R) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^{+}(L) \\ a^{-}(L) \end{vmatrix}^{-1} \\ &= \left[\begin{vmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \\ \boldsymbol{Q}_{21}(R\colon z_R) & \boldsymbol{Q}_{22}(R\colon z_R) \end{vmatrix} - \boldsymbol{E}(z_R, z_L) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \\ \boldsymbol{Q}_{11}(R\colon z_R) & \boldsymbol{Q}_{12}(R\colon z_R) \end{vmatrix} \right]^{-1} \\ &\cdot \left[\boldsymbol{E}(z_R, z_L) \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{11}(L\colon z_L) & \boldsymbol{Q}_{12}(L\colon z_L) \\ \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{21}(L\colon z_L) & \boldsymbol{Q}_{22}(L\colon z_L) \\ \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \end{vmatrix} \right] \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}(R, L) &= \left[\begin{vmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \\ \boldsymbol{Q}_{21}(R\colon z_R) & \boldsymbol{Q}_{22}(R\colon z_R) \end{vmatrix} - \boldsymbol{E}(z_R, z_L) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \\ \boldsymbol{Q}_{11}(R\colon z_R) & \boldsymbol{Q}_{12}(R\colon z_R) \end{vmatrix} \right]^{-1} \\ &\cdot \left[\boldsymbol{E}(z_R, z_L) \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{11}(L\colon z_L) & \boldsymbol{Q}_{12}(L\colon z_L) \\ \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{21}(L\colon z_L) & \boldsymbol{Q}_{22}(L\colon z_L) \\ \mathbf{0}_N & \mathbf{0}_N \end{vmatrix} \right] \end{aligned}$$

Relación entre **E** y **S**.

Tenemos que

$$\begin{vmatrix} a^-(L) \\ a^+(R) \end{vmatrix} = \boldsymbol{S}(R,L) \cdot \begin{vmatrix} a^+(L) \\ a^-(R) \end{vmatrix}$$

Y que

$$\begin{vmatrix} \mathbb{A}(L\colon z_L) \\ \mathbb{A}(R\colon z_R) \end{vmatrix} = \boldsymbol{E}(z_R, z_L) \cdot \begin{vmatrix} \mathbb{F}(L\colon z_L) \\ \mathbb{F}(R\colon z_R) \end{vmatrix}$$

Como

$$\boldsymbol{Q}(\alpha\colon z) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F_1}(\alpha\colon z) & \cdots & \boldsymbol{F_N}(\alpha\colon z) & \boldsymbol{F_{N+1}}(\alpha\colon z) & \cdots & \boldsymbol{F_{2N}}(\alpha\colon z) \\ \boldsymbol{A_1}(\alpha\colon z) & \cdots & \boldsymbol{A_N}(\alpha\colon z) & \boldsymbol{A_{N+1}}(\alpha\colon z) & \cdots & \boldsymbol{A_{2N}}(\alpha\colon z) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}(\alpha\colon z) = \boldsymbol{Q}_{11}(\alpha\colon z)\boldsymbol{a}^+(\alpha) + \boldsymbol{Q}_{12}(\alpha\colon z)\boldsymbol{a}^-(\alpha);$$

$$\boldsymbol{A}(\alpha\colon z) = \boldsymbol{Q}_{21}(\alpha\colon z)\boldsymbol{a}^+(\alpha) + \boldsymbol{Q}_{22}(\alpha\colon z)\boldsymbol{a}^-(\alpha);$$

Se obtiene

$$\begin{vmatrix} \mathbb{A}(L\colon z_L) \\ \mathbb{A}(R\colon z_R) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{22}(L\colon z_L) & \boldsymbol{0}_N \\ \boldsymbol{0}_N & \boldsymbol{Q}_{21}(R\colon z_R) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^-(L) \\ a^+(R) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{21}(L\colon z_L) & \boldsymbol{0}_N \\ \boldsymbol{0}_N & \boldsymbol{Q}_{22}(R\colon z_R) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^+(L) \\ a^-(R) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbb{F}(L\colon z_L) \\ \mathbb{F}(R\colon z_R) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{12}(L\colon z_L) & \boldsymbol{0}_N \\ \boldsymbol{0}_N & \boldsymbol{Q}_{11}(R\colon z_R) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^-(L) \\ a^+(R) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{11}(L\colon z_L) & \boldsymbol{0}_N \\ \boldsymbol{0}_N & \boldsymbol{Q}_{12}(R\colon z_R) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^+(L) \\ a^-(R) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{22}(L\colon z_L) & \boldsymbol{0}_N \\ \boldsymbol{0}_N & \boldsymbol{Q}_{21}(R\colon z_R) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^-(L) \\ a^+(R) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{21}(L\colon z_L) & \boldsymbol{0}_N \\ \boldsymbol{0}_N & \boldsymbol{Q}_{22}(R\colon z_R) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^+(L) \\ a^-(R) \end{vmatrix} \\ &\quad = \boldsymbol{E}(z_R, z_L) \\ &\quad \cdot \left[\begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{12}(L\colon z_L) & \boldsymbol{0}_N \\ \boldsymbol{0}_N & \boldsymbol{Q}_{11}(R\colon z_R) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^-(L) \\ a^+(R) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{11}(L\colon z_L) & \boldsymbol{0}_N \\ \boldsymbol{0}_N & \boldsymbol{Q}_{12}(R\colon z_R) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^+(L) \\ a^-(R) \end{vmatrix} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{22}(L\colon z_L) & \boldsymbol{0}_N \\ \boldsymbol{0}_N & \boldsymbol{Q}_{21}(R\colon z_R) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^-(L) \\ a^+(R) \end{vmatrix} - \boldsymbol{E}(z_R, z_L) \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{12}(L\colon z_L) & \boldsymbol{0}_N \\ \boldsymbol{0}_N & \boldsymbol{Q}_{11}(R\colon z_R) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^-(L) \\ a^+(R) \end{vmatrix} \\ &\quad = \boldsymbol{E}(z_R, z_L) \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{11}(L\colon z_L) & \boldsymbol{0}_N \\ \boldsymbol{0}_N & \boldsymbol{Q}_{12}(R\colon z_R) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^+(L) \\ a^-(R) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{21}(L\colon z_L) & \boldsymbol{0}_N \\ \boldsymbol{0}_N & \boldsymbol{Q}_{22}(R\colon z_R) \end{vmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{vmatrix} a^+(L) \\ a^-(R) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\left[\begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{22}(L:z_L) & \mathbf{0}_N \\ \mathbf{0}_N & \boldsymbol{Q}_{21}(R:z_R) \end{vmatrix} - \boldsymbol{E}(z_R,z_L)\cdot\begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{12}(L:z_L) & \mathbf{0}_N \\ \mathbf{0}_N & \boldsymbol{Q}_{11}(R:z_R) \end{vmatrix}\right]\cdot\begin{vmatrix} a^-(L) \\ a^+(R) \end{vmatrix}$$
$$= \left[\boldsymbol{E}(z_R,z_L)\cdot\begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{11}(L:z_L) & \mathbf{0}_N \\ \mathbf{0}_N & \boldsymbol{Q}_{12}(R:z_R) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{21}(L:z_L) & \mathbf{0}_N \\ \mathbf{0}_N & \boldsymbol{Q}_{22}(R:z_R) \end{vmatrix}\right]\cdot\begin{vmatrix} a^+(L) \\ a^-(R) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a^-(L) \\ a^+(R) \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a^+(L) \\ a^-(R) \end{vmatrix}^{-1}$$
$$= \left[\begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{22}(L:z_L) & \mathbf{0}_N \\ \mathbf{0}_N & \boldsymbol{Q}_{21}(R:z_R) \end{vmatrix} - \boldsymbol{E}(z_R,z_L)\cdot\begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{12}(L:z_L) & \mathbf{0}_N \\ \mathbf{0}_N & \boldsymbol{Q}_{11}(R:z_R) \end{vmatrix}\right]^{-1}$$
$$\cdot\left[\boldsymbol{E}(z_R,z_L)\cdot\begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{11}(L:z_L) & \mathbf{0}_N \\ \mathbf{0}_N & \boldsymbol{Q}_{12}(R:z_R) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{21}(L:z_L) & \mathbf{0}_N \\ \mathbf{0}_N & \boldsymbol{Q}_{22}(R:z_R) \end{vmatrix}\right]$$

