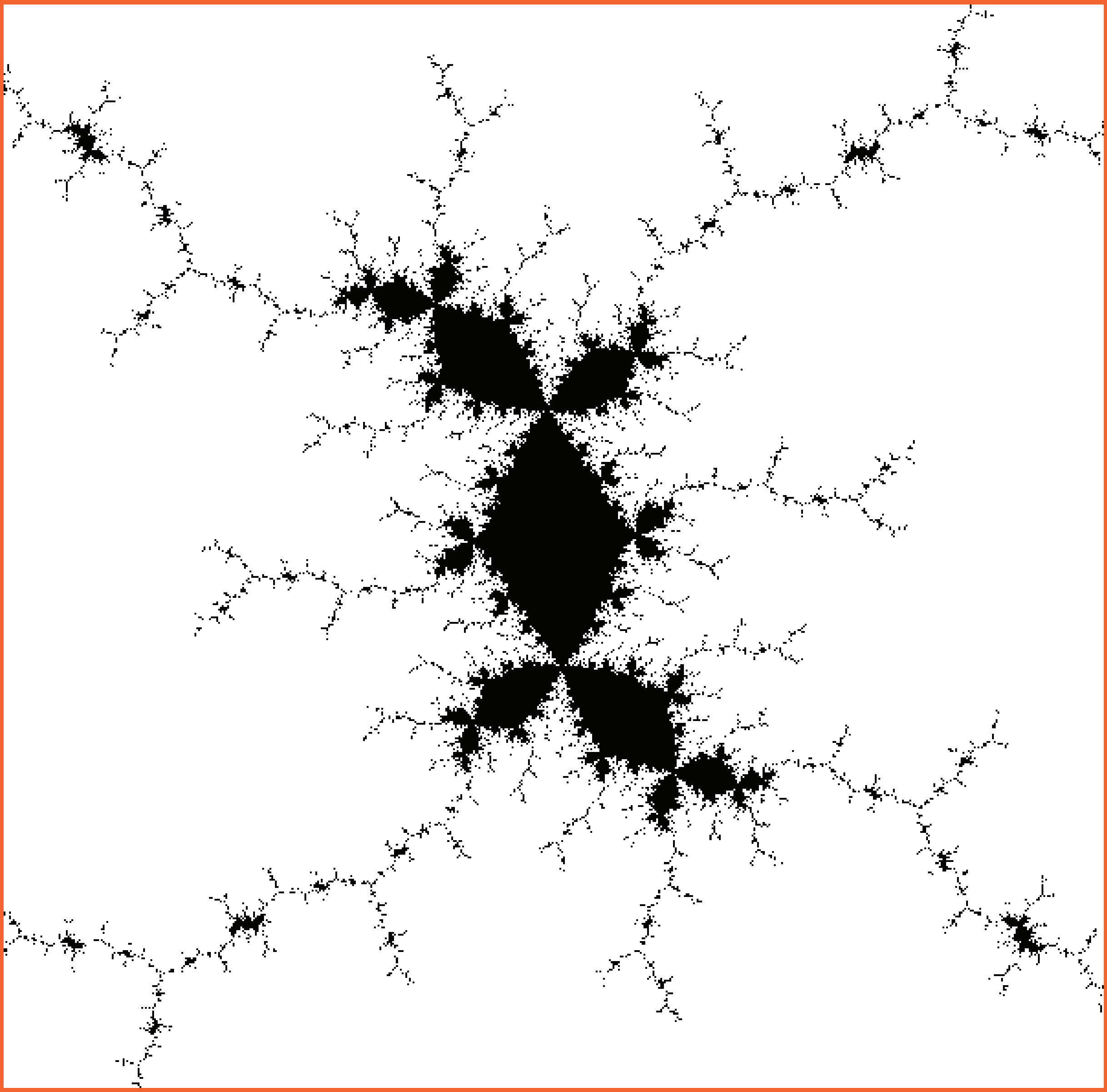
Una introducción a la variable compleja

Gabriela Hinojosa Palafox
María del Carmen Tapia Lorenzo
Rogelio Valdez Delgado



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS
Praxis / Ciencias 2

Una introducción
a la
variable compleja

Una introducción a la variable compleja

Gabriela Hinojosa Palafox
María del Carmen Tapia Lorenzo
Rogelio Valdez Delgado

Universidad Autónoma del Estado de Morelos

Facultad de Ciencias

Esta publicación fue financiada por el Programa Integral de Fortalecimiento Institucional (PIFI) reprogramación 2011.

Hinojosa Palafox, Gabriela

Una introducción a la variable compleja / Gabriela Hinojosa Palafox, María del Carmen Tapia Lorenzo, Rogelio Valdez Delgado . - - Cuernavaca, Mor. : Universidad Autónoma del Estado de Morelos, 2013.
123 p. : il. - - (Ciencias y praxis; 2)

ISBN 978-607-7771-94-4

1. Funciones de variable compleja I. Tapia Lorenzo, María del Carmen, coaut. II. Valdez Delgado, Rogelio, coaut. III tít. IV. ser.

