



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MORELOS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE  
MORELOS

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN  
CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

**“Dimensión de Hausdorff para  
nudos salvajes definidos  
dinámicamente”**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**DOCTOR EN CIENCIAS**

PRESENTA

**VLADIMIR CAETANO DE OLIVEIRA CONTRERAS**

DIRECTOR DE TESIS

**DRA. GABRIELA HINOJOSA PALAFOX**

Co-DIRECTOR DE TESIS

**DR. ROGELIO VALDEZ DELGADO**

CUERNAVACA, MORELOS

OCTUBRE DE 2021

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE  
MORELOS

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN  
CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

**“Dimensión de Hausdorff para  
nudos salvajes definidos  
dinámicamente”**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**DOCTOR EN CIENCIAS**

PRESENTA

**VLADIMIR CAETANO DE OLIVEIRA CONTRERAS**

DIRECTOR DE TESIS

**DRA. GABRIELA HINOJOSA PALAFOX**

Co-DIRECTOR DE TESIS

**DR. ROGELIO VALDEZ DELGADO**

CUERNAVACA, MORELOS

OCTUBRE DE 2021

## RESUMEN

Una pregunta interesante es cuando una  $n$ -esfera topológica ( $n \geq 1$ ) que no es una esfera redonda puede ser el conjunto límite de un grupo Kleiniano *geoméricamente finito*. En este caso se puede mostrar que la esfera necesariamente es un fractal (posiblemente desanudado). Ejemplos de nudos salvajes en  $\mathbb{S}^3$ , que son conjuntos límites de grupos Kleinianos geoméricamente finitos, fueron obtenidos por Maskit, Kapovich, Hinojosa y Gromov, Lawson y Thurston.

De esta manera, nos preguntamos que acontece con el estudio de la dimensión de Hausdorff de nudos salvajes, definidos dinámicamente de dimensión uno; *i.e.*, 1-nudos salvajes obtenidos como conjuntos límite de grupos Kleinianos actuando en la 3-esfera.

Sea  $\Lambda(\Gamma)$  un nudo salvaje obtenido como el conjunto límite de un grupo Kleiniano geoméricamente finito, actuando en la 3-esfera  $\mathbb{S}^3$ . Construimos una sucesión  $\Gamma_n$  de grupos Kleinianos en  $Möb(\mathbb{S}^3)$  que convergen algebraicamente a  $\Gamma$ . En este trabajo probamos que la dimensión de Hausdorff correspondiente a los conjuntos límites  $\Lambda(\Gamma_n)$ , converge a la dimensión de Hausdorff de  $\Lambda(\Gamma)$ .

Consideremos un nudo poligonal  $K_1$  y sea  $V_1$  un *collar de perlas* consistiendo de la unión de  $n$  3-bolas cerradas, tangentes, consecutivas  $B_1, B_2, \dots, B_n$  en  $\mathbb{S}^3$  que cubren  $K_1$ . Sea  $\Gamma$  el grupo generado por las reflexiones  $I_j$ , sobre  $\Sigma_j = \partial B_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Entonces  $\Gamma$  es un grupo Kleiniano geoméricamente finito y su conjunto límite  $\Lambda(\Gamma)$  es un nudo

salvaje en el sentido de Artin y Fox, el cual es llamado un *nudo salvaje definido dinámicamente*.

Modificaremos ligeramente la construcción de arriba, reduciendo el radio de todas las bolas por  $\epsilon$ , donde  $\epsilon$  es un número real positivo, suficientemente pequeño, para obtener una familia infinita de grupos Kleinianos  $\Gamma_\epsilon$  de manera tal que  $\Gamma_\epsilon$  converge algebraicamente al grupo  $\Gamma$ , cuando  $\epsilon$  tiende a cero. El propósito de nuestro trabajo es demostrar que la dimensión de Hausdorff de los conjuntos límites  $\Lambda(\Gamma_\epsilon)$  converge a la dimensión de Hausdorff de  $\Lambda(\Gamma)$ ; i.e., bajo las condiciones de arriba

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \dim(\Lambda(\Gamma_\epsilon)) = \dim(\Lambda(\Gamma)),$$

donde  $\dim$  denota la dimensión de Hausdorff.

En 1997, C. Bishop y P. Jones probaron que para grupos Kleinianos en  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ , si  $\{G_n\}$  es una sucesión de grupos Kleinianos en  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ , que convergen algebraicamente a  $G$  entonces  $\dim(\lambda(G)) \leq \liminf_n \dim(\lambda(G_n))$ . En otras palabras, la dimensión de Hausdorff es semi-continua como una función de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  a  $\mathbb{R}^+$ .

Esto implica que nuestro resultado satisface el teorema de arriba pero para una sucesión específica de grupos Kleinianos en  $M\ddot{o}b(\mathbb{S}^3)$ .

Decimos que un collar  $V = \cup_{i=1}^n C_i$  de  $n$ -perlas obtenido como la unión de 3-bolas cerradas, tangentes, consecutivas  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) es equivalente a  $T = \cup_{j=1}^n B_j$ , donde  $B_j$  es la unión de 3-bolas cerradas, tangentes, consecutivas, si existe un homeomorfismo  $\varphi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  tal que  $\varphi(V) = T$ ,  $\varphi(C_i) = B_i$ . y  $\varphi(C_i \cap C_{i+1}) = B_i \cap B_{i+1}$ . En este trabajo demostramos que la dimensión de Hausdorff de  $\Lambda(\Gamma_T)$ , el conjunto límite del grupo Kleiniano  $\Gamma_T$  generado por las reflexiones en las fronteras  $\partial B_i$ , varía continuamente para collares de perlas equivalentes.

-

**Abstract** Sea  $T$  un collar de perlas formado por la unión de  $n$  3-bolas tangentes, consecutivas  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) y consideremos al grupo Kleiniano  $\Gamma_T$  generado por las reflexiones en las fronteras  $\partial B_i$ . Sea  $\Lambda(\Gamma_T)$  un nudo salvaje obtenido como el conjunto límite de  $\Gamma_T$  actuando en la 3-esfera  $\mathbb{S}^3$ . Decimos que un collar  $V$  de  $n$ -perlas obtenido como la unión de 3-bolas cerradas, tangentes, consecutivas  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) es equivalente a  $T$  si existe un homeomorfismo  $\varphi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  tal que  $\varphi(V) = T$ ,  $\varphi(C_i) = B_i$ , y  $\varphi(C_i \cap C_{i+1}) = B_i \cap B_{i+1}$ . En este trabajo demostramos que la dimensión de Hausdorff de  $\Lambda(\Gamma_T)$  varía continuamente para collares de perlas equivalentes.

-



*DEDICATORIA*

A mi papá en su inmortalidad.

A mi mamá en su entereza.





# Agradecimientos

Mi agradecimiento, en primer lugar, a mis asesores, los Doctores Gaby Hinojosa y Rogelio Valdez, por la confianza, dedicación, orientaciones y el tiempo empleado a lo largo de estos años para poder terminar este trabajo, que ha cristalizado en una buena amistad. Sin su ayuda, definitivamente no hubiera llegado al final.

Extiendo este agradecimiento al CInC, a la UAEM y al Conacyt por haberme dado la oportunidad de cumplir el sueño de toda mi vida. En particular a Vero Sánchez y Cristina Aranda por su ayuda en todos los trámites administrativos a lo largo de este tiempo.

A Larissa Svitneva, por sus comentarios, ayuda y apoyo desinteresado.

A Majo Domenzain y Lari Trasviña por su ayuda computacional.

A mi mamá, mi hermano Ali, y mis amigos de toda la vida, Dulcelain, Gelita, Andrés, el Gaby, BD, Thomas, Ma, Memo Grabinsky, Quique Nieto, y Carlos Bosch por su estímulo y ánimo constante.

A mi querida amiga Eve, quien a la distancia estuvo siempre pendiente.

A Otto Romero y Renato Leriche por iluminarme con sus experien-

cias.

A Carlos Bosch por incentivar me y convencerme de realizar el doctorado.

# Índice general

<b>1. Preliminares.</b>	<b>3</b>
1.1. El Espacio Hiperbólico. . . . .	3
1.2. Modelo del semiespacio superior $H^3$ . . . . .	5
1.3. Grupos Kleinianos. . . . .	8
1.4. Teoría de nudos. . . . .	13
1.4.1. Invariantes de nudos. . . . .	17
1.5. Límite inverso. . . . .	22
1.5.1. El Conjunto de Cantor. . . . .	25
1.6. Dimensión de Hausdorff. . . . .	27
1.6.1. Dimensión de Hausdorff. . . . .	27
<b>2. Nudos salvajes definidos dinámicamente.</b>	<b>33</b>
2.1. Construcción de nudos salvajes definidos dinámicamente. . . . .	33
2.1.1. Construcción de conjuntos de Cantor definidos dinámicamente. . . . .	37
2.2. Nudos salvajes definidos dinámicamente equivalentes. . . . .	39
<b>3. Continuidad de la dimensión de Hausdorff en nudos sal- vajes definidos dinámicamente, equivalentes.</b>	<b>47</b>
3.1. Dimensión de Hausdorff para nudos salvajes definidos dinámicamente. . . . .	48
3.2. La continuidad de la dimensión de Hausdorff en nudos salvajes definidos dinámicamente equivalentes. . . . .	54



# Introducción

En la década de 1880, Henry Poincaré extendió el concepto de grupo Fuchsiano a tres dimensiones definiendo a un grupo Kleiniano como el subgrupo discreto de las isometrías del espacio hiperbólico tridimensional (grupos de automorfismos conformes de la esfera  $\mathbb{S}^2$ ). Desde entonces, los grupos Kleinianos han desempeñado un papel importante en muchas áreas de las matemáticas, tales como superficies de Riemann y la teoría de Teichmüller, dinámica holomorfa, geometría conforme e hiperbólica, teoría de 3-variedades entre otras.

Una manera de medir la complejidad del conjunto límite de un grupo Kleiniano como un conjunto fractal es con la dimensión de Hausdorff. Se sabe que para un grupo Kleiniano geoméricamente finito en el  $(n + 3)$ -espacio hiperbólico, la dimensión de Hausdorff de su conjunto límite es el exponente de convergencia, ver [4] y [38].

Una pregunta natural es cuando la dimensión de Hausdorff del conjunto límite es una función continua en el espacio de deformaciones de ciertos grupos Kleinianos. Para grupos Kleinianos actuando en el 3-espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^3$ , Canary y Taylor obtuvieron condiciones suficientes para la continuidad de la dimensión de Hausdorff bajo convergencia algebraica, al considerar el caso en que el límite algebraico coincide con el límite geométrico de una sucesión de grupos Kleinianos, [7]. McMullen obtuvo resultados completos sobre la convergencia de la dimensión de Hausdorff al extender el concepto de convergencia fuerte.

El propósito de este trabajo es estudiar la dimensión de Hausdorff de nudos salvajes definidos dinámicamente de dimensión uno; ésto es, 1-nudos salvajes obtenidos como conjuntos límites de grupos Kleinianos actuando en la esfera tridimensional.

En el primer capítulo se dan las definiciones y resultados básicos, así como ejemplos que ilustren cada concepto, sobre grupos Kleinianos, teoría de nudos y dimensión de Hausdorff, que estaremos usando.

En el segundo capítulo tomaremos un collar anudado de 3-bolas redondas, tangentes y consideraremos el grupo generado por las inversiones en cada una de las 2-esferas (la frontera de cada una de las 3-bolas). Este grupo es Kleiniano y su conjunto límite es un nudo salvaje en el sentido de Artin y Fox. En este caso, se obtienen nudos salvajes a través de la acción de un grupo, es decir, de manera dinámica. Posteriormente definiremos los collares de n-perlas equivalentes y demostraremos que sus correspondientes conjuntos límites son nudos salvajes equivalentes.

En el tercer capítulo comparamos la dimensión de Hausdorff de nudos salvajes definidos dinámicamente con la dimensión de Hausdorff de conjuntos de Cantor definidos dinámicamente, usando las ideas de C.J. Bishop, P.W. Jones [4] y de Curtis McMullen [30]. Finalmente demostraremos que la dimensión de Hausdorff de los conjuntos límites de nudos salvajes definidos dinámicamente equivalentes es una función continua.

# Capítulo 1

## Preliminares.

En este capítulo daremos algunas definiciones y resultados básicos de los distintos temas que usaremos a lo largo de este trabajo.

### 1.1. El Espacio Hiperbólico.

Consideremos la bola unitaria en  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\mathbb{B}^3 = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid |p| < 1\}$$

dotada con la métrica

$$ds_{\mathbb{B}}^2 = \frac{4|d_p|^2}{(1 - |p|^2)^2}.$$

Denominamos a  $(\mathbb{B}^3, ds_{\mathbb{B}}^2)$  como el modelo de la bola unitaria para el espacio hiperbólico de dimensión 3 y lo denotaremos por  $\mathbb{B}^3$ .

La distancia entre dos puntos de  $(\mathbb{B}^3, ds_{\mathbb{B}}^2)$  se define a partir de caminos de la manera usual: para un camino  $C$  en  $\mathbb{B}^3$ , la longitud hiperbólica  $l(C)$  de  $C$  es

$$l(C) = \int_C ds_{\mathbb{B}} = \int_C \frac{2|d_p|}{1 - |p|^2}.$$

Dados dos puntos  $p$  y  $q$  en  $\mathbb{B}^3$ , la distancia hipérbolica se define como

$$d_B(p, q) = \inf_C \int_C ds_{\mathbb{B}},$$

donde  $C$  es un camino que une a  $p$  y  $q$ , el ínfimo se toma sobre todos los caminos que unen a  $p$  con  $q$ .

Para  $p$  y  $q$  en  $\mathbb{B}^3$ , existe un único camino  $C$  que realiza la distancia, es decir  $l(C) = d_B(p, q)$ , ver [29].

**Definición 1.1.1.** Al camino  $C$  se le denomina *segmento geodésico* o *geodésica* que une  $p$  con  $q$ .

En [29] se demuestra que  $C$  es un arco de un círculo que pasa a través de  $p$  y  $q$  y es ortogonal a la frontera  $\mathbb{S}^2$  de  $\mathbb{B}^3$ , ver Figura 1.1.

En esta sección denotaremos indistintamente a  $\mathbb{S}^2$  por  $\mathbb{S}^\infty$ .

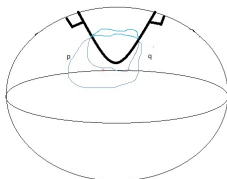


Figura 1.1: Un camino geodésico de  $p$  a  $q$ .

Como  $\mathbb{B}^3$  está contenido en  $\mathbb{R}^3$ , entonces podemos hablar de transformaciones que preserven la orientación y la distancia hiperbólica en  $\mathbb{R}^3$ .

En  $\hat{\mathbb{R}}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$  podemos definir similaridades y reflexiones fundamentales,

$$S, T : \hat{\mathbb{R}}^3 \longrightarrow \hat{\mathbb{R}}^3,$$

$$S(p) = \lambda Ap + b, \lambda > 0, A \in O(3), b \in \mathbb{R}^3,$$



$$T(p) = \frac{p}{|p|^2},$$

donde  $S$  es una similitud,  $T$  es una reflexión fundamental.

En [29] se demuestra que cualquier transformación de Möbius de  $\hat{\mathbb{R}}^3$  pensada de la manera usual, vía matrices o elementos de la forma  $\frac{az+b}{cz+d}$ , es un automorfismo de  $\mathbb{R}^3$  que preserva la orientación, compuesto por composiciones finitas de similitudes y reflexiones fundamentales.

## 1.2. Modelo del semiespacio superior $\mathbb{H}^3$ .

Consideremos el semiespacio superior

$$\mathbb{H}^3 = \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 \mid p_3 > 0\},$$

junto con la métrica

$$ds_{\mathbb{H}}^2 = \frac{|d_p|^2}{p_3^2}.$$

El espacio  $(\mathbb{H}^3, ds_{\mathbb{H}}^2)$  es llamado el modelo del semiplano superior y lo denotaremos por  $\mathbb{H}^3$ , a  $ds_{\mathbb{H}}^2 = \frac{|d_p|^2}{p_3^2}$  se le denomina métrica hiperbólica.

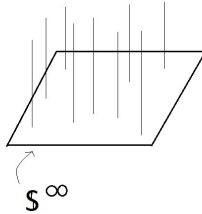


Figura 1.2: El espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^3$  como el semiplano superior con su frontera  $\mathbb{S}^\infty = \mathbb{C}$ .

**Definición 1.2.1.** Una *isometría* de  $\mathbb{H}^3$  es un automorfismo de  $\mathbb{H}^3$  que preserva la distancia hiperbólica.

En [29] se muestra como se puede identificar a las isometrías de  $\mathbb{H}^3$  con las transformaciones de Möbius de  $\mathbb{B}^3$ ,  $Mob(\mathbb{B}^3)$ .

Denotemos por  $\mathbf{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$  al grupo de automorfismos de  $\mathbb{H}^3$  que preservan la orientación y son isométricas con respecto a la métrica hiperbólica.

Dada una isometría  $T$ , existe una transformación de Möbius que manda a un punto dado al cero,  $f_a : a \mapsto 0$ , se puede ver que  $\tilde{T} = f_a \circ T$  es una transformación de Möbius que preserva distancia y así podemos identificar al grupo  $Isom^+(\mathbb{H}^3)$  con  $Mob(\mathbb{B}^3)$ .

Sea  $e = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$  y  $J : \hat{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^3$  la reflexión fundamental dada por  $J(p) = \frac{p}{|p|^2}$ ,  $J(0) = \infty$ ,  $J(\infty) = 0$ . Entonces

$$\pi(p) = e + 2J(J(p) - e),$$

es llamada la **proyección estereográfica**.