Por lo que

$$\boldsymbol{S}(R,L) = \left[\begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{22}(L:z_L) & \mathbf{0}_N \\ \mathbf{0}_N & \boldsymbol{Q}_{21}(R:z_R) \end{vmatrix} - \boldsymbol{E}(z_R,z_L)\cdot\begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{12}(L:z_L) & \mathbf{0}_N \\ \mathbf{0}_N & \boldsymbol{Q}_{11}(R:z_R) \end{vmatrix}\right]^{-1}$$
$$\cdot\left[\boldsymbol{E}(z_R,z_L)\cdot\begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{11}(L:z_L) & \mathbf{0}_N \\ \mathbf{0}_N & \boldsymbol{Q}_{12}(R:z_R) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_{21}(L:z_L) & \mathbf{0}_N \\ \mathbf{0}_N & \boldsymbol{Q}_{22}(R:z_R) \end{vmatrix}\right]$$

4.5 Algunos problemas de contorno en términos de las distintas matrices de transferencia

Las definiciones de la matriz de transferencia completa (FTM) y de la matriz de transferencia asociada (ATM), básicamente aluden a sendos problemas de condiciones iniciales. Por ejemplo, en el caso de la FTM $\mathbf{M}(z;\ z_0)$ conocemos la función y la derivada, en un punto z_0 y de ahí hallamos lo mismo (campo y derivada) en cualquier otro punto z. Para la ATM $\mathbf{T}(z;\ z_0)$ la situación es completamente similar cambiando la derivada por la forma lineal **A**.

Analicemos diferentes casos:

Campo nulo en la intercara izquierda y forma diferencial lineal nula en la derecha.

Para $\mathbf{T}(z_r, z_l)$

$$\begin{vmatrix} \mathbb{F}(z_r) \\ \mathbb{A}(z_r) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{T}_{AA}(z_r,z_l) & \boldsymbol{T}_{AD}(z_r,z_l) \\ \boldsymbol{T}_{DA}(z_r,z_l) & \boldsymbol{T}_{DD}(z_r,z_l) \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \mathbb{F}(z_l) \\ \mathbb{A}(z_l) \end{vmatrix}$$

para el problema que analizamos queda:

$$\begin{vmatrix} \mathbb{F}(z_r) \\ \mathbf{0}_{\boldsymbol{N}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{T}_{AA}(z_r,z_l) & \boldsymbol{T}_{AD}(z_r,z_l) \\ \boldsymbol{T}_{DA}(z_r,z_l) & \boldsymbol{T}_{DD}(z_r,z_l) \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \mathbf{0}_{\boldsymbol{N}} \\ \mathbb{A}(z_l) \end{vmatrix}$$

Por tanto

$$\mathbb{F}(z_r) = \boldsymbol{T}_{AD}(z_r,z_l)\cdot\ \mathbb{A}(z_l)$$

$$\mathbf{0}_N = \boldsymbol{T}_{DD}(z_r, z_l) \cdot \mathbb{A}(z_l)$$

La ecuación trascendente para los autovalores es entonces

$$Det[\boldsymbol{T}_{DD}(z_r, z_l)] = 0$$

Si la barrera infinita estuviese a la derecha y el extremo libre a la izquierda, entonces sería el determinante del bloque $\boldsymbol{T}_{AA}$ quien aparecería en la ecuación trascendente.

Para $\boldsymbol{E}(z_r, z_l)$

$$\begin{vmatrix} \mathbb{A}(z_l) \\ \mathbb{A}(z_r) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_{11}(z_r, z_l) & \boldsymbol{E}_{12}(z_r, z_l) \\ \boldsymbol{E}_{21}(z_r, z_l) & \boldsymbol{E}_{22}(z_r, z_l) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbb{F}(z_l) \\ \mathbb{F}(z_r) \end{vmatrix}$$

Para el problema que analizamos nos queda:

$$\begin{vmatrix} \mathbb{A}(z_l) \\ \mathbf{0}_N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_{11}(z_r, z_l) & \boldsymbol{E}_{12}(z_r, z_l) \\ \boldsymbol{E}_{21}(z_r, z_l) & \boldsymbol{E}_{22}(z_r, z_l) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{0}_N \\ \mathbb{F}(z_r) \end{vmatrix}$$

Por tanto

$$\mathbb{A}(z_l) = \boldsymbol{E}_{12}(z_r, z_l) \cdot \mathbb{F}(z_r)$$

$$\mathbf{0}_N = \boldsymbol{E}_{22}(z_r, z_l) \cdot \mathbb{F}(z_r)$$

La ecuación trascendente es entonces

$$Det[\boldsymbol{E}_{22}(z_r, z_l)] = 0$$

Para $\boldsymbol{H}(z_r, z_l)$

$$\begin{vmatrix} \mathbb{F}(z_r) \\ \mathbb{A}(z_r) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{H}_{11}(z_r, z_l) & \boldsymbol{H}_{12}(z_r, z_l) \\ \boldsymbol{H}_{21}(z_r, z_l) & \boldsymbol{H}_{22}(z_r, z_l) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbb{A}(z_l) \\ \mathbb{F}(z_l) \end{vmatrix}$$

Para el problema que analizamos queda:

$$\begin{vmatrix} \mathbb{F}(z_r) \\ \mathbf{0}_N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{H}_{11}(z_r, z_l) & \boldsymbol{H}_{12}(z_r, z_l) \\ \boldsymbol{H}_{21}(z_r, z_l) & \boldsymbol{H}_{22}(z_r, z_l) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbb{A}(z_l) \\ \mathbf{0}_N \end{vmatrix}$$

Por tanto

$$\mathbb{F}(z_r) = \boldsymbol{H}_{11}(z_r, z_l) \cdot \mathbb{A}(z_l)$$

$$\mathbf{0}_N = \boldsymbol{H}_{21}(z_r, z_l) \cdot \mathbb{A}(z_l)$$

La ecuación trascendente es entonces

$$Det[\boldsymbol{H}_{21}(z_r, z_l)] = 0$$

Para $\boldsymbol{L}(z_r, z_l)$

$$\begin{vmatrix} \mathbb{F}(z_l) \\ \mathbb{F}(z_r) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{L}_{11}(z_r, z_l) & \boldsymbol{L}_{12}(z_r, z_l) \\ \boldsymbol{L}_{21}(z_r, z_l) & \boldsymbol{L}_{22}(z_r, z_l) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbb{A}(z_l) \\ \mathbb{A}(z_r) \end{vmatrix}.$$

