

# UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

MEDIDAS DE FIDELIDAD EN UN SISTEMA CUÁNTICO ABIERTO CON  
ENTORNOS CAÓTICOS

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO  
DE DOCTOR EN CIENCIAS

HÉCTOR JOSÉ GERARDO MORENO CARRIÓN

DIRECTOR DR. THOMAS GORIN  
CODIRECTOR DR. THOMAS H. SELIGMAN

SINODALES:  
DR. LUIS BENET FERNÁNDEZ  
DR. ROLANDO PÉREZ ÁLVAREZ  
DR. ALEJANDRO RAMÍREZ SOLÍS  
DR. FRANÇOIS LEYVRAZ WALTZ  
DRA. MANAN VYAS

CUERNAVACA, MORELOS

MAYO, 2018

# Lista del jurado

---

El presente trabajo ha tenido el presente jurado para su revisión

- Presidente:  
Dr. Luis Benet Fernández
- Secretario:  
Dr. Rolando Pérez Álvarez
- Vocales:  
Dr. Thomas Seligman Schurch  
Dr. François Leyvraz Waltz  
Dr. Alejandro Ramirez Solís
- Suplentes:  
Dr. Thomas Gorin  
Dr. Manan Vyas



# Lista de publicaciones

---

De la presente trabajo se desprenden las siguientes publicaciones:

1. H. J. Moreno, T. Gorin, T. H. Seligman., Improving coherence with nested environments, *Phys. Rev. A*, 92:030104. (2015)
2. T. Gorin, H. J. Moreno, T. H. Seligman, A generalized fidelity amplitude for open systems, *Phil. Trans. R. Soc. A*, 374(2069). (2016)



# Resumen

---

En este trabajo se presenta el análisis del decaimiento de la coherencia para un sistema tripartita en el marco de los sistemas cuánticos abiertos. Esto introduciendo una medida de fidelidad: la amplitud de fidelidad generalizada. El trabajo consta de tres bloques principales: i) Modelos, ii) Amplitud de fidelidad generalizada y iii) Resultados y simulaciones.

En el primer bloque, introducimos los modelos tripartitas utilizados a lo largo de todo el trabajo. Estos modelos están constituidos por un sistema central — qubit —, entorno cercano; descrito ya sea por un entorno caótico — modelado por una matriz aleatoria— o por un oscilador armónico y un entorno lejano — termino disipativo —.

En el segundo bloque, calculamos amplitud de fidelidad generalizada para ambos modelos. Primero, utilizamos el entorno caótico como entorno cercano y obtenemos una ecuación maestra que describe su dinámica. Con la cual obtenemos una ecuación integral que describe la amplitud de fidelidad generalizada. Solucionamos esta ecuación integral analíticamente para diferentes regímenes — perturbativo y Fermi golden rule — por medio del teorema del residuo. Después cambiamos el entorno a un oscilador armónico, y de igual manera, obtenemos una ecuación maestra para la dinámica del entorno cercano y una ecuación integral para la amplitud de fidelidad generalizada.

En el tercer bloque, mostramos las simulaciones obtenidas para decaimiento de la coherencia para ambos modelos. Aquí mostramos como en ambos casos el decaimiento de la coherencia se ve beneficiado al incrementar el acoplamiento del entorno cercano con el lejano. En la última parte de este bloque mostramos como se compara la amplitud de fidelidad generalizada se compara con otras medidas frecuentemente utilizadas como son la distancia traza, la fidelidad cuántica y la super - sub fidelidad.



# Abstract

---

The present work shows the coherence decay analysis in a tripartite system, this in the frame of open quantum systems. This analysis will be performed introducing a new fidelity measure: the generalized fidelity amplitude. The total work consists mainly of three blocks: i) models, ii) generalized fidelity amplitude and iii) results and simulations.

In the first block, we introduce the models used throughout the work. These models are constituted by a central system — qubit —, a near environment described either by a chaotic system — random matrix — or a harmonic oscillator, and a far environment — dissipative term —.

In the second block, the generalized fidelity amplitude was calculated. First, we use a chaotic environment as an environment and we obtain a master equation that describes its dynamics. With this master equation, we can obtain an integral equation which describes the generalized fidelity amplitude. This integral equation is solved analytically for different regimes — perturbative and Fermi golden rule — throughout the residue theorem. Then we change the near environment to a harmonic oscillator, and as the previous case, we obtain an integral equation for the generalized fidelity amplitude.

In the third block, we show the simulations obtained of the coherence decay for both models. Here we show how for both cases the coherence decay enhances when we increase the coupling between the near and far environment. The last part of the block shows the comparison between the generalized fidelity amplitude with other measurements frequently used for instance the trace distance, the quantum fidelity, and the super- sub fidelity.

# Índice general

---

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Marco teórico</b>	<b>3</b>
2.1. Sistemas cuánticos abiertos . . . . .	3
2.1.1. Ecuación maestra . . . . .	4
2.1.2. Limite de acoplamiento débil . . . . .	4
2.2. Decoherencia . . . . .	6
2.2.1. Medidas de distancia y medidas de fidelidad . . . . .	6
2.3. Amplitud de fidelidad . . . . .	6
2.3.1. Medidas de distancia . . . . .	8
2.4. Amplitud de fidelidad generalizada . . . . .	10
<b>3. Modelos: Sistemas tripartitas</b>	<b>13</b>
3.1. Entorno: RMT . . . . .	13
3.2. Entorno: oscilador armónico . . . . .	17
3.2.1. Ecuación maestra . . . . .	17
3.2.2. Decaimiento de la fidelidad . . . . .	19
<b>4. Amplitud de fidelidad generalizada para sistemas tripartitas</b>	<b>25</b>
4.1. Ecuación integral para la amplitud de fidelidad generalizada . . . . .	25
4.1.1. Entorno: RMT . . . . .	25
4.1.2. Solución para $\phi_{\lambda,\Gamma}(t)$ . . . . .	27
<b>5. Simulaciones</b>	<b>35</b>
5.0.1. Amplitud de fidelidad generalizada para un modelo RMT . . . . .	35
5.0.2. Oscilador armónico . . . . .	43
5.0.3. Comparación entre medidas . . . . .	49
<b>6. Conclusiones</b>	<b>67</b>



# Índice de figuras

---

4.1. Región de indeterminación del denominador de la función $f(s)$ para decaimiento Gaussiano. . . . .	30
4.2. Amplitud de fidelidad generalizada $f_{\lambda,\Gamma}(t)$ obtenida por el método del residuo para el decaimiento Gaussiano. . . . .	32
5.1. Amplitud de fidelidad generalizada $f_{\lambda,\Gamma}(t)$ para un ensemble RMT en el entorno cercano y un canal depolarizador con temperatura infinita en el entorno lejano con $N_e = 80$ , $\lambda = 0,02$ y $n_{run} = 100$ . . . . .	37
5.2. Amplitud de fidelidad generalizada $f_{\lambda,\Gamma}(t) - f_{\lambda,0}(t)$ para un ensemble RMT en el entorno cercano y un canal depolarizador con temperatura infinita en el entorno lejano con $N_e = 50$ , $\lambda = 0,02$ y $n_{run} = 1000$ . . . . .	38
5.3. Amplitud de fidelidad generalizada $f_{\lambda,\Gamma}(t) - f_{\lambda,0}(t)$ para un ensemble RMT en el entorno cercano y un canal depolarizador con temperatura infinita en el entorno lejano con $N_e = 50$ , $\lambda = 0,1$ y $n_{run} = 1000$ . . . . .	39
5.4. Amplitud de fidelidad generalizada $f_{\lambda,\Gamma}(t) - f_{\lambda,0}(t)$ para un ensemble RMT en el entorno cercano y un canal depolarizador con temperatura infinita en el entorno lejano con $N_e = 80$ , $\lambda = 0,02$ y $n_{run} = 100$ . . . . .	40
5.5. Amplitud de fidelidad generalizada $f_{\lambda,\Gamma}(t) - f_{\lambda,0}(t)$ para un ensemble RMT en el entorno cercano y un canal depolarizador con temperatura finita en el entorno lejano con $N_e = 50$ , $\lambda = 0,02$ , $n_{run} = 1000$ y $\beta = 0,2$ . . . . .	41
5.6. Amplitud de fidelidad generalizada $f_{\lambda,\Gamma}(t) - f_{\lambda,0}(t)$ para un ensemble RMT en el entorno cercano y un canal depolarizador con temperatura finita en el entorno lejano con $N_e = 50$ , $\lambda = 0,02$ , $n_{run} = 1000$ y $\beta = 1,0$ . . . . .	42
5.7. Amplitud de fidelidad generalizada $f_{\lambda,\Gamma}(t) - f_{\lambda,0}(t)$ para un ensemble RMT en el entorno cercano y un canal depolarizador con temperatura finita en el entorno lejano con $N_e = 50$ , $\lambda = 0,1$ , $n_{run} = 1000$ , $\beta = 0,2$ . . . . .	43

5.8. Amplitud de fidelidad generalizada $f_{\lambda,\Gamma}(t) - f_{\lambda,0}(t)$ para un ensemble RMT en el entorno cercano y un canal depolarizador con temperatura finita en el entorno lejano con $N_e = 50$ , $\lambda = 0,1$ , $n_{run} = 1000$ y $\beta = 1,0$ .	44
5.9. Amplitud de fidelidad generalizada $f_{\lambda,\Gamma}(t)$ para un oscilador armónico en el entorno cercano y un canal depolarizador con temperatura infinita en el entorno lejano con $N_e = 40$ y $\lambda = 0,02$ — $\Gamma$ pequeñas — . . . . .	45
5.10. Amplitud de fidelidad generalizada $f_{\lambda,\Gamma}(t)$ para un oscilador armónico en el entorno cercano y un canal depolarizador con temperatura infinita en el entorno lejano con $N_e = 40$ y $\lambda = 0,02$ — $\Gamma$ grandes — . . . . .	46
5.11. Amplitud de fidelidad generalizada $f_{\lambda,\Gamma}(t)$ para un oscilador armónico en el entorno cercano y un canal depolarizador con temperatura infinita en el entorno lejano con $N_e = 40$ y $\lambda = 0,1$ — $\Gamma$ pequeñas — . . . . .	47
5.12. Amplitud de fidelidad generalizada $f_{\lambda,\Gamma}(t)$ para un oscilador armónico en el entorno cercano y un canal depolarizador con temperatura infinita en el entorno lejano con $N_e = 40$ y $\lambda = 0,1$ — $\Gamma$ grandes — . . . . .	48
5.13. Comparación de entre $f_{\lambda,\Gamma}(t)$ , $F(\varrho, \sigma)$ y $D(\varrho, \sigma)$ para $N_e = 40$ , $\lambda = 0,02$ , $n_{run} = 1000$ y $\Gamma = 0$ . . . . .	50
5.14. Comparación de entre $f_{\lambda,\Gamma}(t)$ , $F(\varrho, \sigma)$ y $D(\varrho, \sigma)$ para $N_e = 40$ , $\lambda = 0,1$ , $n_{run} = 1000$ y $\Gamma = 0$ . . . . .	51
5.15. Comparación de entre $f_{\lambda,\Gamma}(t)$ , $F(\varrho, \sigma)$ y $D(\varrho, \sigma)$ para $N_e = 40$ , $\lambda = 0,02$ , $n_{run} = 1000$ y $\Gamma = 0,01$ . . . . .	52
5.16. Comparación de entre $f_{\lambda,\Gamma}(t)$ , $F(\varrho, \sigma)$ y $D(\varrho, \sigma)$ para $N_e = 40$ , $\lambda = 0,1$ , $n_{run} = 1000$ y $\Gamma = 0,01$ . . . . .	53
5.17. Comparación de entre $f_{\lambda,\Gamma}(t)$ , $F(\varrho, \sigma)$ y $D(\varrho, \sigma)$ para $N_e = 40$ , $\lambda = 0,02$ , $n_{run} = 1000$ y $\Gamma = 0,1$ . . . . .	54
5.18. Comparación de entre $f_{\lambda,\Gamma}(t)$ , $F(\varrho, \sigma)$ y $D(\varrho, \sigma)$ para $N_e = 40$ , $\lambda = 0,1$ , $n_{run} = 1000$ y $\Gamma = 0,1$ . . . . .	55
5.19. Fidelidad cuántica para $N_e = 40$ , $\lambda = 0,02$ y $n_{run} = 1000$ . . . . .	56
5.20. Fidelidad cuántica para $N_e = 40$ , $\lambda = 0,1$ y $n_{run} = 1000$ . . . . .	57
5.21. Fidelidad cuántica $F(\varrho, \sigma)$ contra amplitud de fidelidad generalizada $f_{\lambda,\Gamma}(t)$ para $N_e = 40$ , $\lambda = 0,02$ y $n_{run} = 1000$ . . . . .	58
5.22. Fidelidad cuántica $F(\varrho, \sigma)$ contra amplitud de fidelidad generalizada $f_{\lambda,\Gamma}(t)$ para $N_e = 40$ , $\lambda = 0,1$ y $n_{run} = 1000$ . . . . .	59
5.23. Distancia traza $D(\varrho, \sigma)$ contra amplitud de fidelidad generalizada $f_{\lambda,\Gamma}(t)$ para $N_e = 40$ , $\lambda = 0,02$ y $n_{run} = 1000$ . . . . .	60
5.24. Distancia traza $D(\varrho, \sigma)$ contra amplitud de fidelidad generalizada $f_{\lambda,\Gamma}(t)$ para $N_e = 40$ , $\lambda = 0,1$ y $n_{run} = 1000$ . . . . .	61

5.25. Comparación de entre $f_{\lambda, \Gamma}(t)$ , $F(\varrho, \sigma)$ , $G(\varrho, \sigma)$ y $E(\varrho, \sigma)$ para $N_e = 40$ , $\lambda = 0,02$ , $n_{run} = 1000$ y $\Gamma = 0,0$ . . . . .	62
5.26. Comparación de entre $f_{\lambda, \Gamma}(t)$ , $F(\varrho, \sigma)$ , $G(\varrho, \sigma)$ y $E(\varrho, \sigma)$ para $N_e = 40$ , $\lambda = 0,1$ , $n_{run} = 1000$ y $\Gamma = 0,0$ . . . . .	63
5.27. Comparación de entre $f_{\lambda, \Gamma}(t)$ , $F(\varrho, \sigma)$ , $G(\varrho, \sigma)$ y $E(\varrho, \sigma)$ para $N_e = 40$ , $\lambda = 0,02$ , $n_{run} = 1000$ y $\Gamma = 0,01$ . . . . .	64
5.28. Comparación de entre $f_{\lambda, \Gamma}(t)$ , $F(\varrho, \sigma)$ , $G(\varrho, \sigma)$ y $E(\varrho, \sigma)$ para $N_e = 40$ , $\lambda = 0,1$ , $n_{run} = 1000$ y $\Gamma = 0,01$ . . . . .	65

---

# Capítulo 1

## Introducción

---

La teoría de sistemas cuánticos abiertos juega un rol importante a la hora de aplicar la teoría cuántica en diversas áreas de la física, como la información, computación y criptografía cuántica [1]. Esto debido a que permite el estudio de un sistema cuántico (generalmente llamado sistema central) en contacto con su entorno. Esta interacción provoca la pérdida de la dinámica unitaria e induce el decaimiento de la coherencia (también llamada decoherencia), lo que desemboca en la pérdida de propiedades cuánticas importantes (e.g. la superposición, el entrelazamiento) [2]. Dicho lo anterior resulta fundamental comprender y controlar esta interacción con el fin de evitar tal decaimiento.

Una forma de medir esta interacción es a través de la fidelidad (también conocida como Loschmidt echo). La cual, es el traslape del estado inicial con el estado obtenido después de una evolución no perturbada, i.e. estado sin tomar en cuenta la perturbación del entorno, seguida de una evolución perturbada hacia atrás en el tiempo o, de manera equivalente, es el traslape entre el estado obtenido después de una evolución no perturbada y el estado obtenido después de una evolución perturbada. [3].

Anteriormente se ha mostrado que el decaimiento de la fidelidad puede ser conectada con la pérdida de coherencia de un sistema cuántico, i.e. la amplitud de fidelidad decrece conforme la decoherencia aumenta debido al acoplamiento con el entorno, cuando se tiene un entorno de desfase (dephasing). Aquí podemos interpretar las coherencias del sistema central (los elementos no diagonales de su operador de densidad) como el decaimiento de la amplitud de fidelidad. [4].

Recientemente ha sido posible extender el sistema total a un sistema tripartita, i.e. sistema central acoplado a entorno cercano y este acoplado a un entorno lejano, y como en el caso bipartita utilizar las coherencias del operador de densidad del sistema central para medir el decaimiento de la amplitud de fidelidad [5]. Sin embargo a diferencia de los sistemas bipartitas aquí las coherencias del sistema central, que se encuentra acoplado a un sistema intermedio abierto, i.e. debido a la interacción con el entorno lejano, da lugar al decaimiento de lo que se conoce como amplitud de fidelidad

---

generalizada.

En el presente trabajo analizaremos el efecto que tiene el acoplamiento del entorno lejano en la coherencia del sistema central, para el caso que estos no interactúan directamente. El entorno cercano será el sistema abierto que analizaremos, utilizando el qubit (sistema central) como prueba, y como fuente de la perturbación, causando el decaimiento de la fidelidad en ausencia del entorno lejano.

Consideraremos dos tipos de entorno cercano, un modelo RMT como el utilizado en [5], y un oscilador armónico desplazado, para al final obtener para cada uno de los entornos una ecuación integral que nos permita calcular la amplitud de fidelidad generalizada.

Todo lo dicho anteriormente pretende ser explicado y extendido en el presente trabajo de la siguiente manera: en el Cap. 2 se introducirán las herramientas y conceptos necesarios para el desarrollo de este trabajo, estos incluyen la definición de un sistema cuántico abierto y las ecuaciones maestras como herramientas para analizarlos, el concepto de decoherencia y diferentes medidas que nos permiten cuantificarla: i) fidelidad cuántica, ii) amplitud de fidelidad generalizada, iii) distancia traza, iv) sub y super fidelidad.

En el Cap. 3 describiremos los 2 modelos a los que aplicaremos la amplitud de fidelidad generalizada. Ambos modelos son sistemas tripartitas y difieren solo en el entorno cercano. El primer modelo está compuesto por un qubit como sistema central, un entorno cercano modelado por un entorno RMT y un canal depolarizador con temperatura infinita. Para el segundo modelo de nuevo utilizamos un qubit como sistema central, ahora modelamos el entorno cercano por un oscilador armónico desplazado y como en el caso anterior el utilizaremos un canal depolarizador con temperatura infinita como entorno lejano.

En el Cap. 4 desarrollamos descripciones analíticas para la amplitud de fidelidad generalizada. Esto con el fin de obtener las ecuaciones que modelen el decaimiento de la coherencia del sistema central para los modelos descritos en el Cap. 3.

En el Cap. 5 mostraremos los resultados de las simulaciones numéricas para las diferentes medidas de fidelidad introducidas en el Cap. 2: i) amplitud de fidelidad generalizada, ii) distancia traza, iii) fidelidad cuántica (de Jozsa), iv) sub y superfidelidad, para los modelos introducidos en el capítulo 3.

Para finalizar en el Cap. 6 se darán las conclusiones a las que se ha llegado después de los análisis realizados para los Caps. 3, 4 y 5.

---

## Capítulo 2

# Marco teórico

---

En esta sección se introducen los conceptos y herramientas utilizadas a lo largo de este trabajo. Primero introducimos el concepto de sistema cuántico abierto, describimos las propiedades de este tipo de sistemas y como pueden ser modelados por una ecuación maestra. Después introducimos el concepto de decoherencia y como puede ser cuantificada a través de diferentes medidas — en especial nos enfocaremos en la amplitud de fidelidad descrita en términos del operador de Loschmidt eco —. Terminamos introduciendo otras medidas para la decoherencia con fin de compararlas con la amplitud de fidelidad generalizada.

### 2.1. Sistemas cuánticos abiertos

De manera general un sistema abierto es un sistema cuántico  $S$  el cual está acoplado a otro sistema cuántico  $B$  el cual actúa como entorno. Donde cada uno de estos sistemas representan subsistemas de un sistema total  $S + B$ .<sup>1</sup> Entonces el estado del subsistema  $S$  cambiará debido a su dinámica interna y a la interacción con el entorno  $B$ . Esto genera interacciones entre los sistemas tal que la dinámica del subsistema  $S$  no puede ser descrita por una dinámica unitaria como en el caso de un sistema cerrado.

Entonces el sistema  $S$  y el entorno  $B$  pertenecen a los espacios de Hilbert  $\mathcal{H}_S$  y  $\mathcal{H}_B$  respectivamente y el sistema total  $S + B$  pertenecerá al espacio de Hilbert dado por el producto tensorial  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_B$ . El Hamiltoniano total tiene la forma

$$H(t) = H_S \otimes \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_S \otimes H_B + H_I(t), \quad (2.1)$$

donde  $H_S$  es el Hamiltoniano del sistema  $S$ ,  $H_B$  es el Hamiltoniano del entorno  $B$  y  $H_I(t)$  es el Hamiltoniano que describe la interacción sistema-entorno [2].

---

<sup>1</sup>En general este sistema combinado se toma como un sistema cerrado, que sigue una dinámica Hamiltoniana.

### 2.1.1. Ecuación maestra

Dado que en general la dinámica de un sistema cuántico abierto no puede ser descrita en términos de una evolución unitaria, resulta conveniente encontrar una ecuación de movimiento para su matriz de densidad. Esta ecuación de movimiento es una ecuación maestra de la forma

$$\frac{d}{dt}\varrho_S(t) = \mathcal{L}\varrho_S(t), \quad (2.2)$$

y es llamada ecuación maestra Markoviana para el sistema abierto  $S$ . Aquí  $\mathcal{L}$  es el generador del semigrupo y representa un super-operator<sup>2</sup>. Entonces para el sistema reducido el generador tiene la forma

$$\mathcal{L}\rho_s(t) = -i[H_s, \rho_s] + \sum_{k=1}^{N^2-1} \gamma_k \left( A_k \rho_s A_k^\dagger - \frac{1}{2} A_k^\dagger A_k \rho_s - \frac{1}{2} \rho_s A_k^\dagger A_k \right), \quad (2.3)$$

donde el primer termino representa la parte para la dinámica unitaria generada por el Hamiltoniano  $H_s$ ,  $\gamma_k > 0$  es la tasa de relajación y los operadores  $A_k$  son los operadores de Lindblad [6, 7]. En este punto podemos introducir el disipador

$$\mathcal{D}(\rho_s(t)) = \sum_k \gamma_k \left( A_k \rho_s A_k^\dagger - \frac{1}{2} A_k^\dagger A_k \rho_s - \frac{1}{2} \rho_s A_k^\dagger A_k \right). \quad (2.4)$$

Ahora utilizando la Ecu. (2.4), podemos reescribir la ecuación maestra (2.2) como [2]

$$\frac{d}{dt}\rho_s(t) = -i[H_s, \rho_s(t)] + \mathcal{D}(\rho_s(t)) \quad (2.5)$$

### 2.1.2. Limite de acoplamiento débil

Una forma de obtener la ecuación maestra Markoviana es considerar que el acoplamiento entre el sistema cuántico  $S$  y el entorno  $B$  es débil. Iniciamos utilizando la ecuación de von Neumann en el cuadro de interacción con el Hamiltoniano de la Ecu. (2.1) tal que

$$\frac{d}{dt}\varrho(t) = -i[H_I(t), \varrho(t)], \quad (2.6)$$

donde  $\varrho(t)$  es la matrix de densidad del sistema total y con su forma integral

$$\varrho(t) = \varrho(0) - i \int_0^t ds [H_I(s), \varrho(s)]. \quad (2.7)$$

---

<sup>2</sup>Este puede ser considerado como una generalización del super-operator de Liouville  $\frac{d}{dt}\varrho(t) = -i[H(t), \varrho(t)] = \mathcal{L}(t)\varrho(t)$

## 2. Marco teórico

---

Entonces insertando la Ecu. (2.7) en la Ecu. (2.6) y tomando la traza sobre el entorno obtenemos

$$\frac{d}{dt}\varrho_s(t) = -i \int_0^t \text{tr}_B[H_I(s), \varrho(s)], \quad \text{con} \quad \text{tr}_B[H_I(t), \varrho(0)] = 0. \quad (2.8)$$

Notemos que el lado derecho de la Ecu. (2.8) aún contiene la matriz de densidad  $\varrho(t)$  asociada al sistema total. Para eliminar  $\varrho(t)$  necesitamos realizar la aproximación de Born. Está aproximación asume que el acoplamiento entre el sistema  $S$  y el entorno  $B$  es débil, i.e. la influencia del sistema sobre el entorno es pequeña. Entonces debido a que la matriz de densidad del entorno  $\varrho_B$  es afectada de solo de manera despreciable por la interacción con la matriz de densidad del sistema  $\varrho_S$ , podemos caracterizar el sistema total a tiempo  $t$  como

$$\varrho(t) \approx \varrho_s(t) \otimes \varrho_B. \quad (2.9)$$

Introduciendo la Ecu. (2.9) en la Ecu. (2.8) obtenemos la ecuación integro-diferencial para la matriz de densidad reducida  $\varrho_S$

$$\frac{d}{dt}\varrho_s(t) = - \int_0^t \text{tr}_B[H_I(t), [H_I(s), \varrho_S(s) \otimes \varrho_B]]. \quad (2.10)$$

En este punto podemos realizar la aproximación de Markov. Esta aproximación provee una descripción para la escala de tiempo y asume que las excitaciones en el entorno cambian lentamente. Entonces reemplazamos  $\varrho_S(s)$  en el integrando por  $\varrho_S(t)$ . De esta manera obtenemos una ecuación de movimiento para la matriz de densidad reducida, en la cual el desarrollo del tiempo en el estado del sistema  $t$  solo depende del estado presente  $\varrho_S(t)$

$$\frac{d}{dt}\varrho_s(t) = - \int_0^t \text{tr}_B[H_I(t), [H_I(s), \varrho_S(t) \otimes \varrho_B]]. \quad (2.11)$$

La Ecu. (2.11) es conocida como la ecuación de Redfield [8]. Es local en el tiempo, sin embargo no es una ecuación maestra Markoviana. Esto debido a que la evolución en el tiempo de la matriz de densidad reducida aún depende de una elección muy específica para su preparación al tiempo  $t = 0$ . Lo cual implica que la dinámica de dicha matriz de densidad reducida no está descrita por un semigrupo.