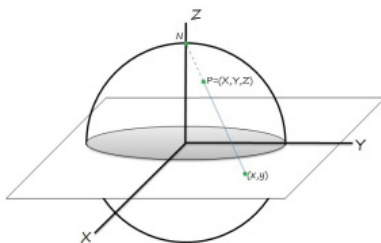


Figura 1.3: La proyección estereográfica de la esfera sobre el plano.

La bola unitaria  $\mathbb{B}^3$  se puede transformar en el semiplano superior  $\mathbb{H}^3$  mediante  $\pi$ .

Podemos rescatar la métrica hiperbólica en la bola unitaria respecto a la métrica hiperbólica en el semiespacio superior, vía

$$ds_{\mathbb{H}}^2 = \pi_*(ds_{\mathbb{B}}^2) = \frac{|dq|^2}{q^3}.$$

Con esto tenemos lo siguiente

$$Mob(\mathbb{H}^3) = \pi Mob(\mathbb{B}^3) \pi^{-1}.$$

Si  $\gamma : \mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{B}^3$  es de Möbius, entonces  $\pi \circ \gamma \circ \pi^{-1}$  es una transformación de Möbius en el semiplano superior:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B}^3 & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{B}^3 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{H}^3 & \xrightarrow{\pi \circ \gamma \circ \pi^{-1}} & \mathbb{H}^3 \end{array}$$

El grupo  $Mob(\mathbb{H}^3)$  se identifica con  $Mob(\mathbb{B}^3) = \left\{ \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1 \right\}$  y también  $PSL_2(\mathbb{C}) = SL_2(\mathbb{C}) / \{\pm Id\}$ .

Con esta identificación, cada elemento de  $Mob(\mathbb{H}^3)$  se identifica con un elemento de  $Mob(\mathbb{B}^3)$ ,  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , el cual, después de conjugar, se puede pensar como un elemento de la forma  $z + 1$  o  $\lambda z$ , ver [21] o [29].

**Definición 1.2.2.** Sea  $\gamma \in Mob \setminus \{Id\}$ . Decimos que  $\gamma$  es **parabólico** si es conjugado a  $z + 1$ , **elíptico** si lo es a  $\lambda z$  con  $|\lambda| = 1$  y **loxodrómico** si es conjugado a  $\lambda z$  con  $|\lambda| \neq 1$ . En particular, si es conjugado a  $\lambda z$  con  $\lambda > 1$  se le llama **hiperbólico**.

Para cualquier elemento  $\gamma \in Isom^+(\mathbb{H}^3)$ , después de conjugar, pasa solamente una de las siguientes alternativas: tiene un punto fijo, en el caso parabólico ( $z + 1$ ); tiene dos puntos fijos, en el caso loxodrómico tiene un punto fijo en  $\mathbb{H}^3$ , en el caso elíptico,  $\gamma(z) = \lambda z$ ,  $|\lambda| = 1$  si tuviéramos  $\gamma(z) = z$ , se tendría que cualquier punto sería punto fijo.

**Definición 1.2.3.** Una variedad topológica conexa  $M$ , es una **3-variedad hiperbólica** si existe una familia (un atlas)  $\{(U_i, f_i)\}_{i \in I}$ ,  $I$  una familia de índices, que satisface:

- i)  $U_i$  es abierto en  $M$ ,  $\forall i \in I$  y  $\{U_i\}$  cubre a  $M$ ,
- ii)  $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{H}^3$  es un homeomorfismo,
- iii) si  $U_{k_i} = U_k \cap U_i \neq \emptyset$ , entonces es conexo y

$$f_{k_i} = f_k \circ f_i^{-1} : f_i(U_{k_i}) \rightarrow f_k(U_{k_i})$$

es un difeomorfismo que preserva orientación y la métrica hiperbólica.

Para mayor profundidad en el tema, se puede consultar [2], [29].

### 1.3. Grupos Kleinianos.

**Definición 1.3.1.** Sea  $\Gamma \subset Isom^+(\mathbb{H}^3)$ , decimos que la acción de  $\Gamma$  en  $\mathbb{H}^3$  es **propiamente discontinuamente** si para todo  $K \subset \mathbb{H}^3$  compacto,  $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(K) \cap K \neq \emptyset\}$  es finito.

Esto significa que si se toma la órbita de un punto (la imagen de un punto  $p$  para todo  $\gamma$  en  $\Gamma$ ), sus puntos de acumulación están en  $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{S}^3$ .

**Definición 1.3.2.** Un subgrupo  $\Gamma$  de  $Isom^+(\mathbb{H}^3)$  es un **Grupo Kleiniano** si  $\Gamma$  actúa propiamente discontinuamente sobre  $\mathbb{H}^3$ .

Bajo las identificaciones que hicimos del grupo  $Isom^+(\mathbb{H}^3)$  con  $Mob(\mathbb{B}^3)$ , con  $Mob(\mathbb{H}^3)$  y con  $PSL_2(\mathbb{C})$ , los subgrupos correspondientes son también denominados Kleinianos.

En nuestro trabajo, el grupo de las transformaciones de Möbius de la 3-esfera  $\mathbb{S}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ , formado por los difeomorfismos conformes de  $\mathbb{S}^3$  con respecto a la métrica usual, será denotado por  $Mob(\mathbb{S}^3)$ .

**Definición 1.3.3.** El **conjunto de discontinuidad** de un subgrupo discreto  $\Gamma \subset Mob(\mathbb{S}^3)$  es  $\Omega(\Gamma) = \{p \in \mathbb{S}^3 \text{ tales que } p \text{ tiene una vecindad } U(p) \text{ de forma que } U(p) \cap \gamma(U(p)) \text{ es vacía para todos, excepto una cantidad finita de elementos } \gamma \in \Gamma\}$ .

**Definición 1.3.4.** Un subgrupo  $\Gamma \subset Mob(\mathbb{S}^3)$  es Kleiniano si  $\Omega(\Gamma)$  es no vacío.

Dada una 3 – variedad hiperbólica  $N$ , existe un grupo Kleiniano libre de torsión  $\Gamma$  de manera que  $N = \mathbb{H}^3/\Gamma$ . El grupo es único bajo conjugación por elementos en  $Isom^+(\mathbb{H}^3)$ . Recíprocamente, para todo grupo Kleiniano libre de torsión  $\Gamma$ ,  $N = \mathbb{H}^3/\Gamma$  es una 3 – variedad

*hiperbólica* completa. Esto es, dada una 3 – *variedad hiperbólica* completa, siempre se puede recuperar un grupo Kleiniano libre de torsión y viceversa, dado un grupo Kleiniano libre de torsión, su cociente es una 3 – *variedad hiperbólica* completa, ver [27].

Para un grupo Kleiniano  $\Gamma \subset Mob(\mathbb{B}^3)$ , la órbita de un punto  $p \in \mathbb{B}^3$  bajo  $\Gamma$  es el conjunto  $\Gamma(p) = \{\gamma(p) | \gamma \in \Gamma\}$ . Como  $\Gamma$  actúa propiamente discontinuamente en  $\mathbb{B}^3$ , entonces los puntos de acumulación de  $\Gamma(p)$  son puntos que están en  $\mathbb{S}^2$ .

**Definición 1.3.5.** *El conjunto límite  $\Lambda(\Gamma)$  es el complemento del conjunto de puntos de discontinuidad; esto es,*

$$\Lambda(\Gamma) = \mathbb{S}^3 - \Omega(\Gamma).$$

En [27] se muestra que  $\Lambda(\Gamma)$  es el conjunto de puntos de acumulación de  $\Gamma(p)$ . En otras palabras, un punto  $p$  es un punto límite del grupo Kleiniano  $\Gamma$ , si existe un punto  $z \in \mathbb{S}^3$  y una sucesión  $\{\gamma_n\}$  de elementos distintos en  $\Gamma$ , con  $\gamma_n(p) \rightarrow z$ . El conjunto de puntos límite es  $\Lambda(\Gamma)$ .

Notamos que el conjunto límite  $\Lambda(\Gamma)$  no depende de la elección de  $p$ , en efecto, consideremos otro punto  $q$ , y la sucesión  $\gamma_n(q) \rightarrow z$ . Queremos ver que  $\gamma_n(q) \rightarrow z$ . Al ser  $\gamma_n$  una isometría,  $d(\gamma_n(p), \gamma_n(q)) = d(p, q)$ , conforme  $n$  crece, la distancia entre  $p$  y  $q$  permanece constante. Esto es, estando en la bola unitaria, se tiene una sucesión de puntos que están convergiendo a la frontera de la bola. Respecto a la métrica hiperbólica, esta distancia permanece constante, lo que significa que en la frontera,  $\mathbb{S}^\infty$ , la distancia euclidiana es cero con lo que  $\gamma_n(p)$  y  $\gamma_n(q)$  tienen que converger al mismo punto  $z$ , ver Figura 4.

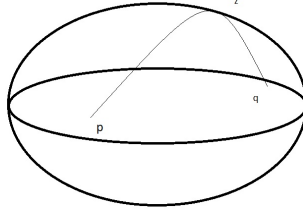


Figura 1.4: El conjunto límite no depende de la elección del punto  $p$ .

**Definición 1.3.6.** *Un grupo Kleiniano es elemental si su conjunto límite contiene a lo más dos puntos, y es no elemental si tiene más de dos puntos.*

Un grupo Kleiniano no elemental  $\Gamma$  contiene un elemento loxodrómico [27], el conjunto límite  $\Lambda(\Gamma)$  coincide con la cerradura del conjunto de puntos fijos de elementos loxodróxicos y para todo elemento  $\gamma \in \Gamma$  loxodrómico, existe  $g \in \Gamma$  loxodrómico tal que  $\gamma$  y  $g$  no tienen puntos fijos en común. Esto dice, que como siempre se tiene un elemento loxodrómico y se puede encontrar otro elemento con puntos fijos distintos, con lo que se tiene entonces una cantidad infinita de elementos loxodróxicos y por lo tanto una infinidad de puntos fijos.

Como  $\Lambda(\Gamma)$  no depende de la elección de  $p \in \mathbb{B}^3$ , uno puede considerar elementos en  $\mathbb{S}^\infty$  y así el conjunto límite  $\Lambda(\Gamma)$  coincide con el conjunto de puntos de acumulación de  $\Gamma(p)$ , para cualquier  $p \in \mathbb{S}^\infty$ .

El conjunto límite  $\Lambda(\Gamma)$  es el mínimo conjunto cerrado, no vacío que es invariante bajo la acción de  $\Gamma$  y con esto se puede concluir entonces que es un conjunto perfecto, ver [27].

Para entender que un grupo Kleiniano sea geométrica finitamente generado necesitamos definir a un poliedro fundamental.

**Definición 1.3.7.** *Sea  $Q \subset \mathbb{H}^3$  un conjunto convexo, cerrado y acotado por a lo más una cantidad numerable de planos hiperbólicos. Decimos*

que  $Q$  es un **poliedro fundamental** para un grupo Kleiniano  $\Gamma$  si satisface:

i)  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(Q) = \mathbb{H}^3$ , la imagen de  $Q$  bajo todos los elementos del grupo cubren a  $\mathbb{H}^3$ .

ii)  $\gamma(\text{int}(Q)) \cap \text{int}(Q) = \emptyset, \forall \gamma \in \Gamma$  no trivial.

iii) Para cada cara  $S$  de  $Q$  existe otra cara  $\tilde{S}$  de  $Q$  y un elemento  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $\gamma(S) = \tilde{S}$ .

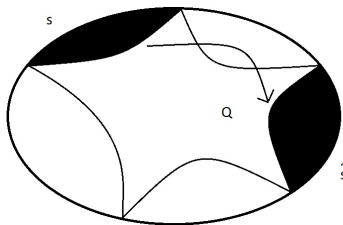


Figura 1.5: La cara  $s$  relacionada con la cara  $\tilde{s}$ .

iv) Para cada conjunto compacto  $K \subset \mathbb{H}^3$ , el conjunto  $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(K) \cap K \neq \emptyset\}$  es finito.

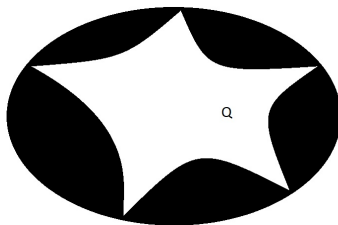


Figura 1.6: Un poliedro fundamental.

**Definición 1.3.8.** Si el grupo Kleiniano  $\Gamma$  tiene un poliedro fundamental que consiste de un número finito de caras, entonces el grupo Kleiniano es finitamente generado.

Uno de los poliedros fundamentales más populares es el poliedro de Dirichlet.

**Definición 1.3.9.** *Para un grupo Kleiniano  $\Gamma$ , se define el **poliedro de Dirichlet** con centro en  $a \in \mathbb{H}^3$  como*

$$p_a = \{p \in \mathbb{H}^3 \mid d(p, a) \leq d(p, \gamma(a)) \text{ para cualquier } \gamma \in \Gamma\}.$$

**Definición 1.3.10.** *Dado un grupo Kleiniano  $\Gamma$ , decimos que es geométricamente finito si existe un poliedro de Dirichlet de  $\Gamma$  que consiste de una cantidad finita de lados.*

Para finalizar la sección, es de nuestro interés estudiar la tasa a la que una órbita tiende a  $\Lambda(\Gamma)$ . Lo primero que observamos es que cualquier par de órbitas  $\Gamma(p)$  y  $\Gamma(q)$  son comparables, en el sentido de que sus razones

$$\frac{1 - |\gamma(p)|}{1 - |\gamma(q)|}, \quad \gamma \in \Gamma$$

no tienden a infinito. Para ver esto, notemos que  $d(0, \gamma(q)) \leq d(0, \gamma(p)) + d(p, q)$  y entonces

$$\log \left( \frac{1 + |\gamma(q)|}{1 - |\gamma(q)|} \right) \leq \log \left( \frac{1 + |\gamma(p)|}{1 - |\gamma(p)|} \right) + d(p, q)$$

con lo que

$$1 - |\gamma(p)| \leq 2 \exp(d(p, q))(1 - |\gamma(q)|),$$

para todo  $\gamma \in \Gamma$ .

Una manera conveniente de estudiar esta tasa a la cual las órbitas tienden a  $\Lambda(\Gamma)$  es considerar la convergencia de la serie  $\sum_{\gamma \in \Gamma} (1 - |\gamma(p)|)^s$  para algunos  $s$ . Con lo visto antes, la convergencia de la serie no depende de  $p \in \mathbb{B}^3$ . Así, en general se considera la serie

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} (1 - |\gamma(0)|)^s.$$



Sin embargo, es más natural hacer uso de la serie

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \exp(-sd(0, \gamma(0))),$$

y en vista de que  $d(0, \gamma(0)) = \log \left( \frac{1+|\gamma(0)|}{1-|\gamma(0)|} \right)$ , la divergencia o convergencia de una es la misma que la de la otra. En 1989, Peter J. Nicholls [35], demostró que si  $s > n - 1$ , entonces la serie siempre converge.

**Definición 1.3.11.** *El **exponente de Poincaré** o **exponente crítico** de un grupo Kleiniano  $\Gamma$  es*

$$\delta(\Gamma) = \inf \{ s \geq 0 : \gamma_s = \sum_{\gamma \in \Gamma} \exp(-sd(0, \gamma(0))) < \infty \},$$

y a  $\gamma_s$  se le llama la **serie de Poincaré  $s$ -dimensional**.

De lo anterior, para cualquier grupo Kleiniano  $\Gamma$ ,  $\delta(\Gamma) \leq n - 1$ . Se dice que el tipo de convergencia o divergencia del grupo Kleiniano es aquella para la cual la serie

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \exp(-\delta(\Gamma)d(0, \gamma(0)))$$

converge o diverge. En algunos textos, como [35], el tipo de convergencia o divergencia de  $\Gamma$  se establece si la serie

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \exp(-(n - 1)d(0, \gamma(0)))$$

converge o diverge.

## 1.4. Teoría de nudos.

**Definición 1.4.1.** *Un **1-nudo**, un **nudo topológico** o simplemente un **nudo**  $K$  es un encaje del círculo  $\mathbb{S}^1$  en el espacio tridimensional  $\mathbb{R}^3$  (o en  $\mathbb{S}^3$ , la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^4$ ).*

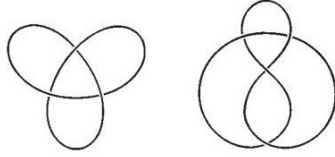


Figura 1.7: Ejemplos de nudos.

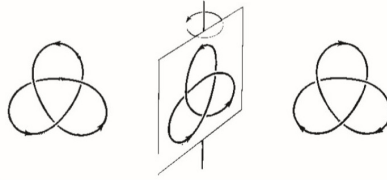


Figura 1.8: El nudo trébol en un espejo.

**Definición 1.4.2.** Decimos que dos nudos  $K_1$  y  $K_2$  son **equivalentes** si existe un homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  (o en  $\mathbb{S}^3$ ) que preserve la orientación tal que  $h(K_1) = K_2$ .

**Definición 1.4.3.** Una isotopía ambiente entre dos aplicaciones continuas  $f$  y  $g : X \rightarrow Y$ , es otra aplicación continua  $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ , que cumpla  $F(x, 0) = f(x)$ ,  $F(x, 1) = g(x)$ , para toda  $x \in X$  y tal que si  $t_0 \in [0, 1]$ , entonces  $F(x, t_0)$  es un homeomorfismo.

**Definición 1.4.4.** Se dice que dos nudos  $K_1$  y  $K_2$  son isotópicos si existe una isotopía del ambiente entre la identidad y un homeomorfismo  $h$  que transforme  $K_1$  en  $K_2$ , es decir, una isotopía  $F : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  de manera que  $F(x, 0) = x$  y  $F(x, 1) = h(x)$ , para toda  $x \in \mathbb{R}^3$  y  $h(K_1) = K_2$ , perteneciendo entonces a la misma clase de isotopía.