Para el problema que analizamos nos queda:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{0_N} \\ \mathbb{F}(z_r) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{L}_{11}(z_r, z_l) & \boldsymbol{L}_{12}(z_r, z_l) \\ \boldsymbol{L}_{21}(z_r, z_l) & \boldsymbol{L}_{22}(z_r, z_l) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbb{A}(z_l) \\ \boldsymbol{0_N} \end{vmatrix}.$$

Por tanto

$$\boldsymbol{0_N} = \boldsymbol{L}_{11}(z_r, z_l) \cdot \mathbb{A}(z_l)$$

$$\mathbb{F}(z_r) = \boldsymbol{L}_{21}(z_r, z_l) \cdot \mathbb{A}(z_l)$$

La ecuación trascendente es entonces

$$Det[\boldsymbol{L}_{11}(z_r, z_l)] = 0$$

Campo nulo en ambas intercaras.

Para $\mathbf{T}(z_r, z_l)$

$$\begin{vmatrix} \mathbb{F}(z_r) \\ \mathbb{A}(z_r) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{T}_{AA}(z_r, z_l) & \boldsymbol{T}_{AD}(z_r, z_l) \\ \boldsymbol{T}_{DA}(z_r, z_l) & \boldsymbol{T}_{DD}(z_r, z_l) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbb{F}(z_l) \\ \mathbb{A}(z_l) \end{vmatrix}$$

Para el problema que analizamos queda:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{0_N} \\ \mathbb{A}(z_r) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{T}_{AA}(z_r, z_l) & \boldsymbol{T}_{AD}(z_r, z_l) \\ \boldsymbol{T}_{DA}(z_r, z_l) & \boldsymbol{T}_{DD}(z_r, z_l) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{0_N} \\ \mathbb{A}(z_l) \end{vmatrix}$$

Por tanto

$$\boldsymbol{0_N} = \boldsymbol{T}_{AD}(z_r, z_l) \cdot \mathbb{A}(z_l)$$

$$\mathbb{A}(z_r) = \boldsymbol{T}_{DD}(z_r, z_l) \cdot \mathbb{A}(z_l)$$

La ecuación trascendente es entonces

$$Det[\boldsymbol{T}_{AD}(z_r, z_l)] = 0$$

Esta ecuación nos da los autovalores.

Para $\boldsymbol{E}(z_r, z_l)$

$$\begin{vmatrix} \mathbb{A}(z_l) \\ \mathbb{A}(z_r) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_{11}(z_r, z_l) & \boldsymbol{E}_{12}(z_r, z_l) \\ \boldsymbol{E}_{21}(z_r, z_l) & \boldsymbol{E}_{22}(z_r, z_l) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbb{F}(z_l) \\ \mathbb{F}(z_r) \end{vmatrix}$$

Para el problema que analizamos nos queda:

$$\begin{vmatrix} \mathbb{A}(z_l) \\ \mathbb{A}(z_r) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_{11}(z_r, z_l) & \boldsymbol{E}_{12}(z_r, z_l) \\ \boldsymbol{E}_{21}(z_r, z_l) & \boldsymbol{E}_{22}(z_r, z_l) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{0_N} \\ \boldsymbol{0_N} \end{vmatrix}$$

Por tanto

$$\mathbb{A}(z_l) = \boldsymbol{0_N}$$

$$\mathbb{A}(z_r) = \boldsymbol{0_N}$$

Entonces la forma diferencial lineal también es nula en ambas intercaras.

Para $\boldsymbol{H}(z_r, z_l)$

$$\begin{vmatrix} \mathbb{F}(z_r) \\ \mathbb{A}(z_r) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{H}_{11}(z_r, z_l) & \boldsymbol{H}_{12}(z_r, z_l) \\ \boldsymbol{H}_{21}(z_r, z_l) & \boldsymbol{H}_{22}(z_r, z_l) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbb{A}(z_l) \\ \mathbb{F}(z_l) \end{vmatrix}$$

Para el problema que analizamos queda:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{0_N} \\ \mathbb{A}(z_r) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{H}_{11}(z_r, z_l) & \boldsymbol{H}_{12}(z_r, z_l) \\ \boldsymbol{H}_{21}(z_r, z_l) & \boldsymbol{H}_{22}(z_r, z_l) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbb{A}(z_l) \\ \boldsymbol{0_N} \end{vmatrix}$$

Por tanto

$$\boldsymbol{0_N} = \boldsymbol{H}_{11}(z_r, z_l) \cdot \mathbb{A}(z_l)$$

$$\mathbb{A}(z_r) = \boldsymbol{H}_{21}(z_r, z_l) \cdot \mathbb{A}(z_l)$$

La ecuación trascendente es entonces

$$Det[\boldsymbol{H}_{11}(z_r, z_l)] = 0$$

Para $\boldsymbol{L}(z_r, z_l)$

$$\begin{vmatrix} \mathbb{F}(z_l) \\ \mathbb{F}(z_r) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{L}_{11}(z_r, z_l) & \boldsymbol{L}_{12}(z_r, z_l) \\ \boldsymbol{L}_{21}(z_r, z_l) & \boldsymbol{L}_{22}(z_r, z_l) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbb{A}(z_l) \\ \mathbb{A}(z_r) \end{vmatrix}.$$

Para el problema que analizamos nos queda:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{0_N} \\ \boldsymbol{0_N} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{L}_{11}(z_r, z_l) & \boldsymbol{L}_{12}(z_r, z_l) \\ \boldsymbol{L}_{21}(z_r, z_l) & \boldsymbol{L}_{22}(z_r, z_l) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbb{A}(z_l) \\ \mathbb{A}(z_r) \end{vmatrix}.$$

Por tanto

$$\boldsymbol{0_N} = \boldsymbol{L}_{11}(z_r, z_l) \cdot \mathbb{A}(z_l) + \boldsymbol{L}_{12}(z_r, z_l) \cdot \mathbb{A}(z_r)$$

$$\boldsymbol{0_N} = \boldsymbol{L}_{21}(z_r, z_l) \cdot \mathbb{A}(z_l) + \boldsymbol{L}_{22}(z_r, z_l) \cdot \mathbb{A}(z_r)$$

La ecuación trascendente es entonces

$$Det[\boldsymbol{L}(z_r, z_l)] \ = \ 0$$

Forma diferencial lineal nula en ambas intercaras.