Entonces para obtener una ecuación maestra Markoviana sustituimos  $s$  por  $t-s$  en el integrando de la Ecu. (2.11) y hacemos que el límite de integración vaya a infinito <sup>3</sup>. La aproximación de Markov está justificada si la escala de tiempo  $\tau_R$  —sobre la cual el estado del sistema varía—, es apreciablemente larga comparada con la escala de

---

<sup>3</sup>Esto es posible cuando el integrando va a cero suficientemente rápido para  $s \gg \tau_b$

tiempo  $\tau_B$  —sobre la cual las funciones de correlación del entorno decaen—. Al final llegamos a la ecuación maestra Markoviana

$$\frac{d}{dt}\varrho_S(t) = - \int_0^t \text{tr}_B[H_I(t), [H_I(s), \varrho_S(t-s) \otimes \varrho_B]] \quad (2.12)$$

## 2.2. Decoherencia

Al interactuar un sistema cuántico con su entorno crean correlaciones entre los estados del sistema y del entorno. Dada esta interacción el entorno lleva información sobre el sistema abierto en la forma de estas correlaciones. De esta manera bajo ciertas condiciones, i.e. interacciones sistema-entorno, el entorno puede comportarse como una sonda al realizar medidas indirectas sobre el sistema abierto. Puede verse que al trazar sobre los grados de libertad del entorno quedaran ciertos conjuntos de estados del sistema que presentarán propiedades de estabilidad, mientras que la superposición de los estados será destruida con el paso del tiempo —esto generalmente ocurre rápidamente o incluso de manera instantánea—. Esta destrucción de la coherencia inducida por el entorno se llama decoherencia [2].

### 2.2.1. Medidas de distancia y medidas de fidelidad

Existen un amplio catalogo de medidas para cuantificar la coherencia en sistemas cuánticos. Entre ellas se encuentran la pureza [9]; medidas de entropía, e.g. entropía de von Neumann; medidas de distancia entre estados cuánticos, e.g. distancia traza [1], fidelidad de Jozsa [10]; otras relacionadas con las coherencias del sistema reducido, e.g. medida de Plenio [11], amplitud de fidelidad generalizada [12]; entre otras.

## 2.3. Amplitud de fidelidad

Una de las medidas utilizada para cuantificar la decoherencia es la amplitud de fidelidad. Esta cantidad permite medir la sensibilidad del sistema a perturbaciones en la dinámica. Se obtiene al sobreponer el estado inicial con el estado obtenido después de una evolución sin perturbaciones seguida con por una involución con perturbación [3]. Sea el Hamiltoniano total del sistema

$$H_\lambda = H_0 + \lambda V, \quad (2.13)$$

donde  $H_0$  es el Hamiltoniano sin perturbación.

## 2. Marco teórico

---

Ahora tomando dos funciones  $\Psi_\lambda$  y  $\Psi_0$  tal que evolucionan bajo los Hamiltonianos  $H_\lambda$  y  $H_0$  respectivamente de la forma

$$|\Psi(t)\rangle = U_\lambda(t)|\Psi\rangle \quad \text{y} \quad |\Psi_0(t)\rangle = U_0(t)|\Psi_0\rangle, \quad (2.14)$$

donde  $U_\lambda(t) = e^{-iH_\lambda t/\hbar}$  y  $U_0(t) = e^{-iH_0 t/\hbar}$  son los propagadores unitarios asociados a  $H_\lambda$  y  $H_0$  respectivamente. Entonces a la superposición entre las evoluciones perturbada y no perturbada de los estados se le conoce como **amplitud de fidelidad** [3, 13, 14]

$$\begin{aligned} f_\lambda(t) &= \langle \Psi_0(t) | \Psi_\lambda(t) \rangle = \langle \Psi | U_0(-t) U_\lambda(t) | \Psi \rangle \\ &= \langle M_\lambda(t) \rangle; \quad M_\lambda(t) = U_0(-t) U_\lambda(t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

La Ecu. (2.15) muestra que es posible escribir la amplitud de fidelidad en términos del valor esperado del *operador de eco*  $M_\lambda(t)$ . Ahora utilizamos una mezcla estadística descrita por la matriz de densidad  $\varrho = \sum_k |\phi_k\rangle \langle \phi_k|$ , para obtener el valor esperado de la forma  $\langle A \rangle = \text{tr}\{\varrho A\} = \sum_k p_k \langle \phi_k | A | \phi_k \rangle$ . Entonces la amplitud de fidelidad es

$$f_\lambda(t) = \text{tr} \{ M_\lambda(t) \varrho \}. \quad (2.16)$$

**Regímenes de decaimiento** Es posible estudiar el decaimiento de la fidelidad dentro de varios regímenes, entre ellos dos de gran interés: el régimen perturbativo y la regla de oro de Fermi. Comenzaremos definiendo la el promedio de la amplitud de fidelidad obtenida por la respuesta lineal en el marco de la teoría de matrices aleatorias (RMT) como [14]

$$\langle f(t) \rangle = 1 - 4\pi^2 \lambda^2 \mathcal{C}(t), \quad (2.17)$$

aquí  $\mathcal{C}(t)$  es la integral de correlación, y esta dada por la doble integral sobre la función de autocorrelación de la perturbación en el cuadro de interacción tal que

$$\mathcal{C}(t) = t^2 + \frac{t}{2} - \int_0^t d\tau \mathcal{B}(\tau); \quad \mathcal{B}(t) = \int_0^t d\tau b_2(\tau), \quad (2.18)$$

donde  $b_2(t)$  es el factor de forma de dos puntos. Tomando la solución para  $\mathcal{C}(t)$  obtenida utilizando una perturbación GOE y un tiempo de Heisenberg  $\tau_H = 1^4$  en [14] tenemos los elementos para obtener el promedio de la amplitud de fidelidad. Entonces tomado la versión exponenciada de la Ecu. (2.17) obtenemos<sup>5</sup>

$$\langle f(t) \rangle = e^{-4\pi^2 \lambda^2 \mathcal{C}(t)}. \quad (2.19)$$

---

<sup>4</sup>El tiempo de Heisenberg se define como  $t_H = 2\pi\hbar/d$  donde  $d$  denota el promedio de espaciamiento de niveles en el espectro del Hamiltoniano no perturbado  $H_0$

<sup>5</sup>Para ver más detalladamente consultar el apéndice de [14]

**El régimen perturbativo** Se da cuando el acoplamiento entre el sistema central y el entorno  $\lambda$  es pequeño. Aquí la teoría de respuesta lineal funciona para tiempos mayores al tiempo de Heisenberg y en el decaimiento de la fidelidad de la Ecu. (2.19) predomina el término  $t^2$ . Entonces el decaimiento de la amplitud de fidelidad tiene una forma Gaussiana tal que

$$\langle f(t) \rangle = e^{-4\pi^2 \lambda^2 t^2} . \quad (2.20)$$

**Regla de oro de Fermi** Llegamos a este régimen al considerar un acoplamiento entre el sistema central y en entorno  $\lambda$  grande. Aquí la teoría de repuesta lineal funciona para tiempos menores al tiempo de Heisenberg y en el decaimiento de la fidelidad de la Ecu. (2.19) predomina el término  $t/2$ . Entonces el decaimiento de la amplitud de fidelidad tiene una forma exponencial tal que

$$\langle f(t) \rangle = e^{-4\pi^2 \lambda^2 \frac{t}{2}} . \quad (2.21)$$

### 2.3.1. Medidas de distancia

Una forma de medir la resistencia que tienen los estados cuánticos al ruido es a través de las medidas de distancia [9]. Estas medidas cuantifican que tan cerca están dos estados cuánticos entre si. Existen una variedad de este tipo de medidas utilizadas dentro de la comunidad de información y computación cuántica, en esta sección mostraremos las dos más comunes: la distancia traza (trace distance) y la fidelidad de Jozsa [1].

#### **Distancia traza (Trace distance)**

La distancia traza entre dos operadores de densidad  $\rho$  y  $\sigma$  está definida como [1]

$$D(\rho, \sigma) = \frac{1}{2} \text{tr} |\rho - \sigma| , \quad (2.22)$$

donde  $|A| \equiv \sqrt{A^\dagger A}$  y tiene como propiedades [1, 9]

- $D(\rho, \sigma) \geq 0$
- $D(\rho, \sigma) = 0 \iff \rho = \sigma$
- $D(\rho, \sigma) = D(\sigma, \rho)$
- $D(\rho, \sigma) \leq D(\rho, \rho') + D(\rho', \sigma)$

Las cuales cumplen las condiciones para la distancia de Hamming. La distancia traza es el análogo cuántico para la distancia clásica de Kolmogorov [9].

## 2. Marco teórico

---

### Fidelidad cuántica

La fidelidad cuántica es otra medida de distancia entre matrices de densidad. Dadas las matrices de densidad  $\rho$  y  $\sigma$  la fidelidad cuántica está definida como [9, 10]

$$F(\rho, \sigma) = \text{tr} \sqrt{\sqrt{\rho} \sigma \sqrt{\rho}}. \quad (2.23)$$

Esta cantidad tiene dos casos importantes donde es posible tener una fórmula más específica para ella. El primer caso es cuando  $\rho$  y  $\sigma$  conmutan, i.e son diagonales en la misma base, tal que

$$\rho = \sum_i r_i |i\rangle \langle i|; \quad \sigma = \sum_i s_i |i\rangle \langle i|, \quad (2.24)$$

para una base ortonormal  $|i\rangle$  tenemos

$$\begin{aligned} F(\rho, \sigma) &= \text{tr} \sqrt{\sqrt{\rho} \sigma \sqrt{\rho}} \\ &= \text{tr} \sqrt{\sum_i r_i s_i |i\rangle \langle i|} \\ &= \text{tr} \left( \sum_i \sqrt{r_i s_i} |i\rangle \langle i| \right) \\ &= \sum_i \sqrt{r_i s_i} \\ &= F(r_i s_i). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Vemos que para este caso la fidelidad cuántica se reduce a la fidelidad clásica entre la distribución de eigenvalores  $r_i$  y  $s_i$  de  $\rho$  y  $\sigma$ .

El segundo caso es cuando calculamos la fidelidad cuántica entre un estado puro  $|\psi\rangle$  y un estado arbitrario  $\rho$  tal que

$$\begin{aligned} F(|\psi\rangle, \rho) &= \text{tr} \sqrt{|\psi\rangle \langle \psi| \rho |\psi\rangle \langle \psi|} \\ &= \text{tr} \sqrt{\langle \psi | \rho | \psi \rangle |\psi\rangle \langle \psi|} \\ &= \text{tr} \sqrt{\langle \psi | \rho | \psi \rangle}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Entonces la fidelidad cuántica es la raíz cuadrada para el traslape entre  $|\psi\rangle$  y  $\rho$  [1].

**Relación entre medidas** La fidelidad cuántica y la distancia traza están relacionadas estrechamente, a pesar de tener formas diferentes. Cualitativamente podemos considerarlas como medidas equivalentes. Entonces podemos encontrar desigualdades entre ellas. De esta forma la fidelidad de cuántica actúa como cotas para la distancia traza tal que <sup>6</sup>

$$1 - F(\rho, \sigma) \leq D(\rho, \sigma) \leq \sqrt{1 - F(\rho, \sigma)^2}. \quad (2.27)$$

### Super y sub - fidelidad

La super y sub -fidelidad fueron introducidas como cotas superior e inferior respectivamente para la fidelidad cuántica. Buscan ser más sencillas de calcular y de medir de manera experimental que la fidelidad para estados mixtos [15]. Entonces para dos matrices de densidad  $\rho$  y  $\sigma$  la super-fidelidad esta definida como

$$G(\rho, \sigma) = \text{tr} \rho \sigma + \sqrt{1 - \text{tr} \rho^2} \sqrt{1 - \text{tr} \sigma^2}. \quad (2.28)$$

Podemos observar que la super-fidelidad está en función de la pureza de los estados  $\rho$  y  $\sigma$  y la traza de su producto. Ahora, la sub-fidelidad se define

$$E(\rho, \sigma) = \text{tr} \rho \sigma + \sqrt{2[(\text{tr} \rho \sigma)^2] - \text{tr} \rho \sigma \rho \sigma}. \quad (2.29)$$

Es interesante como para obtener ambas cotas solo es necesario calcular tres trazas. Esto hace que calcularlas sea más sencillo que calcular fidelidad cuántica introducida en 2.3.1.

## 2.4. Amplitud de fidelidad generalizada

Sea un sistema tripartita compuesto por un sistema central descrito por un qubit, un entorno cercano y un entorno lejano, asumimos que tenemos un acoplamiento de desfase, i.e. el Hamiltoniano del sistema central conmuta con el acoplamiento, primero definimos el Hamiltoniano del sistema bipartita — sistema central y entorno cercano — como

$$H_{c,e} = h_c \otimes \mathbb{1}_e + \mathbb{1}_c \otimes H_e + v_c \otimes V_e, \quad \text{donde } [h_c, v_c] = 0, \quad (2.30)$$

donde  $h_c, v_c$  son el Hamiltoniano y acoplamiento asociados al qubit y  $H_e, V_e$  son el Hamiltoniano y el acoplamiento asociados al entorno cercano. Entonces la matriz de densidad reducida del sistema central se obtiene realizando la traza parcial sobre el entorno cercano tal que

$$\varrho_c(t) = \text{tr}_e \left[ e^{-iH_{c,e}t/\hbar} \varrho_c(0) \otimes \varrho_e e^{iH_{c,e}t/\hbar} \right], \quad (2.31)$$

---

<sup>6</sup>Para detalles de la derivación de esta relación ver [1]

## 2. Marco teórico

---

y es posible obtener sus coherencias de la forma

$$\varrho_{jk}^c(t) = \varrho_{jk}^c(0) e^{-i(\varepsilon_j - \varepsilon_k)t/\hbar} f_\lambda(t), \quad f_\lambda(t) = \text{tr} \left[ e^{-iH_\lambda t/\hbar} \varrho_e e^{iH_0 t/\hbar} \right], \quad (2.32)$$

aquí las eigenenergias  $\varepsilon_j$  y  $\varepsilon_k$  son los correspondientes eigenvalores de  $h_c$ .

Es portante mencionar que bajo un acoplamiento de desfase (dephasing), la coherencia en el sistema central esta dada por el decaimiento de la fidelidad — u operador de eco — en el entorno cercano. Entonces es posible obtener el decaimiento de la fidelidad acoplando el sistema de interés, i.e entorno cercano, a un sistema « sonda », i.e sistema central, el cual, además, nos proveerá la perturbación. Ahora extendiendo el sistema añadimos el entorno lejano

$$H_{\lambda,\Gamma} = H_{c,e} \otimes \mathbb{1}_f + \mathbb{1}_c \otimes \left( \mathbb{1}_e \otimes H_f + \gamma V_e' \otimes V_f \right), \quad (2.33)$$

donde la tasa de decaimiento está dada por  $\Gamma = 2\pi N_e \gamma^2 / (\hbar d_f)$ . Entonces la amplitud de fidelidad para el sistema tripartita queda como

$$f_{\lambda,\Gamma}(t) = \text{tr}_{e,f} \left[ e^{-iH_{\lambda,\Gamma} t/\hbar} \varrho_{e,f}(0) e^{iH_{0,\Gamma} t/\hbar} \right]. \quad (2.34)$$

Vemos que la Ecu. (2.34) es diferente al formalismo estándar. Esto debido a que los operadores unitarios provenientes del operador de eco son diferentes. Esta diferencia nos lleva a una perdida de coherencia para los estados de superposición en el sistema central [5].



# Modelos: Sistemas tripartitas

---

En este trabajo utilizamos sistemas tripartitas como los introducidos en la sección 2.4 descritos por la Ecu. (2.33). Como vimos anteriormente estos sistemas están compuesto por sistema central, entorno cercano y entorno lejano. Para el entorno cercano utilizamos dos modelos: un modelo RMT y un oscilador armónico. En ambos modelos el acoplamiento entre el sistema central y en entorno cercano es de tipo des-fase (dephasing), i.e.  $[h_c, v_c] = 0$ . Se estudiará el decaimiento de la coherencia en el sistema reducido, i.e. cuando trazamos sobre los grados de libertad del entorno, en los regímenes perturbativo y en la regla de oro de Fermi introducidos en en la sección 2.4.

## 3.1. Entorno: RMT

Debido a que queremos obtener la evolución del sistema intermedio, podemos derivar una ecuación maestra, para lo cual utilizamos el procedimiento estándar con las aproximaciones Born-Markov [2]. Para esto utilizamos el Hamiltoniano de la Ecu. (2.33)

$$H_{\lambda,\Gamma} = H_{c,e} \otimes \mathbb{1}_f + \mathbb{1}_c \otimes \left( \mathbb{1}_e \otimes H_f + \gamma V'_e \otimes V_f \right), \quad (3.1)$$

y la amplitud de fidelidad  $f_{\lambda,\Gamma}(t)$  definida en la Ecu. (2.34)

$$f_{\lambda,\Gamma}(t) = \text{tr}_{e,f} \left[ e^{-iH_{\lambda,\Gamma} t/\hbar} \varrho_{e,f}(0) e^{iH_{\lambda,\Gamma} t/\hbar} \right], \quad (3.2)$$

introducidas en la sección 2.4. Además, tomando en cuenta la asimetría del las transformaciones unitarias  $U_\lambda(t)$  y  $U_0(t)$  en el formalismo del operador de eco, la matriz de densidad en el espacio del entorno cercano y lejano está dada por

$$\varrho_{e,f}(t) = e^{-iH_{\lambda,\Gamma} t/\hbar} \varrho_{e,f} e^{iH_{\lambda,\Gamma} t/\hbar} = e^{-iH_{\lambda,0} t/\hbar} X(t) e^{iH_{0,0} t/\hbar}, \quad (3.3)$$

donde  $X(t)$  son las soluciones en el cuadro de interacción con respecto al acoplamiento entre entornos. De la ecuación de von Neumann para  $\varrho_{e,f}(t)$  de la forma

$$i\hbar \partial_t \varrho_{e,f}(t) = H_{\lambda,\Gamma} \varrho_{e,f}(t) - \varrho_{e,f}(t) H_{0,\Gamma} , \quad (3.4)$$

obtenemos

$$i\hbar \partial_t X(t) = \gamma \left[ \tilde{V}_\lambda(t) X(t) - X(t) \tilde{V}_0(t) \right] , \quad \tilde{V}_\lambda(t) = e^{iH_{\lambda,0}t/\hbar} V'_e \otimes V_f e^{iH_{0,0}t/\hbar} . \quad (3.5)$$

Entonces la matrix de densidad para el entorno cercano se obtiene trazando sobre los grados de libertad del entorno lejano tal que

$$\varrho_e(t) = \text{tr}_f \left[ e^{-iH_{\lambda,0}t/\hbar} X(t) e^{-iH_{0,0}t/\hbar} \right] = \text{tr}_f \left[ \mathcal{U}_\lambda(t) \otimes \mathcal{U}_f(t) X(t) \mathcal{U}_0^\dagger(t) \otimes \mathcal{U}_f^\dagger(t) \right] . \quad (3.6)$$

Dado que  $H_{\lambda,0}$  y  $H_{0,0}$  son operadores separables podemos llegar a que la matriz de densidad para el entorno <sup>1</sup>

$$\varrho_e(t) = \mathcal{U}_\lambda(t) \tilde{\varrho}_e(t) \mathcal{U}_0^\dagger(t) , \quad \tilde{\varrho}_e(t) = \text{tr}_f [X(t)] . \quad (3.8)$$

Ahora siguiendo el procedimiento estándar para derivar la ecuación maestra. Integramos  $X(t)$  en la Ecu. (3.5) y sustituimos el resultado en el lado derecho de la ecuación tal que

$$\begin{aligned} X(t) &= \varrho_{e,f}(0) - \frac{i\gamma}{\hbar} \int_0^t d\tau \left( \tilde{V}_\lambda(\tau) X(\tau) - X(\tau) \tilde{V}_0(\tau) \right) , \\ i\hbar \partial_t X(t) &= \gamma \tilde{V}_\lambda(t) \left[ \varrho_{e,f}(0) - \frac{i\gamma}{\hbar} \int_0^t d\tau \left( \tilde{V}_\lambda(\tau) X(\tau) - X(\tau) \tilde{V}_0(\tau) \right) \right] \\ &\quad - \gamma \left[ \varrho_{e,f}(0) - \frac{i\gamma}{\hbar} \int_0^t d\tau \left( \tilde{V}_\lambda(\tau) X(\tau) - X(\tau) \tilde{V}_0(\tau) \right) \right] \tilde{V}_0(t) \\ &= \gamma \left[ \tilde{V}_\lambda(t) \varrho_{e,f}(0) - \varrho_{e,f}(0) \tilde{V}_0(t) \right] - \frac{i\gamma^2}{\hbar} \int_0^t d\tau \left[ \tilde{V}_\lambda(t) \left( \tilde{V}_\lambda(\tau) X(\tau) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - X(\tau) \tilde{V}_0(\tau) \right) - \left( \tilde{V}_\lambda(\tau) X(\tau) - X(\tau) \tilde{V}_0(\tau) \right) \tilde{V}_0(t) \right] . \end{aligned} \quad (3.9)$$

Para tomar la traza parcial sobre el entorno asumimos que el primer elemento del lado derecho de la ecuación no contribuye  $\text{tr}_f [\tilde{V}_\lambda(t) \varrho_{e,f}(0) - \varrho_{e,f}(0) \tilde{V}_0(t)] = 0$ . Entonces

<sup>1</sup>Utilizando las identidades

$$\text{tr}_f [A \otimes \mathbb{1} X] = A \text{tr}_f [X] , \quad \text{tr}_f [X B \otimes \mathbb{1}] = \text{tr}_f [X] B , \quad \text{tr}_f [\mathbb{1} \otimes A X] = \text{tr}_f [X \mathbb{1} \otimes A] , \quad (3.7)$$

### 3. Modelos: Sistemas tripartitas

---

con  $\tilde{\varrho}_e(t) = \text{tr}_f[X(t)]$ , llegamos a

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\varrho}_e(t) = & -\frac{\gamma^2}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \text{tr}_f [\tilde{V}_\lambda(t) ( \tilde{V}_\lambda(\tau) X(\tau) - X(\tau) \tilde{V}_0(\tau) ) \\ & - ( \tilde{V}_\lambda(\tau) X(\tau) - X(\tau) \tilde{V}_0(\tau) ) \tilde{V}_0(t) ] . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Aquí podemos realizar dos aproximaciones: la aproximación de Born y la aproximación de Markov. La primera, asume que acoplamiento entre el entorno cercano y el lejano es débil — la influencia entre entorno es despreciable —  $X(\tau) \approx \tilde{\varrho}_e(\tau) \otimes \varrho_f(0)$ . La segunda, asume que el tiempo de correlaciones en el entorno lejano es menor que el tiempo de las correlaciones en el entorno cercano. Esto nos dice que el estado del entorno cercano  $\tilde{\varrho}_e(\tau)$  está cambiando más lentamente en la escala de tiempo de la función de correlación  $\tilde{V}_\lambda(t-s) \tilde{V}_\lambda(t)$ . Finalmente asumimos que  $\tilde{V}_\lambda(t-s) \tilde{V}_\lambda(t)$  decrece — se aproxima a cero — rápidamente cuando  $s$  se incrementa, entonces

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\varrho}_e(t) = & -\frac{\gamma^2}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \text{tr}_f [\tilde{V}_\lambda(t) ( \tilde{V}_\lambda(\tau) \tilde{\varrho}_e(t) \otimes \varrho_f(0) - \tilde{\varrho}_e(t) \otimes \varrho_f(0) \tilde{V}_0(\tau) ) \\ & - ( \tilde{V}_\lambda(\tau) \tilde{\varrho}_e(t) \otimes \varrho_f(0) - \tilde{\varrho}_e(t) \otimes \varrho_f(0) \tilde{V}_0(\tau) ) \tilde{V}_0(t) ] \\ = & -\frac{\gamma^2}{\hbar^2} \int_0^\infty ds \text{tr}_f [\tilde{V}_\lambda(t) ( \tilde{V}_\lambda(t-s) \tilde{\varrho}_e(t) \otimes \varrho_f(0) - \tilde{\varrho}_e(t) \otimes \varrho_f(0) \tilde{V}_0(t-s) ) \\ & - ( \tilde{V}_\lambda(t-s) \tilde{\varrho}_e(t) \otimes \varrho_f(0) - \tilde{\varrho}_e(t) \otimes \varrho_f(0) \tilde{V}_0(t-s) ) \tilde{V}_0(t) ] , \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde la Ecu. (3.1) es equivalente a la ecuación de Redfield [8]<sup>2</sup>. Dado que el potencial  $\tilde{V}_\lambda(t)$  está en un estado de producto entre los entornos cercano y lejano, podemos considerar los elementos de forma separada de la forma

$$\tilde{V}_\lambda(t) = \mathcal{U}_\lambda^\dagger(t) V_e' \mathcal{U}_\lambda(t) \otimes \mathcal{U}_f^\dagger(t) V_f \mathcal{U}_f(t) . \quad (3.12)$$

Asumiendo que  $\varrho_f(0)$  es diagonal en la eigenbase de  $H_f$ , i.e  $[\varrho_f(0), H_f] = 0$ , encontramos

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\varrho}_e(t) = & -\frac{\gamma^2}{\hbar^2} \int_0^\infty ds C(s) \{ \mathcal{U}_\lambda^\dagger(t) V_e' \mathcal{U}_\lambda(s) V_e' \mathcal{U}_\lambda(t-s) \tilde{\varrho}_e(t) \\ & - \mathcal{U}_\lambda^\dagger(t) V_e' \mathcal{U}_\lambda(t) \tilde{\varrho}_e(t) \mathcal{U}_0^\dagger(t-s) V_e' \mathcal{U}_0(t-s) \\ & - \mathcal{U}_\lambda^\dagger(t-s) V_e' \mathcal{U}_\lambda(t-s) \tilde{\varrho}_e(t) \mathcal{U}_0^\dagger(t) V_e' \mathcal{U}_0(t) \\ & + \tilde{\varrho}_e(t) \mathcal{U}_0^\dagger(t-s) V_e' \mathcal{U}_\lambda^\dagger(s) V_e' \mathcal{U}_0(t) \} , \end{aligned} \quad (3.13)$$

---

<sup>2</sup>Esta ecuación es local en el tiempo, pero no es totalmente Markoviana, i.e. la evolución en el tiempo aun depende de la elección del estado inicial al tiempo  $t = 0$ , lo cual implica que la dinámica del sistema reducido no está descrita por un semigrupo dinámico. Para lograr llevar esta ecuación a una forma Markoviana hemos sustituido  $s$  por  $t-s$  y cambiamos el limite de integración de  $t \rightarrow \infty$ .

con la función real  $C(s) = \text{tr}_f [\mathcal{U}_f^\dagger(s) V_f \mathcal{U}_f(s) V_f \varrho_f]$ . Regresando al cuadro de Schrödinger picture, obtenemos

$$i\hbar \partial_t \varrho_e(t) = H_\lambda \varrho_e(t) - \varrho_e(t) H_0 - \frac{\gamma^2}{\hbar^2} \left\{ V'_e \Gamma_\lambda \varrho_e(t) - V'_e \varrho_e(t) \Gamma_0 - \Gamma_\lambda \varrho_e(t) V'_e + \varrho_e(t) \Gamma_0 V'_e \right\}, \quad (3.14)$$

donde

$$\Gamma_\lambda = \int_0^\infty ds C(s) \mathcal{U}_\lambda(s) V'_e \mathcal{U}_\lambda^\dagger(s). \quad (3.15)$$

En el caso más simple  $C(s)$  puede ser aproximado a una función delta tal que  $\Gamma_\lambda = C_0 V'_e/2$ , aquí  $C_0$  es el área bajo la función  $C(s)$  y el factor de 1/2 viene del hecho de que la integral es sólo sobre la parte positiva del eje real. En este caso la Ecu. (3.14) tiene forma de Lindblad con operadores de Lindblad hermitianos de la forma  $\sqrt{C_0} V'_e$ .