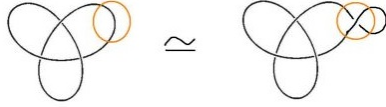


Figura 1.9: Dos nudos equivalentes.

Existen distintos tipo de nudos, a los cuales por sí solos se les podría dedicar gran parte de un trabajo (el estudio de sus propiedades e invariantes), entre ellos se pueden encontrar los nudos anfiqueirales, los nudos invertibles, los nudos mansos, los nudos salvajes, los nudos tóricos. Para profundizar en cada uno de ellos se puede consultar [1], [3], [33], [37]. Nosotros concentraremos nuestra atención en algunos resultados obtenidos sobre nudos salvajes.

**Definición 1.4.5.** *Un nudo  $K$  es **manso**, si es equivalente a un nudo poligonal (aquel que se obtiene por la unión finita de segmentos o aristas, y cuyos extremos son los vértices del nudo). En caso contrario se dice que es **salvaje**.*

**Definición 1.4.6.** *Un punto  $x$  en el nudo  $K$  es **localmente manso**, si existe un homeomorfismo  $f$  y una vecindad abierta  $U$  de  $x$  de manera que  $f(U, U \cap K) = (\text{int}(\mathbb{B}^3), \text{int}(\mathbb{B}^1))$ , donde  $\mathbb{B}^1$  es una bola cerrada en  $\mathbb{R}$ . Si no existe tal vecindad, entonces se dice que  $x$  es un **punto salvaje**.*

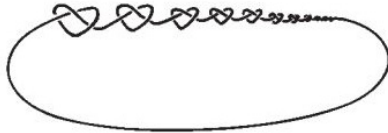


Figura 1.10: Un nudo  $K$  es salvaje si posee un punto salvaje.

Sean  $K_1$  y  $K_2$  dos nudos separados en el espacio. Vamos a construir un nuevo nudo  $K_1 \# K_2$ , obtenido a través del siguiente proceso. Para

cada nudo, tomemos un intervalo pequeño. Cortemos estos intervalos, quedando dos puntos extremos para cada uno. A continuación, pegamos un punto extremo de  $K_1$  a un punto extremo de  $K_2$ , y también pegamos los otros dos puntos extremos restantes. La independencia del intervalo escogido se justifica porque uno puede trasladar un intervalo del nudo a otro intervalo cualquiera, haciendo un movimiento continuo dentro del mismo nudo.

Hay que tener cuidado en la construcción anterior, puesto que al pegar los puntos extremos tenemos dos posibilidades; pues un punto extremo del nudo  $K_1$  tiene dos puntos extremos posibles para pegarse con  $K_2$ , y una vez que se pega con un punto extremo, el otro punto extremo de  $K_1$  se pegará con el otro punto extremo de  $K_2$ . Resulta que los dos nudos que se pueden obtener de esta forma no necesariamente son equivalente.

Para arreglar esta situación, consideremos nudos orientados en lugar de considerar solamente nudos. Entonces existe una sola forma de pegar los extremos de manera que el nudo resultante tenga una orientación consistente con la orientación de los nudos.

**Definición 1.4.7.** *El nudo orientado así obtenido queda entonces bien definido y lo llamamos **suma conexa** de los nudos orientados  $K_1$  y  $K_2$ , denotada por  $K_1 \# K_2$ .*

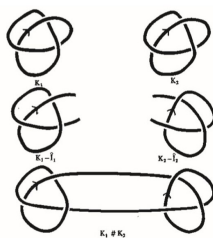


Figura 1.11: La suma conexa de dos nudos.

Un nudo se dice **primo** si no puede expresarse como  $K_1 \# K_2$ , con  $K_1$  y  $K_2$  ambos no triviales.

La suma conexa satisface las siguientes propiedades:

- i) Está bien definida salvo equivalencia, es decir, si  $K_1 \simeq K'_1$  y  $K_2 \simeq K'_2$ , entonces  $K_1 \# K_2 \simeq K'_1 \# K'_2$ .
- ii) Es asociativa, es decir,  $K_1 \# (K_2 \# K_3) \simeq (K_1 \# K_2) \# K_3$ .
- iii) Es conmutativa:  $K_1 \# K_2 \simeq K_2 \# K_1$ . Ver [1], [3], [33], [37] para profundizar en el tema.

### 1.4.1. Invariantes de nudos.

El problema central en la teoría de nudos es su clasificación (encontrar una tabla completa de nudos en la que no haya dos nudos equivalentes y que dado cualquier nudo arbitrario, este sea equivalente a algún nudo de la tabla), un problema bastante complicado y que se encuentra lejos de ser resuelto. Se ha avanzado en la clasificación de ciertos tipos de nudos como los tóricos.

Una forma de determinar si dos nudos son equivalentes o no, es encontrando alguna propiedad de los nudos que no cambie cuando estos se deforman y que sirva para distinguir nudos no equivalentes. A dichas propiedades se les llama **invariantes de nudos**.

En [8] y [33] se demuestra que si dos nudos  $K_1$  y  $K_2$  en  $\mathbb{S}^3$  son equivalentes, entonces sus complementos  $\mathbb{S}^3 - K_1$  y  $\mathbb{S}^3 - K_2$  son homeomorfos. A finales de los años 80, C. McA Gordon y J. Luecke, ver [15], demostraron el recíproco de este resultado, que si  $K_1$  y  $K_2$  son dos nudos con  $\mathbb{S}^3 - K_1$  y  $\mathbb{S}^3 - K_2$  homeomorfos, entonces los nudos  $K_1$  y  $K_2$  son equivalentes.

Como consecuencia de este resultado, el problema de clasificar los nudos en  $\mathbb{S}^3$ , que tiene que ver con la forma del nudo en  $\mathbb{S}^3$  se transformó en un problema que tiene que ver únicamente con el estudio de los espacios complementarios. Sin embargo no siempre se puede hacer esto, pues el resultado anterior es falso para el caso de enlaces (una colección finita de nudos que no se intersectan entre sí).

Uno de los primeros invariantes para espacios topológicos fué el **grupo fundamental**.

La construcción del grupo fundamental es la siguiente. Sea  $X$  un espacio topológico. Consideremos el conjunto  $\Omega$  de todas las trayectorias cerradas (o lazos) que salen de un punto fijo  $p \in X$  (llamado punto base). El conjunto  $\Omega$  puede ser dividido en clases de equivalencia, donde los lazos son equivalentes si uno puede ser deformado en el otro continuamente manteniendo fijo al punto  $p$ . Dos lazos que son equivalentes se dice que son homotópicos.

En la Figura 1.12 abajo, los lazos  $a_1$  y  $a_2$  son homotópicos y estos a su vez son homotópicos al lazo  $e$  que permanece constante en el punto  $p$ . Por otro lado, los lazos  $a_3$  y  $a_4$  son homotópicos, pero estos no son homotópicos a  $e$ , pues no se pueden contraer al estar rodeando a un agujero.

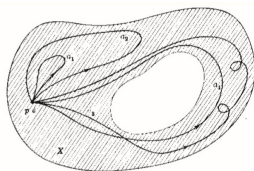


Figura 1.12: Dos lazos homotópicos y dos lazos que no son homotópicos.

A la clase de lazos homotópicos a un lazo particular  $\alpha$  se le representa como  $[\alpha]$ . Si  $\alpha$  es homotópico a  $\beta$ , las clases  $[\alpha]$  y  $[\beta]$  son idénticas. Podemos definir ahora de manera natural una multiplicación entre las clases de lazos de la siguiente manera: tomamos dos representantes de las clases  $[\alpha]$  y  $[\beta]$  que queremos multiplicar, digamos  $\alpha$  y  $\beta$ , respectivamente, entonces  $[\alpha][\beta]$  es la clase del lazo que sale de  $p$ , recorre  $\alpha$ , regresa a  $p$ , recorre  $\beta$  y vuelve a regresar a  $p$ . En [8], [33] y [37] se demuestra que esta operación está bien definida, es decir, que no depende de los representantes que se elijan y que además, el conjunto de clases de equivalencia con dicha multiplicación tiene una estructura de grupo, esto es, la multiplicación es asociativa, existe un elemento neutro (la clase del lazo constante  $e$ ) tal que

$$[\alpha][e] = [e][\alpha] = [\alpha]$$

y para todo elemento  $[\alpha]$  existe un inverso  $[\alpha]^{-1}$  tal que

$$[\alpha][\alpha]^{-1} = [\alpha]^{-1}[\alpha] = [e].$$

Sin embargo, esta multiplicación no necesariamente es conmutativa,  $[\alpha][\beta] \neq [\beta][\alpha]$ .

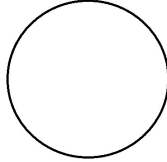


Figura 1.13: La clase del nudo trivial  $[e]$ .

**Definición 1.4.8.** *Al grupo de clases de lazos homotópicos del espacio  $X$ , con punto base  $p$  se denota  $\pi_1(X, p)$  y es llamado el **grupo fundamental de  $X$  con punto base  $p$** .*

*Si  $K$  es un nudo y  $p$  es cualquier punto en  $\mathbb{R}^3 - K$ , entonces el grupo fundamental*

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 - K, p) \cong \pi_1(K)$$

*es llamado el **grupo del nudo  $K$** .*

Ejemplo: Si  $K$  es el nudo trivial, entonces  $\pi_1(K) \cong \mathbb{Z}$ .

Un procedimiento importante para escribir la representación del grupo de un nudo  $K \in \mathbb{R}^3$  es la **representación de Wirtinger**.

**El Algoritmo.** Consideremos un diagrama del nudo  $K$  formado por los arcos  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Supongamos que a los  $\alpha_i$  se les asigna una dirección, pensándolos de esta manera orientados con el orden de sus subíndices. Dibujamos una pequeña flecha que pase por debajo de cada  $\alpha_i$  en dirección hacia la derecha, etiquetada por  $x_i$ . Esta representa un lazo en  $\mathbb{R}^3 - K$  de la siguiente manera. Se toma al punto  $(0, 0, 1)$  como

base y el lazo consiste en el triángulo orientado desde  $(0, 0, 1)$  hasta la cola de  $x_i$ , alrededor de  $x_i$  hasta la cabeza y de regreso al  $(0, 0, 1)$ . En cada cruce, existen ciertas relaciones entre los  $x_i$  que deben ser respetadas. Las dos posibilidades son:

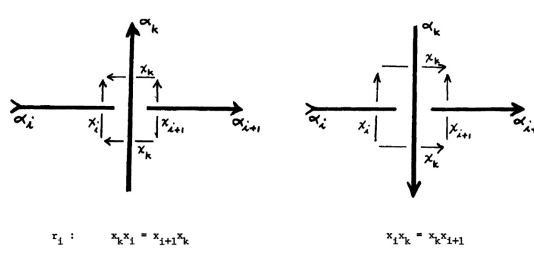


Figura 1.14: Relaciones en el nudo.

Aquí  $\alpha_k$  es el arco que pasa sobre la brecha desde  $\alpha_i$  a  $\alpha_{i+1}$  (es posible que  $k = i$  o que  $k = i + 1$ ). Denotemos  $r_i$  para cualesquiera de las dos ecuaciones que sean satisfechas. En total, hay exactamente  $n$  relaciones  $r_1, \dots, r_n$  que pueden ser tomadas de esta manera. El siguiente teorema indica que esto comprende al conjunto completo de las relaciones, cuya demostración se puede encontrar en [37].

**Teorema 1.4.1.** *El grupo  $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K)$  es generado por las clases de homotopía de  $x_i$  y se representa por*

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 - K) = (x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_n).$$

*Si se omite alguno de los  $r_i$  el teorema sigue siendo válido.*

Como ejemplo, tomemos al nudo trébol y “nudo figura 8”.

1. Los generadores para  $K$ , el nudo trébol, son  $x_1, x_2, x_3$  con las siguientes relaciones:

- (i)  $x_3 x_1 = x_2 x_3$ ,
- (ii)  $x_2 x_3 = x_1 x_2$ ,
- (iii)  $x_2 x_3 = x_1 x_3$ .

De (i) se obtiene que  $x_1 = x_3^{-1} x_2 x_3$ , con lo que



$$\pi_1(\mathbb{R}^3 - K) = (x_1, x; 2x_3; x_3x_1 = x_2x_3; x_2x_3 = x_1x_2)$$

puede reescribirse como

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 - K) \cong (x_1, x_2; x_2x_3x_2 = x_3x_2x_3).$$

Tenemos que no es conmutativo ya que

$$x_2x_3 = x_2^{-1}x_3x_2x_3$$

y

$$x_3x_2 = x_2x_3x_2x_3^{-1}.$$

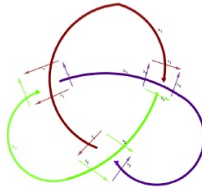


Figura 1.15: Generadores y relaciones en el nudo trébol.

2. Para  $K$ , el nudo figura 8, tenemos generadores  $x_1, x_2, x_3, x_4$  y relaciones:

- (i)  $x_1x_3 = x_3x_2$
- (ii)  $x_4x_2 = x_3x_4$
- (iii)  $x_3x_1 = x_1x_4$ .

Podemos simplificar, usando (i) y (iii) para eliminar  $x_2 = x_3^{-1}x_1x_3$  y  $x_4 = x_1^{-1}x_3x_1$  y sustituirlo en (ii) para obtener la representación equivalente

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 - K) \cong (x_1, x_3; x^{-1}x_3x_1x_3^{-1}x_1x_3 = x_3x^{-1}x_3x_1).$$

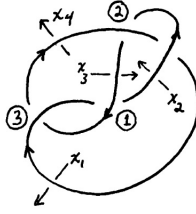


Figura 1.16: Generadores y relaciones en el nudo 8.

**Observación 1.4.1.** Si el grupo fundamental  $\pi_1(\mathbb{S}^3 - K)$  es infinitamente generado, entonces  $K : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$  determina a un nudo salvaje. De hecho, si  $x \in K$  es un punto salvaje y  $\mathcal{U}$  es cualquier vecindad abierta de  $x$ , entonces  $\pi_1(\mathcal{U} - K)$  es infinitamente generado, ver [9] y [17]

Otros invariantes importantes, para los cuales no entraremos en detalle, pero que se encuentran en la literatura al respecto, son el número de cruces, número de puentes, número de enlace, número de coloración, el polinomio de Alexander-Conway, y el polinomio de Jones por mencionar algunos. Ver [1], [3], [33], [37].

## 1.5. Límite inverso.

**Definición 1.5.1.** Sean  $X_0, X_1, X_2, \dots$  una colección numerable de espacios topológicos y supongamos que para cada  $n > 0$  existe una aplicación continua  $f_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$ . La sucesión de espacios junto con las aplicaciones  $\{X_n, f_n\}$  es llamada una **sucesión de límite inverso** representada por medio del siguiente diagrama:

$$\dots \xrightarrow{f_{n+1}} X_n \xrightarrow{f_n} X_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \dots \xrightarrow{f_3} X_2 \xrightarrow{f_2} X_1 \xrightarrow{f_1} X_0.$$

En caso de que  $n > m$ , entonces existe la aplicación continua  $f_{n,m} : X_n \rightarrow X_m$  dada por la composición  $f_{n,m} = f_{m+1} \circ f_{m+2} \circ \dots \circ f_{n-1} \circ f_n$ .

**Definición 1.5.2.** Consideremos la sucesión  $\{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$  tal que cada  $x_n$  es un punto del espacio  $X_n$  y tal que  $x_n = f_{n+1}(x_{n+1})$ ,

para toda  $n \geq 0$ . Tal sucesión puede ser identificada con un punto en el espacio producto  $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$  al considerar la función  $\varphi$  de los enteros no negativos en  $\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ , dada por  $\varphi(n) = x_n$ . El conjunto de todas estas sucesiones es un subespacio de  $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$  y tiene la topología de subespacio. Este espacio topológico es el **espacio de sucesiones de límite inverso**  $\{X_n, f_n\}$ , denotado por  $X_{\infty}$ .

En [19] se prueba que si cada espacio  $X_n$  en la sucesión de límite inverso  $\{X_n, f_n\}$  es un espacio Hausdorff compacto, entonces  $X_{\infty}$  no es vacío.

Relacionado al concepto del espacio de sucesiones de límites inversos está el de **sucesión de límite inverso de grupos algebraicos**. Esta es una sucesión de grupos  $G_0, G_1, G_2 \dots$  y homomorfismos  $\varphi : G_n \rightarrow G_{n-1}$ ,  $n \geq 1$ . El **grupo límite inverso**  $G_{\infty}$  de tal sucesión es la colección de todas las sucesiones  $\{g_0, g_1, \dots\}$  con  $g_i \in G_i$  y tales que  $g_i = \varphi_{i+1}(g_{i+1})$ , para toda  $i$ . El producto de dos elementos  $\{f_0, f_1, f_2, \dots\}$  y  $\{g_0, g_1, g_2, \dots\}$  está dado por

$$\{f_i\} \cdot \{g_i\} = \{f_i \cdot g_i\},$$

donde el punto en la derecha indica la operación del grupo en  $G_i$ . En [19] se verifica que  $G_{\infty}$  es en realidad un grupo. Observemos que  $G_{\infty}$  contiene siempre por lo menos un elemento,  $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$ , donde  $e_i$  denota a la identidad de  $G_i$ .