Para $\mathbf{T}(z_r, z_l)$

$$\begin{vmatrix} \mathbb{F}(z_r) \\ \mathbb{A}(z_r) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{T}_{AA}(z_r, z_l) & \boldsymbol{T}_{AD}(z_r, z_l) \\ \boldsymbol{T}_{DA}(z_r, z_l) & \boldsymbol{T}_{DD}(z_r, z_l) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbb{F}(z_l) \\ \mathbb{A}(z_l) \end{vmatrix}$$

Para el problema que analizamos queda:

$$\begin{vmatrix} \mathbb{F}(z_r) \\ \mathbf{0}_{\boldsymbol{N}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{T}_{AA}(z_r, z_l) & \boldsymbol{T}_{AD}(z_r, z_l) \\ \boldsymbol{T}_{DA}(z_r, z_l) & \boldsymbol{T}_{DD}(z_r, z_l) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbb{F}(z_l) \\ \mathbf{0}_{\boldsymbol{N}} \end{vmatrix}$$

Por tanto

$$\mathbb{F}(z_r) = \boldsymbol{T}_{AA}(z_r, z_l) \cdot \ \mathbb{F}(z_l)$$

$$\mathbf{0}_{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{T}_{DA}(z_r, z_l) \cdot \ \mathbb{F}(z_l)$$

La ecuación trascendente es entonces

$$Det[\boldsymbol{T}_{DA}(z_r, z_l)] \ = \ 0$$

Para $\boldsymbol{E}(z_r, z_l)$

$$\begin{vmatrix} \mathbb{A}(z_l) \\ \mathbb{A}(z_r) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_{11}(z_r, z_l) & \boldsymbol{E}_{12}(z_r, z_l) \\ \boldsymbol{E}_{21}(z_r, z_l) & \boldsymbol{E}_{22}(z_r, z_l) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbb{F}(z_l) \\ \mathbb{F}(z_r) \end{vmatrix}$$

Para el problema que analizamos nos queda:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{0}_{\boldsymbol{N}} \\ \mathbf{0}_{\boldsymbol{N}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_{11}(z_r, z_l) & \boldsymbol{E}_{12}(z_r, z_l) \\ \boldsymbol{E}_{21}(z_r, z_l) & \boldsymbol{E}_{22}(z_r, z_l) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbb{F}(z_l) \\ \mathbb{F}(z_r) \end{vmatrix}$$

Por tanto

$$\mathbf{0}_{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{E}_{11}(z_r, z_l) \cdot \ \mathbb{F}(z_l) + \boldsymbol{E}_{12}(z_r, z_l) \cdot \ \mathbb{F}(z_r)$$

$$\mathbf{0}_{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{E}_{21}(z_r, z_l) \cdot \ \mathbb{F}(z_l) + \boldsymbol{E}_{22}(z_r, z_l) \cdot \ \mathbb{F}(z_r)$$

La ecuación trascendente es entonces

$$Det[\boldsymbol{E}(z_r, z_l)] \ = \ 0$$

Para $\boldsymbol{H}(z_r, z_l)$

$$\begin{vmatrix} \mathbb{F}(z_r) \\ \mathbb{A}(z_r) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{H}_{11}(z_r, z_l) & \boldsymbol{H}_{12}(z_r, z_l) \\ \boldsymbol{H}_{21}(z_r, z_l) & \boldsymbol{H}_{22}(z_r, z_l) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbb{A}(z_l) \\ \mathbb{F}(z_l) \end{vmatrix}$$

Para el problema que analizamos queda:

$$\begin{vmatrix} \mathbb{F}(z_r) \\ \mathbf{0}_{\boldsymbol{N}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{H}_{11}(z_r, z_l) & \boldsymbol{H}_{12}(z_r, z_l) \\ \boldsymbol{H}_{21}(z_r, z_l) & \boldsymbol{H}_{22}(z_r, z_l) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{0}_{\boldsymbol{N}} \\ \mathbb{F}(z_l) \end{vmatrix}$$

Por tanto

$$\mathbb{F}(z_r) = \boldsymbol{H}_{12}(z_r, z_l) \cdot \mathbb{F}(z_l)$$

$$\mathbf{0}_{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{H}_{22}(z_r, z_l) \cdot \mathbb{F}(z_l)$$

La ecuación trascendente es entonces

$$Det[\boldsymbol{H}_{22}(z_r, z_l)] = 0$$

Para $\boldsymbol{L}(z_r, z_l)$

$$\begin{vmatrix} \mathbb{F}(z_l) \\ \mathbb{F}(z_r) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{L}_{11}(z_r, z_l) & \boldsymbol{L}_{12}(z_r, z_l) \\ \boldsymbol{L}_{21}(z_r, z_l) & \boldsymbol{L}_{22}(z_r, z_l) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbb{A}(z_l) \\ \mathbb{A}(z_r) \end{vmatrix}.$$

Para el problema que analizamos nos queda:

$$\begin{vmatrix} \mathbb{F}(z_l) \\ \mathbb{F}(z_r) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{L}_{11}(z_r, z_l) & \boldsymbol{L}_{12}(z_r, z_l) \\ \boldsymbol{L}_{21}(z_r, z_l) & \boldsymbol{L}_{22}(z_r, z_l) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{0}_{\boldsymbol{N}} \\ \mathbf{0}_{\boldsymbol{N}} \end{vmatrix}.$$

Por tanto

$$\mathbb{F}(z_l) = \mathbf{0}_{\boldsymbol{N}}$$

$$\mathbb{F}(z_r) = \mathbf{0}_{\boldsymbol{N}}$$

Entonces el campo también es nulo en ambas intercaras.

5. Conclusiones

Se realizó un análisis bibliográfico de las diferentes definiciones del problema de Sturm–Liouville. Confeccionándose un pequeño catálogo de las diversas definiciones que se dan en la literatura del problema de Sturm–Liouville y de sus implicaciones.

Se realizó una revisión bibliográfica de las distintas matrices de transferencia que se introducen en la literatura para caracterizar las soluciones del problema de Sturm–Liouville matricial.

Se han obtenido las principales matrices de transferencia para el caso $N = 1$ homogéneo.

Se demostró explícitamente para N cualquiera la invariancia de varias matrices respecto de la base de soluciones LI escogida para construirlas.

Se hallaron las relaciones entre algunas matrices de transferencia en el problema de Sturm–Liouville matricial.

Se analizaron algunos problemas de contorno en términos de las distintas matrices de transferencia.

6. Apéndices

A. Obtención de la Matriz de Conformidad o Admitancia L para el caso $N = 1$ y para $P + Y = 0$, como inversa de la Matriz de Rigidez E.

Partiendo de la expresión de **E** para $N = 1$, obtenemos:

$$\boldsymbol{L}(z_0 + d, z_0) = \boldsymbol{E}^{-1}(z_0 + d, z_0) = \begin{pmatrix} P - k_1 B \cot k_1 d & \dfrac{k_1 B}{\sin k_1 d} \\ \dfrac{-k_1 B}{\sin k_1 d} & P + k_1 B \cot k_1 d \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\boldsymbol{L}(z_0 + d, z_0) = \frac{1}{P^2 - k_1^2 B^2 \cot^2 k_1 d + \dfrac{k_1^2 B^2}{\sin^2 k_1 d}} \begin{pmatrix} P + k_1 B \cot k_1 d & \dfrac{-k_1 B}{\sin k_1 d} \\ \dfrac{k_1 B}{\sin k_1 d} & P - k_1 B \cot k_1 d \end{pmatrix}$$

Pero

$$P^2 - k_1^2 B^2 \cot^2 k_1 d + \frac{k_1^2 B^2}{\sin^2 k_1 d} = \frac{P^2 \sin^2 k_1 d - k_1^2 B^2 \cos^2 k_1 d + k_1^2 B^2}{\sin^2 k_1 d}$$

$$= \frac{P^2 \sin^2 k_1 d + k_1^2 B^2 (1 - \cos^2 k_1 d)}{\sin^2 k_1 d}$$

$$= \frac{(P^2 + k_1^2 B^2) \sin^2 k_1 d}{\sin^2 k_1 d} = P^2 + k_1^2 B^2$$

De donde

$$\boldsymbol{L}(z_0 + d, z_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{P + k_1 B \cot k_1 d}{P^2 + k_1^2 B^2} & \dfrac{-k_1 B}{(P^2 + k_1^2 B^2) \sin k_1 d} \\ \dfrac{k_1 B}{(P^2 + k_1^2 B^2) \sin k_1 d} & \dfrac{P - k_1 B \cot k_1 d}{P^2 + k_1^2 B^2} \end{pmatrix}.$$

B. Obtención de relaciones entre matrices de transferencia en el problema de Sturm–Liouville matricial a partir de otras expresiones.