Aquí utilizamos el enfoque propuesto en [16], i.e. aplicar operaciones sobre el promedio de la matriz de densidad en lugar de ejecutar operaciones sobre cada elemento del ensemble para después promediarlas<sup>3</sup>. Esto asumiendo que la Ecu. (3.14) es de la forma de Lindblad con el operador de Lindblad  $V'_e$ , y  $C_0 = 1$ . Aquí  $V'_e$  es miembro de algún ensemble Gaussiano RMT, ya sea de ensemble Gaussiano ortogonal (GOE) o un ensamble Gaussiano unitario (GUE) — esto debido a que consideramos el entorno cercano como caótico o desordenado —.

Ahora dada la ergodicidad en los ensembles Gaussianos podemos promediar sobre estos ensambles, para esto es suficiente tomar  $\langle V'_{eij} V'_{ekl} \rangle = \delta_{jk} \delta_{il}$  para el GUE o  $\langle V'_{eij} V'_{ekl} \rangle = \delta_{jk} \delta_{il} + \delta_{ik} \delta_{jl}$  para el GOE. Utilizando todo lo anterior podemos obtener una ecuación maestra con el formalismo RMT tal que

$$i\hbar \partial_t \varrho_e(t) = H_\lambda \varrho_e(t) - \varrho_e(t) H_0 - i\hbar \Gamma \left\{ \varrho_e(t) - \frac{\mathbb{1}}{N_e} \text{tr} \varrho_e(t) \right\}. \quad (3.16)$$

En este punto es importante señalar que las suposiciones utilizadas para la derivación de esta ecuación maestra fueron: i) el acoplamiento de dephasing entre sistema central y el entorno cercano; ii) utilizar modelos RMT tanto para el entorno cercano como para el lejano y iii) tomar un acoplamiento de producto entra los entornos.

**Temperatura finita** Ahora tomamos la Ecu. (3.16) y modificamos el disipador para obtener el caso de temperatura finita tal que

$$i\hbar \partial_t \varrho_e(t) = H_\lambda \varrho_e(t) - \varrho_e(t) H_0 - i\hbar \Gamma \left\{ \varrho_e(t) - \text{tr} \varrho_e(t) \omega_B \right\}; \quad \omega_B = \frac{e^{-\beta E_n}}{\text{tr}\{e^{-\beta E_n}\}}, \quad (3.17)$$

<sup>3</sup>Ver [17, 18]

### 3. Modelos: Sistemas tripartitas

---

donde  $\omega_B$  es un estado térmico. Para este caso, de nuevo, utilizamos un estado máximamente mezclado como estado inicial para el entorno cercano  $\varrho_e(0) = \mathbb{1}_e/N_e$ .

## 3.2. Entorno: oscilador armónico

En esta sección analizamos la pérdida de coherencia a través de amplitud de fidelidad generalizada para un oscilador armónico como entorno cercano. Para esto tomamos un Hamiltoniano con un acoplamiento de desfase entre el sistema central y el entorno cercano similar al utilizado en la Sec. 2.4. Entonces el Hamiltoniano para el sistema bipartita tiene la forma

$$\begin{aligned} H_{c,e} &= h_c \otimes \mathbb{1}_e + \mathbb{1}_q \otimes H_e + v_c \otimes V_e \\ &= \frac{\Delta}{2} \sigma_z \otimes \mathbb{1}_e + \mathbb{1}_q \otimes a^\dagger a + \sigma_z \otimes \lambda (a + a^\dagger) , \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde  $\lambda$  es la fuerza del acoplamiento entre qubit y entorno cercano. Debido a que tenemos un acoplamiento de desfase, podemos centrarnos en la parte correspondiente al entorno central tal que

$$H_\pm = a^\dagger a \pm \lambda (a + a^\dagger) , \quad (3.19)$$

aquí  $a$  y  $a^\dagger$  son los operadores de escalera tradicionales

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x + i \frac{p}{m\omega} \right) \quad \text{and} \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x - i \frac{p}{m\omega} \right) . \quad (3.20)$$

### 3.2.1. Ecuación maestra

En esta sección encontraremos una ecuación maestra que describa la dinámica del entorno cercano. Para esto consideramos el Hamiltoniano inicial de la y lo reescribimos como

$$\begin{aligned} H_{c,e} &= \frac{\Delta}{2} \sigma_z \otimes \mathbb{1}_e + \mathbb{1}_q \otimes H_e + \lambda \sigma_z \otimes V_e \\ &= |0\rangle \langle 0| \otimes \left( H_e + \lambda V_e + \frac{\Delta}{2} \mathbb{1}_e \right) + |1\rangle \langle 1| \otimes \left( H_e - \lambda V_e - \frac{\Delta}{2} \mathbb{1}_e \right) \\ &= |0\rangle \langle 0| \otimes \left[ a^\dagger a + \lambda (a + a^\dagger) + \frac{\Delta}{2} \mathbb{1}_e \right] + |1\rangle \langle 1| \otimes \left[ a^\dagger a - \lambda (a + a^\dagger) - \frac{\Delta}{2} \mathbb{1}_e \right] \\ &= |0\rangle \langle 0| \otimes \left( H_+ + \frac{\Delta}{2} \mathbb{1}_e \right) + |1\rangle \langle 1| \otimes \left( H_- - \frac{\Delta}{2} \mathbb{1}_e \right) . \end{aligned} \quad (3.21)$$

De la misma manera reescribimos el operador de evolución como

$$\begin{aligned} e^{-iH_{c,e}t} &= |0\rangle\langle 0| \otimes e^{-\Delta t/2} e^{-iH_+t} + |1\rangle\langle 1| \otimes e^{i\Delta t/2} e^{-iH_-t} \\ &= |0\rangle\langle 0| \otimes e^{-\Delta t/2} \mathcal{U}_+(t) + |1\rangle\langle 1| \otimes e^{i\Delta t/2} \mathcal{U}_-(t); \quad \mathcal{U}_\pm(t) = e^{-iH_\pm t}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Con lo anterior podemos obtener los elementos de la matriz de densidad reducida del sistema central al trazar sobre los grados de libertad del entorno cercano<sup>4</sup>.

$$\rho_c(t) = \text{tr}_e \left[ e^{-iH_{+, \lambda} t/\hbar} \rho_c(0) \otimes \rho_e e^{iH_{-, \lambda} t/\hbar} \right], \quad (3.23)$$

Entonces al extender el modelo incluyendo un entorno lejano, podemos escribir el Hamiltoniano total como

$$H_{\lambda, \Gamma} = H_{c,e} \otimes \mathbb{1}_f + \mathbb{1}_c \otimes \left( \mathbb{1}_e \otimes H_f + \gamma V'_e \otimes V_f \right), \quad (3.24)$$

y obtener la matriz de densidad reducida trazando sobre ambos entornos

$$\rho_c(t) = \text{tr}_{e,f} \left[ e^{-iH_{+, \Gamma} t} \rho_{e,f}(0) e^{iH_{-, \Gamma} t} \right]. \quad (3.25)$$

Ahora obtenemos el elemento no diagonal (coherencias) de  $\rho_c(t)$  como

$$\rho_{jk}^c(t) = \rho_{jk}^c(0) e^{-i(\varepsilon_j - \varepsilon_k)/\hbar} \text{tr} \left[ e^{-iH_{+, \Gamma} t/\hbar} \rho_{e,f} e^{iH_{-, \Gamma} t/\hbar} \right], \quad (3.26)$$

donde  $\varepsilon_j$  y  $\varepsilon_k$  son los eigenvalores de  $h_c$  y  $H_{\pm, \Gamma}$  es el Hamiltoniano relacionado al Hamiltoniano transformado  $H_{\pm}$ . Entonces el operador de eco con el nuevo Hamiltoniano  $H_{\pm}$  tiene la forma

$$M_{\pm}(t) = e^{iH_- t} e^{-iH_+ t} = \mathcal{U}_-^\dagger(t) \mathcal{U}_+(t). \quad (3.27)$$

Ahora utilizando el método mostrado en [12] podemos obtener una ecuación maestra para el entorno cercano, tal que

$$i\partial_t \rho_e(t) = H_+ \rho_e(t) - \rho_e(t) H_- - i\Gamma \left\{ \rho_e(t) - \frac{\mathbb{1}}{N_e} \text{tr}[\rho_e] \right\}. \quad (3.28)$$

Al igual que para el caso del entorno RMT, aquí consideramos la disipación como un canal despolarizador con un temperatura infinita y un estado inicial máximamente mezclado para el entorno cercano  $\rho_e(0) = \mathbb{1}_e/N_e$ .

<sup>4</sup>Recordemos que para el caso de desfase, el decaimiento de la coherencia en el sistema central  $\rho_c(t)$  al tiempo  $t$  puede verse en el cambio de su elemento de diagonal

### 3. Modelos: Sistemas tripartitas

---

**Temperatura finita** Al igual que para el caso del entorno RMT podemos modificar el disipador de la Ecu. (3.28) para obtener el canal depolarizador de temperatura finita tal que

$$i\partial_t \varrho_e(t) = H_+ \varrho_e(t) - \varrho_e(t) H_- - i\Gamma \left\{ \varrho_e(t) - \text{tr}[\varrho_e] \omega_B \right\}, \quad (3.29)$$

aquí como en el caso del canal depolarizador con temperatura infinita tomamos un estado máximamente mezclado  $\varrho(0) = \mathbb{1}_e/N_e$  como estado inicial para el entorno cercano.

#### 3.2.2. Decaimiento de la fidelidad

Para encontrar la amplitud de fidelidad  $f_\lambda(t)$  — para el sistema bipartita — modificamos el Hamiltoniano de la Ecu. (3.19)

$$H_\pm = a^\dagger a \pm \lambda (a + a^\dagger), \quad (3.30)$$

definiendo nuevos operadores en función de los operadores de escalera tradicionales de la Ecu. (3.20) tal que

$$b_\pm = a \pm \lambda \mathbb{1}, \quad b_\pm^\dagger = a^\dagger \pm \lambda \mathbb{1}. \quad (3.31)$$

Con lo que podemos llegar al nuevo Hamiltoniano para el entorno cercano

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\pm &= b_\pm^\dagger b_\pm \\ &= a^\dagger a \pm \lambda \mathbb{1} (a^\dagger + a) + (\lambda \mathbb{1})^2, \end{aligned} \quad (3.32)$$

aquí observamos que recuperamos el Hamiltoniano del sistema intermedio de la Ecu. (3.19) más un termino proporcional a la identidad.

Con este nuevo Hamiltoniano  $\tilde{H}_\pm$  solucionamos la ecuación de eigenvalores por el método algebraico. Para esto utilizamos las relaciones de conmutación para los nuevos operadores  $b_\pm$  y  $b_\pm^\dagger$  con el Hamiltoniano  $\tilde{H}_\pm$  tal que <sup>5</sup>

$$\begin{aligned} [b_\pm, b_\pm^\dagger] &= 1, \quad [\tilde{H}_\pm, N_\pm] = 0, \quad [b_\pm, \tilde{H}_\pm] = b_\pm, \quad [b_\pm^\dagger, \tilde{H}_\pm] = -b_\pm^\dagger, \\ [\tilde{H}_\pm, b_\pm] &= -b_\pm, \quad [\tilde{H}_\pm, b_\pm^\dagger] = b_\pm^\dagger, \\ b_\pm |n\rangle_\pm &= \sqrt{n} |n-1\rangle_\pm \quad b_\pm^\dagger |n\rangle_\pm = \sqrt{n+1} |n+1\rangle_\pm \end{aligned} \quad (3.33)$$

---

<sup>5</sup>Observamos que tenemos las mismas propiedades de los operadores de escalera convencionales  $a$  y  $a^\dagger$

$$[b_-, b_+^\dagger] = [b_+, b_-^\dagger] = 1, \quad [b_-^\dagger, b_+^\dagger] = [b_+, b_-] = 1. \quad (3.34)$$

Observamos que como  $\tilde{H}_\pm$  conmuta con  $N_\pm$  ambos tienen el mismo conjunto de eigenestados tal que

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\pm |n\rangle_\pm &= E_n^\pm |n\rangle_\pm \\ &= \left( b_\pm^\dagger b_\pm \right) |n\rangle_\pm \\ &= n_\pm |n\rangle_\pm \end{aligned} \quad (3.35)$$

y, utilizando el operador de ascenso  $b_\pm^\dagger$

$$b_\pm^\dagger |n\rangle_\pm = \sqrt{n+1} |n+1\rangle_\pm, \quad (3.36)$$

podemos definir los eigenvectores

$$|n\rangle_\pm = \frac{(b_\pm^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle_\pm. \quad (3.37)$$

**fidelidad con el operador de eco** Para obtener la amplitud de fidelidad, primer utilizamos la descomposición espectral del operador de evolución con el Hamiltoniano  $\tilde{H}_\pm$  quedando de la forma

$$\mathcal{U}_\pm(t) = e^{-i\tilde{H}_\pm t} = \sum_{n_\pm} |n\rangle_\pm e^{-i(n \pm c)t} \langle n|, \quad (3.38)$$

donde  $|n\rangle_\pm$  son los eigenvectores y  $(n \pm c)$  son los eigenvalores del operador de evolución respectivamente. Además tomamos un estado completamente mixto como estado inicial para la matriz la matriz de densidad del entorno tal que

$$\varrho_0 = \sum_{n_0} \frac{1}{N} |n_0\rangle \langle n_0|. \quad (3.39)$$

### 3. Modelos: Sistemas tripartitas

---

Entonces con las Ecu. (3.38) y (3.39) podemos calcular la amplitud de fidelidad  $f_\lambda(t)$  de la forma

$$\begin{aligned}
f_\lambda(t) &= \langle M_\pm(t) \rangle \\
&= \text{tr} \left\{ e^{iH_- t} e^{-iH_+ t} \varrho_0 \right\} \\
&= \text{tr} \left\{ \sum_{n_-} |n\rangle_- e^{i(n_- + c_-)t} \langle n| \sum_{n_+} |n\rangle_+ e^{-i(n_+ + c_+)t} \langle n| \sum_{n_0} |n_0\rangle \frac{\mathbb{1}}{N} \langle n_0| \right\} \\
&= \text{tr} \left\{ \sum_{n_-, n_+, n_0} |n\rangle_- e^{i(n_- + c_-)t} \langle n| n\rangle_+ e^{-i(n_+ + c_+)t} \langle n| n_0\rangle \frac{\mathbb{1}}{N} \langle n_0| \right\} \\
&= \langle n_0| \left[ \sum_{n_-, n_+, n_0} |n\rangle_- e^{i(n_- + c_-)t} \langle n| n\rangle_+ e^{-i(n_+ + c_+)t} \langle n| n_0\rangle \frac{\mathbb{1}}{N} \langle n_0| \right] |n_0\rangle \\
&= \sum_{n_0, n_-, n_+} \langle n_0| n\rangle_- e^{i(n_- + c_-)t} \langle n| n\rangle_+ e^{-i(n_+ + c_+)t} \langle n| n_0\rangle \frac{1}{N}. \tag{3.40}
\end{aligned}$$

Ahora tomando los eigenvectores definidos anteriormente en la Ecu. (3.37) y poniéndolos en términos de los estados coherentes tal que

$$\begin{aligned}
|n\rangle_+ &= \frac{(b_+^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle_+ ; \quad |0\rangle_+ = D(\alpha) |0\rangle = |\alpha\rangle \\
&= \frac{(b_+^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \left[ e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle \right] \\
&= \frac{(a^\dagger + \lambda \mathbb{1})^n}{\sqrt{n!}} \left[ e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle \right] \\
&= \sum_{r=0}^n \frac{1}{\sqrt{n!}} \binom{n}{r} (a^\dagger)^r (\lambda \mathbb{1})^{n-r} \left[ e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle \right] \\
&= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{r=0}^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \binom{n}{r} (\lambda \mathbb{1})^{n-r} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \sqrt{\frac{(m+r)!}{m!}} |m+r\rangle \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}}{\sqrt{n!}} \sum_{r=0}^n \sum_{m'=r}^{\infty} \binom{n}{r} (\lambda \mathbb{1})^{n-r} \frac{\alpha^{m'-r}}{(m'-r)!} \sqrt{m'!} |m'\rangle. \tag{3.41}
\end{aligned}$$

De la misma manera para el caso de  $|n\rangle_-$  tal que

$$\begin{aligned}
 |n\rangle_- &= \frac{(b_-^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle_- ; \quad |0\rangle_- = D(\beta) |0\rangle = |\beta\rangle \\
 &= \frac{(b_-^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \left[ e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle \right] \\
 &= \frac{(a^\dagger - \lambda \mathbb{1})^n}{\sqrt{n!}} \left[ e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a^\dagger)^k (-\lambda \mathbb{1})^{n-k} \left[ e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle \right] \\
 &= e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} \sum_{r=0}^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \binom{n}{r} (-\lambda \mathbb{1})^{n-r} \frac{\beta^m}{\sqrt{m!}} \sqrt{\frac{(m+r)!}{m!}} |m+r\rangle \\
 &= \frac{e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2}}{\sqrt{n!}} \sum_{r=0}^n \sum_{m'=0}^{\infty} \binom{n}{r} (-\lambda \mathbb{1})^{n-r} \frac{\beta^{m'-r}}{(m'-r)!} \sqrt{m'!} |m'\rangle . \tag{3.42}
 \end{aligned}$$

Ahora calculamos los productos internos para introducirlos en la Ecu. (3.40). Comenzamos con el caso para  $|n\rangle_-$

$$\langle n_0 | n \rangle_- = \frac{e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2}}{\sqrt{j!}} \sum_{k=0}^{n_0} \binom{j}{k} (-\lambda \mathbb{1})^{j-k} \frac{\beta^{n_0-k} \sqrt{n_0!}}{(n_0-k)!}, \tag{3.43}$$

y de manera similar para  ${}_+ \langle n |$

$${}_+ \langle n | n_0 \rangle = \frac{e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}}{\sqrt{n!}} \sum_{r=0}^{n_0} \binom{n}{r} (\lambda \mathbb{1})^{n-r} \frac{(\alpha^*)^{n_0-r} \sqrt{n_0!}}{(n_0-r)!}, \tag{3.44}$$

Para calcular el producto interno  ${}_- \langle n | n \rangle_+$  insertamos la relación  $|n_0\rangle \langle n_0|$  de forma que necesitamos calcular  ${}_- \langle n | n_0 \rangle \langle n_0 | n \rangle_+$

$$\langle n_0 | n \rangle_+ = \frac{e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}}{\sqrt{n!}} \sum_{r=0}^{n_0} \binom{n}{r} (\lambda \mathbb{1})^{n-r} \frac{\alpha^{n_0-r} \sqrt{n_0!}}{(n_0-r)!}, \tag{3.45}$$

y para el caso de  $|n\rangle_-$

$${}_- \langle n | n_0 \rangle = \frac{e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2}}{\sqrt{j!}} \sum_{k=0}^{n_0} \binom{j}{k} (-\lambda \mathbb{1})^{j-k} \frac{(\beta^*)^{n_0-k} \sqrt{n_0!}}{(n_0-k)!}, \tag{3.46}$$

### 3. Modelos: Sistemas tripartitas

---

Entonces al final obtenemos

$$\begin{aligned}
 -\langle n | n_0 \rangle \langle n_0 | n \rangle_+ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}(|\beta|^2 + |\alpha|^2)}}{\sqrt{j! n!}} \sum_{k=0}^{n_0} \sum_{r=0}^{n_0} \binom{j}{k} (-\lambda \mathbb{1})^{j-k} \binom{n}{r} (\lambda \mathbb{1})^{n-r} \\
 &\quad \frac{(\beta^*)^{n_0-k} \alpha^{n_0-r} n_0!}{(n_0 - k)! (n_0 - r)!}
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Ahora tomamos los valores  $\text{Re}[\alpha] = -\lambda$ ,  $\text{Im}[\alpha] = 0$  y  $\text{Re}[\beta] = \lambda$ ,  $\text{Im}[\beta] = 0$  y los sustituimos en las expresiones anteriores, con esto podemos obtener la forma final para la amplitud de Fidelidad de la Ecu. (3.40) tal que

$$\begin{aligned}
 f_\lambda(t) &= \frac{1}{N} \sum_{n_0, n_-, n_+} e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{\sqrt{j!}} \binom{j}{k} \frac{(\lambda)^{j+n_0-2k} (-1)^{n_0-k} \sqrt{n_0}}{(n_0 - k)!} e^{i(n_- + c_-)t} e^{-|\lambda|^2} \\
 &\quad \sum_{k=0}^{n_0} \sum_{r=0}^{n_0} \frac{1}{\sqrt{j! n!}} \binom{j}{k} \binom{n}{r} \frac{(\lambda)^{j+n-2(k+r-n_0)} (-1)^{j-k+n_0-r} n_0!}{(n_0 - k)! (n_0 - r)!} e^{-i(n_+ + c_+)t} e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} \\
 &\quad \sum_{r=0}^{n_0} \frac{1}{\sqrt{n!}} \binom{n}{r} \frac{(\lambda)^{n+n_0-2r} (-1)^{n_0-r} \sqrt{n_0!}}{(n_0 - r)!}
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

tomando que  $j = n = N$  entonces podemos llegar a la expresión simplificada

$$\begin{aligned}
 f_\lambda(t) &= \frac{1}{N} \sum_{n_0, n_-, n_+} e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} \sum_{k=0}^N \frac{1}{\sqrt{N!}} \binom{N}{k} \frac{(\lambda)^{N+n_0-2k} (-1)^{n_0-k} \sqrt{n_0}}{(n_0 - k)!} e^{i(n_- + c_-)t} e^{-|\lambda|^2} \\
 &\quad \sum_{k,r=0}^N \frac{1}{N!} \binom{N}{k} \binom{N}{r} \frac{(\lambda)^{2(n_0-k-r)} (-1)^{N-k+n_0-r} n_0!}{(n_0 - k)! (n_0 - r)!} e^{-i(n_+ + c_+)t} e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} \\
 &\quad \sum_{r=0}^N \frac{1}{\sqrt{N!}} \binom{N}{r} \frac{(\lambda)^{N+n_0-2r} (-1)^{n_0-r} \sqrt{n_0!}}{(n_0 - r)!} .
 \end{aligned} \tag{3.49}$$



# Amplitud de fidelidad generalizada para sistemas tripartitas

---

En esta sección obtendremos la amplitud de fidelidad generalizada para los modelos introducidos en el Cap. 3. En la primera parte aplicaremos el método al modelo RMT para obtener la  $f_{\lambda,\Gamma}(t)$ , la cuál como veremos depende de una ecuación integral  $\phi_{\lambda,\Gamma}(t)$ . Esta ecuación integral será solucionada por medio de la transformada inversa de Laplace. En la segunda parte, de nuevo, obtendremos la amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda,\Gamma}(t)$  esta vez modelando el entorno cercano como un oscilar armónico.