**Definición 1.5.3.** Sean  $\{A_n, f_n\}$  y  $\{B_n, g_n\}$  dos sucesiones de límite inverso de espacios. Una aplicación  $\Phi : \{A_n, f_n\} \rightarrow \{B_n, g_n\}$  es una colección  $\{\varphi_n\}$  de aplicaciones continuas  $\varphi_n : A_n \rightarrow B_n$  satisfaciendo la condición  $g_n \varphi_n = \varphi_{n-1} f_n$ ,  $n \geq 1$ . Esta condición puede ser dada al decir que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{f_n} & A_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & A_{n-2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_0 \\
& & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_{n-1} & & \downarrow \varphi_{n-2} & & & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_0 \\
\cdots & \longrightarrow & B_n & \xrightarrow{g_n} & B_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & B_{n-2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & B_1 & \xrightarrow{g_1} & B_0
\end{array}$$

La aplicación  $\Phi$  induce una aplicación continua  $\varphi : A_\infty \longrightarrow B_\infty$  de los espacios de límite inverso de la siguiente manera, para cada punto  $a = (a_0, a_1, \dots)$  en  $A_\infty$ , sea  $\varphi(a) = (\varphi_0(a_0), \varphi_1(a_1), \dots)$ . El hecho de que  $\varphi(a)$  sea realmente un punto de  $B_\infty$  se sigue de que

$$g_n[\varphi_n(a_n)] = \varphi_{n-1}[f_n(a_n)] = \varphi_{n-1}(a_{n-1}).$$

**Definición 1.5.4.** *Consideremos un conjunto  $\Upsilon$  parcialmente ordenado por la relación  $<$ . Si para cualesquier par de elementos  $\alpha, \beta \in \Upsilon$  existe un elemento  $v$  en  $\Upsilon$  tal que  $\alpha < v$  y que  $\beta < v$ , entonces diremos que  $\Upsilon$  es un **conjunto direccionado**.*

Supongamos que para cada elemento  $\alpha$  de  $\Upsilon$  existe un único conjunto  $A_\alpha$  en una colección de conjuntos  $\mathcal{A}$  ( $\mathcal{A}$  está indexado por  $\Upsilon$ ), y supongamos también que se tiene una transformación  $f_{\alpha\beta} : A_\beta \longrightarrow A_\alpha$  de  $A_\beta$  a  $A_\alpha$  cuando  $\alpha < \beta$  en  $\Upsilon$ . Observamos que  $f_{\alpha\beta}$  actúa en contra de la relación de orden. Asumamos más todavía, que estas aplicaciones satisfacen:

- i)  $f_{\alpha\alpha}$  es la transformación identidad para cada  $\alpha$  en  $\Upsilon$ ,  
y que
- ii)  $f_{\beta\gamma}f_{\alpha\beta} = f_{\alpha\gamma}$  cuando  $\alpha < \beta < \gamma$ .

**Definición 1.5.5.** *Si  $F$  denota a la colección  $\{f_{\alpha\beta}\}$  de todas las transformaciones mencionadas, a la pareja  $\{\mathcal{A}, F\}$  se le llama un **sistema de límite inverso sobre el conjunto direccionado  $\Upsilon$** .*

Claramente una sucesión de límite inverso es un sistema de límite inverso sobre el conjunto direccionado de todos los enteros no negativos.

En caso de que  $A_\alpha$  en  $\mathcal{A}$  sea un espacio topológico y que cada  $\{f_{\alpha\beta}\}$  en  $F$  sea continua, tal como hicimos para las sucesiones inversas, definimos el espacio límite inverso  $A_\infty$  del sistema  $\{\mathcal{A}, F\}$  de la siguiente

forma. Sea  $\{x_\alpha\}$  el conjunto que consiste de un único punto  $x_\alpha$  de cada espacio  $A_\alpha$  en  $\mathcal{A}$  y que satisfaga la condición de que si  $\alpha < \beta$  en  $\Upsilon$ , entonces  $f_{\alpha\beta}(x_{\alpha\beta}) = x_\alpha$ . Tal conjunto  $\{x_\alpha\}$  puede ser identificado con el punto  $\psi$  en el espacio producto  $\prod_{\Upsilon} A_\alpha$  teniendo coordenadas  $\psi(\alpha) = x_\alpha$ . Así, la colección de todos los conjuntos  $\{x_\alpha\}$  es un subespacio de  $\prod_{\Upsilon} A_\alpha$ , y este subespacio es el espacio límite inverso  $A_\infty$  de  $\{\mathcal{A}, F\}$ .

Se observa que para cada espacio límite  $A_\infty$  de un sistema  $\{\mathcal{A}, F\}$ , se tiene entonces que para cada  $\beta \in \Upsilon$  existe una *proyección natural*  $\pi_\beta : A_\infty \longrightarrow A_\beta$ , definida por

$$\pi_\beta(\{x_\alpha\}) = x_\beta.$$

Se tienen así las siguientes propiedades:

1. Si  $A_\infty$  es un espacio límite inverso de un sistema de límites inversos  $\{\mathcal{A}, F\}$ , entonces cada proyección  $\pi_\alpha$  de  $A_\infty$  sobre  $A_\alpha$  es continua.
2. El espacio límite inverso  $A_\infty$  de un sistema  $\{\mathcal{A}, F\}$  es un subespacio cerrado del espacio producto  $\prod_{\Upsilon} A_\alpha$ .
3. El espacio límite inverso de un sistema de espacios compactos y Hausdorff, es un espacio compacto y Hausdorff. Si cada espacio del sistema es distinto del vacío, entonces también se tiene que cada espacio límite es no vacío.

### 1.5.1. El Conjunto de Cantor.

El conjunto de Cantor es un conjunto totalmente separable, compacto, denso en ninguna parte, perfecto y métrico, consultar [19] para profundizar en ello.

A continuación veremos que cualesquier par de espacios totalmente separables, compactos, perfectos y métricos son homeomorfos. Una caracterización del conjunto de Cantor que nos será de gran utilidad para este trabajo. Iniciaremos con algunos resultados previos.

Para cualquier cubierta de conjuntos abiertos  $U$  de un espacio métrico  $M$ , se tiene un refinamiento  $V$  de  $U$  formado por conjuntos abiertos cuyo diámetro sea menor que  $\frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Si  $M$  es compacto, entonces se puede tomar a  $V$  finito, ver [19].

**Proposición 1.5.1.** *Sea  $M$  un espacio métrico, compacto, totalmente separable. Entonces  $M$  tiene una sucesión  $\{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots\}$  de cubiertas finitas, siendo cada  $\mathcal{U}_n$  una colección de conjuntos disjuntos cuyo diámetro es menor que  $\frac{1}{n}$ , que son tanto abiertos como cerrados y con  $\mathcal{U}_{n+1}$  un refinamiento de  $\mathcal{U}_n$ , para cada  $n$ .*

Ver [19] para una demostración de esta proposición.

Ahora tomemos una sucesión  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$  que cubran al espacio  $M$ , como en la proposición anterior y construyamos una sucesión de límite inverso. Tomaremos cada cubierta  $\mathcal{U}_n$  como un espacio, cuyos “puntos” serán los conjuntos abiertos en  $\mathcal{U}_n$  usando la topología discreta, descrito a continuación en la siguiente proposición.

**Proposición 1.5.2.** *Sea  $M$  un espacio compacto, métrico y totalmente separable. Entonces  $M$  es homeomorfo al espacio límite inverso de una sucesión finita de límite inverso de espacios discretos.*

Ver [19] para una demostración de esta proposición.

Estamos listos para estudiar la caracterización del conjunto de Cantor. Hasta el momento, sabemos obtener espacios métricos, compactos, totalmente separables como límite inverso de cubrientes. Nuestra siguiente meta es mostrar que si dos espacios con tales características son perfectos, entonces las dos sucesiones de límite inverso pueden obtenerse de manera tal que sus espacios límite inverso sean homeomorfos.

**Proposición 1.5.3.** *Si  $U$  es un conjunto abierto en un espacio topológico perfecto, totalmente separable, entonces  $U$  es la unión de  $n$  conjuntos abiertos mutuamente disjuntos, no vacíos,  $n \in \mathbb{Z}$ .*

Su demostración, así como el siguiente resultado, que es conocido en topología se pueden consultar en [19].

**Teorema 1.5.1.** *Cualesquier par de espacios métricos, perfectos, totalmente separables son homeomorfos.*

**Corolario 1.5.1.** *Cualquier espacio compacto, métrico, totalmente separable es homeomorfo al conjunto de Cantor.*

**Observación 1.5.1.** *Cualquier espacio métrico, totalmente separable es homeomorfo a algún subconjunto del conjunto de Cantor.*

Para ver esto, tomemos al Conjunto de Cantor  $C$ , y sea  $M$  un espacio métrico, compacto, totalmente separable. El espacio  $M \times C$  es compacto, completamente separable, perfecto y métrico, con lo que entonces existe un homeomorfismo  $h$  de  $M \times C$  sobre  $C$ . Sea  $i$  el homeomorfismo de  $M$  en  $M \times C$ , definido por  $i(x) = (x, 0)$ . Así,  $h \circ i : M \rightarrow C$  es el homeomorfismo deseado.

## 1.6. Dimensión de Hausdorff.

Queremos generalizar el concepto de dimensión de un espacio métrico, que permita definir una dimensión fraccionaria para un objeto o espacio. La medida de Hausdorff fue introducida entre 1915 y 1917 por Felix Hausdorff, aunque fue estudiada mucho más extensivamente por Abram Besicovitch. En teoría de la medida, la noción natural de medida es la de cubrir a un conjunto con bolas pequeñas, definir un exponente específico, sumar sus diámetros y tomar el ínfimo sobre ellos. Vamos a explicar con más detalle esta idea.

### 1.6.1. Dimensión de Hausdorff.

A continuación estudiaremos la dimensión de Hausdorff cuya característica sorprendente es que no necesariamente es un entero. Mandelbrot definió a los fractales en términos de la dimensión de Hausdorff.

Sea  $S$  un espacio métrico. Una familia  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de  $S$  es llamada una **cubierta numerable** sobre el conjunto  $F \subset S$  si y solo si

$$F \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A,$$

y  $\mathcal{A}$  es una familia numerable (incluso puede ser finita) de subconjuntos. Sea  $\varepsilon$  un número positivo, la cubierta  $\mathcal{A}$  es una  $\varepsilon$ -**cubierta** si y solamente si  $\text{diam}(A) \leq \varepsilon$ , para todo  $A \in \mathcal{A}$ . Definimos

$$\overline{\mathcal{H}}_\varepsilon^s(F) = \inf_{\mathcal{A} \in \mathcal{A}} \sum_{A \in \mathcal{A}} (\text{diam} A)^s,$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las  $\varepsilon$ -cubiertas numerables del conjunto  $F$ . Por convención,  $\inf \emptyset = \infty$ . Un cálculo muestra que cuando  $\varepsilon$  decrece,  $\overline{\mathcal{H}}_\varepsilon^s(F)$  crece. Finalmente

$$\overline{\mathcal{H}}^s(F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\mathcal{H}}_\varepsilon^s(F) = \sup_{\varepsilon > 0} \overline{\mathcal{H}}_\varepsilon^s(F)$$

es la medida exterior de Hausdorff  $s$ -dimensional del conjunto  $F$ .

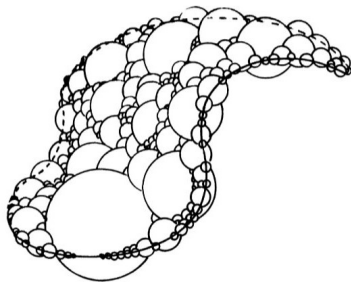


Figura 1.17: Una cubierta numerable para un conjunto.

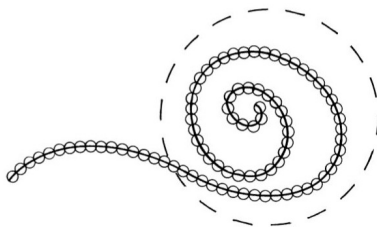


Figura 1.18: Una cubierta finita para un conjunto.



Hay variantes en la definición de la medida de Hausdorff que son algunas veces útiles.

(i) Como la cerradura de un conjunto tiene el mismo diámetro que el conjunto, uno puede usar solamente conjuntos cerrados en las cubiertas  $\mathcal{A}$ .

(ii) Si  $A$  es cualquier conjunto, entonces está contenido en un conjunto abierto con diámetro tan cercano como se quiera al diámetro de  $A$ .

(iii) Cualquier conjunto de diámetro  $r$  está contenido en una bola cerrada de radio  $r$ , y diámetro  $2r$ . La colección de bolas abiertas es una clase de cubiertas reducidas para  $\mathcal{H}^s$  con factor  $2^s$ .

(iv) En el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^d$ , la envolvente convexa de cualquier conjunto tiene el mismo diámetro que el del conjunto. La colección de conjuntos convexos es una clase de cubiertas reducidas para  $\mathcal{H}^s$ .

(v) Si un conjunto  $K$  es compacto, entonces cada cubierta abierta de  $K$  tiene una subcubierta finita, con lo que para calcular la medida de Hausdorff de un conjunto compacto  $K$ , uno puede usar cubiertas finitas de  $\mathcal{A}$ .

(vi) Si reemplazamos a un conjunto en una cubierta  $\mathcal{A}$  de un conjunto  $F$  por cualquier subconjunto de sí mismo, de forma que se siga teniendo una cubierta de  $F$ , entonces la suma

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} (\text{diam } A)^s$$

solo se hace más pequeña. Con lo que si  $F \subset T \subset S$ , el valor de  $\overline{\mathcal{H}}_\varepsilon^s(F)$  es el mismo cuando  $F$  es considerado como un subconjunto de  $T$  a cuando  $F$  es considerado un subconjunto de  $S$ . En particular, podemos asumir (si es conveniente) que los conjuntos usados en las cubiertas  $\mathcal{A}$  del conjunto  $F$  son subconjuntos de  $F$ .

(vii) Si  $F$  es un conjunto finito, entonces  $\mathcal{H}^s(F) = 0$ , para todo  $s > 0$ .

**Proposición 1.6.1.** *En el espacio métrico  $\mathbb{R}$ , la medida de Hausdorff 1-dimensional  $\mathcal{H}^1$ , coincide con la medida de Lebesgue  $\mathcal{L}$ .*

Ver [14] para una demostración de esta proposición.

**Observación 1.6.1.** *i) Para la medida de Hausdorff “0-dimensional”, podemos usar la función conjunto  $\mathbf{c}_0$  definida por  $\mathbf{c}_0(A) = 1$ , para  $A \neq \emptyset$  y  $\mathbf{c}_0(\emptyset) = 0$ .*

*ii) Con esta definición,  $\mathcal{H}^0(A) = n$  si  $A$  tiene  $n$  elementos y  $\mathcal{H}^0(A) = \infty$  si  $A$  es infinito.*

### Dimensión de Hausdorff.

¿Cómo se comporta la medida de Hausdorff  $\mathcal{H}^s(F)$  como una función de  $s$  para un conjunto dado  $F$ ? Por lo visto en la sección anterior, se tiene que cuando  $s$  crece,  $\mathcal{H}^s(F)$  decrece. Pero se puede decir mucho más.

**Proposición 1.6.2.** *Sea  $F$  un boreliano en  $\mathbb{R}$  y sean  $0 < s < t$ . Si  $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ , entonces  $\mathcal{H}^t(F) = 0$ . Si  $\mathcal{H}^t(F) > 0$ , entonces  $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ .*

*Demostración.* Si  $\text{diam}A \leq \varepsilon$ , entonces

$$\overline{\mathcal{H}}_\varepsilon^t(A) \leq (\text{diam}A)^t \leq \varepsilon^{t-s}(\text{diam}A)^s.$$

Así,  $\overline{\mathcal{H}}_\varepsilon^t(F) \leq \varepsilon^{t-s}\overline{\mathcal{H}}_\varepsilon^s(F)$  para todo  $F$ . Ahora si  $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ , entonces

$$\mathcal{H}^s(F) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{t-s}\overline{\mathcal{H}}_\varepsilon^s(F) = 0 \times \mathcal{H}^s(F) = 0.$$

La segunda afirmación es la contrapuesta. □

La proposición [1.6.2] significa que, para un conjunto dado  $F$ , existe un único “valor crítico”  $s_0 \in [0, \infty]$  tal que:

$\mathcal{H}^s(F) = \infty$	$\forall s < s_0;$
$\mathcal{H}^s(F) = 0$	$\forall s > s_0.$

A este valor  $s_0$  se le llama la **dimensión de Hausdorff** del conjunto  $F$ .

**Definición 1.6.1.** Sea  $B_r(x)$  la bola centrada en  $x$  con radio  $r$  en  $\mathbb{R}^n$ . Dada una función creciente  $\varphi$  on  $[0, \infty)$ , definimos

$$H_\varphi^\delta(F) = \inf \left\{ \sum \varphi(r_j) : F \subset \cup_j B_{r_j}(x_j), r_j < \delta \right\}$$

y

$$H_\varphi(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\varphi^\delta(F).$$

Esta es la **medida de Hausdorff** asociada a  $\varphi$ . Sea  $\varphi(t) = t^s$ , con lo que denotaremos a la medida  $H_\varphi$  por  $H_s$ .

**Definición 1.6.2.** Definimos la **dimensión de Hausdorff** del conjunto  $F$  como

$$\dim(F) = \inf \{s : H_s(F) = 0\}.$$

Escribiremos  $s_0 = \dim(F)$ . Claro que es posible que  $\mathcal{H}^s(F) = 0$  para todo  $s > 0$ ; en este caso  $\dim(F) = 0$ . De la misma manera, es posible que  $\mathcal{H}^s(F) = \infty$  para todo  $s$ ; siendo así,  $\dim(F) = \infty$ .

La idea de la dimensión es una abstracción de lo que sabemos previamente de geometría elemental. Si  $A$  es una curva suave, rectificable, entonces su longitud es la manera usual para medir su tamaño; pero su “área” y “volumen” son cero. La segunda y tercera dimensión son muy grandes para ayudarnos a medir el tamaño de  $A$ . Si  $B$  es la superficie de una esfera, entonces su área es positiva y finita. Podemos decir que “longitud” es infinita, por ejemplo, podemos construir curvas que sean tan largas como queramos en forma de espiral a su alrededor; su “volumen” es cero, ya que está contenido en una cáscara esférica sólida cuyo grosor sea tan pequeño como uno desee. Mientras que para el conjunto  $B$ , la dimensión 1 es muy pequeña, la dimensión 3 es muy grande, y la dimensión 2 es la correcta. La medida de Hausdorff  $s$ -dimensional nos da una manera de medir el tamaño de un conjunto para dimensiones  $s$  distintas de los enteros  $1, 2, 3, \dots$ .