Relación entre **H** y **K.**

En [20] encontramos las siguientes relaciones:

$$\boldsymbol{T}_{AA} = \boldsymbol{H}_{12}^{-1}$$

$$\boldsymbol{T}_{AD} = -\boldsymbol{H}_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{H}_{11}$$

$$\boldsymbol{T}_{DA} = \boldsymbol{H}_{22} \cdot \boldsymbol{H}_{12}^{-1}$$

$$\boldsymbol{T}_{DD} = \boldsymbol{H}_{21} - \boldsymbol{H}_{22} \cdot \boldsymbol{H}_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{H}_{11}$$

Y

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_{11} &= \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot [\boldsymbol{T}_{DA} - \mathbb{Q}(z_r)_{22} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{T}_{AA}] \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{11} \\
&\quad + \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot [\boldsymbol{T}_{DD} - \mathbb{Q}(z_r)_{22} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{T}_{AD}] \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{21} \\
\boldsymbol{K}_{12} &= \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot [\boldsymbol{T}_{DA} - \mathbb{Q}(z_r)_{22} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{T}_{AA}] \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{12} \\
&\quad + \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot [\boldsymbol{T}_{DD} - \mathbb{Q}(z_r)_{22} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{T}_{AD}] \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{22} \\
\boldsymbol{K}_{21} &= \mathbb{Q}(z_r)_{22}^{-1} \cdot [\boldsymbol{T}_{DA} - \mathbb{Q}(z_r)_{21} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{11}^{-1} \cdot \boldsymbol{T}_{AA}] \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{11} \\
&\quad + \mathbb{Q}(z_r)_{22}^{-1} \cdot [\boldsymbol{T}_{DD} - \mathbb{Q}(z_r)_{21} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{11}^{-1} \cdot \boldsymbol{T}_{AD}] \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{21} \\
\boldsymbol{K}_{22} &= \mathbb{Q}(z_r)_{22}^{-1} \cdot [\boldsymbol{T}_{DA} - \mathbb{Q}(z_r)_{21} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{11}^{-1} \cdot \boldsymbol{T}_{AA}] \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{12} \\
&\quad + \mathbb{Q}(z_r)_{22}^{-1} \cdot [\boldsymbol{T}_{DD} - \mathbb{Q}(z_r)_{21} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{11}^{-1} \cdot \boldsymbol{T}_{AD}] \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{22}
\end{aligned}$$

De las cuales obtenemos:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_{11} &= \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot [\boldsymbol{H}_{22} \cdot \boldsymbol{H}_{12}^{-1} - \mathbb{Q}(z_r)_{22} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{H}_{12}^{-1}] \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{11} + \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \\
&\quad \cdot \{[\boldsymbol{H}_{21} - \boldsymbol{H}_{22} \cdot \boldsymbol{H}_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{H}_{11}] - \mathbb{Q}(z_r)_{22} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot [-\boldsymbol{H}_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{H}_{11}]\} \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_{12} &= \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot [\boldsymbol{H}_{22} \cdot \boldsymbol{H}_{12}^{-1} - \mathbb{Q}(z_r)_{22} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{H}_{12}^{-1}] \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{12} + \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \\
&\quad \cdot \{[\boldsymbol{H}_{21} - \boldsymbol{H}_{22} \cdot \boldsymbol{H}_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{H}_{11}] - \mathbb{Q}(z_r)_{22} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot [-\boldsymbol{H}_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{H}_{11}]\} \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_{21} &= \mathbb{Q}(z_r)_{22}^{-1} \cdot [\boldsymbol{H}_{22} \cdot \boldsymbol{H}_{12}^{-1} - \mathbb{Q}(z_r)_{21} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{11}^{-1} \cdot \boldsymbol{H}_{12}^{-1}] \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{11} + \mathbb{Q}(z_r)_{22}^{-1} \\
&\quad \cdot \{[\boldsymbol{H}_{21} - \boldsymbol{H}_{22} \cdot \boldsymbol{H}_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{H}_{11}] - \mathbb{Q}(z_r)_{21} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{11}^{-1} \cdot [-\boldsymbol{H}_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{H}_{11}]\} \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_{22} &= \mathbb{Q}(z_r)_{22}^{-1} \cdot [\boldsymbol{H}_{22} \cdot \boldsymbol{H}_{12}^{-1} - \mathbb{Q}(z_r)_{21} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{11}^{-1} \cdot \boldsymbol{H}_{12}^{-1}] \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{12} + \mathbb{Q}(z_r)_{22}^{-1} \\
&\quad \cdot \{[\boldsymbol{H}_{21} - \boldsymbol{H}_{22} \cdot \boldsymbol{H}_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{H}_{11}] - \mathbb{Q}(z_r)_{21} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{11}^{-1} \cdot [-\boldsymbol{H}_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{H}_{11}]\} \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{22}
\end{aligned}$$

Donde según [20]:

$$\mathbb{Q}(z_r)_{11} = \mathbf{\Gamma}_{11|R} \cdot \mathbf{\Pi}_{k_1 k_2 \cdots k_N}(z_r)$$

$$\mathbb{Q}(z_r)_{12} = \mathbf{\Gamma}_{12|R} \cdot \mathbf{\Pi}_{k_{N+1} k_{N+2} \cdots k_{2N}}(z_r)$$

$$\mathbb{Q}(z_r)_{21} = \mathbf{\Gamma}_{21|R} \cdot \mathbf{\Pi}_{k_1 k_2 \cdots k_N}(z_r)$$

$$\mathbb{Q}(z_r)_{22} = \mathbf{\Gamma}_{22|R} \cdot \mathbf{\Pi}_{k_{N+1} k_{N+2} \cdots k_{2N}}(z_r)$$

$$\mathbb{Q}(z_l)_{11} = \mathbf{\Gamma}_{11|L} \cdot \mathbf{\Pi}_{k_1 k_2 \cdots k_N}(z_l)$$

$$\mathbb{Q}(z_l)_{12} = \mathbf{\Gamma}_{12|L} \cdot \mathbf{\Pi}_{k_{N+1} k_{N+2} \cdots k_{2N}}(z_l)$$

$$\mathbb{Q}(z_l)_{21} = \mathbf{\Gamma}_{21|L} \cdot \mathbf{\Pi}_{k_1 k_2 \cdots k_N}(z_l)$$