## 4.1. Ecuación integral para la amplitud de fidelidad generalizada

### 4.1.1. Entorno: RMT

Comenzamos utilizando la ecuación maestra para el modelo RMT derivada en la Sec. 3.1

$$i \hbar \partial_t \varrho_e(t) = H_+ \varrho_e(t) - \varrho_e(t) H_- - i \hbar \Gamma \left\{ \varrho_e(t) - \frac{\mathbb{1}}{N_e} \text{tr} \varrho_e(t) \right\}, \quad (4.1)$$

donde  $H_{\pm} = H_e \pm \lambda V_e$ . El término de disipación se obtuvo anteriormente para un modelo RMT donde el acoplamiento es una matriz aleatoria en espacio de Hilbert de producto entre el entorno cercano y lejano. Podemos ver en la Ecu. (3.8) que la pérdida de la fidelidad esta dada en términos del operador de eco

$$f_{\lambda,\Gamma}(t) = \text{tr} \varrho_e(t) = \text{tr}_e [ M_{\pm}(t) \tilde{\varrho}_e(t) ], \quad M_{\pm}(t) = \mathcal{U}_{\pm}^{\dagger}(t) \mathcal{U}_{\pm}(t). \quad (4.2)$$

## 4.1. Ecuación integral para la amplitud de fidelidad generalizada

---

Ahora para resolver la Ecu. (4.1), necesitamos regresar al cuadro de interacción y separar la parte del decaimiento exponencial de la solución

$$\tilde{\varrho}_e(t) = e^{-\Gamma t} \Omega(t) . \quad (4.3)$$

Entonces sustituyendo las ecuaciones. (3.8) y (4.3) en el lado izquierdo de la Ecu. (4.1) llegamos a

$$\begin{aligned} i \hbar \partial_t \left( \mathcal{U}_+(t) e^{-\Gamma t} \Omega(t) \mathcal{U}_-^\dagger(t) \right) &= i \hbar \left\{ \left( \frac{-i H_+}{\hbar} \right) \mathcal{U}_+(t) e^{-\Gamma t} \Omega(t) \mathcal{U}_-^\dagger(t) \right. \\ &\quad - \Gamma \mathcal{U}_+(t) e^{-\Gamma t} \Omega(t) \mathcal{U}_-^\dagger(t) + \mathcal{U}_+(t) e^{-\Gamma t} \dot{\Omega}(t) \mathcal{U}_-^\dagger(t) \\ &\quad \left. + \mathcal{U}_+(t) e^{-\Gamma t} \Omega(t) \left( \frac{i H_-}{\hbar} \right) \mathcal{U}_-^\dagger(t) \right\} \\ &= H_+ \mathcal{U}_+(t) e^{-\Gamma t} \Omega(t) \mathcal{U}_-^\dagger(t) - \mathcal{U}_+(t) e^{-\Gamma t} \Omega(t) H_- \mathcal{U}_-^\dagger(t) \\ &\quad - i \hbar \Gamma \mathcal{U}_+(t) e^{-\Gamma t} \Omega(t) \mathcal{U}_-^\dagger(t) + i \hbar \mathcal{U}_+(t) e^{-\Gamma t} \dot{\Omega}(t) \mathcal{U}_-^\dagger(t) . \end{aligned} \quad (4.4)$$

Igualando el resultado de la Ecu. (4.4) con el lado izquierdo de la Ecu. (3.16)

$$i \hbar \partial_t \left( \mathcal{U}_+(t) e^{-\Gamma t} \Omega(t) \mathcal{U}_-^\dagger(t) \right) = \frac{i \hbar \Gamma}{N_e} \text{tr} \left\{ \mathcal{U}_+(t) e^{-\Gamma t} \Omega(t) \mathcal{U}_-^\dagger(t) \right\} , \quad (4.5)$$

llegamos a

$$\begin{aligned} \partial_t \Omega(t) &= \frac{\Gamma}{N_e \mathcal{U}_+(t) \mathcal{U}_-^\dagger(t)} \text{tr} \left\{ \mathcal{U}_+(t) \Omega(t) \mathcal{U}_-^\dagger(t) \right\} \\ &= \frac{\Gamma}{N_e} \mathcal{U}_+^\dagger(t) \mathcal{U}_-(t) \text{tr} \left\{ \mathcal{U}_-^\dagger(t) \mathcal{U}_+(t) \Omega(t) \right\} \\ &= \frac{\Gamma}{N_e} M_\pm^\dagger(t) \text{tr} \left\{ M_\pm(t) \Omega(t) \right\} . \end{aligned} \quad (4.6)$$

Entonces podemos obtener la ecuación integral

$$\Omega(t) = \Omega(0) + \frac{\Gamma}{N_e} \int_0^t d\tau M_\pm^\dagger(\tau) \text{tr}_e [ M_\pm(\tau) \Omega(\tau) ] , \quad (4.7)$$

y definimos

$$\phi_{\lambda, \Gamma}(t) = \text{tr}_e [ M_\pm(t) \Omega(t) ] \quad \text{tal que} \quad f_{\lambda, \Gamma}(t) = e^{-\Gamma t} \phi_{\lambda, \Gamma}(t) . \quad (4.8)$$

## 4. Amplitud de fidelidad generalizada para sistemas tripartitas

---

Como vemos para obtener la amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda,\Gamma}(t)$  es necesario obtener una ecuación para  $\phi_{\lambda,\Gamma}(t)$ . Para lograrlo multiplicamos la ecuación integral por el operador de eco  $M_\lambda(t)$  y tomamos la traza

$$\phi_{\lambda,\Gamma}(t) = \text{tr}_e [ M_\pm(t) \rho_e(0) ] + \frac{\Gamma}{N_e} \int_0^t d\tau \text{tr}_e [ M_\pm(t - \tau) ] \phi_{\lambda,\Gamma}(\tau), \quad (4.9)$$

el primer termino del lado derecho de la Ecu. (4.9) es la amplitud de fidelidad en el entorno cercano negando el acoplamiento al entorno lejano. Está denotado por  $f_\lambda(t) = f_{\lambda,0}(t)$  y definido, en principio, para un estado inicial arbitrario. Aquí hemos tomado un estado inicial máximamente mezclado. El termino  $N_e^{-1} \text{tr}_e [ M_\lambda(t - \tau) ]$  está relacionado con la amplitud de fidelidad para un estado inicial máximamente mezclado  $\mathbb{1}/N_e$ . Y lo denotamos por  $\bar{f}_\lambda(t)$ . Entonces podemos escribir la ecuación para  $\phi_{\lambda,\Gamma}(t)$  como

$$\phi_{\lambda,\Gamma}(t) = f_\lambda(t) + \Gamma \int_0^t d\tau \bar{f}_\lambda(t - \tau) \phi_{\lambda,\Gamma}(\tau). \quad (4.10)$$

### 4.1.2. Solución para $\phi_{\lambda,\Gamma}(t)$

En esta sección solucionamos la integral para la amplitud de fidelidad generalizada (4.10)

$$f_{\lambda,\Gamma}(t) = e^{-\Gamma t} \phi_{\lambda,\Gamma}(t); \quad \phi_{\lambda,\Gamma}(t) = f_\lambda(t) + \Gamma \int_0^t d\tau \bar{f}_\lambda(t - \tau) \phi_{\lambda,\Gamma}(\tau), \quad (4.11)$$

la cual puede resolverse por al menos dos vías: i) numéricamente, por la regla del trapecio y ii) analíticamente, por medio de la de transformada inversa de Laplace. En esta sección mostraremos la vía analítica tal que la forma de la transformada inversa de Laplace para la Ecu. (4.10) queda de la forma

$$\phi_{\lambda,\Gamma}(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} ds \frac{e^{st} F(s)}{1 - \Gamma \bar{F}(s)}; \quad F(s) = \int_0^\infty dt e^{-st} f_\lambda(t). \quad (4.12)$$

### Decaimiento Gaussiano

Primero analizamos el régimen perturbativo. Tomamos una función Gaussiana para la amplitud de fidelidad generalizada del sistema bipartita  $f_\lambda(t)$ , i.e. negando el

## 4.1. Ecuación integral para la amplitud de fidelidad generalizada

---

acoplamiento con el entorno lejano  $\Gamma = 0$ , tal que

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty dt e^{-st} f_\lambda(t); \quad f_\lambda(t) = e^{-\lambda^2 t^2} \\ &= \frac{1}{2\lambda} e^{\frac{s^2}{4\lambda^2}} \sqrt{\pi} \operatorname{erfc} \left( \frac{s}{2\lambda} \right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde  $s \in \mathbb{C}$ , ahora sustituimos la Ecu. (4.13) en la Ecu. (4.12) llegando a

$$\phi_{\lambda, \Gamma}(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} ds \frac{e^{st} \left[ \frac{1}{2\lambda} e^{\frac{s^2}{4\lambda^2}} \sqrt{\pi} \operatorname{erfc} \left( \frac{s}{2\lambda} \right) \right]}{1 - \Gamma \left[ \frac{1}{2\lambda} e^{\frac{s^2}{4\lambda^2}} \sqrt{\pi} \operatorname{erfc} \left( \frac{s}{2\lambda} \right) \right]}. \quad (4.14)$$

Ahora utilizamos la expansión asintótica para  $\operatorname{erfc}(z)$

$$i^n \operatorname{erfc}(z) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-z^2}}{(2z)^{n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+n)!}{n! m! (2z)^{2m}}, \quad (4.15)$$

esta expansión es válida para  $z \rightarrow \infty$  lo cual nos permite utilizar valores para  $\Gamma$  grandes, Tomando  $n = 0$ ,  $m = 1$  y sustituyendo en  $\operatorname{erfc} \left( \frac{s}{2\lambda} \right)$

$$\operatorname{erfc} \left( \frac{s}{2\lambda} \right) \sim \frac{2 e^{-\frac{s^2}{4\lambda^2}} \lambda}{\sqrt{\pi} s} \left( 1 - \frac{2\lambda^2}{s^2} \right), \quad (4.16)$$

#### 4. Amplitud de fidelidad generalizada para sistemas tripartitas

---

y sustituyendo la Ecu.(4.16) en la Ecu.(4.17) llegamos a

$$\begin{aligned}
 \phi_{\lambda, \Gamma}(t) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} ds \frac{e^{st} \frac{1}{2\lambda} e^{\frac{s^2}{4\lambda^2}} \sqrt{\pi} \left[ \frac{2e^{-\frac{s^2}{4\lambda^2}} \lambda}{\sqrt{\pi} s} \left( 1 - \frac{2\lambda^2}{s^2} \right) \right]}{1 - \Gamma \left\{ \frac{1}{2\lambda} e^{\frac{s^2}{4\lambda^2}} \sqrt{\pi} \left[ \frac{2e^{-\frac{s^2}{4\lambda^2}} \lambda}{\sqrt{\pi} s} \left( 1 - \frac{2\lambda^2}{s^2} \right) \right] \right\}} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} ds \frac{e^{st} \left[ \left( 1 - \frac{2\lambda^2}{s^2} \right) s^{-1} \right]}{1 - \Gamma \left[ \left( 1 - \frac{2\lambda^2}{s^2} \right) s^{-1} \right]} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} ds \frac{e^{st} \left( s^2 - 2\lambda^2 \right)}{s^3 - \Gamma \left( s^2 - 2\lambda^2 \right)} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} ds f(s) . \tag{4.17}
 \end{aligned}$$

Dado que queremos encontrar la solución para la transformada inversa de Laplace es conveniente utilizar el teorema del residuo. Para esto necesitamos encontrar los polos del denominador de la función  $f(s)$  en la Ecu. (4.17). En la Fig. 4.2 encontramos esos polos y observamos que el denominador tiene dos regiones indeterminadas, i.e. donde la parte real y la parte imaginaria se cruzan. Sin embargo tomaremos solo el polo que se encuentra en la parte positiva ya que estamos interesados en valores para  $\Gamma$  de este tipo.

Tomando el integrando de  $f(s)$  de la Ecu. (4.17) y dividirlo en sus raíces de la forma

$$f(s) = \frac{e^{st} \left( s^2 - 2\lambda^2 \right)}{s^3 - \Gamma \left( s^2 - 2\lambda^2 \right)} = \frac{e^{st} \left( s^2 - 2\lambda^2 \right)}{(s - r_1)(s - r_2)(s - r_3)} , \tag{4.18}$$

donde las raíces del trinomio quedan como

$$r_1 = \frac{1}{3} \left( \sqrt[3]{C_\Gamma} + \frac{\Gamma^2}{\sqrt[3]{C_\Gamma}} + \Gamma \right) , \tag{4.19}$$

$$r_2 = \frac{1}{6} i \left( \sqrt{3} + i \right) \sqrt[3]{C_\Gamma} + \frac{(-1 - i\sqrt{3}) \Gamma^2}{6\sqrt[3]{C_\Gamma}} + \frac{\Gamma}{3} , \tag{4.20}$$

#### 4.1. Ecuación integral para la amplitud de fidelidad generalizada

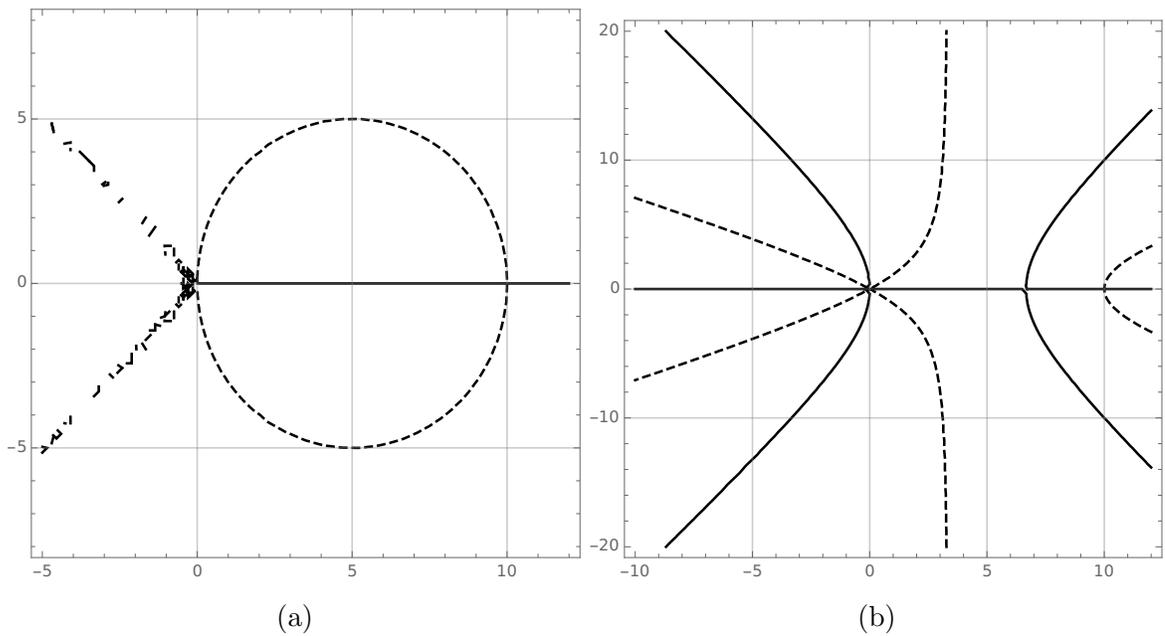


Figura 4.1: Parte  $\text{Re}[f(s)]$  (punteada) e  $\text{Im}[f(s)]$  (sólida) donde el denominador de la función  $f(s)$  se hace cero: (a) Sin la aproximación para la función de error, (b) Con la aproximación para la función de error. Tomamos  $\lambda = 0,01$  y  $\Gamma = 10$  para ambos casos.

#### 4. Amplitud de fidelidad generalizada para sistemas tripartitas

---

y

$$r_3 = -\frac{1}{6}i(\sqrt{3}-i)\sqrt[3]{C_\Gamma} + \frac{i(\sqrt{3}+i)\Gamma^2}{6\sqrt[3]{C_\Gamma}} + \frac{\Gamma}{3}, \quad (4.21)$$

con  $C_\Gamma = \Gamma^3 + 3\sqrt{81\Gamma^2\lambda^4 - 6\Gamma^4\lambda^2} - 27\Gamma\lambda^2$ . Vemos que para  $r_2$  y  $r_3$  son complejos conjugados de cada uno y la única raíz real es  $r_1$ , además observamos que las raíces son polos de orden 1, gracias a esto podemos utilizar el método estándar para la obtención de residuos

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(s), s_k], \quad (4.22)$$

donde el residuo para un polo de orden 1

$$\text{Res}[f(s), s_0] = \lim_{s \rightarrow s_0} (s - s_0) f(s). \quad (4.23)$$

Entonces sustituyendo  $r_1$  en la Ecu. (4.23) obtenemos que el residuo para  $f(s)$  es

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(s), r_1] = & \left[ \Gamma^4 + 2\Gamma\sqrt{81\Gamma^2\lambda^4 - 6\Gamma^4\lambda^2} + \Gamma^3\sqrt[3]{C_\Gamma} - 9\Gamma\lambda^2\sqrt[3]{C_\Gamma} \right. \\ & \left. + \sqrt{81\Gamma^2\lambda^4 - 6\Gamma^4\lambda^2}\sqrt[3]{C_\Gamma} - 6\lambda^2C_\Gamma^{2/3} + \Gamma^2\left(C_\Gamma^{2/3} - 18\lambda^2\right) \right] e^{\frac{t}{3}\left(\sqrt[3]{C_\Gamma} + \frac{\Gamma^2}{\sqrt[3]{C_\Gamma}} + \Gamma\right)} / \\ & \Gamma^4 + \Gamma^3\sqrt[3]{C_\Gamma} - 27\Gamma\lambda^2\sqrt[3]{C_\Gamma} + 3\sqrt{81\Gamma^2\lambda^4 - 6\Gamma^4\lambda^2}\sqrt[3]{C_\Gamma} + \Gamma^2C_\Gamma^{2/3}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde  $C_\Gamma$  se introdujo anteriormente. Ahora podemos calcular la amplitud de fidelidad generalizada sustituyendo la Ecu. (4.24) en  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$

$$\begin{aligned} f_{\lambda, \Gamma}(t) &= e^{-\Gamma t} \phi_{\lambda, \Gamma}(t) \\ &= e^{-\Gamma t} \text{Res}[f(s), r_1] \end{aligned} \quad (4.25)$$

#### Solución para decaimiento exponencial

Ahora tomamos una función exponencial para  $F(s)$  en la Ecu. (4.12) tal que

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty dt e^{-st} f_\lambda(t); \quad f_\lambda(t) = e^{-\lambda^2 \frac{t}{2}} \\ &= \frac{2}{2s + \lambda^2}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

## 4.1. Ecuación integral para la amplitud de fidelidad generalizada

---

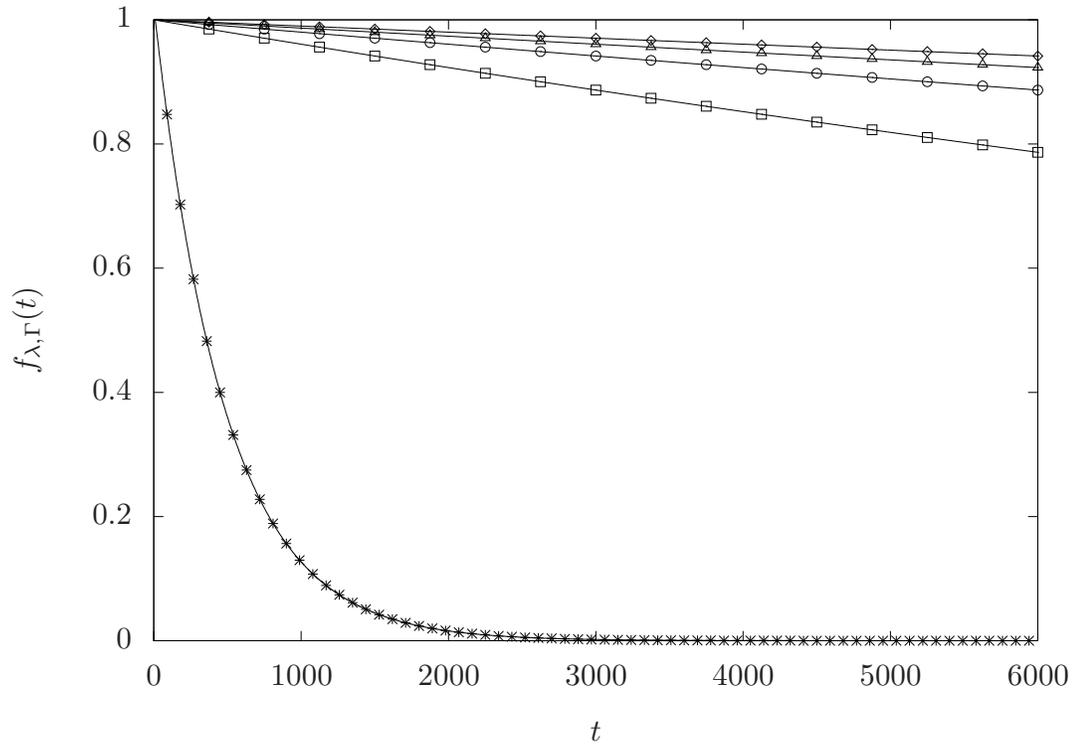


Figura 4.2: Amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$  utilizando la solución para  $\phi_{\lambda, \Gamma}(t)$  con decaimiento Gaussiano por el método del residuo. Utilizamos los valores  $\lambda = 0,01$  y  $\Gamma = 0,1$  (asteriscos), 5,0 (cuadros), 10,0 (círculos), 15,0 (triángulos) y 20,0 (rombos).

#### 4. Amplitud de fidelidad generalizada para sistemas tripartitas

---

como en el caso para el decaimiento Gaussiano  $s \in \mathbb{C}$ . Ahora para obtener  $\phi_{\lambda, \Gamma}(t)$  sustituimos la Ecu. (4.26) en la Ecu. (4.12) llegando a

$$\begin{aligned}
 \phi_{\lambda, \Gamma}(t) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} ds \frac{e^{st} \left( \frac{2}{2s+\lambda^2} \right)}{1 - \Gamma \left( \frac{2}{2s+\lambda^2} \right)} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} ds \frac{2e^{st}}{2(s-\Gamma) + \lambda^2} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} ds f(s) .
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Vemos que al igual que en el caso para el decaimiento Gaussiano, es conveniente utilizar el teorema del residuo para solucionar la integral de la Ecu. (4.27). Entonces tomamos  $f(s)$  de la Ecu. (4.27) tal que

$$\begin{aligned}
 \text{Res}[f(s), s_0] &= \lim_{s \rightarrow s_0} (s - s_0) f(s); \quad s_0 = \Gamma - \frac{\lambda^2}{2} \\
 &= \lim_{s \rightarrow s_0} (s - s_0) \left[ \frac{2e^{st}}{2(s-\Gamma) + \lambda^2} \right] \\
 &= e^{t(\Gamma - \frac{\lambda^2}{2})} .
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Con el residuo obtenido en la Ecu. (4.28) podemos calcular la amplitud de fidelidad generalizada mostrada en el Ecu. (4.11) como

$$\begin{aligned}
 f_{\lambda, \Gamma}(t) &= e^{-\Gamma t} \phi_{\lambda, \Gamma}(t) \\
 &= e^{-\Gamma t} \text{Res}[f(s), s_0] \\
 &= e^{-\Gamma t} e^{t(\Gamma - \frac{\lambda^2}{2})} \\
 &= e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} .
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

La Ecu. (4.29) muestra como para un decaimiento exponencial perdemos la dependencia de  $\Gamma$  dejando el decaimiento en función solo del parámetro  $\lambda$ .

#### 4.1. Ecuación integral para la amplitud de fidelidad generalizada

---

---

## Capítulo 5

# Simulaciones

---

En esta sección se muestran los resultados numéricos para los diferentes casos utilizados durante el presente trabajo. En la primera parte comparamos la fidelidad generalizada para un modelo RMT propuesta en la Ecu. (4.8), después pasamos a los resultados para el modelo del oscilador amónico desplazado y terminando con la comparación entre la amplitud de fidelidad generalizada para el modelo RMT y las diferentes medidas para la decoherencia utilizadas comúnmente como son la fidelidad cuántica, la super-fidelidad y la distancia traza las cuales fueron introducidas en la Sec. 2.3.1.