**Propiedades.** Sean  $A, B$  dos borelianos en  $\mathbb{R}$ .

- i) Si  $A \subset B$ , entonces  $\dim A \leq \dim B$ .
- ii)  $\dim (A \cup B) = \max\{\dim A, \dim B\}$ .

*Demostración.* i) Supongamos que  $A \subset B$ . Si  $s > \dim B$ , entonces  $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B) = 0$ . Con lo que  $\dim A \leq s$ . Esto es verdadero para todo  $s > \dim B$ , con lo que  $\dim A \leq \dim B$ .

ii) Sea  $s > \max\{\dim A, \dim B\}$ . Entonces  $s > \dim A$ , con lo que  $\mathcal{H}^s(A) = 0$ . Análogamente  $\mathcal{H}^s(B) = 0$ . Así,  $\mathcal{H}^s(A \cup B) \leq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B) = 0$ . De esta manera  $\dim(A \cup B) \leq s$ . Esto es verdadero para todo  $s > \max\{\dim A, \dim B\}$ , teniendo que  $\dim(A \cup B) \leq \max\{\dim A, \dim B\}$ . Por i),  $\dim(A \cup B) \geq \max\{\dim A, \dim B\}$ .  $\square$

## Capítulo 2

# Nudos salvajes definidos dinámicamente.

En este capítulo definiremos un collar de  $n$ -perlas para construir nudos salvajes definidos dinámicamente. Posteriormente definiremos a los collares de  $n$ -perlas equivalentes y demostraremos que sus correspondientes conjuntos límites son nudos salvajes equivalentes.

### 2.1. Construcción de nudos salvajes definidos dinámicamente.

En esta sección explicaremos la construcción de nudos salvajes definidos dinámicamente (comparar con [17] y [27]).

Consideremos un nudo manso  $K$  en  $\mathbb{S}^3$  y sea  $T$  la unión de  $n$  3-bolas  $B_1 := B_{r_1}(c_1)$ ,  $B_2 := B_{r_2}(c_2), \dots, B_n := B_{r_n}(c_n)$  en  $\mathbb{S}^3$  que cubren  $K$ , donde  $B_i \cap B_j = \emptyset$  ( $j \neq i+1, i-1 \pmod n$ ), pero  $B_i$  y  $B_{i+1}$  son tangentes ( $i = 1, 2, \dots, n \pmod n$ ), como en la Figura 2.1. A esta colección le llamamos un *collar* de  $n$ -perlas ( $n \geq 3$ ). Si unimos los puntos de tangencia consecutivos por un segmento lineal, obtenemos un nudo poligonal  $K$  llamado el *nervio* (template en inglés) de  $T$ . La frontera de cada  $B_j$  es una 2-esfera denotada por  $\Sigma_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

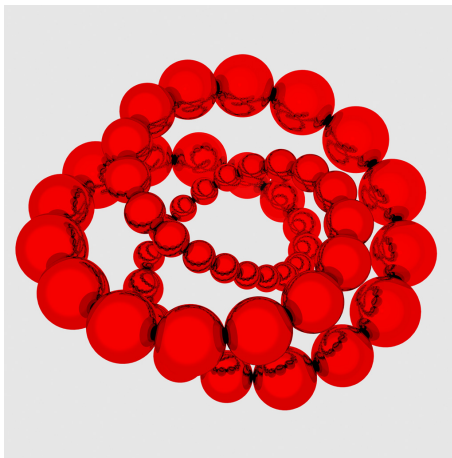


Figura 2.1: *Un collar de perlas subordinado al nudo trébol.*

Recíprocamente, un collar de  $n$ -perlas  $T$  subordinado a un nudo poligonal  $K$  consiste de la unión de  $n$  3-bolas, cerradas (llamadas perlas)  $B_1 := B_{r_1}(c_1)$ ,  $B_2 := B_{r_2}(c_2), \dots, B_n := B_{r_n}(c_n)$  en  $\mathbb{S}^3$ , donde  $B_i \cap B_j = \emptyset$  ( $j \neq i + 1, i - 1 \pmod n$ ), pero  $B_i$  y  $B_{i+1}$  son tangentes ( $i = 1, 2, \dots, n \pmod n$ ), de forma tal que  $K \subset T$ . Además, requerimos que cada segmento de  $K$ , contenido en el interior de cada perla, esté desanudado.

Sea  $\Gamma_T$  el grupo generado por las reflexiones  $I_j$ , sobre  $\Sigma_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Entonces  $\Gamma_T$  es un subgrupo discreto de  $Möb(\mathbb{S}^3)$ , y por lo tanto es un grupo Kleiniano, cuyo conjunto límite  $\Lambda(\Gamma_T)$  es un nudo salvaje, es decir, es homeomorfo al círculo ([23], [24]) lo que implica que  $\Omega(\Gamma_T) = \mathbb{S}^3 - \Lambda(\Gamma_T) \neq \emptyset$ . El dominio fundamental para  $\Gamma_T$  es  $D = \mathbb{S}^3 - T$ , con lo que  $\Gamma_T$  es un grupo Kleiniano geoméricamente finito (comparar [23], [24] y [27]). Ahora, daremos una breve descripción del conjunto límite, para más detalle se puede ver [17] y [18].

Observamos que si reflejamos con respecto a cada  $\Sigma_j$ , tanto la imagen espejo de  $K$  como el collar de perlas correspondiente  $T - B_j$ , son enviados al interior de  $B_j$ . Esto implica que  $B_j$  contiene a una *hilo* anudado  $\tau_j^1 = I_j(T - B_j)$ , de tal manera que  $(B_j, \tau_j^1)$  es una maraña no trivial, esto es, es homeomorfo al par  $(C, \bar{K})$ , donde  $C$  es un cilindro sólido y  $\bar{K}$  es la imagen espejo de  $K$ , ver [2.2](#).



Figura 2.2: Un dibujo esquemático de  $B_j$  que contiene a un hilo sólido anudado  $\tau_j^1 = I_j(T - B_j)$ , consistiendo de la unión de  $n - 1$  bolas tales que bolas consecutivas son tangentes.

Después de reflejar con respecto a cada  $\Sigma_j$ , obtenemos un nuevo collar de perlas  $T_1$  de  $j_2 = n(n - 1)$  perlas, subordinado al nuevo nudo  $K_1$  el cual es isotópico a la suma conexas de  $K$  y  $n$  copias de su imagen espejo  $\bar{K}$ . Observamos que en este caso todos los hilos  $\tau_j^1$  consisten del mismo tipo de los dos nudos,  $K$  y  $\bar{K}$ , y  $T_1 \subset T$  (ver Figura [2.3](#)).

Si continuamos con este procedimiento hasta el  $m$ -ésimo paso, obtenemos un nuevo collar  $T_m$  que consiste en la unión de  $j_m = n(n - 1)^m$  perlas,  $B_j^m$ ,  $j \in \{1, \dots, j_m\}$  subordinado al nudo poligonal  $K_m$ . Por construcción,  $T_m \subset T_{m-1}$  contiene un hilo sólido anudado  $\tau_j^m$  formado por  $n - 1$  perlas consecutivas  $B_{((j-1) \cdot n_1 \dots n_{m-1} + 1)}^m, \dots, B_{(j \cdot n_1 \dots n_{m-1})}^m$ , donde  $n_i = n - 1$  para  $i \geq 1$ . De esta manera, la unión de todos los hilos  $\tau_j^m$  es  $T_m$  y cada  $\tau_j^m$  consiste del mismo tipo de los dos nudos,  $K$  y  $\bar{K}$ , ver Figura [2.4](#).

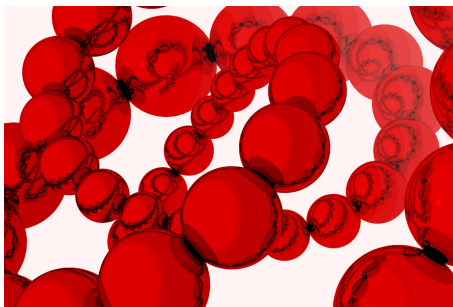


Figura 2.3: Un collar de perlas después del primer paso del proceso de reflexión.

El conjunto límite  $\Lambda(\Gamma)$  dado por

$$\Lambda(\Gamma_T) = \varprojlim_m T_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} T_m$$

es un nudo salvaje (comparar con [17], [23], [27]), el cual es llamado un *nudo salvaje definido dinámicamente*. Entre las propiedades interesantes que posee este conjunto límite está que es salvaje en cada punto, ver [17] y [18].

**Observación 2.1.1.** *Claramente para cada punto  $a \in \Lambda(\Gamma)$ , existe una sucesión  $\{B_{i_k}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $a \in B_{i_k}^k$  y  $B_{i_k}^k \subset T_k$ . Ya que  $\{B_{i_k}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de conjuntos anidados y  $\text{diam}(B_{i_k}^k) \rightarrow 0$ , por el teorema de Cantor,  $\{a\} = \bigcap B_{i_k}^k$ . Así, cada  $a \in \Lambda(\Gamma)$ , posee una dirección  $\{j_1, \dots, j_n, \dots\}$ . Notamos que existe una ambigüedad en la dirección si  $a$  es un punto de tangencia de dos bolas consecutivas  $B_{i_k}^k$  y  $B_{i_{k+1}}^k \pmod{j_k}$  (y por lo tanto de las bolas consecutivas de todos los niveles abajo de este), pero podemos resolver esta ambigüedad eligiendo, digamos, el nivel  $j_k + 1 \pmod{j_k}$  para cada nivel donde tal ambigüedad exista. Aún más, el conjunto de puntos de  $\Lambda(\Gamma_T)$ , que son puntos de tangencia de bolas consecutivas del mismo nivel, es denso en  $\Lambda(\Gamma_T)$ .*



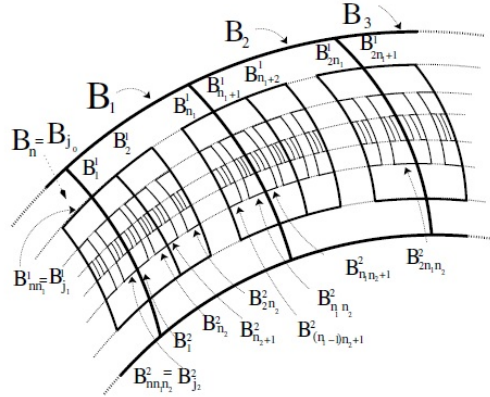


Figura 2.4: Un esquema del diagrama de perlas anidadas.

### 2.1.1. Construcción de conjuntos de Cantor definidos dinámicamente.

Ahora modificaremos la construcción anterior, para obtener una familia infinita de grupos Kleinianos cuyos conjuntos límite sean conjuntos de Cantor en  $\mathbb{S}^3$ .

Dada  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeña, y para el mismo nudo poligonal  $K$  en  $\mathbb{S}^3$ , sea  $T^\circ$  la unión de  $n$  3-bolas disjuntas  $B_1^\epsilon := B_{r_1 - \epsilon}(c_1)$ ,  $B_2^\epsilon := B_{r_2 - \epsilon}(c_2), \dots, B_n^\epsilon := B_{r_n - \epsilon}(c_n)$  en  $\mathbb{S}^3$ , subordinada a  $K$  de forma tal que  $T^\circ \subset T$ . Esta colección es llamada *collar de perlas punteado* de  $n$ -perlas ( $n \geq 3$ ) subordinado a  $K$ . La frontera de cada  $B_j^\epsilon$  es una 2-esfera denotada por  $\Sigma_j^\epsilon$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Sea  $\Gamma_{T^\circ}$  el grupo generado por las reflexiones  $I_j^\epsilon$ , sobre  $\Sigma_j^\epsilon$  ( $j = 1, \dots, n$ ). A continuación, daremos una breve descripción de su conjunto límite (ver Figura 2.5).

En el primer paso del proceso de reflexión, reflejamos con respecto a cada  $\Sigma_j^\epsilon$ , de manera que tanto la imagen espejo de  $K$  como el correspondiente collar punteado de perlas  $T^\circ - B_j^\epsilon$ , son enviados al interior

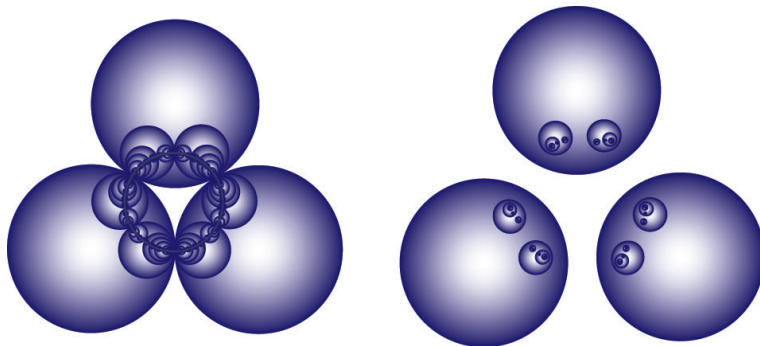


Figura 2.5: Un collar de perlas y un collar de perlas punteado.

de la bola  $B_j^\epsilon$ . Esto implica que  $B_j^\epsilon$  contiene un hilo punteado anudado  $\overset{\circ}{\tau}_j^1 = I_j(T^\circ - B_j^\epsilon)$ . Después de reflejar con respecto a cada  $\Sigma_j^\epsilon$ , obtenemos un nuevo collar punteado de perlas  $T_1^\circ$  consistente en  $j_2 = n(n-1)$  perlas, subordinado al nuevo nudo  $K_1$ , el cual es isotópico a la suma conexas de  $K$  y  $n$  copias de su imagen espejo  $\bar{K}$ . Notamos que en este caso todos los hilos punteados  $\overset{\circ}{\tau}_j^1$  son del mismo tipo de los dos nudos,  $K$  y  $\bar{K}$ , y  $T_1^\circ \subset T^\circ$  (ver Figura [2.5](#)).

Si continuamos con este proceso, en el  $m$ -ésimo paso, obtenemos un nuevo collar punteado de perlas  $T_m^\circ$  que consiste de  $j_m = n(n-1)^m$  perlas, subordinadas al nudo poligonal  $K_m$ . Por construcción,  $T_m^\circ \subset T_{m-1}^\circ$  y todos los hilos punteados  $\overset{\circ}{\tau}_j^m$  son del mismo tipo de los dos nudos  $K$  y  $\bar{K}$ .

El conjunto límite  $\Lambda(\Gamma_{T_\epsilon^\circ})$  está dado por

$$\Lambda(\Gamma_{T_\epsilon^\circ}) = \varprojlim_m T_m^\circ = \bigcap_{m=1}^{\infty} T_m^\circ.$$

**Lema 2.1.1.** *Sea  $T^\circ$  un collar punteado de perlas subordinado al nudo manso, no trivial  $K$ . Sea  $\Gamma_{T_\epsilon^\circ}$  el grupo generado por las reflexiones so-*

bre cada esfera. Entonces el conjunto límite  $\Lambda(\Gamma_{T_\epsilon})$  es homeomorfo al conjunto de Cantor encajado en  $\mathbb{S}^3$ .

*Demostración.* Es análoga a la dada por [27] Capítulo VIII. □

Entonces  $\Gamma_{T_\epsilon}$  es un grupo Kleiniano finitamente generado cuyo conjunto límite  $\Lambda(\Gamma_{T_\epsilon})$  es un conjunto de Cantor (comparar con [23] y [27]).

**Observación 2.1.2.** Como en la observación [2.1.1], para cada punto  $a \in \Lambda(\Gamma_{T_\epsilon})$ , existe  $\{B_{j_k}^{k,\epsilon}\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $a \in B_{j_k}^{k,\epsilon}$  y  $B_{j_k}^{k,\epsilon} \subset T_k$ . Como  $\{B_{j_k}^{k,\epsilon}\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de conjuntos anidados y su diámetro  $(B_{j_k}^{k,\epsilon}) \rightarrow 0$ , por el teorema de Cantor  $\{a\} = \bigcap B_{j_k}^{k,\epsilon}$ .

Con lo que  $\{j_1, \dots, j_n, \dots\}$  es una dirección para cada  $a \in \Lambda(\Gamma_{T_\epsilon})$ .

## 2.2. Nudos salvajes definidos dinámicamente equivalentes.

La meta de esta sección es demostrar el teorema [2.2.1].

**Definición 2.2.1.** Sean  $T$  y  $V$  dos collares de  $n$ -perlas tales que  $T = \bigcup_{j=1}^n B_j$  y  $V = \bigcup_{i=1}^n C_i$ , donde  $B_j, C_i$  son 3-bolas cerradas ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ). Decimos que  $V$  es equivalente a  $T$ , si existe un homeomorfismo  $\varphi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  tal que  $\varphi(T) = V$ ,  $\varphi(B_i) = C_i$ , y  $\varphi(B_i \cap B_{i+1}) = C_i \cap C_{i+1}$ .

**Observación 2.2.1.** Sean  $T$  y  $V$  dos collares de  $n$ -perlas equivalentes cuyos nervios son  $K$  y  $L$ , respectivamente. Entonces  $K$  y  $L$  son nudos equivalentes.

**Teorema 2.2.1.** Sean  $T$  y  $V$  dos collares de  $n$ -perlas equivalentes. Entonces los conjuntos límites correspondientes  $\Lambda(\Gamma_T)$  y  $\Lambda(\Gamma_V)$  son nudos salvajes equivalentes.

*Demostración.* Sean  $T = \bigcup_{i=1}^n B_i$  y  $V = \bigcup_{i=1}^n C_i$  dos collares de  $n$ -perlas equivalentes vía el homeomorfismo  $H : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ . Sean  $\Gamma_T$  y  $\Gamma_V$  los grupos correspondientes generados por las reflexiones  $I_j, J_j$  sobre  $\Sigma_j = \partial B_j$

y  $\Upsilon_j = \partial C_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ), respectivamente.