$$\mathbb{Q}(z_l)_{22} = \mathbf{\Gamma}_{22|L} \cdot \mathbf{\Pi}_{k_{N+1} k_{N+2} \cdots k_{2N}}(z_l)$$

$$\mathbf{\Gamma}_{11} = \begin{pmatrix} (\mathbb{F}_{10})_1 & (\mathbb{F}_{20})_1 & \cdots & (\mathbb{F}_{N0})_1 \\ (\mathbb{F}_{10})_2 & (\mathbb{F}_{20})_2 & \cdots & (\mathbb{F}_{N0})_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\mathbb{F}_{10})_N & (\mathbb{F}_{20})_N & \cdots & (\mathbb{F}_{N0})_N \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma}_{12} = \begin{pmatrix} (\mathbb{F}_{N+1\,0})_1 & (\mathbb{F}_{N+2\,0})_1 & \cdots & (\mathbb{F}_{2N\,0})_1 \\ (\mathbb{F}_{N+1\,0})_2 & (\mathbb{F}_{N+2\,0})_2 & \cdots & (\mathbb{F}_{2N\,0})_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\mathbb{F}_{N+1\,0})_N & (\mathbb{F}_{N+2\,0})_N & \cdots & (\mathbb{F}_{2N\,0})_N \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma}_{21} = \begin{pmatrix} (\mathbb{A}_{10})_1 & (\mathbb{A}_{20})_1 & \cdots & (\mathbb{A}_{N0})_1 \\ (\mathbb{A}_{10})_2 & (\mathbb{A}_{20})_2 & \cdots & (\mathbb{A}_{N0})_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\mathbb{A}_{10})_N & (\mathbb{A}_{20})_N & \cdots & (\mathbb{A}_{N0})_N \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma}_{22} = \begin{pmatrix} (\mathbb{A}_{N+1\,0})_1 & (\mathbb{A}_{N+2\,0})_1 & \cdots & (\mathbb{A}_{2N\,0})_1 \\ (\mathbb{A}_{N+1\,0})_2 & (\mathbb{A}_{N+2\,0})_2 & \cdots & (\mathbb{A}_{2N\,0})_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\mathbb{A}_{N+1\,0})_N & (\mathbb{A}_{N+2\,0})_N & \cdots & (\mathbb{A}_{2N\,0})_N \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Pi}_{k_1 k_2 \cdots k_N}(z) = \begin{pmatrix} e^{ik_1 z} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{ik_2 z} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{ik_N z} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Pi}_{k_{N+1}k_{N+2}\cdots k_{2N}}(z) = \begin{pmatrix} e^{ik_{N+1}z} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{ik_{N+2}z} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{ik_{2N}z} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_{11} = \mathbf{\Gamma}_{11} \cdot \mathbf{\Gamma}_{21}^{-1} - [\mathbf{\Gamma}_{12} - \mathbf{\Gamma}_{11} \cdot \mathbf{\Gamma}_{21}^{-1}.\mathbf{\Gamma}_{22}] \cdot \left[\mathbf{\Gamma}_{21} \cdot \mathbf{\Pi}_{k_1k_2\cdots k_N}(-d) \cdot \mathbf{\Gamma}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{\Gamma}_{12} \cdot \mathbf{\Pi}_{k_{N+1}k_{N+2}\cdots k_{2N}}(d) - \mathbf{\Gamma}_{22}\right]^{-1}$$

$$\boldsymbol{H}_{12} = [\mathbf{\Gamma}_{12} - \mathbf{\Gamma}_{11} \cdot \mathbf{\Gamma}_{21}^{-1} \cdot \mathbf{\Gamma}_{22}] \cdot \left[\mathbf{\Gamma}_{12} \cdot \mathbf{\Pi}_{k_{N+1}k_{N+2}\cdots k_{2N}}(d) - \mathbf{\Gamma}_{11} \cdot \mathbf{\Pi}_{k_1k_2\cdots k_N}(d) \cdot \mathbf{\Gamma}_{21}^{-1} \cdot \mathbf{\Gamma}_{22}\right]^{-1}$$

$$\boldsymbol{H}_{21} = [\mathbf{\Gamma}_{21} - \mathbf{\Gamma}_{22} \cdot \mathbf{\Gamma}_{12}^{-1}.\mathbf{\Gamma}_{11}] \cdot \left[\mathbf{\Gamma}_{21} \cdot \mathbf{\Pi}_{k_1k_2\cdots k_N}(-d) - \mathbf{\Gamma}_{22} \cdot \mathbf{\Pi}_{k_{N+1}k_{N+2}\cdots k_{2N}}(-d) \cdot \mathbf{\Gamma}_{12}^{-1} \cdot \mathbf{\Gamma}_{11}\right]^{-1}$$

$$\boldsymbol{H}_{22} = \mathbf{\Gamma}_{22} \cdot \mathbf{\Gamma}_{12}^{-1} - [\mathbf{\Gamma}_{21} - \mathbf{\Gamma}_{22} \cdot \mathbf{\Gamma}_{12}^{-1} \cdot \mathbf{\Gamma}_{11}] \cdot \left[\mathbf{\Gamma}_{12} \cdot \mathbf{\Pi}_{k_{N+1}k_{N+2}\cdots k_{2N}}(d) \cdot \mathbf{\Gamma}_{22}^{-1} \cdot \mathbf{\Gamma}_{21} \cdot \mathbf{\Pi}_{k_1k_2\cdots k_N}(-d) - \mathbf{\Gamma}_{11}\right]^{-1}$$

Relación entre **E** y **K**.

En [20] también encontramos las siguientes relaciones:

$$\boldsymbol{T}_{AA} = -\boldsymbol{E}_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_{11}$$

$$\boldsymbol{T}_{AD} = \boldsymbol{E}_{12}^{-1}$$

$$\boldsymbol{T}_{DA} = \boldsymbol{E}_{21} - \boldsymbol{E}_{22} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_{11}$$

$$\boldsymbol{T}_{DD} = \boldsymbol{E}_{22} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1}$$

Utilizando estas expresiones y las anteriores relaciones entre **K** y **T** obtenemos:

$$\boldsymbol{K}_{11} = \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot \{[\boldsymbol{E}_{21} - \boldsymbol{E}_{22} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_{11}] - \mathbb{Q}(z_r)_{22} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot (-\boldsymbol{E}_{12}^{-1}) \cdot \boldsymbol{E}_{11}\} \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{11} + \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot [\boldsymbol{E}_{22} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1} - \mathbb{Q}(z_r)_{22} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1}] \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{21}$$

$$\boldsymbol{K}_{12} = \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot \{[\boldsymbol{E}_{21} - \boldsymbol{E}_{22} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_{11}] - \mathbb{Q}(z_r)_{22} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot (-\boldsymbol{E}_{12}^{-1}) \cdot \boldsymbol{E}_{11}\} \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{12} + \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot [\boldsymbol{E}_{22} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1} - \mathbb{Q}(z_r)_{22} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1}] \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{22}$$

$$\boldsymbol{K}_{21} = \mathbb{Q}(z_r)_{22}^{-1} \cdot \{[\boldsymbol{E}_{21} - \boldsymbol{E}_{22} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_{11}] - \mathbb{Q}(z_r)_{21} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{11}^{-1} \cdot (-\boldsymbol{E}_{12}^{-1}) \cdot \boldsymbol{E}_{11}\} \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{11} + \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot [\boldsymbol{E}_{22} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1} - \mathbb{Q}(z_r)_{21} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{11}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1}] \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{21}$$

$$\boldsymbol{K}_{22} = \mathbb{Q}(z_r)_{22}^{-1} \cdot \{[\boldsymbol{E}_{21} - \boldsymbol{E}_{22} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_{11}] - \mathbb{Q}(z_r)_{21} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{11}^{-1} \cdot (-\boldsymbol{E}_{12}^{-1}) \cdot \boldsymbol{E}_{11}\} \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{12} + \mathbb{Q}(z_r)_{22}^{-1} \cdot [\boldsymbol{E}_{22} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1} - \mathbb{Q}(z_r)_{21} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{11}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1}] \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{22}$$

Relación entre **E** y **S**.