### 5.0.1. Amplitud de fidelidad generalizada para un modelo RMT

Aquí comparamos la integral de la Ecu. (4.8) para la amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda,\Gamma}(t)$  con la solución numérica para la ecuación maestra de la Ecu. (3.16), cuando en esta última el acoplamiento con el entorno lejano está descrito por un término de disipación unitariamente invariante, esto como consecuencia de tomar el entorno cercano como un ensemble de matrices aleatorias.

Para solucionar numéricamente la ecuación maestra [Ecu. (3.16)] utilizamos el método de super-operadores, en el cual, escribimos la matriz de densidad del entorno cercano  $\varrho_e(t)$  primero en forma de un super-vector y después en forma de supermatriz, para después resolver el sistema de ecuaciones diferenciales resultante por medio de la diagonalización. Sin embargo debido al alto coste computacional que requiere esta diagonalización — dado que el número de ecuaciones resultantes es del orden de  $N_e^2$  —, nos tenemos que restringir a dimensiones bajas para el entorno cercano. Para solucionar la ecuación integral para la amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda,\Gamma}(t)$  utilizamos el método del trapecio, el cual nos permite integrar numéricamente.

---

En este punto comenzamos definiendo las amplitudes de fidelidad como

$$f_\lambda(t_j) = \text{tr}\{e^{iH_- t_j} e^{-iH_+ t_j} \varrho(0)\}. \quad \bar{f}_\lambda(t_j, t_k) = \text{tr}\{e^{iH_- (t_j - t_k)} e^{-iH_+ (t_j - t_k)} \varrho(0)\}. \quad (5.1)$$

Entonces tomando la Ecu. (4.10), sustituyendo las en ella las relaciones de la Ecu. (5.1) y cambiando la integral por una suma, tenemos que

$$\begin{aligned} \phi_{\lambda, \Gamma}(t_j) = & \Gamma \left[ \frac{\Delta}{2} \left( \bar{f}_\lambda(t_j, t_0) \phi_{\lambda, \Gamma}(t_0) + \bar{f}_\lambda(t_j, t_j) \phi_{\lambda, \Gamma}(t_j) \right) \right] \\ & + \Delta \sum_{k=1}^{j-1} \bar{f}_\lambda(t_j, t_k) \phi_{\lambda, \Gamma}(t_k), \end{aligned} \quad (5.2)$$

tomando la Ecu. (5.2) igualándola a cero y realizando algo de álgebra

$$\begin{aligned} \phi_{\lambda, \Gamma}(t_j) - f_\lambda(t_j) - \Gamma \left[ \frac{\Delta}{2} \left( \bar{f}_\lambda(t_j, t_0) \phi_{\lambda, \Gamma}(t_0) + \bar{f}_\lambda(t_j, t_j) \phi_{\lambda, \Gamma}(t_j) \right) \right] \\ + \Delta \sum_{k=1}^{j-1} \bar{f}_\lambda(t_j, t_k) \phi_{\lambda, \Gamma}(t_k) = 0 \\ \phi_{\lambda, \Gamma}(t_j) \left[ 1 - \frac{\Gamma \Delta}{2} \bar{f}_\lambda(t_j, t_j) \right] = f_\lambda(t_j) + \frac{\Gamma \Delta}{2} \bar{f}_\lambda(t_j, t_0) \phi_{\lambda, \Gamma}(t_0) \\ + \Gamma \Delta \sum_{k=1}^{j-1} \bar{f}_\lambda(t_j, t_k) \phi_{\lambda, \Gamma}(t_k), \end{aligned} \quad (5.3)$$

llegamos a la forma final para la integración numérica de  $\phi_{\lambda, \Gamma}(t)$  tal que

$$\phi_{\lambda, \Gamma}(t_j) = \frac{f_\lambda(t_j) + \Gamma \Delta \left( \frac{1}{2} \bar{f}_\lambda(t_j, t_0) \phi_{\lambda, \Gamma}(t_0) + \sum_{k=1}^{j-1} \bar{f}_\lambda(t_j, t_k) \phi_{\lambda, \Gamma}(t_k) \right)}{\left( 1 - \frac{\Gamma \Delta}{2} \bar{f}_\lambda(t_j, t_j) \right)}, \quad (5.4)$$

donde  $\Delta = t_2 - t_1$  es la diferencia para entre los dos pasos de tiempo contiguos y  $f_\lambda(t_j)$  es la amplitud de fidelidad para el sistema bipartita ( $\Gamma = 0$ ), que nos dará el comportamiento universal de las matrices aleatorias derivado en [19].

Para el caso de la ecuación maestra utilizamos diferentes parámetros para el sistema total: la dimensión del entorno cercano será  $N_e = 50, 80$ ; la fuerza del acoplamiento toma los valores  $\lambda = 0,01, 0,02$ ; utilizamos tres promedios numéricos independientes sobre el número de realizaciones  $n_{run} = 100, 1000$  y un canal depolarizador con temperatura infinita e finita como disipador. En el caso de la ecuación integral tomamos los mismos valores que en el caso anterior para  $N_e$  y  $\lambda$ . En ambos casos tenemos un acoplamiento de desfase entre el sistema central y el entorno cercano, y un estado inicial máximamente mezclado  $\varrho_e(0) = \mathbb{1}_e/N_e$  para el entrono cercano.

## 5. Simulaciones

**Canal depolarizador con temperatura infinita** En la Fig 5.1 mostramos el comportamiento general del decaimiento de la coherencia a través de la amplitud de fidelidad generalizada. Aquí tomamos  $\lambda = 0,02$  para el valor del acoplamiento entre sistema central y entorno cercano, y diferentes valores del acoplamiento entre entornos  $\Gamma$ . Podemos ver claramente como la coherencia del sistema central decae más lentamente conforme aumentamos el valor del acoplamiento  $\Gamma$ .

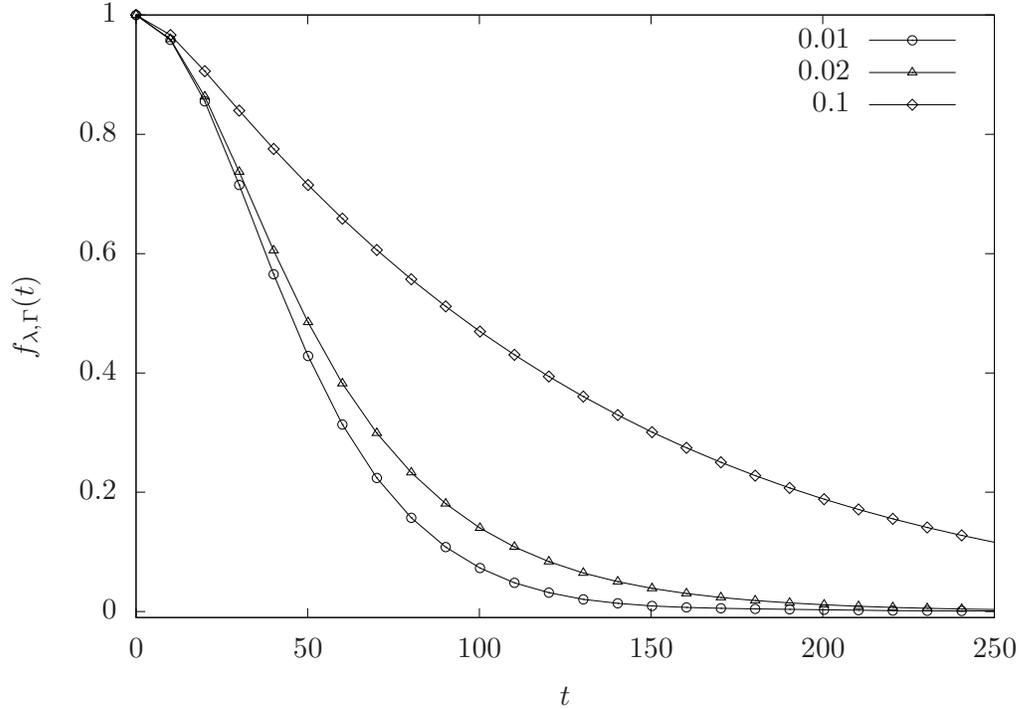


Figura 5.1: Amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$  para un ensemble RMT en el entorno cercano y un canal depolarizador con temperatura infinita en el entorno lejano, para  $N_e = 80$ ,  $\lambda = 0,02$ ,  $n_{run} = 100$  y diferentes valores para el acoplamiento al entorno lejano  $\Gamma = 0,01$  (círculos),  $0,02$  (triángulos),  $0,1$  (rombos).

Ahora para tener una mejor comparación entre la solución a la ecuación integral y la solución a la ecuación maestra, utilizaremos la forma exponenciada para la respuesta lineal utilizada en [14] y le sustraeremos la amplitud de fidelidad negando el acoplamiento con el entorno lejano  $f_{\lambda, 0}(t)$ . En la Fig. 5.2 tomamos  $N_e = 50$ ,  $\lambda = 0,02$  y  $n_{run} = 1000$ , este caso corresponde al régimen perturbativo — decaimiento Gaussiano—. Aquí vemos como para valores pequeños de  $\Gamma$  tenemos una buena correspondencia entre el modelo teórico y las soluciones numéricas para la ecuación maestra,

en especial para tiempos cortos. Sin embargo al incrementar a  $\Gamma = 0,1$  observamos como ambas soluciones comienzan a separarse aproximadamente cuando llegan a su máximo ( $t \gtrsim 60$ ). Vemos que al igual que en la Fig. 5.1 conforme aumentamos el valor del acoplamiento con el entorno lejano el decaimiento de la coherencia del sistema central es más lento.

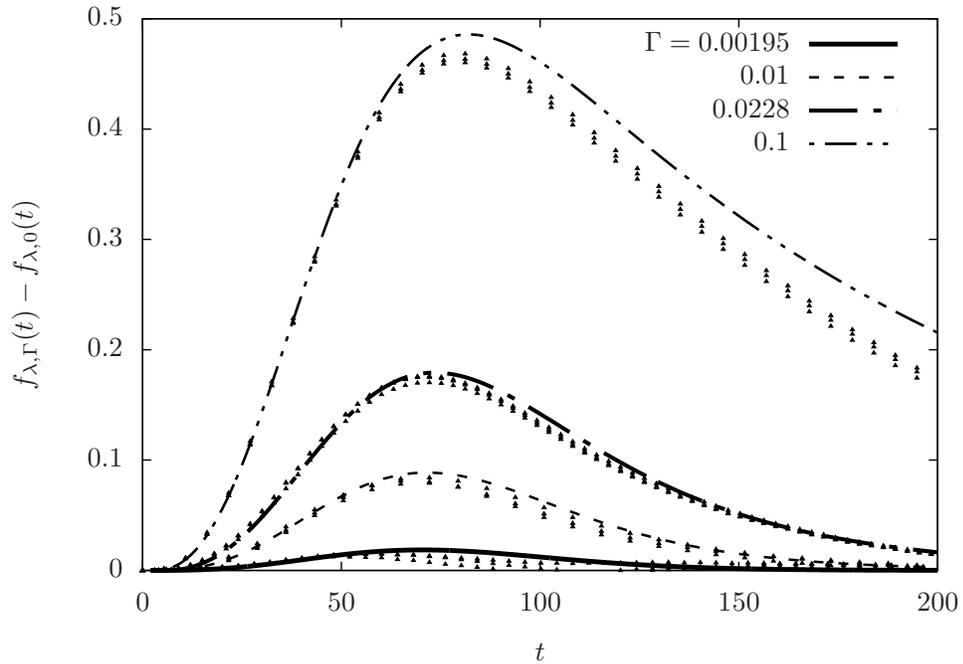


Figura 5.2: Amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t) - f_{\lambda, 0}(t)$  para un ensemble RMT en el entorno cercano y un canal depolarizador con temperatura infinita en el entorno lejano, para  $N_e = 50$ ,  $\lambda = 0,02$ ,  $n_{run} = 1000$  realizaciones y diferentes valores para acoplamiento al entorno lejano  $\Gamma = 0,00195$  (sólida),  $0,01$  (discontinua),  $0,0228$  (sólida-discontinua),  $0,1$  (sólida-discontinua doble). Las líneas punteadas representan la solución teórica y los puntos muestran las soluciones numéricas.

Hasta ahora hemos encontrado un efecto estabilizador en la coherencia del sistema central, en este punto es natural — e interesante — preguntarnos que sucede cuando aumentamos el acoplamiento  $\lambda$ . En la Fig. 5.3 utilizamos de nuevo  $N_e = 50$  y  $n_{run} = 1000$  e incrementamos el valor de la fuerza del acoplamiento a  $\lambda = 0,1$ . A diferencia del caso anterior (Fig. 5.2) nos encontramos en un régimen de «cross-over»<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Es el régimen entre el régimen perturbativo y el régimen de la regla de oro de Fermi (Fermi golden rule)

## 5. Simulaciones

— el decaimiento de  $f_{\lambda,\Gamma}(t)$  está de manera intermedia entre un decaimiento exponencial y Gaussiano —. Vemos como tenemos una buena correspondencia entre los resultados teóricos y la solución a la ecuación numérica para todos los valores de  $\Gamma$ . Además, observamos también como de nuevo obtenemos el efecto estabilizador para la coherencia del sistema central, sin embargo, es menos notorio que para el caso con  $\lambda = 0,02$ . Lo cual muestra que dicho efecto estabilizante está directamente relacionado con la fuerza del acoplamiento  $\lambda$ . Esto debido a que este acoplamiento es el responsable de «movernos» de un régimen a otro. Como consecuencia de lo anterior al seguir incrementando el valor de  $\lambda$  eventualmente llegaremos al régimen de la regla de oro de Fermi y perderemos el efecto estabilizador de la coherencia del sistema central.

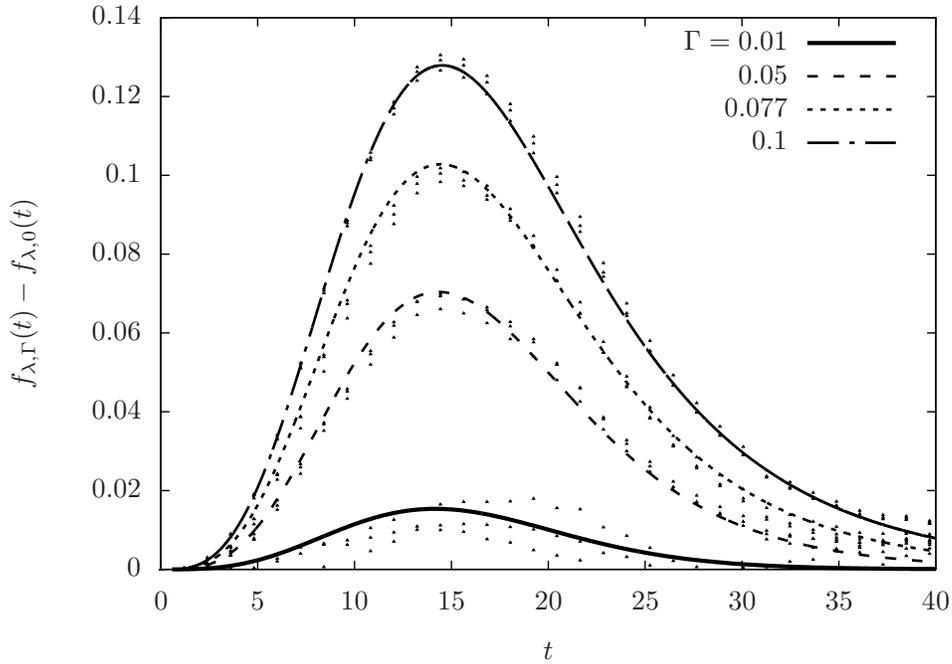


Figura 5.3: Amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda,\Gamma}(t) - f_{\lambda,0}(t)$  para un ensemble RMT en el entorno cercano y un canal depolarizador con temperatura infinita en el entorno lejano, para  $N_e = 50$ ,  $\lambda = 0,1$ ,  $n_{run} = 1000$  realizaciones y diferentes valores para el acoplamiento al entorno lejano  $\Gamma = 0,01$  (sólida),  $0,05$  (discontinua),  $0,077$  (punteada),  $0,1$  (discontinua-punteada doble). Las líneas punteadas representan la solución teórica y los puntos muestran las soluciones numéricas.

En la Fig. 5.4 aumentamos la dimensión del entorno cercano a  $N_e = 80$  y utilizamos la fuerza de acoplamiento  $\lambda = 0,02$ . Aquí debido al coste computacional deberemos

reducir el número de realizaciones a  $n_{run} = 100$ . De nuevo, nos encontramos en el régimen perturbativo. Como en los casos anteriores tenemos una buena correspondencia entre la solución teórica y la solución de la ecuación maestra para todos los valores de  $\Gamma$ . Además, observamos que al aumentar la dimensión del entorno cercano conservamos el efecto de estabilizar la coherencia. Con lo que podemos concluir que el efecto estabilizador de la coherencia depende más del valor de la fuerza del acoplamiento entre el sistema central y el entorno cercano  $\lambda$  que de la dimensión del entorno cercano  $N_e$ .

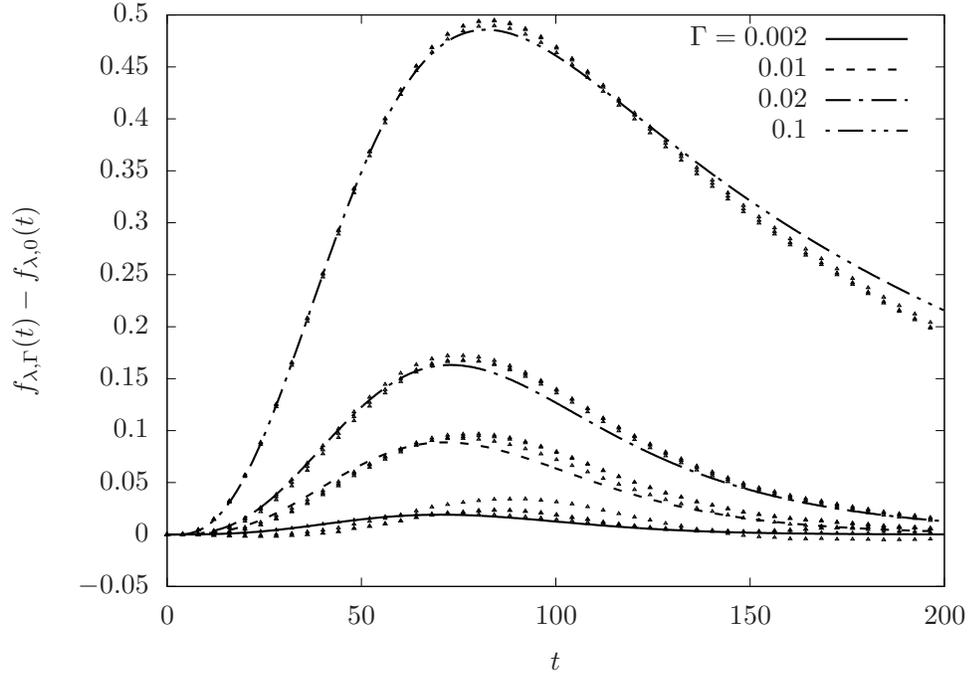


Figura 5.4: Amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda,\Gamma}(t) - f_{\lambda,0}(t)$  para un ensemble RMT en el entorno cercano y un canal depolarizador con temperatura infinita en el entorno lejano, para  $N_e = 80$ ,  $\lambda = 0,02$ ,  $n_{run} = 100$  realizaciones y diferentes valores para el acoplamiento al entorno lejano  $\Gamma = 0,002$  (sólida),  $0,01$  (discontinua),  $0,02$  (discontinua-puntada),  $0,1$  (discontinua-punteada doble). Las líneas punteadas representan la solución teórica y los puntos muestran las soluciones numéricas.

**Canal depolarizador con temperatura finita** Ahora cambiamos el entorno lejano a un canal despolarizador con temperatura finita. En este caso utilizamos  $N_e = 50$ , dos valores para el acoplamiento entre entornos  $\lambda = 0,02$  y  $0,1$ , y dos diferentes

## 5. Simulaciones

valores para la temperatura en el disipador  $\beta = 0,2$  y  $0,1$ . En la Fig 5.5 tomamos  $\lambda = 0,02$  y una  $\beta = 0,2$  para la temperatura en el entorno lejano. Observamos que, como en el caso del disipador de temperatura infinita, tenemos una mejora en el decaimiento de la coherencia conforme aumentamos el acoplamiento con el entorno lejano  $\Gamma$ .

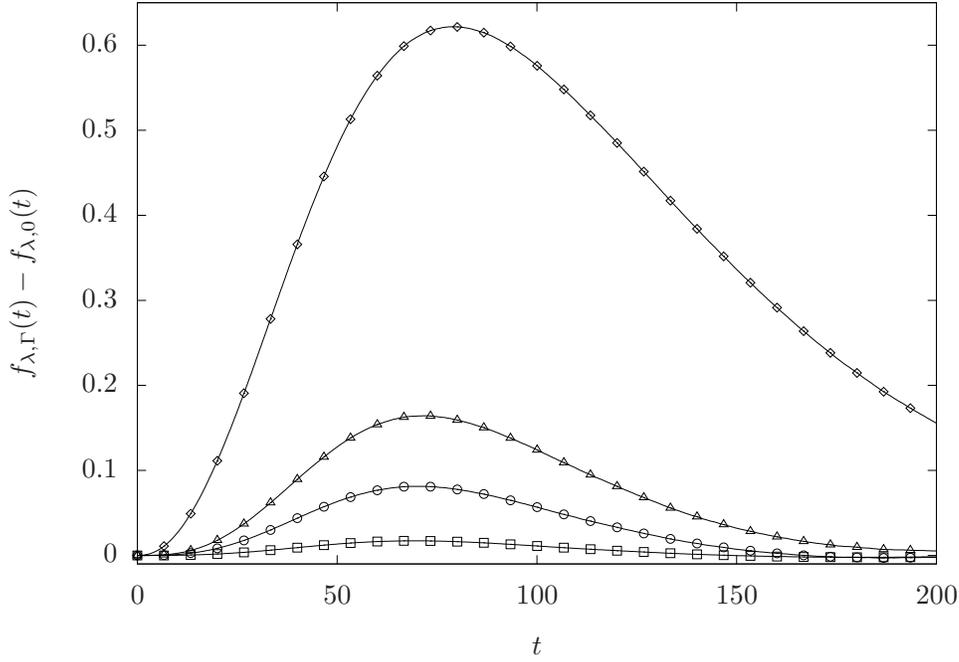


Figura 5.5: Amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t) - f_{\lambda, 0}(t)$  para un ensemble RMT como entorno cercano y un canal depolarizador con temperatura finita en el entorno lejano, para  $N_e = 50$ ,  $\lambda = 0,02$ ,  $\beta = 0,2$ ,  $n_{run} = 1000$  realizaciones y diferentes valores para el acoplamiento al entorno lejano  $\Gamma = 0,00195$  (cuadros),  $0,01$  (círculos),  $0,0228$  (triángulos),  $1,0$  (rombos).

En la Fig. 5.6 aumentamos el valor de la temperatura en el entorno lejano a  $\beta = 0,1$ . Podemos observar como para valores de  $\Gamma$  pequeños el decaimiento es similar al caso con  $\beta = 0,2$ , sin embargo el decaimiento es más rápido para los valores del  $\Gamma$  que en caso anterior

En este punto es interesante saber como se comportará el decaimiento de la coherencia al aumentar el valor del acoplamiento  $\lambda$ . En la Fig. 5.7 tomamos  $N_e = 50$ , aumentamos en valor del acoplamiento al entorno cercano a  $\lambda = 0,1$  y tomamos la temperatura en el entorno lejano como  $\beta = 0,2$ . Podemos ver como en comparación

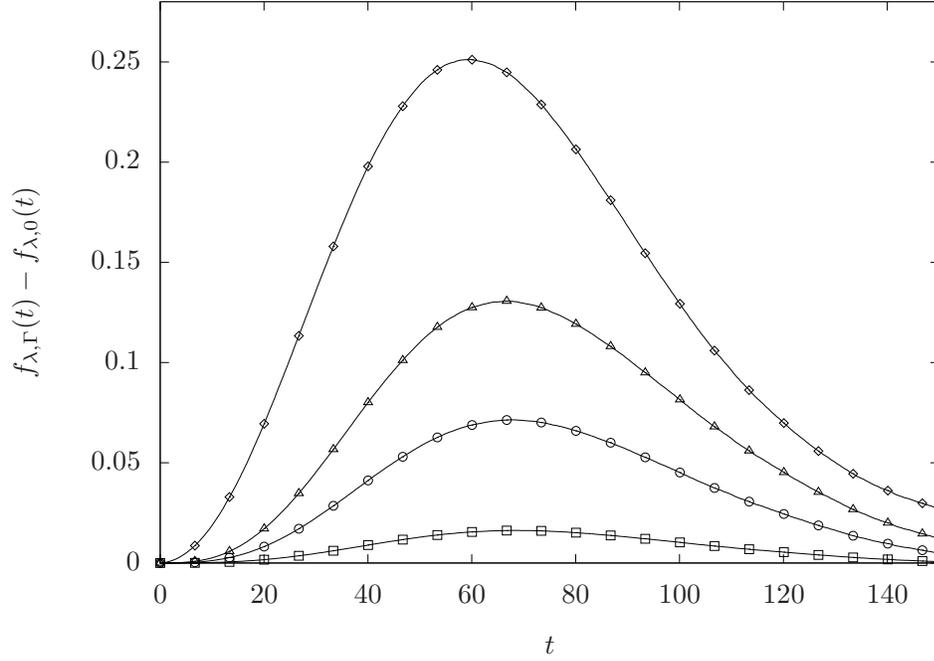


Figura 5.6: Amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t) - f_{\lambda, 0}(t)$  para un ensemble RMT en el entorno cercano y un canal depolarizador con temperatura finita en el entorno lejano, para  $N_e = 50$ ,  $\lambda = 0,02$ ,  $\beta = 1,0$ ,  $n_{run} = 1000$  realizaciones y diferentes valores para el acoplamiento al entorno lejano  $\Gamma = 0,00195$  (cuadros),  $0,01$  (círculos),  $0,0228$  (triángulos),  $1,0$  (rombos).

con el caso para  $\lambda = 0,02$  la coherencia del sistema central decae más rápidamente.