En el primer paso del proceso de reflexión, obtenemos los collares de  $n_1$ -perlas  $T_1$  y  $V_1$  de  $T$  y  $V$ , respectivamente; donde  $n_1 = n(n-1)$  (ver la sección [2.1](#)). Observemos que  $T_1$  y  $V_1$  también son collares de perlas equivalentes. En efecto, considerando la función  $H_1 : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  dada por

$$H_1(x) = \begin{cases} H(x) & \text{si } x \in \mathbb{S}^3 - T \\ J_{j_1} H I_{j_1}(x) & \text{si } x \in B_{j_1}, \text{ donde } j_1 \in \{1, \dots, n\}, \end{cases}$$

entonces es una función bien definida continua, y como  $I_j, J_j$  son homeomorfismos ( $j = 1, \dots, n$ ), tenemos que  $H_1$  también es un homeomorfismo que satisface  $H_1(T_1) = V_1$ . Con lo que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} T_1 & \longrightarrow & T \\ \downarrow H_1 & & \downarrow H \\ V_1 & \longrightarrow & V \end{array}$$

donde las flechas horizontales son las correspondientes aplicaciones inclusión.

Continuando con el proceso de reflexión, tenemos que en el  $m$ -ésimo paso los collares de  $n_m$ -perlas correspondientes  $T_m$  y  $V_m$  ( $n_k = n(n-1)^m$ ) son equivalentes vía el homeomorfismo  $H_m : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  dado por

$$H_m(x) = \begin{cases} H(x) & \text{si } x \in \mathbb{S}^3 - T \\ J_{j_m} J_{j_{m-1}} \cdots J_{j_1} H I_{j_1}(x) \cdots I_{j_{m-1}} I_{j_m} & \text{si } x \in B_{j_1, \dots, j_m} \end{cases}$$

donde  $j_1, \dots, j_m \in \{1, \dots, n\}$  (ver la observación [2.1.1](#)). Así  $H_m$  es una función bien definida continua; y nuevamente como  $I_j, J_j$  son homeomorfismos ( $j = 1, \dots, n$ ), tenemos que  $H_m$  también es un homeomorfismo que satisface  $H_m(T_m) = V_m$ . Con lo que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} T_m & \longrightarrow & T_{m-1} \\ \downarrow H_m & & \downarrow H_{m-1} \\ V_m & \longrightarrow & V_m \end{array}$$

donde las flechas horizontales son las correspondientes aplicaciones inclusión.

Resumiendo, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
T & \longleftarrow & T_1 & \longleftarrow & \cdots T_m & \longleftarrow & \cdots \Lambda(\Gamma_T) \\
\downarrow H & & \downarrow H_1 & & \downarrow H_m & & \downarrow \\
V & \longleftarrow & V_1 & \longleftarrow & \cdots V_m & \longleftarrow & \cdots \Lambda(\Gamma_V)
\end{array}$$

Por la propiedad universal de límite inverso, existe una función continua  $\tilde{F} : \Lambda(\Gamma_T) \rightarrow \Lambda(\Gamma_V)$  y usando el mismo argumento, existe una función continua  $\tilde{G} : \Lambda(\Gamma_V) \rightarrow \Lambda(\Gamma_T)$ ; y por el siguiente diagrama conmutativo, tenemos que  $\tilde{F} \circ \tilde{G} = Id$  y  $\tilde{G} \circ \tilde{F} = Id$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
T & \longleftarrow & T_1 & \longleftarrow & \cdots T_m & \longleftarrow & \cdots \Lambda(\Gamma_T) \\
\downarrow H & & \downarrow H_1 & & \downarrow H_m & & \downarrow \\
V & \longleftarrow & V_1 & \longleftarrow & \cdots V_m & \longleftarrow & \cdots \Lambda(\Gamma_V) \\
\downarrow H^{-1} & & \downarrow H_1^{-1} & & \downarrow H_m^{-1} & & \downarrow \\
T & \longleftarrow & T_1 & \longleftarrow & \cdots T_m & \longleftarrow & \cdots \Lambda(\Gamma_T)
\end{array}$$

Con lo que  $\Lambda(\Gamma_T)$  y  $\Lambda(\Gamma_V)$  son nudos salvajes equivalentes. □

Anteriormente, describimos a un collar de  $n$  perlas  $T$  como la unión de  $n$  3-bolas cerradas tales que bolas consecutivas son tangentes,  $B_1 := B_{r_1}(c_1)$ ,  $B_2 := B_{r_2}(c_2), \dots, B_n := B_{r_n}(c_n)$  en  $\mathbb{S}^3$  de forma tal que si unimos sus puntos de tangencia consecutivos por segmentos lineales, obtenemos un nudo poligonal  $K$  llamado el *nervio* de  $T$ ; sin embargo para nuestro propósito reformularemos esta definición.

Consideremos el círculo unitario  $\mathbb{S}^1 = \{(\cos(2\pi\theta), \sin(2\pi\theta), 0) : \theta \in [0, 1]\}$  y coloquemos 3-bolas  $O_i$  del mismo radio en los puntos  $c_i = (\cos(\frac{2\pi i\theta}{n}), \sin(\frac{2\pi i\theta}{n}), 0) \in \mathbb{S}^1$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ), de manera que las bolas consecutivas sean tangentes. Definimos el collar de  $n$ -perlas trivial  $\mathcal{O}(n)$  como  $\mathcal{O}(n) = \cup_{i=1}^n O_i$ . Notemos que podemos obtener un collar de

$n$ -perlas  $T$  de  $\mathcal{O}(n)$  cortándolo en un punto de tangencia, anudándolo y volviendo a pegarlo de regreso. Observemos que en esta construcción, el tamaño de algunas bolas puede cambiar, pero la condición de tangencia se conserva.

**Definición 2.2.2.** *Un collar de  $n$ -perlas es un encaje  $T : \mathcal{O}(n) \rightarrow \mathbb{S}^3$  tal que  $T(O_i)$  es una 3-bola euclidiana y  $T(O_i)$  es tangente a  $T(O_{i+1})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n \bmod n$ ; en otras palabras,  $T(O_i \cap O_{i+1})$  es un punto.*

**Observación 2.2.2.** *1. Podemos identificar a un collar de  $n$ -perlas  $T$  con su imagen  $T(\mathcal{O}(n))$ . Esto será conveniente en el futuro y usaremos indistintamente el mismo símbolo para la aplicación como para su imagen.*

*2. Notemos que cada bola  $O_i$  es ortogonal al círculo  $\mathbb{S}^1$ , con lo que si consideramos al grupo  $\Gamma_{\mathcal{O}(n)}$  generado por las reflexiones  $I_j$ , sobre  $\partial O_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), entonces su conjunto límite  $\Lambda(\Gamma_{\mathcal{O}(n)})$  es nuevamente el círculo  $\mathbb{S}^1$  (ver [27] para más detalles).*

**Definición 2.2.3.** *Sean  $T, V : \mathcal{O}(n) \rightarrow \mathbb{S}^3$  dos collares de  $n$ -perlas. Decimos que  $V$  es equivalente a  $T$ , si existe un homeomorfismo  $\varphi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  tal que  $\varphi(V) = T$ ,  $\varphi(V(O_i)) = T(O_i)$  y  $\varphi(V(O_i \cap O_{i+1})) = T(O_i \cap O_{i+1})$ .*

Por la definición [2.2.2], tenemos que la definición anterior es equivalente a la definición [2.2.1].

**Definición 2.2.4.** *Sean  $T, V : \mathcal{O}(n) \rightarrow \mathbb{S}^3$  dos collares de  $n$ -perlas. Decimos que  $T$  es isotópico a  $V$  si existe una función continua  $H : \mathcal{O}(n) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^3$  tal que  $H(\mathcal{O}(n), 0) = T$ ,  $H(\mathcal{O}(n), 1) = V$  y  $H(\mathcal{O}(n), t)$  es un collar de  $n$ -perlas para cada  $t \in (0, 1)$ .*

Ahora, relacionaremos los correspondientes conjuntos límite de collares de  $n$ -perlas isotópicos. Para ello, recordemos que dos 1-nudos  $K, L : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$  son isotópicos si existe una función continua  $H : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^3$  tal que  $H(x, 0) = K(x)$ ,  $H(x, 1) = L(x)$ , para  $x \in \mathbb{S}^1$  y la aplicación  $F_t : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$  dada por  $F_t(x) = H(x, t)$  es un 1-nudo, para cada  $t \in (0, 1)$ . La aplicación  $H$  se llama una isotopía de  $K$  a  $L$ .

**Teorema 2.2.2.** *Sean  $T$  y  $V$  dos collares de  $n$ -perlas isotópicos. Entonces sus conjuntos límite correspondientes  $\Lambda(\Gamma_T)$  y  $\Lambda(\Gamma_V)$  son nudos salvajes isotópicos.*

*Demostración.* Sean  $T$  y  $V$  collares de  $n$ -perlas isotópicos, vía la función de isotopía  $H : \mathcal{O}(n) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^3$ . A continuación, identificamos los collares de perlas con sus imágenes, con lo que podemos asumir que  $T = \cup_{i=1}^n B_i$  y que  $V = \cup_{i=1}^n C_i$  y sean  $\Gamma_T$  y  $\Gamma_V$  los correspondientes grupos generados por las reflexiones  $I_j, J_j$  sobre  $\Sigma_j = \partial B_j$  y  $\Upsilon_j = \partial C_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ), respectivamente.

En el primer paso del proceso de reflexión (ver Sección [2.1](#)), obtenemos collares de  $n_1$ -perlas  $T_1$  y  $V_1$  de  $T$  y  $V$ , respectivamente; donde  $n_1 = n(n-1)$ . Observemos que  $T_1$  y  $V_1$  también son collares de perlas isotópicos. En efecto,  $H_1 : \mathcal{O}(n_1) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^3$  dada por  $H_1(x, t) = J_{j_1} H(I_{j_1} \times Id)(x, t)$ , para  $x \in O_{j_1}$   $j_1 \in \{1, \dots, n\}$  es una función bien definida, continua, y que satisface  $H_1(x, 0) = T_1(x)$ ,  $H_1(x, 1) = V_1(x)$  y  $H_1(x, t_0)$  es un collar de  $n_1$ -perlas, para cada  $t_0 \in (0, 1)$ , donde  $Id$  es la función identidad. Con lo que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} T_1 & \longrightarrow & T \\ \downarrow H_1 & & \downarrow H \\ V_1 & \longrightarrow & V \end{array}$$

donde las flechas horizontales son las correspondientes aplicaciones inclusión.

Continuando con el proceso de reflexión, tenemos que en el  $m$ -ésimo paso, los correspondientes collares de  $n_m$ -perlas  $T_m$  y  $V_m$  ( $n_m = n(n-1)^m$ ) son isotópicos vía la isotopía  $H_m : \mathcal{O}(n_m) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^3$  dada por

$$H_m(x, t) = J_{j_m} J_{j_{m-1}} \cdots I_{j_1} H(I_{j_1} \cdots I_{j_{m-1}} I_{j_m} \times Id)(x, t),$$

para  $x \in O_{j_1, \dots, j_m}$ , donde  $Id$  es la función identidad y  $j_k \in \{1, \dots, n\}$  (ver la observación [2.1.1](#)). Así,  $H_m$  es una función bien definida, continua y satisface  $H_m(x, 0) = T_m(x)$ ,  $H_m(x, 1) = V_m(x)$  y  $H_m(x, t_0)$  es un

collar de  $n_m$ -perlas para cada  $t_0 \in (0, 1)$ . De esta manera, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} T_m & \longrightarrow & T_{m-1} \\ \downarrow H_m & & \downarrow H_{m-1} \\ V_m & \longrightarrow & V_m \end{array}$$

donde las flechas horizontales son las correspondientes aplicaciones inclusión.

Resumiendo, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} T & \longleftarrow & T_1 & \longleftarrow & \cdots T_m & \longleftarrow & \cdots \Lambda(\Gamma_T) \\ \downarrow H & & \downarrow H_1 & & \downarrow H_m & & \downarrow \\ H(\bullet, t_0) & \longleftarrow & H_1(\bullet, t_0) & \longleftarrow & \cdots H_m(\bullet, t_0) & \longleftarrow & \cdots \Lambda(\Gamma_{H(\bullet, t_0)}) \\ \downarrow H & & \downarrow H_1 & & \downarrow H_m & & \downarrow \\ V & \longleftarrow & V_1 & \longleftarrow & \cdots V_m & \longleftarrow & \cdots \Lambda(\Gamma_V) \end{array}$$

donde  $t_0 \in (0, 1)$ . Por la propiedad universal de límites inversos, existe una función continua  $G_t : \Lambda(\Gamma_T) \rightarrow \Lambda(\Gamma_{H(\bullet, t)})$  para cada  $t \in [0, 1]$ .

Definimos  $\tilde{G} : \Lambda(\Gamma_T) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^3$  como  $\tilde{G}(x, t) = G_t(x)$ , entonces  $\tilde{G}$  es continua.

En efecto, sea  $U \subset \mathbb{S}^3$  un abierto tal que  $V = U \cap \text{Im}(\tilde{G}) \neq \emptyset$  ( $\text{Im}$  denota a la imagen). Entonces  $\tilde{G}^{-1}(V) = \tilde{G}^{-1}(U \cap (\cup_{t \in [0, 1]} \Lambda(\Gamma_{H(\bullet, t)}))) = \cup_{t \in [0, 1]} \tilde{G}^{-1}(U \cap \Lambda(\Gamma_{H(\bullet, t)})) = \cup_{t \in [0, 1]} G_t^{-1}(U \cap \Lambda(\Gamma_{H(\bullet, t)}))$ . Como  $G_t$  es una función continua, tenemos que  $G_t^{-1}(U \cap \Lambda(\Gamma_{H(\bullet, t)}))$  es un conjunto abierto. Esto implica la continuidad de  $\tilde{G}$ .

Observemos que si aplicamos el argumento anterior para el collar de  $n$ -perlas trivial  $\mathcal{O}(n)$ , existe una función continua  $\tilde{F} : \Lambda(\Gamma_{\mathcal{O}(n)}) \rightarrow \Lambda(\Gamma_T)$ . En efecto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo



$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{O}(n) & \longleftarrow & \mathcal{O}(n)_1 & \longleftarrow & \cdots \mathcal{O}(n)_m & \longleftarrow & \cdots \Lambda(\Gamma_{\mathcal{O}(n)}) \\
\downarrow T & & \downarrow T_1 & & \downarrow T_m & & \downarrow \\
T & \longleftarrow & T_1 & \longleftarrow & \cdots T_m & \longleftarrow & \cdots \Lambda(\Gamma_T)
\end{array}$$

pero en este caso, tenemos que cada aplicación vertical es un homeomorfismo, y por tanto  $\tilde{F}$  es un homeomorfismo. Por la observación [2.2.2](#), tenemos que  $\Lambda(\Gamma_{\mathcal{O}(n)}) = \mathbb{S}^1$ , con lo que existe un homeomorfismo  $\tilde{F} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \Lambda(\Gamma_T)$ . Notemos que el mismo argumento es válido si reemplazamos  $\Lambda(\Gamma_T)$  por  $\Lambda(\Gamma_{H(\bullet,t)})$ , *i.e.* existe un homeomorfismo  $\tilde{F}_t : \mathbb{S}^1 \rightarrow \Lambda(\Gamma_{H(\bullet,t)})$ .

Por lo anterior, obtenemos una función continua  $\tilde{H} : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^3$  definida como  $\tilde{H}(x, t) = \tilde{G}(\tilde{F}(x), t) = G_t(\tilde{F}(x))$  la cual satisface  $\tilde{H}(x, 0) = \Lambda(\Gamma_T)(x)$ ,  $\tilde{H}(x, 1) = \Lambda(\Gamma_V)(x)$ , y  $\tilde{H}(x, t) = \Lambda(\Gamma_{H(\bullet,t)})(x)$  es un nudo salvaje (ver sección [2.1](#)). De esta manera,  $\Lambda(\Gamma_T)$  y  $\Lambda(\Gamma_V)$  son nudos salvajes isotópicos.  $\square$



## Capítulo 3

# Continuidad de la dimensión de Hausdorff en nudos salvajes definidos dinámicamente, equivalentes.

En este capítulo comparamos la dimensión de Hausdorff de nudos salvajes definidos dinámicamente con la dimensión de Hausdorff de conjuntos de Cantor definidos dinámicamente, usando las ideas de C.J. Bishop, P.W. Jones [4] y de Curtis McMullen [30]. Posteriormente demostraremos que la dimensión de Hausdorff de los conjuntos límites de nudos salvajes definidos dinámicamente equivalentes es una función continua, teorema [3.2.1](#).

### 3.1. Dimensión de Hausdorff para nudos salvajes definidos dinámicamente.

El objetivo principal de esta sección es demostrar el Teorema [3.1.2](#). Comenzaremos comparando la dimensión de Hausdorff de nudos salvajes definidos dinámicamente con la dimensión de Hausdorff de la familia de conjuntos de Cantor descritos en la sección [2.1](#) y demostraremos el Teorema [3.1.2](#).

Sea  $K$  un nudo manso en  $\mathbb{S}^3$  y sea  $T$  la unión de  $n$  3-bolas cerradas  $B_1 := B_{r_1}(c_1)$ ,  $B_2 := B_{r_2}(c_2)$ ,  $\dots$ ,  $B_n := B_{r_n}(c_n)$  en  $\mathbb{S}^3$  que cubren a  $K$ , tales que bolas consecutivas son tangentes. Sea  $\Gamma_T$  el grupo Kleiniano generado por las reflexiones  $I_j$ , sobre  $\Sigma_j = \partial B_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Sea  $\Lambda(\Gamma_T)$  el conjunto límite de  $\Gamma_T$ .