Se encuentran en [20] las relaciones:

$$\boldsymbol{K}_{11} = \boldsymbol{S}_{21} - \boldsymbol{S}_{22} \cdot \boldsymbol{S}_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{S}_{11}$$

$$\boldsymbol{K}_{12} = \boldsymbol{S}_{22} \cdot \boldsymbol{S}_{12}^{-1}$$

$$\boldsymbol{K}_{21} = -\boldsymbol{S}_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{S}_{11}$$

$$\boldsymbol{K}_{22} = \boldsymbol{S}_{12}^{-1}$$

De las mismas obtenemos:

$$\boldsymbol{S}_{11} = -\boldsymbol{K}_{22}^{-1} \cdot \boldsymbol{K}_{21}$$

$$\boldsymbol{S}_{12} = \boldsymbol{K}_{22}^{-1}$$

$$\boldsymbol{S}_{21} = \boldsymbol{K}_{11} - \boldsymbol{K}_{12} \cdot \boldsymbol{K}_{22}^{-1} \cdot \boldsymbol{K}_{21}$$

$$\boldsymbol{S}_{22} = \boldsymbol{K}_{12} \cdot \boldsymbol{K}_{22}^{-1}$$

Utilizando las relaciones entre **K** y **E** obtenidas, nos queda:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{11} = -\{&\mathbb{Q}(z_r)_{22}^{-1} \cdot \{[\boldsymbol{E}_{21} - \boldsymbol{E}_{22} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_{11}] - \mathbb{Q}(z_r)_{21} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{11}^{-1} \cdot (-\boldsymbol{E}_{12}^{-1}) \cdot \boldsymbol{E}_{11}\} \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{12} + \mathbb{Q}(z_r)_{22}^{-1} \\ &\cdot [\boldsymbol{E}_{22} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1} - \mathbb{Q}(z_r)_{21} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{11}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1}] \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{22}\}^{-1} \\ &\cdot \{\mathbb{Q}(z_r)_{22}^{-1} \cdot \{[\boldsymbol{E}_{21} - \boldsymbol{E}_{22} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_{11}] - \mathbb{Q}(z_r)_{21} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{11}^{-1} \cdot (-\boldsymbol{E}_{12}^{-1}) \cdot \boldsymbol{E}_{11}\} \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{11} \\ &+ \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot [\boldsymbol{E}_{22} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1} - \mathbb{Q}(z_r)_{21} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{11}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1}] \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{21}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{12} = \{&\mathbb{Q}(z_r)_{22}^{-1} \cdot \{[\boldsymbol{E}_{21} - \boldsymbol{E}_{22} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_{11}] - \mathbb{Q}(z_r)_{21} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{11}^{-1} \cdot (-\boldsymbol{E}_{12}^{-1}) \cdot \boldsymbol{E}_{11}\} \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{12} + \mathbb{Q}(z_r)_{22}^{-1} \\ &\cdot [\boldsymbol{E}_{22} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1} - \mathbb{Q}(z_r)_{21} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{11}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1}] \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{22}\}^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{21} = \{&\mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot \{[\boldsymbol{E}_{21} - \boldsymbol{E}_{22} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_{11}] - \mathbb{Q}(z_r)_{22} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot (-\boldsymbol{E}_{12}^{-1}) \cdot \boldsymbol{E}_{11}\} \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{11} + \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \\ &\cdot [\boldsymbol{E}_{22} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1} - \mathbb{Q}(z_r)_{22} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1}] \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{21}\} \\ &- \{\mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot \{[\boldsymbol{E}_{21} - \boldsymbol{E}_{22} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_{11}] - \mathbb{Q}(z_r)_{22} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot (-\boldsymbol{E}_{12}^{-1}) \cdot \boldsymbol{E}_{11}\} \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{12} \\ &+ \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot [\boldsymbol{E}_{22} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1} - \mathbb{Q}(z_r)_{22} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1}] \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{22}\} \\ &\cdot \{\mathbb{Q}(z_r)_{22}^{-1} \cdot \{[\boldsymbol{E}_{21} - \boldsymbol{E}_{22} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_{11}] - \mathbb{Q}(z_r)_{21} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{11}^{-1} \cdot (-\boldsymbol{E}_{12}^{-1}) \cdot \boldsymbol{E}_{11}\} \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{12} \\ &+ \mathbb{Q}(z_r)_{22}^{-1} \cdot [\boldsymbol{E}_{22} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1} - \mathbb{Q}(z_r)_{21} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{11}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1}] \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{22}\}^{-1} \\ &\cdot \{\mathbb{Q}(z_r)_{22}^{-1} \cdot \{[\boldsymbol{E}_{21} - \boldsymbol{E}_{22} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_{11}] - \mathbb{Q}(z_r)_{21} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{11}^{-1} \cdot (-\boldsymbol{E}_{12}^{-1}) \cdot \boldsymbol{E}_{11}\} \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{11} \\ &+ \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot [\boldsymbol{E}_{22} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1} - \mathbb{Q}(z_r)_{21} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{11}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1}] \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{21}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{22} = \{&\mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot \{[\boldsymbol{E}_{21} - \boldsymbol{E}_{22} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_{11}] - \mathbb{Q}(z_r)_{22} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot (-\boldsymbol{E}_{12}^{-1}) \cdot \boldsymbol{E}_{11}\} \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{12} + \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \\ &\cdot [\boldsymbol{E}_{22} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1} - \mathbb{Q}(z_r)_{22} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1}] \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{22}\} \\ &\cdot \{\mathbb{Q}(z_r)_{22}^{-1} \cdot \{[\boldsymbol{E}_{21} - \boldsymbol{E}_{22} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_{11}] - \mathbb{Q}(z_r)_{21} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{11}^{-1} \cdot (-\boldsymbol{E}_{12}^{-1}) \cdot \boldsymbol{E}_{11}\} \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{12} \\ &+ \mathbb{Q}(z_r)_{22}^{-1} \cdot [\boldsymbol{E}_{22} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1} - \mathbb{Q}(z_r)_{21} \cdot \mathbb{Q}(z_r)_{11}^{-1} \cdot \boldsymbol{E}_{12}^{-1}] \cdot \mathbb{Q}(z_l)_{22}\}^{-1}\end{aligned}$$