En la Fig. 5.8 mostramos el caso donde aumentamos el valor de la temperatura a  $\beta = 1,0$ . Vemos como en este caso el decaimiento de la coherencia de nuevo es más rápido que en el caso de  $\beta = 0,2$ . También vemos — al igual que en todos los casos anteriores — que el aumentar el acoplamiento  $\Gamma$  el sistema central queda mejor protegido contra la decoherencia.

Concluimos que para el canal despolarizador con temperatura finita, el efecto estabilizador de la coherencia depende tanto de los valores de los acoplamientos  $\Gamma$  y  $\lambda$  como de la temperatura  $\beta$  en el entorno lejano.

## 5. Simulaciones

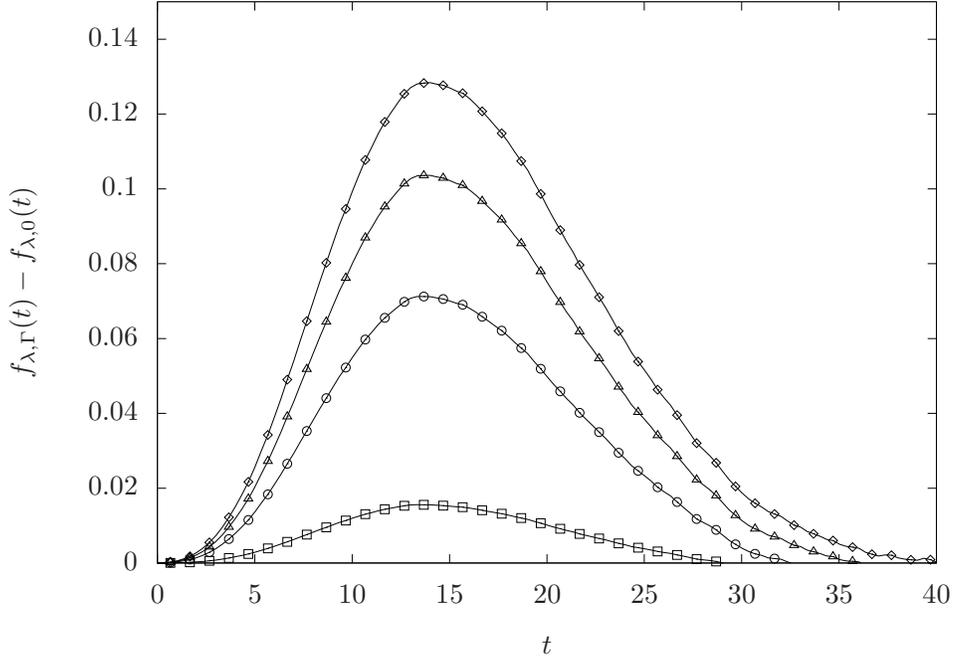


Figura 5.7: Amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t) - f_{\lambda, 0}(t)$  para un ensemble RMT en el entorno cercano y un canal depolarizador con temperatura finita en el entorno lejano, para  $N_e = 50$ ,  $\lambda = 0,1$ ,  $\beta = 0,2$ ,  $n_{run} = 1000$  realizaciones y diferentes valores para el acoplamiento al entorno lejano  $\Gamma = 0,01$  (cuadros),  $0,05$  (círculos),  $0,077$  (triángulos),  $0,1$  (rombos).

### 5.0.2. Oscilador armónico

En esta sección comparamos la solución numérica a la integral de la amplitud de fidelidad  $\phi_{\pm, \Gamma}(t)$  obtenida por el método del trapecio utilizado en la Ecu. (5.4), con la solución numérica a la ecuación maestra de la Ecu. (3.28).

Para la solución a la integral numérica, utilizamos el Hamiltoniano con acoplamiento de desfase  $H_{\pm}$  introducido en la Ecu. (3.19); una mezcla uniforme como estado inicial para el entorno cercano  $\rho_e(0) = \mathbb{1}/N_e$ ; una dimensión para el entorno cercano  $N_e = 40$ ; dos valores para acoplamiento entre sistema central y entorno cercano  $\lambda = 0,02, 0,1$  — esto con fin de comparar como afecta la fuerza del acoplamiento al decaimiento de la coherencia —; y un total de 100000 pasos en el tiempo. Es importante decir que si doblamos el número de puntos el resultado de la solución numérica a la integral no cambia. Para la solución numérica de la ecuación maestra, utilizamos

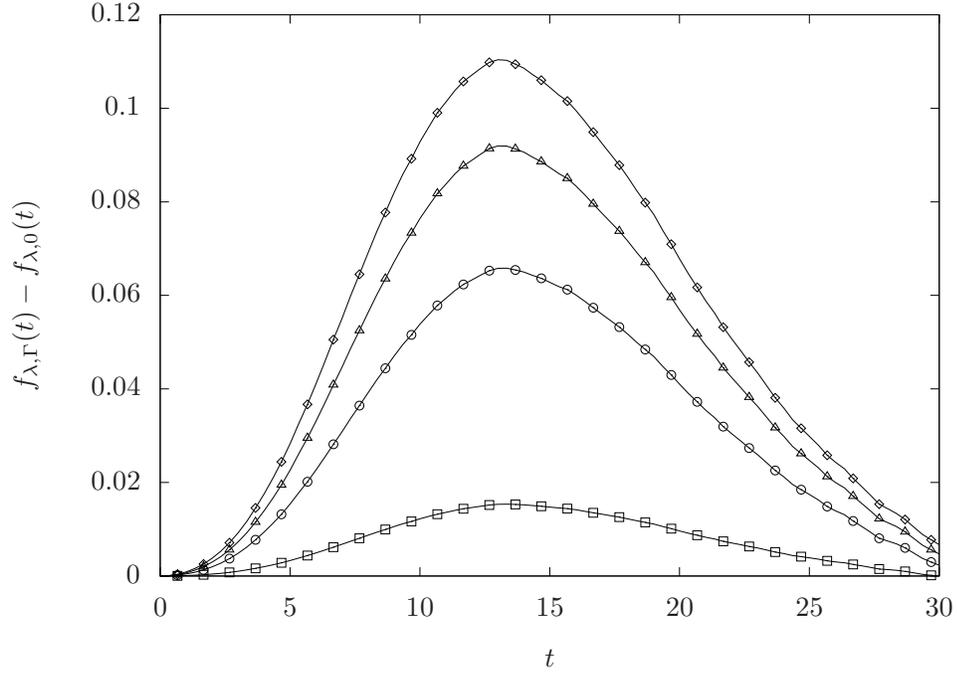


Figura 5.8: Amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t) - f_{\lambda, 0}(t)$  para un ensemble RMT en el entorno cercano y un canal depolarizador con temperatura finita en el entorno lejano con  $N_e = 50$ ,  $\lambda = 0,1$ ,  $\beta = 1,0$ ,  $n_{run} = 1000$  realizaciones y diferentes valores para el acoplamiento al entorno lejano  $\Gamma = 0,01$  (cuadros),  $0,05$  (círculos),  $0,077$  (triángulos),  $0,1$  (rombos).

tanto el mismo Hamiltoniano  $H_{\pm}$  y estado inicial para  $\varrho_e(0)$  como los valores para  $N_e$  y  $\lambda$ . Aquí modelamos el entorno lejano (disipación) como un canal depolarizador de temperatura infinita.

En la Fig. 5.9 mostramos el caso para  $\lambda = 0,02$  y diferentes valores para el acoplamiento entre entornos  $\Gamma$ , podemos ver como para el caso de  $\Gamma = 0$  el valor de la solución para la ecuación maestra y la solución numérica de la integral tienen una buena correspondencia para todos los valores de  $t$ , sin embargo al aumentar el valor de  $\Gamma$  la solución numérica de la integral decae más rápidamente con respecto a la solución numérica de la ecuación maestra

En la Fig 5.11 aumentamos el valor del acoplamiento entre el sistema central y en entorno cercano a  $\lambda = 0,1$ , en este caso vemos como ambos casos tienen un comportamiento similar para todos los valores de  $\Gamma$

## 5. Simulaciones

---

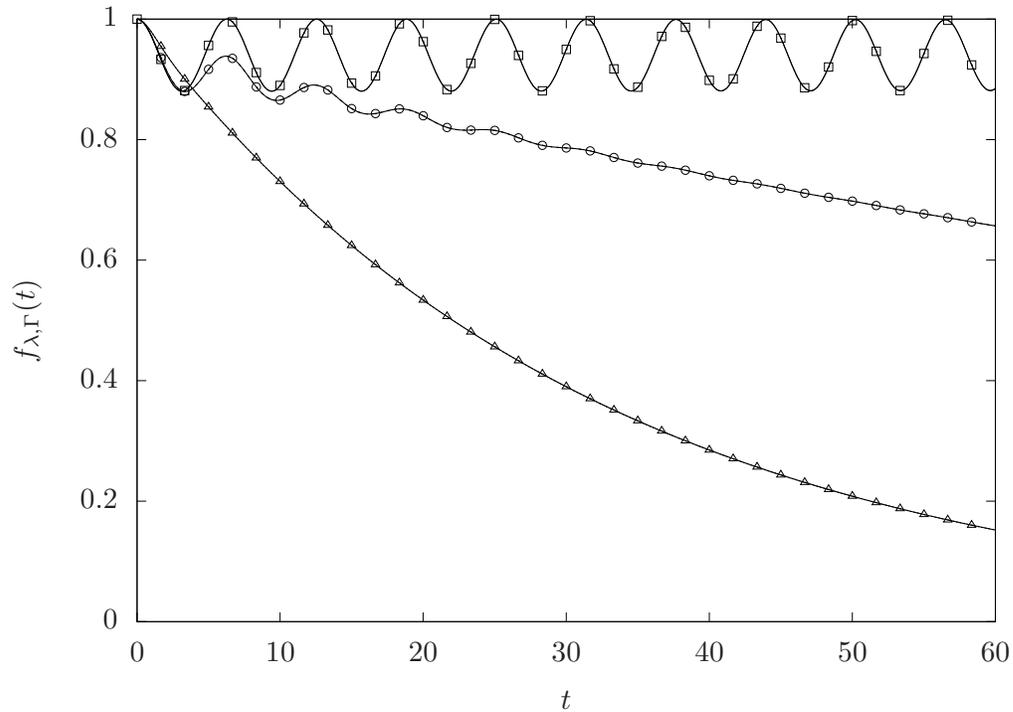


Figura 5.9: Amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$  para  $N_e = 40$ ,  $\lambda = 0,02$  y diferentes valores para el acoplamiento con el entorno lejano:  $\Gamma = 0$  (sólida/cuadros),  $0,1$  (discontinua/círculos),  $1,0$  (punteada/triángulos), las líneas punteadas representan la solución a la ecuación maestra y las los puntos la solución numérica a la integral con 9000 pasos en el tiempo.

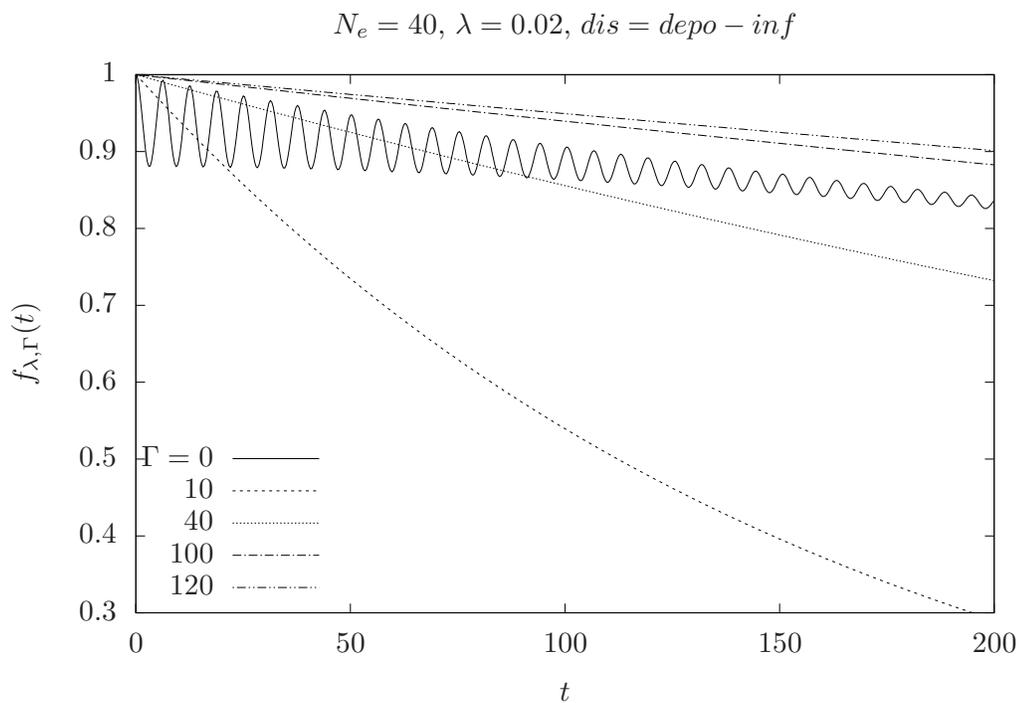


Figura 5.10: Amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$  para  $N_e = 40$ ,  $\lambda = 0,02$  y diferentes valores para el acoplamiento con el entorno lejano:  $\Gamma = 0,01$  (sólida),  $10,0$  (discontinua),  $40,0$  (punteada),  $100,0$  (discontinua-punteada),  $120,0$  (discontinua-doble punteada).

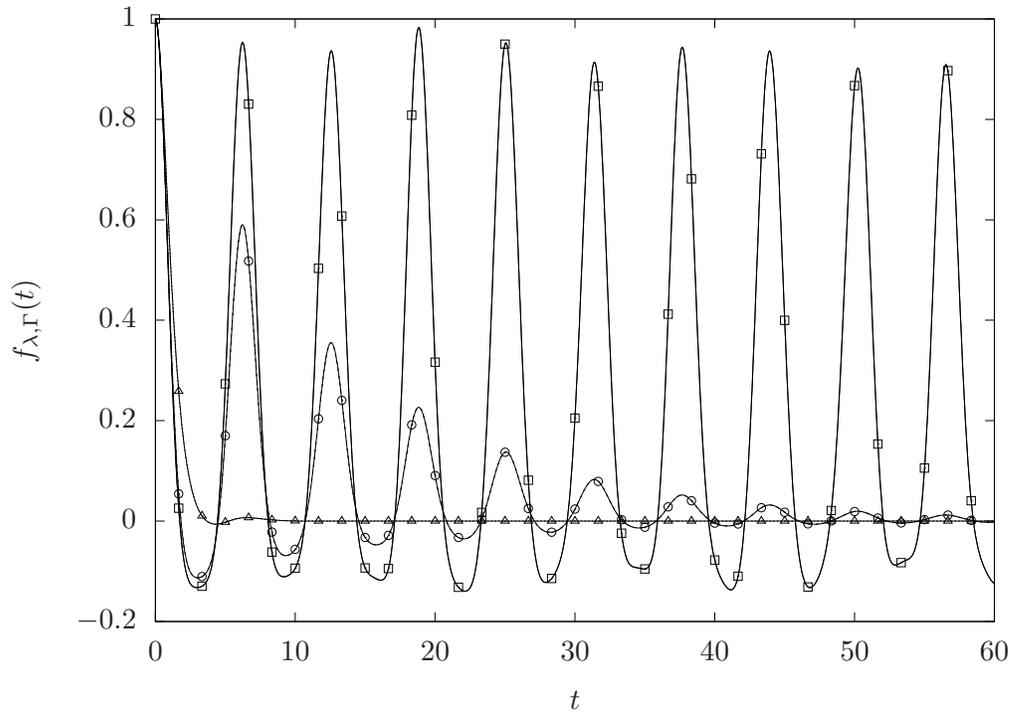


Figura 5.11: Amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$  para un oscilador armónico en el entorno cercano y un canal depolarizador con temperatura infinita en el entorno lejano con  $N_e = 40$ ,  $\lambda = 0,1$  y diferentes valores para el acoplamiento con el entorno lejano:  $\Gamma = 0$  (sólida/cuadros),  $0,1$  (discontinua/círculos),  $1,0$  (punteada/triángulos), las líneas punteadas representan la solución a la ecuación maestra y las los puntos la solución numérica a la integral con 9000 pasos en el tiempo.

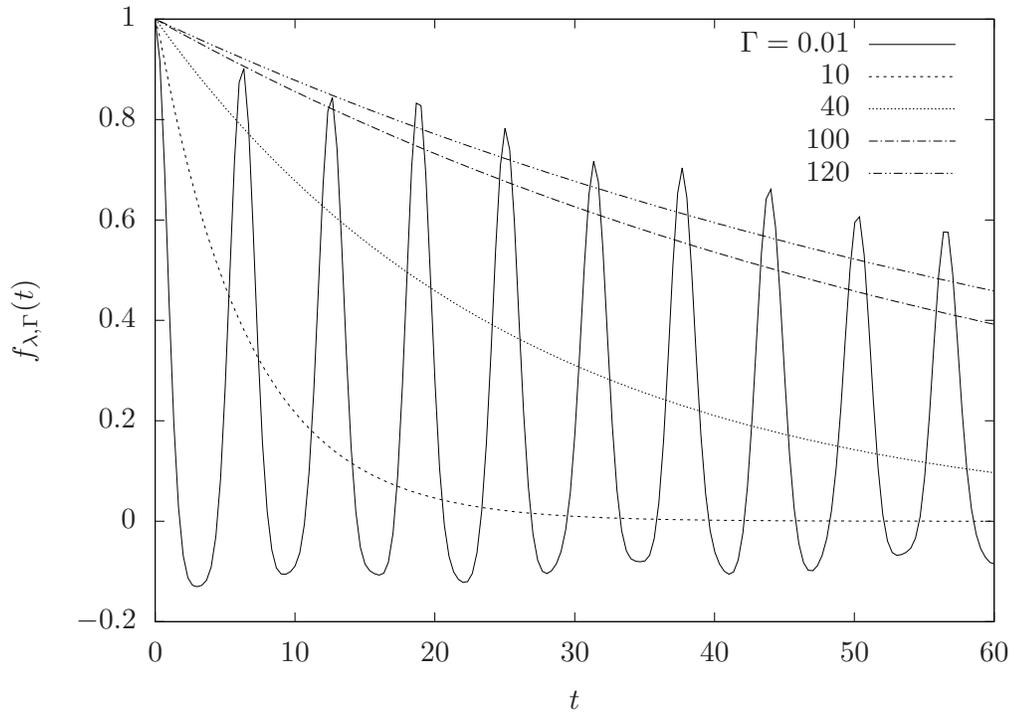


Figura 5.12: Amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$  para un oscilador armónico en el entorno cercano y un canal depolarizador con temperatura infinita en el entorno lejano con  $N_e = 40$ ,  $\lambda = 0,1$  y diferentes valores para el acoplamiento con el entorno lejano:  $\Gamma = 0,01$  (sólida),  $10,0$  (discontinua),  $40,0$  (punteada),  $100,0$  (discontinua-punteada),  $120,0$  (discontinua-doble punteada).

### 5.0.3. Comparación entre medidas

Ahora compararemos la amplitud de fidelidad generalizada con otras medidas de distancia: la distancia traza, la fidelidad cuántica y las sub-sup fidelidad. En este punto se hemos utilizado las desigualdades introducidas en la Sec. 2.3.1 para la relación entre la fidelidad cuántica y la distancia traza. Para este caso hemos obtenido la fidelidad cuántica  $F(\rho, \sigma)$  haciendo evolucionar dos estados cuánticos ortogonales  $\rho$  y  $\sigma$  con los Hamiltonianos  $H_\lambda^\rho = H_e + \lambda V_e$  y  $H_\lambda^\sigma = H_e - \lambda V_e$ . Escribiendo la fidelidad cuántica en términos de la cotas para la distancia traza [1]

$$1 - F(\varrho, \sigma) \leq D(\varrho, \sigma) \leq \sqrt{1 - F(\varrho, \sigma)^2}, \quad (5.5)$$

y análogamente utilizando la amplitud de fidelidad generalizada en forma de «cotas» para la distancia traza tal que

$$1 - f_{\lambda, \Gamma}(t) \quad \text{y} \quad \sqrt{1 - f_{\lambda, \Gamma}(t)^2}, \quad (5.6)$$

podemos realizar la comparación tanto entre la dinámica de la fidelidad cuántica con la dinámica de la amplitud de fidelidad generalizada, como la amplitud de fidelidad generalizada como valor extremo para la distancia traza.

Para realizar estas comparaciones, tomaremos primero el caso cuando el sistema no posee termino disipativo, i.e. el caso cuando  $\Gamma = 0$ . Esto se muestra en la Fig 5.13. Para este caso tomamos además  $\lambda = 0,02$  y un promedio sobre 1000 realizaciones  $n_{run} = 1000$ . Vemos como para tiempos cortos  $t < 20$  tenemos cualitativamente una buena correspondencia entre la fidelidad cuántica y la amplitud de fidelidad generalizada, además podemos observar como la distancia traza se mantiene dentro de las cotas establecidas por ambas medidas de decoherencia.

Ahora para la Fig. 5.14 aumentamos el valor del acoplamiento entre en sistema central y el entorno cercano a  $\lambda = 0,1$ . Observamos como aún tenemos una buena correspondencia entre la fidelidad cuántica  $F(\varrho, \sigma)$  y la amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$ , sin embargo para tiempos más cortos que el caso anterior  $t < 15$ . También, observamos como la distancia traza  $D(\varrho, \sigma)$  se queda dentro de las cotas para ambas medida para estos tiempos.

En la Fig. 5.15 abrimos el sistema tomando el parámetro de disipación  $\Gamma = 0,01$ , tomando el valor del acoplamiento entre el sistema central y el entono cercano como  $\lambda = 0,02$ . Vemos como al inicio  $t < 10$  de nuevo obtenemos «cualitativamente» un buena correspondencia entre la fidelidad cuántica  $F(\varrho, \sigma)$  y la amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$ . Además, vemos que, como estaba previsto la distancia traza  $D(\varrho, \sigma)$  se mantiene dentro de las cotas establecidas dentro de la Fidelidad cuántica

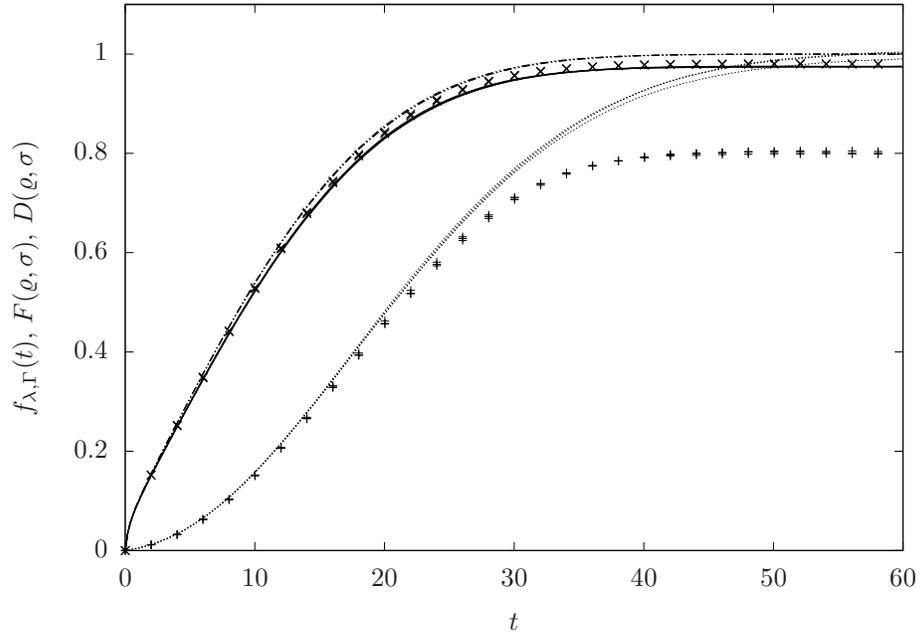


Figura 5.13: Comparación de los decaimientos de: i) la amplitud de fidelidad generalizada:  $1 - f_{\lambda, \Gamma}(t)$  (puntos),  $\sqrt{1 - f_{\lambda, \Gamma}(t)^2}$  (línea-punto); ii) la fidelidad cuántica:  $1 - F(\varrho, \sigma)$  (cruces),  $\sqrt{1 - F(\varrho, \sigma)^2}$  (equis); y la distancia traza:  $D(\varrho, \sigma)$  (línea sólida). Aquí utilizamos  $N_e = 40$ ,  $\lambda = 0,02$ ,  $n_{run} = 1000$  y  $\Gamma = 0$  para todos los casos.

$F(\varrho, \sigma)$  y además para tiempos cortos también queda dentro de las cotas establecidas por la fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$ .