Dada  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeña, y para el mismo nudo poligonal  $K$  en  $\mathbb{S}^3$ , sea  $T_\epsilon^\circ$  la unión de  $n$  3-bolas disjuntas  $B_1^\epsilon := B_{r_1-\epsilon}(c_1)$ ,  $B_2^\epsilon := B_{r_2-\epsilon}(c_2)$ ,  $\dots$ ,  $B_n^\epsilon := B_{r_n-\epsilon}(c_n)$  en  $\mathbb{S}^3$  subordinadas a  $K$  de manera tal que  $T^\circ \subset T$ . Sea  $\Gamma_{T_\epsilon^\circ}$  el grupo generado por las reflexiones  $I_j^\epsilon$ , sobre  $\Sigma_j^\epsilon = \partial B_j^\epsilon$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Sea  $\Lambda(\Gamma_{T_\epsilon^\circ})$  el conjunto límite de  $\Gamma_{T_\epsilon^\circ}$ .

**Teorema 3.1.1.** *Sea  $G$  cualquiera de los grupos Kleinianos  $\Gamma_T$  y  $\Gamma_{T_\epsilon^\circ}$  descritos arriba. Entonces  $\delta(G) = \dim(\Lambda(G))$ , donde  $\delta(G)$  denota el exponente de Poincaré del grupo Kleiniano  $G$ , considerando  $G$  como la extensión a un grupo de isometrías que actúa en el espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^4$ .*

*Demostración.* Primero demostraremos la desigualdad

$$\dim(\Lambda(G)) \leq \delta(G)$$

usando un argumento parecido al dado en [4](#). Denotaremos también a la extensión de  $G$  en  $\mathbb{H}^4$  como  $G$ , ya que esta extensión es única.

Fijemos un número suficientemente grande  $M$  y para cada  $g \in G$ , sea  $B_g$  la bola euclidiana centrada en  $\frac{g(0)}{|g(0)|}$  (la proyección radial de la órbita

sobre la esfera) y radio  $M(1 - |g(0)|)$ . Observemos que para alguna  $M$  y por la construcción de  $\Lambda(G)$ , cualquier punto de  $\Lambda(G)$  pertenece a muchas (infinitas), bolas  $B_g$ , con lo que  $\{B_g\}$  es una cubierta abierta de  $\Lambda(G)$ . Observemos también que

$$\sum_g (B_g)^{\delta+\nu} < \infty$$

para cualquier  $\nu > 0$ . En efecto, ya que  $\sum_{g \in G} \exp(-(\delta + \nu)\rho(0, g(0))) < \infty$ , tenemos que  $\sum_{g \in G} \exp((\delta + \nu)(1 - \rho(0, g(0)))) = \sum_{g \in G} \exp((1 - \rho(0, g(0)))^{\delta+\nu}) < \infty$ , con lo que  $\sum_g (1 - |g(0)|)^{\delta+\nu} < \infty$ . Así,

$$\dim(\Lambda(G)) \leq \delta(G).$$

A continuación, demostraremos la otra desigualdad,  $\dim(\Lambda(G)) \geq \delta(G)$  usando un argumento similar al dado por McMullen ([30]) en el caso 3-dimensional. Para cualquier  $\nu > 0$ , sean  $s' = \delta(G) - \nu$  y  $s = \delta(G) - 2\nu$ . Entonces la serie de Poincaré  $s'$ -dimensional diverge. Probaremos que la medida de Hausdorff  $s$ -dimensional  $\Lambda(G)$  es distinta de cero.

Para ello, construyamos un árbol  $\mathcal{T}$  con raíces en el origen en  $\mathbb{B}^4$  de la siguiente manera. Los vértices de  $\mathcal{T}$  están en un subconjunto de la órbita  $G(0)$ ; de hecho, el conjunto de vértices  $C$  de  $\mathcal{T}$  está dado por  $C = \cup_{i=1}^{\infty} C_i$ , donde  $C_0 = \{0 \in \mathbb{B}^4\}$  y definimos  $C_n$ ,  $n \geq 1$ , como el subconjunto de  $G(0)$  tal que cada  $v_n \in C_n$  tiene un único “padre” en  $C_{n-1}$  y una colección de “hijos”  $C(v) \subset C_{n+1}$ . Ahora, vamos a describir al conjunto de aristas  $E$  de  $\mathcal{T}$  por niveles. Consideremos  $C_1$  y conectemos el origen con cada vértice  $v_j \in C_1$  por un segmento de geodésica, el cual será una arista  $e$  de  $\mathcal{T}$ , para obtener un árbol truncado  $\mathcal{T}_1$ . Observemos que se tienen  $n$  vértices en  $C_1$ , un  $v_j$  para cada bola  $B_j$  ( $B_j^\epsilon$ ) de nuestros respectivos collares; y cada arista es un segmento de geodésica de longitud mayor que  $L > 0$ ; y el ángulo entre dos aristas en cada vértices es mayor que  $\theta > 0$ .

A continuación, usaremos el proceso de reflexión para definir las aristas de los vértices en  $C_1$  a los vértices en  $C_2$ . De hecho, la reflexión  $I_j$  ( $I_j^\epsilon$ ) envía tanto una copia del correspondiente collar de perlas  $T - B_j$  ( $T_j^\circ - B_j^\epsilon$ ) como una copia de  $\mathcal{T}_1$  (llamada  $\mathcal{T}_{1_j}$ ) sobre la bola  $B_j$  ( $B_j^\epsilon$ ) para  $j = 1, 2, \dots, n$ . Vemos que el conjunto de vértices de  $\mathcal{T}_{1_j}$  es exactamente el conjunto  $C(v_j) \subset C_2$ , con lo que colocamos aristas de  $v_j$  hacia todos sus hijos (ver Figura 3.1). Si hacemos esto para cada  $j = 1, \dots, n$ , obtenemos al final del primer paso en nuestro proceso de reflexiones, todas las aristas respectivas desde el nivel  $C_1$  hasta el nivel  $C_2$ . Como antes, cada arista es un segmento de geodésica con longitud mayor que  $L > 0$ ; y el ángulo entre dos aristas en cada vértice es mayor que  $\theta > 0$ .

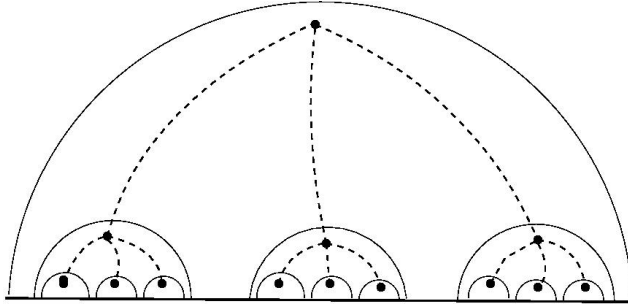


Figura 3.1: El árbol de los puntos órbita.

Repitiendo este procedimiento, obtenemos una familia de rayos  $(L, \theta)$ -geodésicos partiendo del origen, ramificándose en los vértices y extendiéndose hacia el infinito. Esta familia de rayos geodésicos forma un árbol porque por construcción, una vez que se ramifican nunca vuelven a encontrarse. Más aún, por las observaciones 2.1.1 y 2.1.2 tenemos que el conjunto  $E(\mathcal{T})$  de los extremos de  $\mathcal{T}$  está contenido en  $\Lambda(G)$  y si  $G = \Gamma_{T_\epsilon}$  podemos concluir que  $E(\mathcal{T}) = \Lambda(\Gamma_{T_\epsilon})$ . Esto implica que  $\mathcal{T}$  tiene la siguiente propiedad: Para cada vértice  $v$  en  $\mathcal{T}$  y su conjunto de

hijos  $v'$  se sigue que

$$\sum_{v'} \exp(-s\rho(v', 0)) \geq \sum_{v'} \exp(-s\rho(v', v)) \cdot \exp(-s\rho(v, 0)),$$

porque las geodésicas satisfacen  $\rho(v', 0) \leq \rho(v', v) + \rho(v, 0)$ . Por construcción y usando el hecho de que la serie de Poincaré  $s$ -dimensional diverge, tenemos que

$$\sum_{v'} \exp(-s\rho(v', v)) \gg 1;$$

con lo que

$$\sum_{v'} \exp(-s\rho(v', 0)) \geq \exp(-s\rho(v, 0)) \quad (3.1)$$

y la longitud de cada arista  $e$  está acotada por la constante  $L$ .

Ahora, demostraremos que  $H_s(E(\mathcal{T})) > 0$ . Tomemos una cubierta por 3-bolas  $B_{r_i}(x_i)$  de  $E(\mathcal{T})$  arbitraria. Para cada camino en  $\mathcal{T}$  desde el origen hacia un extremo, si éste termina en un extremo contenido en una bola  $B_{r_i}(x_i)$ , cortamos el camino en el vértice por el cual entró primero a la hemibola  $B_i$  en  $\mathbb{H}^4$  que genera  $B_{r_i}(x_i)$  y removemos la parte más lejana de ahí. De esta manera, construimos un árbol finito  $\mathcal{T}'$ . Entonces la suma tomada sobre los vértices  $v'$  en la frontera de  $\mathcal{T}'$  satisface

$$\sum \exp(-s\rho(v', 0)) \geq \exp(-s\rho(0, 0)) = 1$$

por la ecuación (3.1). Ya que  $\exp(-s\rho(v', 0))$  y  $(1 - |v'|)^s$  son comparables, entonces existe una constante  $C > 0$  tal que si  $v' \in B_i$  se tiene que  $C(2r_i)^s \geq \exp(s\rho(v', 0))$ . La cantidad de  $v' \in \partial\mathcal{T}'$  que están contenidas en una hemibola  $B_i$  está acotada por una constante  $K$  la cual depende solamente de  $a = \inf_{G-\{Id\}} \{\rho(g(0), 0)\}$  y de  $L'$ . Así

$$2^s C K \sum_i r_i^s \geq \sum_{v' \in \partial\mathcal{T}'} \exp(-s\rho(v', 0)) \geq 1.$$

Esto implica que, para cualquier cubierta por 3-bolas de  $E(\mathcal{T})$ , la suma de sus radios a la  $s$ -ésima potencia no es menor que  $(2^s CK)^{-1}$ , con lo que obtenemos

$$H_s(\Lambda(G)) \geq H_s(E(\mathcal{T})) \geq (2^s CK)^{-1} > 0.$$

Como  $s = \delta(G) - 2\nu$  y  $\nu$  es arbitraria, concluimos la demostración del teorema 3.1.1.  $\square$

**Corolario 3.1.1.** *Sea  $\{\Gamma_{T_{\frac{\epsilon}{m}}}\}$  una sucesión de grupos Kleinianos finitamente generados como antes. Entonces se sigue que  $\{\Gamma_{T_{\frac{\epsilon}{m}}}\}$  converge algebraicamente a  $\Gamma_T$  y  $\dim(\Lambda(\Gamma_T)) \leq \liminf_m \dim(\Lambda(\Gamma_{T_{\frac{\epsilon}{m}}}))$ .*

*Demostración.* Recordemos primero que  $\Gamma_T = \langle I_1, I_2, \dots, I_n \rangle$  y  $\Gamma_{T_{\frac{\epsilon}{m}}} = \langle I_1^{\frac{\epsilon}{m}}, I_2^{\frac{\epsilon}{m}}, \dots, I_n^{\frac{\epsilon}{m}} \rangle$ , con lo que claramente  $\{\Gamma_{T_{\frac{\epsilon}{m}}}\}$  converge algebraicamente a  $\Gamma_T$ .

Para la segunda parte del corolario 3.1.1, por el teorema 3.1.1, basta probar que

$$\delta(\Gamma_T) \leq \liminf_m \delta(\Gamma_{T_{\frac{\epsilon}{m}}})$$

pero esto es consecuencia del siguiente resultado.

**Afirmación:** Dada  $\delta_0 > 0$  existe una  $\epsilon_0$  (que depende únicamente de  $\delta$  y de  $\Gamma_T$ ) tal que si  $\|I_j^\epsilon - I_j\| < \epsilon_0$ , para toda  $j$ , entonces  $\delta(\Gamma_{T_{\frac{\epsilon}{m}}}) \geq \delta(\Gamma_T) - \delta_0$ .

En efecto, notemos que  $\rho(g^{\frac{\epsilon}{m}}(0), 0) \leq \rho(g^{\frac{\epsilon}{m}}(0), g(0)) + \rho(g(0), 0)$ , donde  $g^{\frac{\epsilon}{m}}$  y  $g$  representan a la misma palabra pero usando los generadores respectivos de cada grupo, con lo que  $g^{\frac{\epsilon}{m}}$  converge a  $g$ . De lo que se sigue la afirmación.  $\square$

Estamos listos para demostrar el siguiente teorema.



**Teorema 3.1.2.** *Bajo las condiciones arriba mencionadas,*

$$\lim_{\frac{\epsilon}{m} \rightarrow 0} \dim(\Lambda(\Gamma_{T_\epsilon^\circ})) = \dim(\Lambda(\Gamma_T))$$

donde  $\dim$  denota la dimensión de Hausdorff.

*Demostración.* Por el corolario 3.1.1 solamente necesitamos probar que

$$\lim_{\frac{\epsilon}{m} \rightarrow 0} \dim(\Lambda(\Gamma_{\frac{\epsilon}{m}})) \leq \dim(\Lambda(\Gamma_T)).$$

Consideremos una cubierta  $\{B_{r_k}(x_k)\}$  de  $\Lambda(\Gamma_T)$ , donde  $B_{r_k}(x_k)$  denota a la 4-hemibola euclidiana centrada en  $x_k$  y radio  $r_k$ . Como  $\Lambda(\Gamma_T)$  es compacto, entonces existe una subcubierta finita  $\{B_{r_{k_i}}(x_{k_i})\}_{i=1}^l$  de  $\Lambda(\Gamma_T)$ .

**Afirmación.** Ya que  $\Lambda(\Gamma_T) = \cap_k T_k$ , se tiene que existe  $m > 0$  tal que el collar del  $m$ -ésimo paso  $T_m$  satisface que  $T_m^\circ \subset \cup_{i=1}^l B_{r_{k_i}}(x_{k_i})$ .

*Demostración de la afirmación.* Por construcción  $T_k = \cup I_{i_1, i_2, \dots, i_k}(B_j)$ , donde  $I_{i_1, i_2, \dots, i_k}$  denota la composición de las  $k$  inversiones correspondientes  $I_{i_k} \circ \dots \circ I_{i_2} \circ I_{i_1}$  y  $B_j$  es la  $j$ -ésima bola perteneciente a  $T$ . Observamos que  $I_{i_1, i_2, \dots, i_k}(B_j)$  es una bola euclidiana y su radio tiende a cero cuando  $k$  tiende a infinito. Así, se puede encontrar  $m$  tal que  $T_m^\circ \subset \cup_{i=1}^l B_{r_{k_i}}(x_{k_i})$ . Esto demuestra nuestra afirmación.  $\square$

Consideremos  $T_m^\circ$  como antes. Sea  $I_{i_1, i_2, \dots, i_m}(B_j) \subset T_m$  la 3-bola euclidiana centrada en  $c_{i_1, i_2, \dots, i_m}^j$  y con radio  $r_{i_1, i_2, \dots, i_m}^j$  y tomemos la 3-bola  $I_{i_1, i_2, \dots, i_m}^\epsilon(B_j^\epsilon)$  centrada en  $c_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{\epsilon, j}$  y radio  $r_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{\epsilon, j}$ . Ahora pongamos la 4-hemibola  $B_{i_1, i_2, \dots, i_m}^j$  de radio  $r_{i_1, i_2, \dots, i_m}^j$  en  $c_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{\epsilon, j}$ , con lo que se tiene que los conjuntos  $\{B_{i_1, i_2, \dots, i_m}^j \mid 1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n\}$  es una cubierta para  $\Lambda(\Gamma_{T_\epsilon^\circ})$ . Esto se sigue ya que por la observación 2.1.2, podemos asociar a cada punto  $y \in \Lambda(\Gamma_{T_\epsilon^\circ})$  una dirección  $\{j_1, \dots, j_l, \dots\}$ ,  $j_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ; donde  $j_k$  significa la inversión en la esfera  $\Sigma_{j_k}^\epsilon$ .

En otras palabras, para cada cubierta por 3-bolas  $\{B_{r_k}(x_k)\}$  de  $\Lambda(\Gamma_T)$ , hemos encontrado una cubierta por 3-bolas  $\{B_{i_1, i_2, \dots, i_m} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n\}$  de  $\Lambda(\Gamma_{T_\epsilon^\circ})$  tal que  $\sum (r_{i_1, i_2, \dots, i_m}^j)^d < \sum r_k^d$ . Esto implica que

$$\begin{aligned} & \inf \left\{ \sum_k r_k^d : B_{r_k}(x_k) \text{ cubiertas } \Lambda(\Gamma_{T_\epsilon^\circ}); r_k \leq r \right\} \\ & < \inf \left\{ \sum_k r_k^d : B_{r_k}(x_k) \text{ cubiertas } \Lambda(\Gamma_T); r_k \leq r \right\}, \end{aligned}$$

y por lo tanto para cada  $\epsilon > 0$

$$\dim(\Lambda(\Gamma_{T_\epsilon^\circ})) \leq \dim(\Lambda(\Gamma_T)).$$

Con lo que,

$$\lim_{\frac{\epsilon}{m} \rightarrow 0} \dim(\Lambda(\Gamma_{T_\frac{\epsilon}{m}^\circ})) \leq \dim(\Lambda(\Gamma_T)).$$

Así, queda demostrado el resultado. □

### 3.2. La continuidad de la dimensión de Hausdorff en nudos salvajes definidos dinámicamente equivalentes.

Consideremos el conjunto  $\mathcal{C}(n)$  que consiste de todos los collares de  $n$ -perlas. Dado un collar  $T \in \mathcal{C}(n)$ , sea  $\mathcal{S}(T)$  el subconjunto de  $\mathcal{C}(n)$  que consiste de todos los collares de  $n$ -perlas equivalentes a  $T$ ; i.e.

$$\mathcal{S}(T) = \{V \in \mathcal{C}(n) \mid V \text{ es equivalente a } T\}.$$

Sea  $\Lambda(\mathcal{S}(T))$  el conjunto de todos los conjuntos límite correspondientes  $\Lambda(\Gamma_V)$ , donde  $V \in \mathcal{S}(T)$ ; i.e.

$$\Lambda(\mathcal{S}(T)) = \{\Lambda(\Gamma_V) \mid V \in \mathcal{S}(T)\}.$$

Estamos listos para demostrar nuestro teorema principal.