7. Bibliografía

1. López Dennis, Misahel. "Estudios Analíticos de Sistemas de Sturm–Liouville". Diciembre 2006. http://lic.mat.uson.mx/tesis/134TesisMisahel.pdf
2. de Pablo, Arturo; Pestana, Domingo; Rodríguez, José Manuel. "Apuntes de Ampliación de Matemáticas II para Ingenieros de Telecomunicaciones". Julio de 2009. http://ocw.uc3m.es/matematicas/ampliacion-de-matematicas-ii/material-de-clase
3. Gilliam, D.; Schovanec, L. "Course in Ordinary and Partial Differential Equations". Department of Mathematics and Statistics, Texas Tech University, Lubbock, TX 79409.
4. Shapiro, Bruce E. "Ordinary Differential Equations". Lecture Notes for MATH 351. California State University, Northridge. 2003.
5. Aranda, José. "Apuntes de ecuaciones en derivadas parciales". Versión 2000. http://jacobi.fis.ucm.es/pparanda/EDPdf/EDPviejas/ppedp7.pdf
6. Gorbachuk, V. I.; Gorbachuk, M. L. "Boundary Value Problems for Operator Differential Equations" Editorial Board. 1991. ISBN 0-7923-0381-4.
7. Kravchenko, Vladislav V. "Ecuación diferencial. ¿No te gustaría transmutarla?" Revista Eureka. Abril de 2013. https://sites.google.com/site/vvkravche/.
8. Braun, Martín. "Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones". Grupo Editorial Iberoamérica. 1990. ISBN 968-7270-58-6.
9. Bronshtein, I.; Semendiaev, K. "Manual de Matemáticas para ingenieros y estudiantes". Segunda Edición. Editorial Mir. Moscú. 1973.
10. Spiegel, Murray. "Ecuaciones diferenciales aplicadas". Tercera edición. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. 1983. ISBN 968-880-053-8.
11. Peral Alonso, Ireneo. "Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales". Segunda edición. Madrid. Septiembre de 2004. https://www.researchgate.net/publication/44541635_Primer_curso_de_ecuaciones_en_derivadas_parciales_Ireneo_Peral_Alonso
12. Petrovski, I. G. "Lecciones sobre ecuaciones en derivadas parciales". Tercera edición. Instituto del libro. La Habana. 1969.
13. Zill, Dennis G. "Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado". Sexta edición. Intemational Thomson Editores. 1997. ISBN 968-7529-21-0.
14. Courant, R.; Hilbert, D. "Methods of Mathematical Physics" Volume 1. First English Edition. Interscience Publishers. Seventh Printing. December. 1966.
15. Sturm, C.; Liouville, J. "Extrait d'un mémoire sur le développement des fonctions en séries don't les différents termes sont assujétis à satisfaire à une même equation différentielle linéaire, contenant un paramètre variable". Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), pp. 220-222. http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1837_1_2_A20_0
16. Al-Gwaiz, M. A. "Sturm–Liouville Theory and its Applications" Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag London Limited 2008. ISBN 978-1-84628-971-2.
17. Pérez Álvarez, Rolando; García Moliner, Federico. "Transfer Matrix, Green Function and related techniques: Tools for the study of multilayer heteroestructures". Publicacions de la Universitat Jaume I, Castellón de la Plana, España. 2004. ISBN 84-8021-474-4.
18. Pernas Salomón, René. "Problema de Sturm–Liouville matricial en el estudio de diversas excitaciones elementales en sistemas a capas". Tesis de Doctorado, Universidad Autónoma del Estado de Morelos, México. Junio 2015.

19. Pérez Álvarez, Rolando; Pernas Salomón, René. “Algunos aspectos matemáticos de interés en la propagación de diversas excitaciones elementales en sistemas a capas”. Abril 2017. http://www.fc.uaem.mx/~tallerfmcm/
20. Pernas Salomón, René. “Relaciones entre matrices – V6”. 2017. Comunicación privada.
21. Pérez Álvarez, Rolando; Pernas Salomón, René. “Ubiquity of the Sturm–Liouville problem in multilayer systems”. EPL (Europhysics Letters) 115:1, pp 10. Julio 2016.
22. Zill, Dennis G.; Cullen, Michael R. “Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera”. CENGAGE Learning, 7a edición, 2009, ISBN 13:978-0-495-10836-8.
23. Nazario Sánchez, Oscar Eduardo. “Contribución al estudio matemático de la propagación de diversas excitaciones en sistemas a capas”. Tesis de Licenciatura, Universidad Autónoma del Estado de Morelos, México. Junio 2018.
24. Kittel, Charles. “Introducción a la física del estado sólido”. 3^a Edición. Editorial Reverté, S. A. Junio 2003. ISBN: 84–291–4317–3.
25. Elsgoltz, L. “Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional”. Editorial Mir. Moscú. 1969.
26. Smirnov, V. I. “A course of Higher Mathematics”. Volume II. Pergamon Press. 1964.
27. Bondarenko, N. “Spectral analysis for the matrix Sturm–Liouville operator on a finite interval”. Tamkang Journal of Mathematics. Volume 42, Number 3, 305-327. Autumn 2011. doi:10.5556/j.tkjm.42.2011.305-327. http://journals.math.tku.edu.tw/
28. Pérez–Álvarez, R.; Pernas–Salomón, R.; Velasco, V. R. “Relations between transfer matrices and numerical stability analysis to avoid the Ωd problem”. July 2015. http://www.siam.org/journals/ojsa.php
29. Pernas–Salomón, R.; Pérez–Álvarez, R.; Velasco, V. R. “General form of the Green’s function regular at infinity for the homogeneous Sturm–Liouville matrix operator”. 2015. http://www.elsevier.com/locate/amc
30. Hurewicz, Witold. “Lectures on Ordinary Differential Equations”. The Massachusetts Institute of Technology. Second Paperback Edition, March 1970. ISBN: 0 262 58001 2.
31. Everitt, W. N. “A Catalogue of Sturm–Liouville differential equations”. February 2004.
32. Pérez Álvarez, Rolando. “Electrodinámica no estándar”. Enero 2018.
33. Friedman, Bernard. “Principles and techniques of applied mathematics”. JOHN WILEY & SONS, INC. New York. 1956.
34. Trallero–Giner, C.; Pérez–Álvarez, R.; García–Moliner, F. “Long wave polar modes in semiconductor heterostructures”. Elsevier Science. 1998.

DR. VICTOR BARBA LÓPEZ
COORDINADOR DEL POSGRADO EN CIENCIAS
PRESENTE

Atendiendo a la solicitud para emitir DICTAMEN sobre la revisión de la TESIS titulada "Contribución al estudio del problema de Sturm-Liouville y sus matrices de transferencia." que presenta la alumna **Miladys Despaigne Rosell (10009545)** para obtener el título de **Maestro en Ciencias.**

Nos permitimos informarle que nuestro voto es:

NOMBRE	DICTAMEN	FIRMA
Dr. Luis Manuel Gaggero Sager CINC-UAEM	Aprobado	
Dra. Gabriela Hinojosa Palafox CINC-UAEM	Aprobada	
Dr. José A. Otero Hernández ITESM		
Dr. Rolando Pérez Álvarez CINC-UAEM	Aprobado	
Dr. Outmane Oubram FCQeI-UAEM	Aprobado	