Ahora aumentamos el valor del acoplamiento entre el sistema central y el entorno cercano a  $\lambda = 0,1$ , podemos ver en la Fig. 5.16 como de nuevo obtenemos una buena correspondencia para tiempos pequeños, sin embargo también se puede observar que tanto la fidelidad cuántica  $F(\varrho, \sigma)$  como la amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$  llegan a su mínimo más rápido que en caso con el sistema cerrado.

En la Fig. 5.17 aumentamos el acoplamiento entre el entorno cercano y el lejano a  $\Gamma = 0,1$  dejando el  $\lambda = 0,02$ , podemos ver como la fidelidad cuántica  $F(\varrho, \sigma)$  llega más rápido a su mínimo para regresar de igual manera al 1, a su vez de manera esperada la distancia traza  $D(\varrho, \sigma)$  sigue el comportamiento de  $F(\varrho, \sigma)$ , también vemos como la correspondencia entre la  $F(\varrho, \sigma)$  y la  $f_{\lambda, \Gamma}$  se pierde rápidamente que en el caso del acoplamiento más pequeño.

Siguiendo con el caso para  $\Gamma = 0,1$  en la Fig 5.18 aumentamos el valor del acoplamiento entre sistema central y entorno cercano a  $\lambda = 0,1$ , en este caso se observa

## 5. Simulaciones

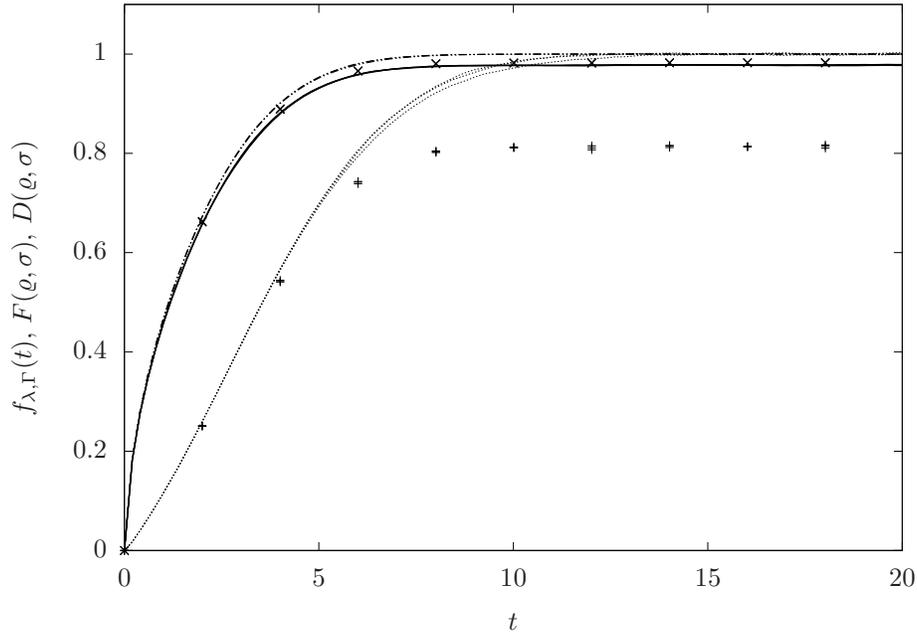


Figura 5.14: Comparación de los decaimientos de: i) la amplitud de fidelidad generalizada:  $1 - f_{\lambda, \Gamma}(t)$  (puntos),  $\sqrt{1 - f_{\lambda, \Gamma}(t)^2}$  (línea-punto); ii) la fidelidad cuántica:  $1 - F(\varrho, \sigma)$  (cruces),  $\sqrt{1 - F(\varrho, \sigma)^2}$  (equis); y la distancia traza:  $D(\varrho, \sigma)$  (línea sólida). Aquí utilizamos  $N_e = 40$ ,  $\lambda = 0,1$ ,  $n_{run} = 1000$  y  $\Gamma = 0$  para todos los casos.

como las medidas tanto de fidelidad cuántica  $F(\varrho, \sigma)$  como la distancia traza  $D(\varrho, \sigma)$  difieren rápidamente de la amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$ . También, vemos como la amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$  llega rápidamente a su mínimo mientras que la fidelidad cuántica  $F(\varrho, \sigma)$ , al igual que en el caso con  $\lambda = 0,02$ , regresa rápidamente a 1.

En la Fig. 5.19 se muestra el decaimiento de la fidelidad cuántica  $F(\varrho, \sigma)$  contra el tiempo para el caso de  $\lambda = 0,02$ , podemos ver que conforme aumentamos el valor del acoplamiento con el entorno lejano el mínimo de la fidelidad es menor, esto debido a que los estados  $\varrho$  y  $\sigma$  se mantienen más cerca lo cual puede ser traducido a que como en el caso de la amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$  la coherencia decae más lento.

Ahora con en los casos anteriores aumentemos el valor del acoplamiento entre el sistema central y el entorno cercano a  $\lambda = 0,1$ , este caso se muestra en la Fig 5.20, aquí de nuevo podemos observar como al aumentar el valor del acoplamiento entre entornos  $\Gamma$  el mínimo al que llega la fidelidad cuántica  $F(\varrho, \sigma)$  es menor regresando

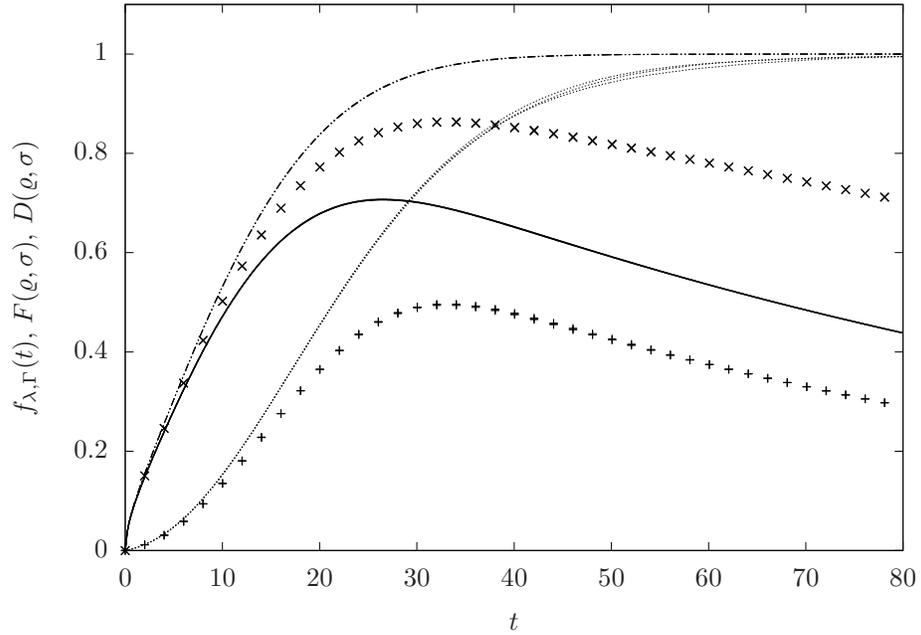


Figura 5.15: Comparación de los decaimientos de: i) la amplitud de fidelidad generalizada:  $1 - f_{\lambda, \Gamma}(t)$  (puntos),  $\sqrt{1 - f_{\lambda, \Gamma}(t)^2}$  (línea-punto); ii) la fidelidad cuántica:  $1 - F(\varrho, \sigma)$  (cruces),  $\sqrt{1 - F(\varrho, \sigma)^2}$  (equis); y la distancia traza:  $D(\varrho, \sigma)$  (línea sólida). Aquí utilizamos  $N_e = 40$ ,  $\lambda = 0,02$ ,  $n_{run} = 1000$  y  $\Gamma = 0,01$  para todos los casos.

más rápidamente a 1 cuando  $\Gamma = 0,1$  que para el caso  $\Gamma = 0$ .

En la Fig.(5.21) comparamos la fidelidad cuántica  $F(\varrho, \sigma)$  con la amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$ , vemos como mientras la amplitud de fidelidad generalizada disminuye para  $\Gamma = 0,1$  grandes la fidelidad cuántica se mantiene más cerca de 1, también podemos ver como para un sistema aislado con  $\Gamma = 0$  la fidelidad cuántica  $F(\varrho, \sigma)$  se mantiene en su mínimo cuando la amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$  llega a 0

Ahora aumentamos el acoplamiento entre sistema central y entorno a  $\lambda = 0,1$ , podemos observar en la Fig (5.22) como al aumentar este acoplamiento el mínimo al que decae la fidelidad cuántica  $F(\varrho, \sigma)$  es mayor que en el caso anterior, también podemos observar que a diferencia del caso  $\Gamma = 0$  donde la  $F(\varrho, \sigma)$  se queda en el mínimo cuando  $f_{\lambda, \Gamma}(t) = 0$  para  $\Gamma \neq 0$  la  $F(\varrho, \sigma)$  busca regresar a su valor máximo conforme la amplitud de fidelidad generalizada disminuye.

En la Fig.5.23 podemos ver como la distancia traza  $D(\varrho, \sigma)$  decae mientras la fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$  aumenta, esto implica que mientras el sistema llega el

## 5. Simulaciones

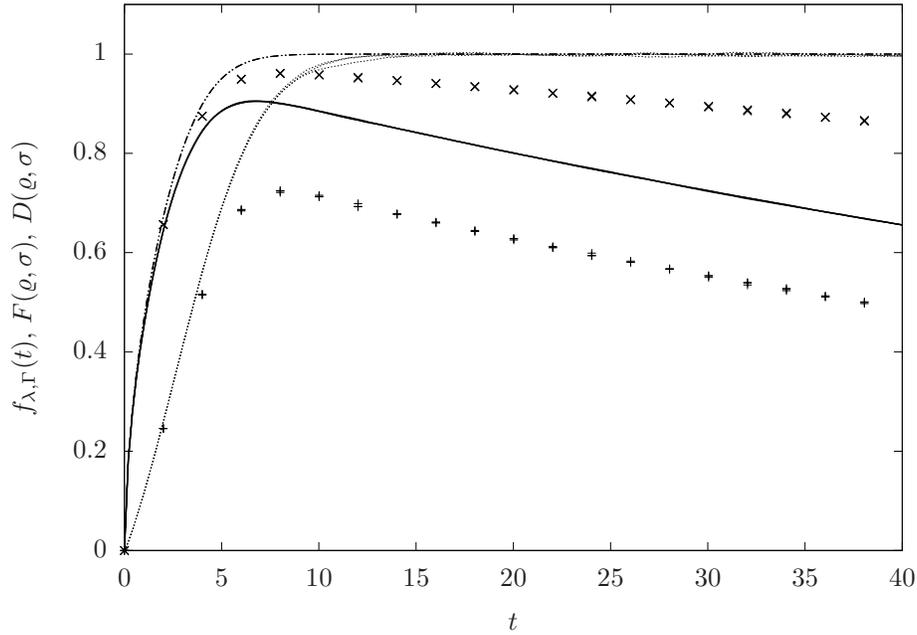


Figura 5.16: Comparación de los decaimientos de: i) la amplitud de fidelidad generalizada:  $1 - f_{\lambda, \Gamma}(t)$  (puntos),  $\sqrt{1 - f_{\lambda, \Gamma}(t)^2}$  (línea-punto); ii) la fidelidad cuántica:  $1 - F(\varrho, \sigma)$  (cruces),  $\sqrt{1 - F(\varrho, \sigma)^2}$  (equis); y la distancia traza:  $D(\varrho, \sigma)$  (línea sólida). Aquí utilizamos  $N_e = 40$ ,  $\lambda = 0,1$ ,  $n_{run} = 1000$  y  $\Gamma = 0,01$  para todos los casos.

sistema llega a estos completamente mixtos para  $\varrho$  y  $\sigma$  lo que hace que la igualdad  $D(\varrho, \sigma) = 0$  cuando  $\varrho = \sigma$  se cumpla. Vemos como para  $\Gamma = 0,1$  la distancia traza llega más rápidamente a 0, también se observa como para el caso bipartita (i.e.  $\Gamma = 0$ ) la distancia traza llega a su máximo cuando la amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$  llega a su mínimo.

En la Fig. 5.24 aumentamos el valor a  $\lambda = 0,1$ , en este caso podemos ver como valores de  $\Gamma \neq 0$  la distancia traza regresa a 0 cuando la amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$  llega a su mínimo mientras para  $\Gamma = 0$  la distancia traza se mantiene siempre en 1, igual que en el caso para  $\lambda = 0,02$ .

En Fig 5.25 compramos la amplitud de fidelidad generalizada con la fidelidad cuántica y la sub y super fidelidad para el caso del sistema bipartita  $\Gamma = 0$ , vemos como para tiempos cortos la hay una buena correspondencia la fidelidad cuántica  $F(\varrho, \sigma)$  y la amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$ , además vemos que las cotas puestas por la sub y super fidelidad para este caso son iguales a la fidelidad cuántica  $F(\varrho, \sigma)$ , vemos como para tiempos cortos la hay una buena correspondencia la fide-

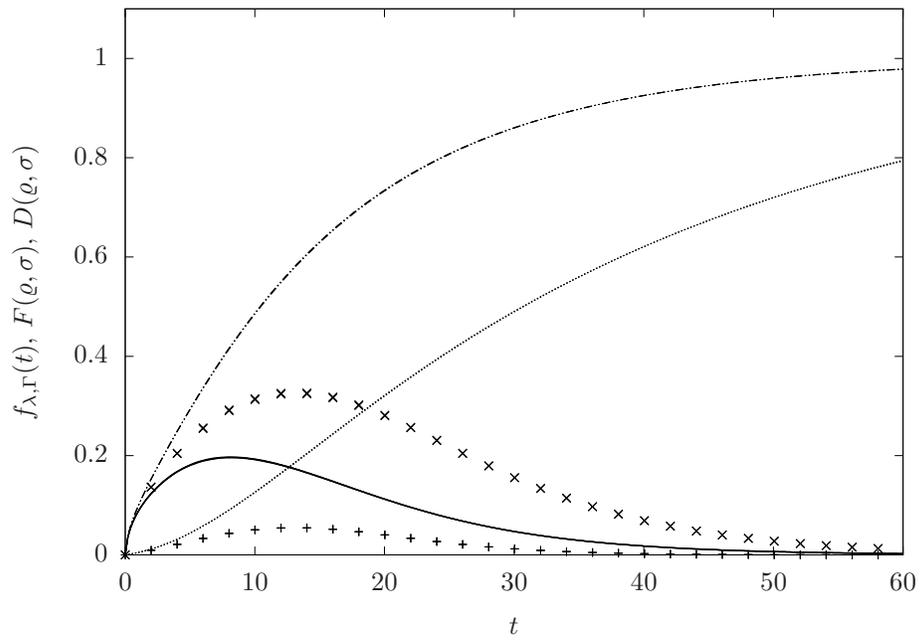


Figura 5.17: Comparación de los decaimientos de: i) la amplitud de fidelidad generalizada:  $1 - f_{\lambda, \Gamma}(t)$  (puntos),  $\sqrt{1 - f_{\lambda, \Gamma}(t)^2}$  (línea-punto); ii) la fidelidad cuántica:  $1 - F(\varrho, \sigma)$  (cruces),  $\sqrt{1 - F(\varrho, \sigma)^2}$  (equis); y la distancia traza:  $D(\varrho, \sigma)$  (línea sólida). Aquí utilizamos  $N_e = 40$ ,  $\lambda = 0,02$ ,  $n_{run} = 1000$  y  $\Gamma = 0,1$  para todos los casos.

## 5. Simulaciones

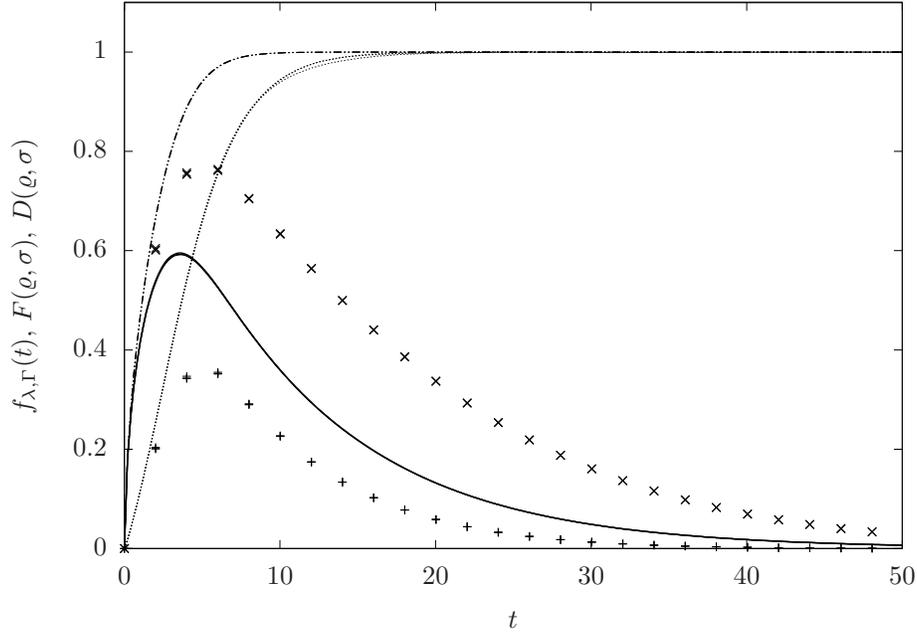


Figura 5.18: Comparación de los decaimientos de: i) la amplitud de fidelidad generalizada:  $1 - f_{\lambda, \Gamma}(t)$  (puntos),  $\sqrt{1 - f_{\lambda, \Gamma}(t)^2}$  (línea-punto); ii) la fidelidad cuántica:  $1 - F(\varrho, \sigma)$  (cruces),  $\sqrt{1 - F(\varrho, \sigma)^2}$  (equis); y la distancia traza:  $D(\varrho, \sigma)$  (línea sólida). Aquí utilizamos  $N_e = 40$ ,  $\lambda = 0,1$ ,  $n_{run} = 1000$  y  $\Gamma = 0,1$  para todos los casos.

lidad cuántica  $F(\varrho, \sigma)$  y la amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$ , además vemos que las cotas puestas por la sub y super fidelidad para este caso son iguales a la fidelidad cuántica  $F(\varrho, \sigma)$ .

Ahora aumentamos el valor de  $\lambda$  a  $\lambda = 0,1$  en la Fig 5.26 dejando  $\Gamma = 0$  con en el caso anterior, podemos ver como a pesar de tener un decaimiento de la fidelidad más rápido que en caso de  $\lambda = 0,02$  continuamos con una buena correspondencia entra ambas medidas de fidelidad, además de nuevo vemos como el valor de las cotas  $G(\varrho, \sigma)$  y  $E(\varrho, \sigma)$  es igual que el valor de la fidelidad cuántica  $F(\varrho, \sigma)$ .

Aumentando el valor del acoplamiento entre entornos a  $\Gamma = 0,01$  y tomamos el valor de  $\lambda = 0,02$ , vemos en la Fig 5.27 como tenemos la correspondencia para tiempos cortos entre  $F(\varrho, \sigma)$  y  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$ , además podemos ver como la  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$  también queda dentro de las cotas  $G(\varrho, \sigma)$  y  $E(\varrho, \sigma)$  para un tiempo mayor que la correspondencia entre la  $F(\varrho, \sigma)$  y  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$ .

Tomando en l mismo valores del acoplamiento entre entornos que en el caso anterior pero aumentamos el acoplamiento entre sistema cercano y entorno cercano  $\lambda = 0,1$ ,

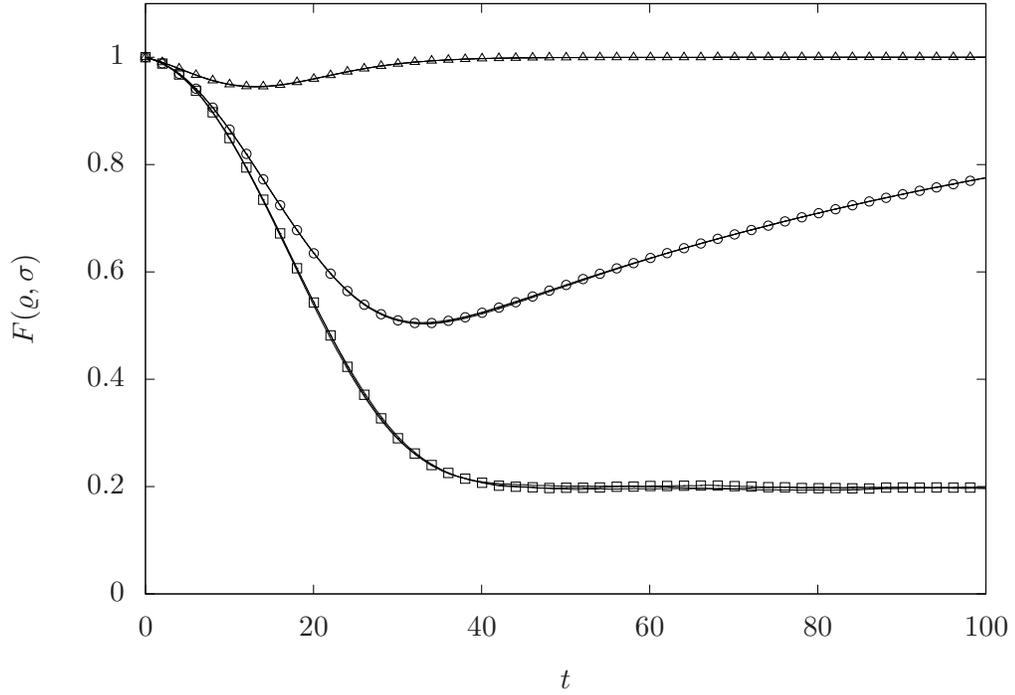


Figura 5.19: Fidelidad cuántica  $F(\varrho, \sigma)$  contra tiempo para diferentes valores del acoplamiento al entorno lejano  $\Gamma = 0,0$  (cuadros),  $0,01$  (círculos),  $0,1$  (triángulos). Aquí utilizamos  $N_e = 40$ ,  $\lambda = 0,02$  y  $n_{run} = 1000$  para todos los casos.

observamos en la Fig 5.28 que tenemos una correspondencia entre las medidas  $F(\varrho, \sigma)$  y la  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$  para tiempos cortos  $t < 20$ , además de manera similar para el mismo valor de  $t$  la  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$  se encuentra dentro de las cotas  $G(\varrho, \sigma)$  y  $E(\varrho, \sigma)$ .

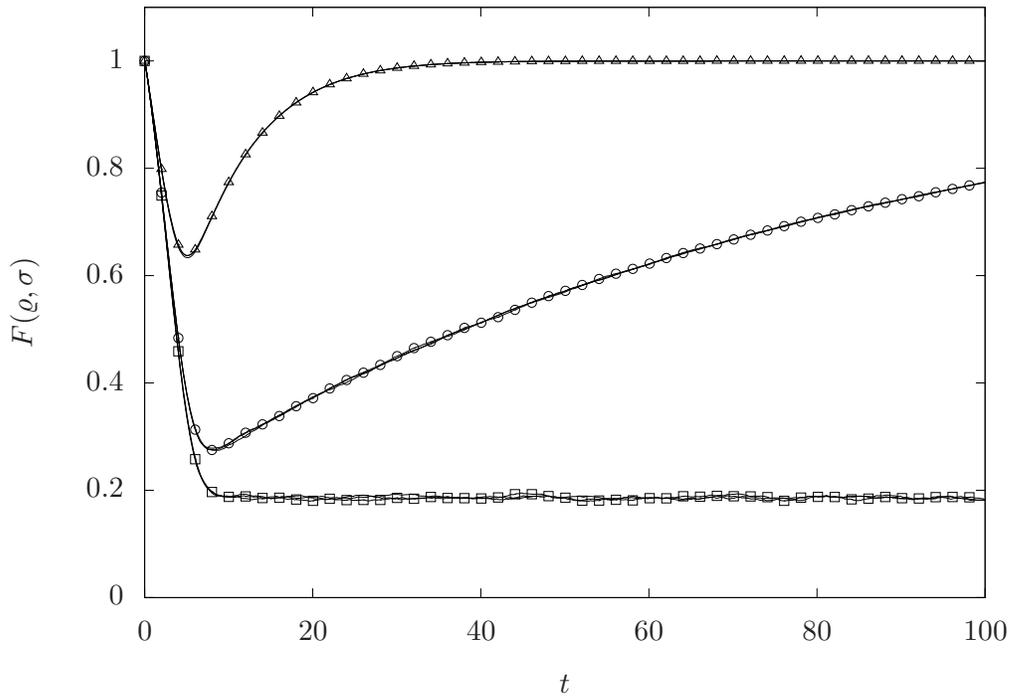


Figura 5.20: Fidelidad cuántica  $F(\rho, \sigma)$  contra tiempo para diferentes valores del acoplamiento al entorno lejano  $\Gamma = 0,0$  (cuadros),  $0,01$  (círculos),  $0,1$  (triángulos). Aquí utilizamos  $N_e = 40$ ,  $\lambda = 0,1$  y  $n_{run} = 1000$  para todos los casos.