**Teorema 3.2.1.** *La función  $\mathcal{H} : \Lambda(\mathcal{S}(T)) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$\mathcal{H}(\Lambda(\Gamma_V)) = \dim(\Lambda(\Gamma_V))$$

*es continua, donde  $\dim$  denota la dimensión de Hausdorff.*

*Demostración.* Sea  $T' \in \mathcal{S}(T)$  un collar de  $n$ -perlas. Como antes, asumiremos que  $T' = \cup B_j$  y sea  $\Gamma_0$  el grupo generado por las inversiones  $I_j$  sobre  $\Sigma_j = \partial B_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ), cuyo conjunto límite es  $\Lambda(\Gamma_{T'})$ . Supondremos también que  $\dim(\Lambda(\Gamma_{T'})) = r_0$ .

Ahora, consideremos el correspondiente collar punteado de  $n$ -perlas  $T'_\eta = \cup B_j^\eta$  (ver sección 2.1) y sea  $\Gamma_{T'_\eta}$  el grupo generado por las reflexiones  $I_j^\eta$ , sobre  $\Sigma_j^\eta$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Así su conjunto límite  $\Lambda(\Gamma_{T'_\eta})$  es un conjunto de Cantor. Tomemos

$$\mathcal{S}(T'_\eta) = \{V_\eta^\circ \mid V \text{ es equivalente a } T'\}.$$

Dada  $\epsilon > 0$ , por el Teorema 3.1.2, tenemos que existe  $\nu_0 > 0$  tal que si  $\nu < \nu_0$ , entonces  $|\dim(\Lambda(\Gamma_{T'_\nu})) - \dim(\Lambda(\Gamma_{T'}))| < \frac{\epsilon}{3}$ .

Por otro lado, por el teorema de Bowen-Ruelle (p. 505 [20]), tenemos que la función  $\mathcal{H} : \Lambda(\mathcal{S}(T'_\eta)) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\mathcal{H}(\Lambda(\Gamma_{V_\eta^\circ})) = \dim(\Lambda(\Gamma_{V_\eta^\circ}))$  es continua. Esto implica que existe  $\delta > 0$  tal que  $d(\Lambda(\Gamma_{V_\eta^\circ}), \Lambda(\Gamma_{T'_\eta})) < \delta$  entonces  $|\dim(\Lambda(\Gamma_{V_\eta^\circ})) - \dim(\Lambda(\Gamma_{T'_\eta}))| < \frac{\epsilon}{3}$ , donde  $d$  denota la distancia entre dos subconjuntos en un espacio métrico.

De esta manera,

$$\begin{aligned} |\dim(\Lambda(\Gamma_V)) - \dim(\Lambda(\Gamma_{T'}))| &\leq |\dim(\Lambda(\Gamma_V)) - \dim(\Lambda(\Gamma_{V_\nu^\circ}))| \\ &\quad + |\dim(\Lambda(\Gamma_{V_\nu^\circ})) - \dim(\Lambda(\Gamma_{T'}))| \\ &\leq |\dim(\Lambda(\Gamma_V)) - \dim(\Lambda(\Gamma_{V_\nu^\circ}))| \\ &\quad + |\dim(\Lambda(\Gamma_{V_\nu^\circ})) - \dim(\Lambda(\Gamma_{T'_\nu}))| \\ &\quad + |\dim(\Lambda(\Gamma_{T'_\nu})) - \dim(\Lambda(\Gamma_{T'}))| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Con lo que  $\mathcal{H}$  es una función continua.

□

# Bibliografía

- [1] Colin C. Adams, *The knot book, An elementary introduction to the mathematical theory of knots*, W.H. Freeman (1994).
- [2] J. W. Anderson, *Hyperbolic Geometry*, Springer-Verlag, 2005.
- [3] E. Artin, R. H. Fox, *Some wild cells and spheres in three-dimensional space*. Annals of Mathematics, Second Series, no. 4, vol. 49 (1948), 979–990.
- [4] C. J. Bishop, P. W. Jones. *Hausdorff dimension and Kleinian groups*. Acta Math. 179 (1997), 1–39
- [5] M. Boege, G. Hinojosa, A. Verjovsky. *Wild knots in higher dimensions as limit sets of Kleinian groups*. Conformal Geometry and Dynamics of the American Mathematical Society, vol. 13 (2009), 197–216.
- [6] V. Caetano, G. Hinojosa, R. Valdez, *Hausdorff Dimension Varies Continuously on Equivalent Dynamically Defined Wild Knots*. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series (2021), 10.1007/s00574-021-00264-7.
- [7] R. D. Canary, E.C. Taylor, *Hausdorff Dimension and Limits of Kleinian Groups*, GAFA, Geom. funct. anal. 9, 283–297 (1999).
- [8] R. H. Crowell, R. H. Fox, *Introduction to Knot Theory*, Springer-Verlag New York (1963).

- [9] P. H. Doyle, *Fundamental groups*, Quart. J. Math. Oxford Ser.(2) 24 (1973), 397-398.
- [10] C. Drutu, M. Kapovich, *Geometric Group Theory*, American Mathematical Society (2018).
- [11] K. Falconer. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley and Sons. Second edition, 2003.
- [12] K. Falk, Katsuhiko Matsuzaki, *The critical exponent, the Hausdorff dimension of the limit set and the convex core entropy of a Kleinian group*, Journal of Conformal Geometry and Dynamics, no. 8, vol. 19, (2015), 159-196.
- [13] R. H. Fox. *A Quick Trip Through Knot Theory*. Topology of 3-Manifolds and Related Topics. Prentice-Hall, Inc., 1962.
- [14] E. Gerald, *Measure, topology, and fractal geometry*, Springer-Verlag (2008).
- [15] C. McA. Gordon, J Luecke, *Knots are Determined by Their Complements*, Journal of the American Mathematical Society, no. 2, vol. 2, (1989), 371-415.
- [16] M. Gromov, H. B. Lawson, W. Thurston. *Hyperbolic 4-manifolds and conformally flat 3-manifolds*. Publ. Math. I.H.E.S. Vol. 68 (1988), 27-45.
- [17] G. Hinojosa, *Wild knots as limit sets of Kleinian Groups*. Contemporary Mathematics, vol. 389 (2005), 125–139.
- [18] G. Hinojosa, A. Verjovsky. *Homogeneity of dynamically defined wild knots*. Rev. Mat. Compl. vol. 19 no. 1, 2006. Pags. 101-111.
- [19] J. G. Hocking, S. G. Young, *Topology*, (1961).
- [20] O. Jenkinson, M. Pollicott. *Calculating Hausdorff Dimension of Julia Sets and Kleinian Limit Sets*. American Journal of Mathematics, vol. 124, No. 3 (2002), 495–545.

- [21] G. A. Jones, D. Singerman, *Complex functions. An algebraic and geometric viewpoint*, Cambridge University Press, 1987.
- [22] T. Jørgensen, P. Klein. *Algebraic convergence of finitely generated kleinian group*. Quart. J. Math. Oxford (2) 33 (1982) 325–332.
- [23] M. Kapovich, Topological Aspects of Kleinian Groups in Several Dimensions. MSRI Preprint (1992). Updated in 2002 and published in Proceedings of the 3<sup>rd</sup> Ahlfors-Bers Colloquium.
- [24] M. Kapovich. *Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups*. Progress in Mathematics, Birkhauser, 2001.
- [25] L. H. Kauffman, *New Invariants in the Theory of Knots*, The American Mathematical Monthly, no. 3, vol. 95, (1988), 195-242.
- [26] A. Marden, *The Geometry of Finitely Generated Kleinian Groups*, Annals of Mathematics, Second Series, no. 3, vol. 99, (1974), 383-462.
- [27] B. Maskit. *Kleinian Groups*. Springer Verlag, 1987.
- [28] K. Matsuzaki, *The Hausdorff dimension of the limit sets of infinitely generated Kleinian groups*, Mathematical Proceedings of The Cambridge Philosophical Society, 128, (2000), 123-139.
- [29] K. Matsuzaki, M. Taniguchi, *Hyperbolic Manifolds and Kleinian Groups*, Oxford University Press, USA (1998).
- [30] C. McMullen, *Hausdorff dimension and conformal dynamics I: Strong convergence of Kleinian groups*, J. Diff. Geom. 51 (1999), 471–515.
- [31] C. McMullen, *Hyperbolic manifolds, discrete groups and ergodic theory*, (2006).
- [32] F. Morgan, *Geometric Measure Theory*. A Beginner's Guide-Academic Press (2016).
- [33] K. Murasugi, *Knot Theory and its Applications*, Birkhuser, 1996.

- [34] L. Neuwirth, *The Algebraic Determination of the Topological Type of the Complement of a Knot*, Proceedings of the American Mathematical Society, no. 6, vol. 12, (1961), 904-906.
- [35] P. J. Nicholls, *The Ergodic Theory of Discrete Groups*, Cambridge University Press, 1989.
- [36] K. Reidemeister, *Knot Theory*, Originally published as Knotentheorie by Kurt Reidemeister, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, (Alte Folge), Band 1, Heft 1. Translated from the German and edited by Leo F. Boron, Charles O. Christenson, and Bryan A. Smith, all of the University of Idaho, Moscow, Idaho, USA, (1983).
- [37] D. Rolfsen. *Knots and Links*. Publish or Perish, Inc. 1976.
- [38] D. Sullivan, *Entropy, sets Hausdorff measures old and new, and limit of geometrically finite Kleinian groups*, Acta Math., Vol. 153 (1984), 259-277.





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MORELOS

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

Coordinación de Programas Educativos

Posgrado en Ciencias



**DR. JEAN MICHEL GRÉVY MACQUART**  
**COORDINADOR DEL POSGRADO EN CIENCIAS**  
**PRESENTE**

Atendiendo a la solicitud para emitir DICTAMEN sobre la revisión de la TESIS titulada **Dimensión de Hausdorff para nudos salvajes definidos dinámicamente**, que presenta el alumno **Vladimir Caetano de Oliveira Contreras (5920170101)** para obtener el título de **Doctor en Ciencias**.

Nos permitimos informarle que nuestro voto es:

NOMBRE	DICTAMEN	FIRMA
Dra. Liudmila Lvovna Sabinina CInC-UAEM	APROBADO	
Dr. Antonio Daniel Rivera López CInC-UAEM	APROBADO	
Dr. Santiago Alberto Verjovsky Solá IMATE-UNAM	APROBADO	
Dr. Gamaliel Blé González UJAT	APROBADO	
Dra. Larissa Viacheslavovna Sbitneva CInC-UAEM	APROBADO	
Dr. Rogelio Valdez Delgado CInC-UAEM	APROBADO	
Dra. Gabriela Guadalupe Hinojosa Palafox CInC-UAEM	APROBADO	



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

### Sello electrónico

**LIUDMILA LVOVNA SABININA | Fecha:2021-10-22 20:38:00 | Firmante**

u8G85unHf8Y+p9nEmVfTpfRzv+qE4lMnc9HDCIKHXaUVUxAXJcdxOpJG/ax5shQk1L1437gc4GgGcvFlsy9cW94vCNx0dSTBbuU+3bs9cuE6YYB9KtTq78xglZU0ndNUZCB5OqYUhLBzXgitH7Sir1eTucsl/xo0yi9SIRVjBWfQTMwDB+SGz5B5guGLZqxIBtO+G7VIdEtJo0q6o4mlz5poeV+6HpXfgfZbLH/1/ITS8tkdrjNyKsb3Lodu0bYjjqWTT1Jcessajv2J5ocQM45FR9j/+n9sTToPflzP9g85I+E14rhJrHCRn+UXEmJdjoHIC6KtqESjRTQO3GAA==

**SANTIAGO ALBERTO VERJOVSKY SOLA | Fecha:2021-10-22 21:40:14 | Firmante**

lpYygEewbwqVjRTAsXDj7Xj5dRWPcnu3gMGZhdV+2J5F4ahjglgAFxN21f9DOu05PlaNrUzc2mU0VH7xjcl+jx132JFdj5BkalnmYbkBci+WntCGAyg7a6ghrRy+ybF2MhnafAwqFmX/ze2ElwX7BwHGik9NuBoLt2OL/621IMEASm1yDQ9T81DC23/t5hLkxgz6p6i3COaKUeTB4jPiaNkoFlxIBLKEpDr6JYmKb9SudQITdRfXboFJGFERzUqnWDBJNFTO5+6V8bFDcEUMITT/TqKHl7fjFA3NgE72bR86pfn+UVzqGeqTtw07TikSq2jmBlmHo9c/kTYOm8Pw==

**LARISSA VIACHESLAVOVNA SBITNEVA | Fecha:2021-10-23 00:45:31 | Firmante**

ULMULt8rlx3ITLWmSlqAuz6Bj+ofqQqay34FCUKX4QT7xyE67f9yuvNE8a+JYeJxJ3FGcdnBTw0PnPH4HH/+GkYmiQs0eAiKrXn7SS6h6NP1Go5WNaauyEReil8PCoSGRxsvicveMtxK3llh+86KW6y7yre0Kumb9W7kMzRyCBz5hQADuxJnNg23ntNE/sMqgWFwyYx6wMYm+rcNrcXhntD2z4QXJmz+dbHPsXx0gnVUOGfi5d9ccj9Is8PZBuzW0gEjE1/Rftvr9rdzIat9AeQ1y558n1V83Tni/A+M3qtzRPL9vEr5zkcclBfUflh720U56sW8iuHicw==

**GABRIELA GUADALUPE HINOJOSA PALAFOX | Fecha:2021-10-23 09:14:35 | Firmante**

AQeU1zrfCaL8VVfnfZBp3kT/YB5HG+wZtZU0fqNJe/q9uYAnJ4V+QfBVLKee5fuOzo5wXxUfn2fVoSJEzT0wpFCXTd0SI23q5cfXReXkkTidcrvKgU/16/6znn/kaON8JSX5DDIV19+IS+GMwH49Ho6i4hksy3skpgHp0H+9N0ySmobKGY3/yoAo5birELLUE/oEclnddveMt5L5a+kNjzywQbT0p+8D7tyY6tMklHa7BZqsganTtbvuKq1t8uYO9Q7TEdcyf/K7RK4++EZ7gd6LYoh4Z2BgxSWwJjSPHBFvKHHIYHsVxLRIDMvulXxkGPDF8NVy4HfcejXPjK==

**GAMALIEL BLÉ GONZÁLEZ | Fecha:2021-10-25 13:54:28 | Firmante**

PleDDbcuxQ7ot7Spd6vvh63hym+anSDLH0/xzGUICS7+TftehUPpbL0rNuqcOVM2K8bUZDF05s82aXFFAeTyxNi8UMKK7GiJNH2k+CzNfyTIF1qybhL9irYZVwCOjIDRZwksq/vAj2IN77jX5by2iPe0gQ2s/PsqCLNOQHLCsuc084XQjuOw6mNJR3u3a5QLK2WVAFIMIZ0AAY+3jl+3VRJNi+24Pz8x7ZaPiUQjIxy8sXkTdQWU66q3AOrpJjsq14SLILMYwSgQFCFCWgW+00t3mmCfj+o7RSckb+qTwhXZojrCvklfbBa1dZYREt8aU1AWxHz9GAJLd7Vw==

**ROGELIO VALDEZ DELGADO | Fecha:2021-10-25 16:29:19 | Firmante**

c6Llf5uZ2QvtB3UYF1wsHJaZrgcCt903SEvbWtJouTqzmu13qTaN4WDH90qrVnKQICEIMLO/6MAvNgaJeAgkPEVIGpmFH5SwFXRbVxApHcu3jJ7ZW+/gBRc7CfsTNI54LWaGmsV2eAP/n4ePIRSQWjHRDfB0/H5v8V+HO5K4VnYf0dcorOW064TollhncxbfEAD9gvyITKoP7CIHLJKDEdMv+iPntpitwHXGco5eJuzCPFRhMK92Z4luo/Gjm119lkm+2z/tCyH3TBz671YY0M9Pal1ugftgehtgbVaa3XAcVDA0u1IT1xWU8bjkMCC9xZFC8S3HkkOfXJ8uXAKA==

**ANTONIO DANIEL RIVERA LOPEZ | Fecha:2021-10-28 17:51:14 | Firmante**

L6GjxCCOZDaI8cHqP05/cUG2o3KIDGBYnrGG+XCg2Vpwa7oV8UZu8ay5ZVzHEwz9E5dORkdSv4Lbk6kIEPtRWI/dOUHhFHqgm+7T4KkpzI9zZ1T7IBd7ShDszZ+32swiLBfDF6Lz+YifPAFYmV1QxUDsdBTBMYGjTWgf6w29kGYpJE3rCfswbUPo5rxkknJagExtAFPupzmozvfv2ie8qq1w/b72SPMPVl+9L9DrFkZHK7Q0IQzXJwT29XgC7Xu5+jjV2Wo88Dn4qMecu8yGb2KdP5nis7pD8s+sHwEQeUlhW3jHCQg2xtv4CKOFOkO2jchdUCgq9rb07kjdTeuA==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



xnVSNPu0s

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/g6dAgvy38C5SFFPNe9tOBildswqo5l4x>