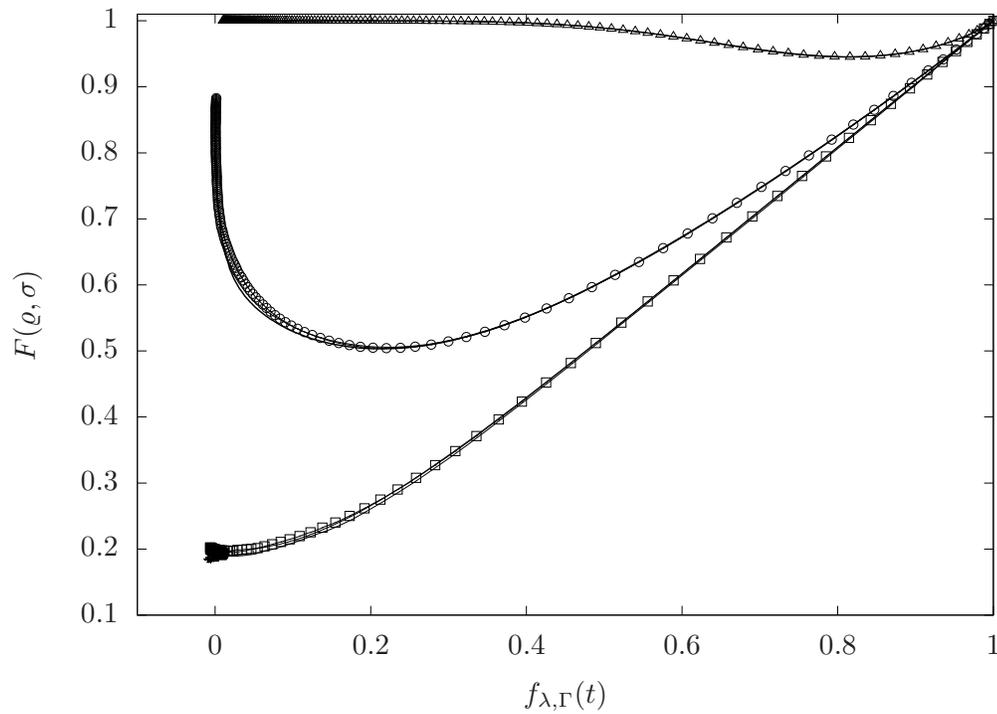


Figura 5.21: Fidelidad cuántica  $F(\rho, \sigma)$  contra amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$  para diferentes valores del acoplamiento al entorno lejano  $\Gamma = 0$  (cuadros),  $0,01$  (círculos),  $0,1$  (triángulos). Aquí utilizamos  $N_e = 40$ ,  $\lambda = 0,02$ ,  $n_{run} = 1000$  para todos los casos.

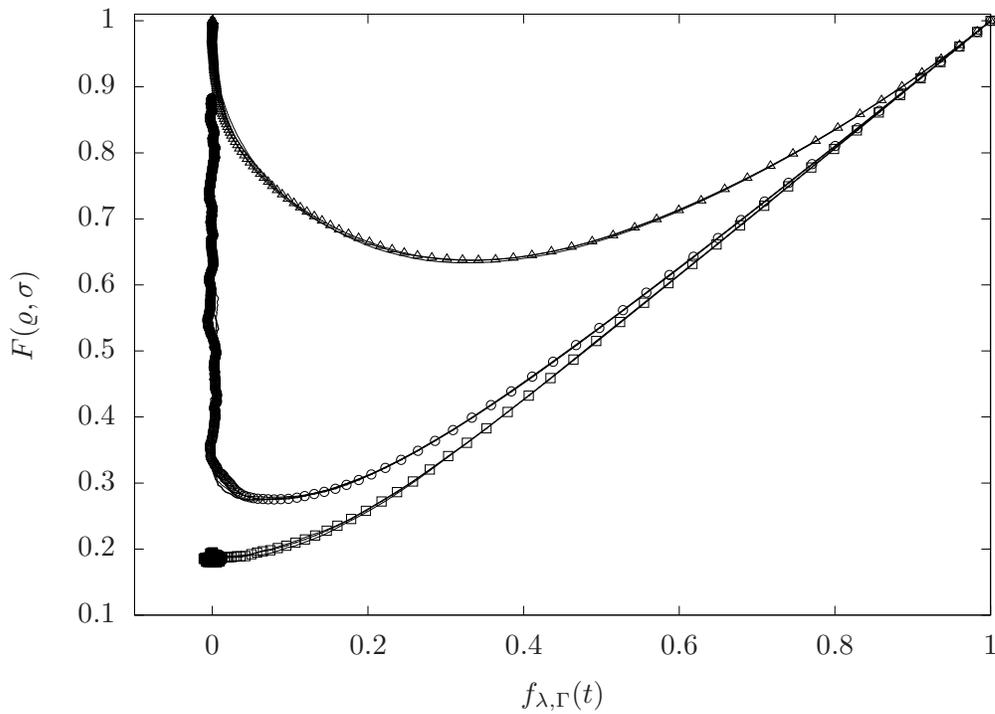


Figura 5.22: Fidelidad cuántica  $F(\varrho, \sigma)$  vs amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$  para diferentes valores del acoplamiento al entorno lejano  $\Gamma = 0$  (cuadros),  $0,01$  (círculos),  $0,1$  (triángulos). Aquí utilizamos  $N_e = 40$ ,  $\lambda = 0,1$ ,  $n_{run} = 1000$  para todos los casos.

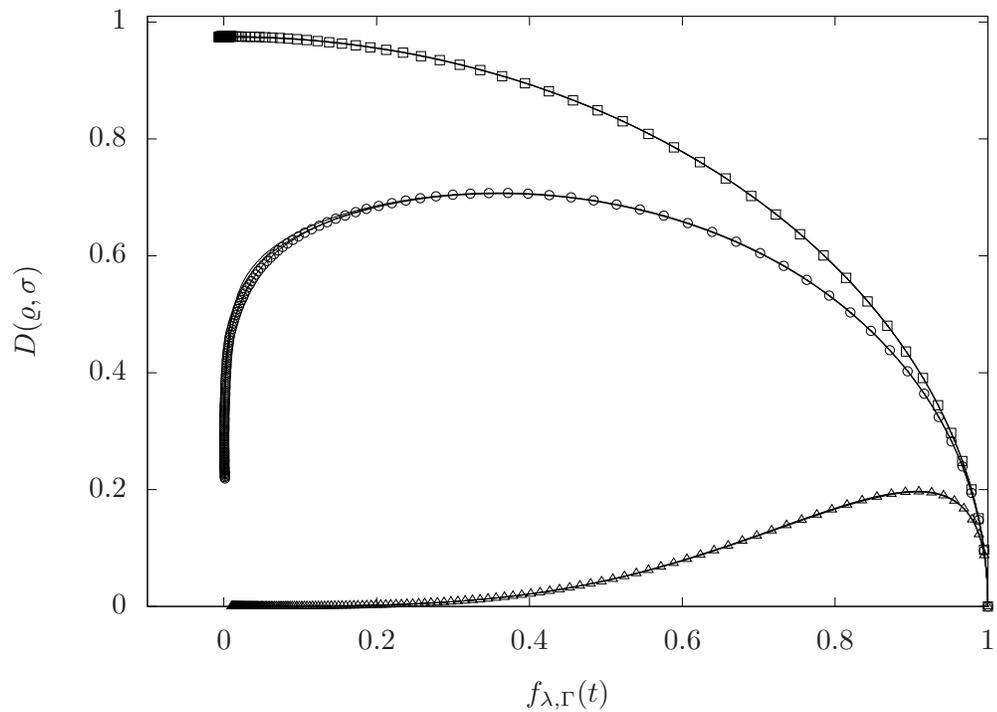


Figura 5.23: Distancia traza  $D(\varrho, \sigma)$  vs la amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$  para diferentes valores del acoplamiento con el entorno lejano  $\Gamma = 0$  (cuadros),  $0,01$  (círculos),  $0,1$  (triángulos). Aquí utilizamos  $N_e = 40$ ,  $\lambda = 0,02$ ,  $n_{run} = 1000$  para todos los casos.

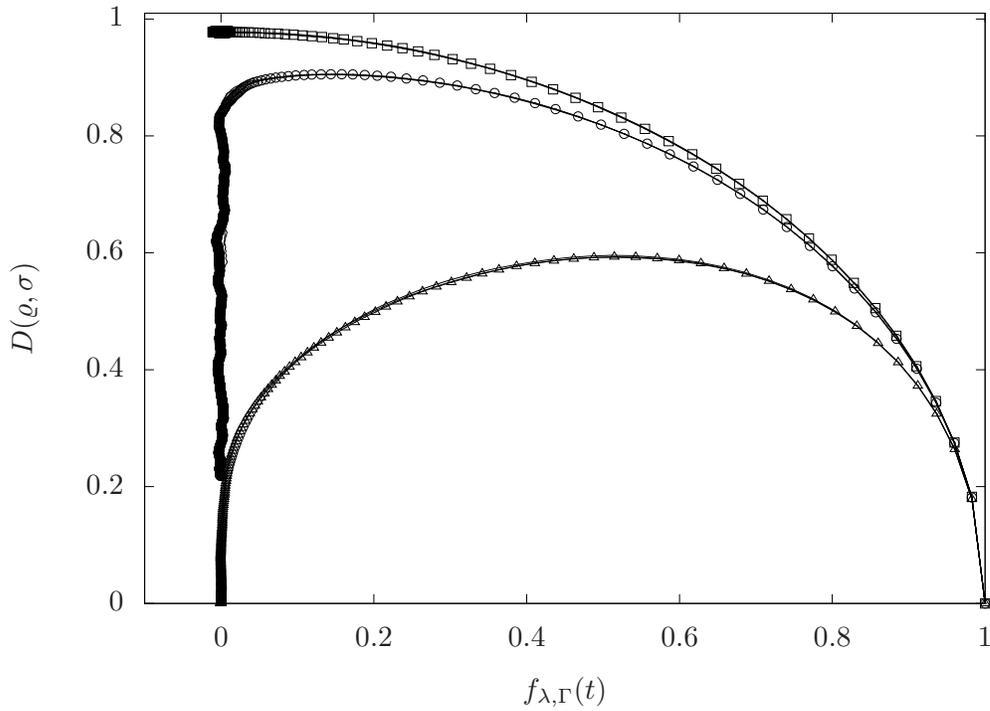


Figura 5.24: Distancia traza  $D(\varrho, \sigma)$  vs la amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$  para diferentes valores del acoplamiento con el entorno lejano  $\Gamma = 0$  (cuadros),  $0,01$  (círculos),  $0,1$  (triángulos). Aquí utilizamos  $N_e = 40$ ,  $\lambda = 0,1$ ,  $n_{run} = 1000$  para todos los casos.

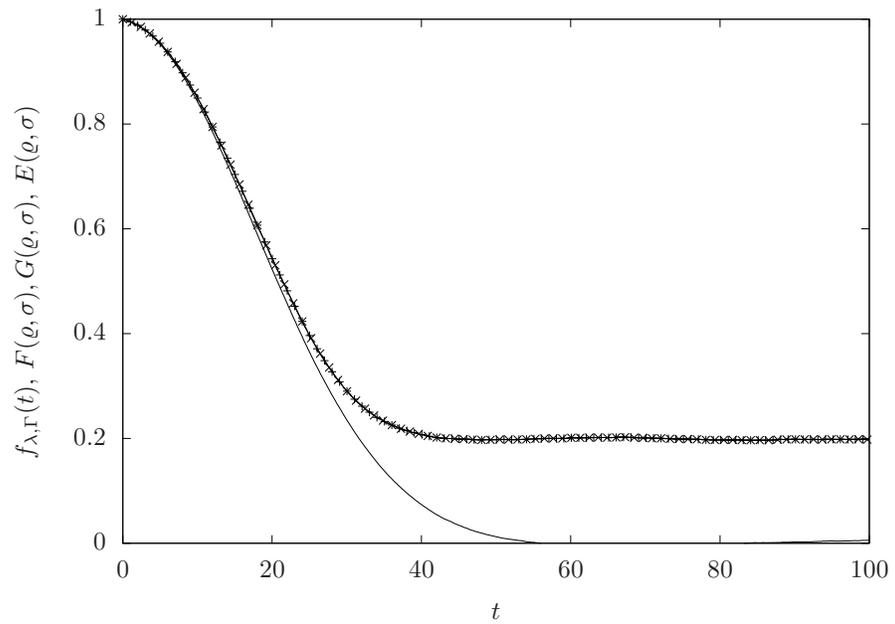


Figura 5.25: Comparación del decaimiento de las medidas: i) amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$  (sólida), ii) fidelidad cuántica  $F(\varrho, \sigma)$  (discontinua), iii) super fidelidad  $G(\varrho, \sigma)$  (sólida-cruz) y iv) sub fidelidad  $E(\varrho, \sigma)$  (sólida-equis). Con  $N_e = 40$ ,  $\lambda = 0,02$ ,  $\Gamma = 0$  y  $n_{run} = 1000$  para todos los casos.

## 5. Simulaciones

---

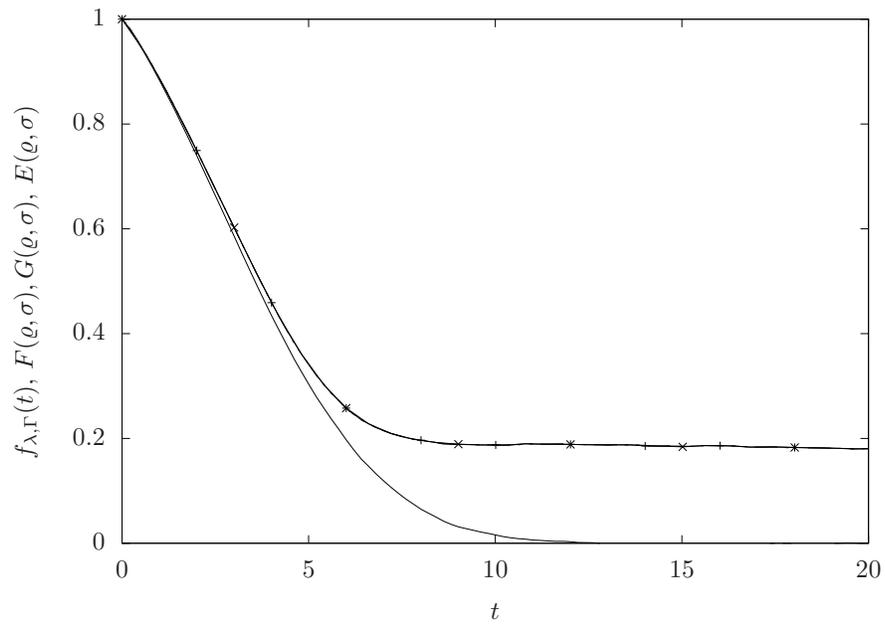


Figura 5.26: Comparación del decaimiento de las medidas: i) amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda,\Gamma}(t)$  (sólida), ii) fidelidad cuántica  $F(\varrho,\sigma)$  (discontinua), iii) super fidelidad  $G(\varrho,\sigma)$  (sólida-cruz) y iv) sub fidelidad  $E(\varrho,\sigma)$  (sólida-equis). Con  $N_e = 40$ ,  $\lambda = 0,1$ ,  $\Gamma = 0$  y  $n_{run} = 1000$  para todos los casos.

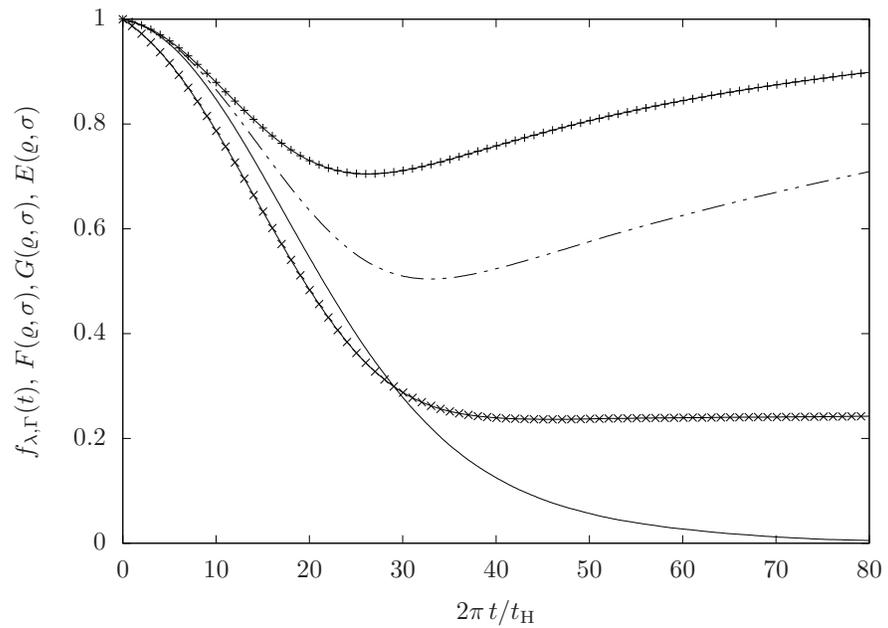


Figura 5.27: Comparación del decaimiento de las medidas: i) amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda,\Gamma}(t)$  (sólida), ii) fidelidad cuántica  $F(\rho, \sigma)$  (discontinua), iii) super fidelidad  $G(\rho, \sigma)$  (sólida-cruz) y iv) sub fidelidad  $E(\rho, \sigma)$  (sólida-equis). Con  $N_e = 40$ ,  $\lambda = 0,02$ ,  $\Gamma = 0,01$  y  $n_{run} = 1000$  para todos los casos.

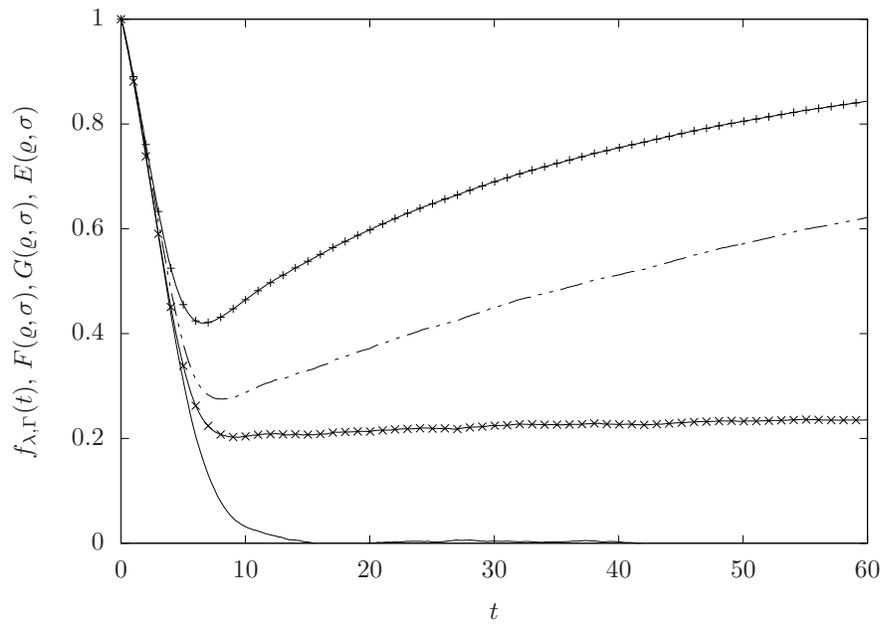


Figura 5.28: Comparación del decaimiento de las medidas: i) amplitud de fidelidad generalizada  $f_{\lambda, \Gamma}(t)$  (sólida), ii) fidelidad cuántica  $F(\rho, \sigma)$  (discontinua), iii) super fidelidad  $G(\rho, \sigma)$  (sólida-cruz) y iv) sub fidelidad  $E(\rho, \sigma)$  (sólida-equis). Con  $N_e = 40$ ,  $\lambda = 0,1$ ,  $\Gamma = 0,01$  y  $n_{run} = 1000$  para todos los casos.



---

## Capítulo 6

# Conclusiones

---

En este trabajo se ha introducido la amplitud de fidelidad generalizada para un sistema tripartita. La cual inicia tomando el concepto de la fidelidad cuántica para un sistema bipartita, utilizando el sistema sistema central como sonda para la dinámica de eco del entorno cercano. Después, abrimos el sistema añadiendo el entorno lejano y consideramos el decaimiento de la coherencia en el sistema central como sonda para la dinámica en el entorno cercano. Este decaimiento en el sistema tripartita es proporcional a la amplitud de fidelidad generalizada. Esta fidelidad generalizada fue estudiada para diferentes configuraciones para el sistema total, i.e. modelos diferentes para el entorno cercano, diferentes disipadores, y comparada con otras medidas que pueden ser asociadas con pérdida de información.

En la primera parte del Cap. 3 se obtuvo una ecuación maestra general utilizando el límite de acoplamiento débil. La cual es posible aplicarla ya sea a sistemas integrables o sistemas no integrables. Se derivó la ecuación utilizando un modelo RMT en el entorno cercano y un canal despolarizador con temperatura infinita en el entorno lejano<sup>1</sup>. Utilizando esta ecuación pudimos extender el estudio del decaimiento de las coherencias cambiando el entorno RMT por un oscilador armónico.

Después en el Cap. 4 derivó una ecuación integral para la amplitud de fidelidad generalizada que pudo ser resuelta utilizando tanto analíticamente por la transformada inversa de Laplace a través del método del residuo como numéricamente utilizando el método del trapecio. Esta solución nos permitió expandir el análisis de la amplitud de fidelidad generaliza a valores grandes del acoplamiento  $\Gamma$  entre entornos.

En el Cap. 5 mostramos las simulaciones para la amplitud de fidelidad generalizada para ambos modelos tripartitas. Primero utilizamos un modelo RMT como entorno cercano y dos disipadores diferentes: i) canal despolarizador con temperatura infinita; ii) canal despolarizador con temperatura finita. En ambos casos observamos como el

---

<sup>1</sup>Un estudio previo con un entorno RMT para el entorno cercano y un baño de osciladores descrito por el modelo de Caldeira-Leggett de un movimiento Browniano aleatorio puede verse en [5]

---

aumentar el acoplamiento entre entorno cercano y entorno lejano  $\Gamma$  protegemos la coherencia en el entorno cercano.

En la segunda parte mostramos el decaimiento de la amplitud de fidelidad generalizada cuando el entorno es modelado por un oscilador armónico desplazado y un canal despolarizador con temperatura infinita como entorno. Aquí observamos que el efecto de la mejora de la coherencia para el sistema central no se muestra para valores de  $\Gamma$  pequeños, sin embargo, al incrementar el valor de este acoplamiento vemos como recuperamos la mejora en el tiempo de decoherencia se recupera.

En la última parte del Cap. 5 comparamos la amplitud de fidelidad generalizada con diferentes medidas: i) la distancia traza; ii) la fidelidad de Jozsa; iii) la sup y sub fidelidad. Observamos como para un acoplamiento entre entornos  $\Gamma$  pequeño y tiempos cortos la amplitud de fidelidad generalizada tiene un comportamiento similar a la fidelidad de Jozsa. Observamos como al igual que la fidelidad de Jozsa la amplitud de fidelidad generalizada actúa como cotas para las distancia traza. También, pudimos observar que para un acoplamiento entre entorno débil y tiempos cortos la sup y sub fidelidad actúan como cotas para amplitud de fidelidad generalizada.

# Bibliografía

---

- [1] M. A. Nielsen e I. L. Chuang, *Quantum computation and quantum information*, Cambridge University Press, Cambridge, **2000**.
- [2] H.-P. Breuer y F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems*, Oxford University Press, **2002**.
- [3] T. Gorin, T. Prosen, T. H. Seligman y M. Žnidarič, *Phys. Rep.* **2006**, *435*, 33-156.
- [4] T. Gorin, T. Prosen, T. H. Seligman y W. T. Strunz, *Phys. Rev. A* **2004**, *70*, 042105:1-5.
- [5] H. J. Moreno, T. Gorin y T. H. Seligman, *Phys. Rev. A* **2015**, *92*, 030104.
- [6] V. Gorini, A. Kossakowski y E. C. G. Sudarshan, *Journal of Mathematical Physics* **1976**, *17*, 821-825.
- [7] G. Lindblad, *Commun. Math. Phys.* **1976**, *48*, 119.
- [8] Redfield AG, *IBM J. Res. Dev.* **1957**.
- [9] S. Barnett, *Quantum Information*, Oxford University Press, **2009**.
- [10] R. Jozsa, *J. Mod. Opt.* **1994**, *41*, 2315-2323.
- [11] T. Baumgratz, M. Cramer y M. B. Plenio, *Phys. Rev. Lett.* **2014**, *113*, 140401.
- [12] T. Gorin, H. J. Moreno y T. H. Seligman, *Phil. Trans. R. Soc. A* **2016**, *374*, DOI [10.1098/rsta.2015.0162](https://doi.org/10.1098/rsta.2015.0162).
- [13] A. Peres, *Physical Review A: Atomic Molecular and Optical Physics* **1984**, *30*, 1610-1615.
- [14] T. Gorin, T. Prosen y T. H. Seligman, *New J. Phys.* **2004**, *6*, 20:1-29.
- [15] J. A. Miszczak, Z. Puchała, P. Horodecki, A. Uhlmann y K. Życzkowski, *Quantum Information & Computation* **2009**, *9*, 103-0130.

- [16] T. Gorin, C. Pineda, H. Kohler y T. H. Seligman, *New J. Phys.* **2008**, *10*, 115016.
- [17] C. Pineda, T. Gorin y T. H. Seligman, *New J. Phys.* **2007**, *9*, 106.
- [18] P. Kaplan L, Leyvraz F y Seligman TH., *J. Phys. A: Math. Theo* **2007**, *40*, F1063-F1068.
- [19] H.-J. Stöckmann y R. Schäfer, *New J. Phys.* **2004**, *6*, 199:1-18.