LCC QA331.7 DC 515.9

Una introducción a la variable compleja
Gabriela Hinojosa Palafox
María del Carmen Tapia Lorenzo
Rogelio Valdez Delgado

Av. Universidad 1001
Chamilpa, CP 62209
Cuernavaca, Morelos
publicaciones@uaem.mx

Ilustración de portada:
Rogelio Valdez, *Douady Rabbit renormalizado*, técnica digital, 2004

ISBN: 978-607-7771-94-4 UAEM

Impreso en México

Una introducción a la variable compleja

Gabriela Hinojosa Palafox
María del Carmen Tapia Lorenzo
Rogelio Valdez Delgado

Gabriela Hinojosa Palafox
María del Carmen Tapia Lorenzo
Rogelio Valdez Delgado

Facultad de Ciencias,
Universidad Autónoma del Estado de Morelos.

Introducción

La variable compleja es un área de las matemáticas que tiene algo para todos los gustos. Además de tener aplicaciones a otras partes del análisis, se puede decir que es un ancestro de otras áreas de las matématicas, (por ejemplo, teoría de homotopía, geometría hiperbólica, dinámica holomorfa, etc.). De hecho, la variable compleja ha sido considerada como el área de introducción a las matemáticas.

Este libro incluye algunos temas introductorios de variable compleja, que se han enseñado en la Facultad de Ciencias de la UAEM en la última decada, usualmente durante el cuarto semestre de la Licenciatura en Ciencias, en las áreas terminales de Matemáticas y Física.

Dentro de la bibliografía para impartir el curso de variable compleja, se encuentra el libro de Análisis Básico de Variable Compleja, de J. E. Marsden y M. J. Hoffman, en su versión en español. En este libro, se pueden encontrar al final del mismo, las soluciones de los ejercicios con numeración impar, presentados a lo largo del libro. El resolver la mayor cantidad de problemas y ejercicios es parte importante del aprendizaje del área de variable compleja para el alumno, así que nos hemos propuesto en este libro presentar todas las soluciones a los ejercicios con número par que aparecen en los primeros tres capítulos del libro de Análisis Básico de Variable Compleja.

Las soluciones de los problemas aquí mostradas, están escritas con el estudiante en mente. La mayoría de las soluciones se presentan en detalle, y cuando no es el caso, se le indica al lector lo que falta y se le pide que termine el problema como un ejercicio. El grado de dificultad de los problemas es muy variado. Algunos problemas tienen la motivación de fijar las ideas de la sección correspondiente, en la mente del estudiante, y otros se utilizan para extender la teoría. Cabe señalar, que la mayor parte de las soluciones a los problemas aquí presentadas son originales, en el sentido de que fueron escritas por los autores, aunque las soluciones de algunos de los problemas siguen un camino estándar. Por ello mismo, el lector seguramente podrá encontrar soluciones más creativas y más cortas a varios de los problemas.

Nuestra motivación principal, es el hecho de que este libro sirva como un apoyo adicional para el curso de variable compleja y que el alumno tenga un material de primera mano que le sirva de apoyo para resolver problemas que se le presenten durante el curso.

Nuestra presentación sigue el orden del libro [6], durante los primeros tres capítulos, que corresponden a un curso estándar de variable compleja en una licenciatura en matemáticas. En cada sección, se presenta de manera breve, la teoría necesaria para resolver los problemas correspondientes a la sección.

En el capítulo 1, se presentan problemas que introducen las ideas básicas de los números complejos y de las funciones analíticas. Se introducen las funciones elementales de variable compleja como son los polinomios, la función exponencial, la función logaritmo y las funciones trigonométricas. Se da un breve repaso a los conceptos de límite y continuidad, así como a las definiciones topológicas básicas del plano complejo. Al final, se hace enfásis en el estudio de la analiticidad de las funciones elementales y de la importancia de las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

En el capítulo 2, se estudia uno de los teoremas más importantes del área, el teorema de Cauchy y algunas de sus consecuencias. Para ello, se hace una revisión del concepto de integral de contorno y sus propiedades. Se estudian varias consecuencias importantes del teorema de Cauchy, como son la fórmula integral de Cauchy y el teorema del módulo máximo, entre otras. También se hace mención de la importancia de las funciones armónicas.

En el capítulo 3, se hace un estudio del concepto de convergencia de sucesiones y de series de funciones analíticas, con la finalidad de estudiar las series de potencias y la representación de una función analítica en serie de Taylor. Al final, se estudia la representación en serie de una función que tiene singularidades en ciertos puntos, estas series son conocidas como series de Laurent.

La idea de hacer un libro como éste surgió de las distintas veces que se ha impartido la materia a lo largo de varios años, por lo que nos gustaría agradecer a los estudiantes que han tomado el curso de variable compleja durante este tiempo. También, deseamos expresar nuestro agradecimiento a la Facultad de Ciencias de la UAEM, por su apoyo a través del PIFI, para la elaboración de este material.

Contenido

Capítulo 1

Funciones Analíticas

1.1. Introducción a los números complejos

El objeto de estudio a lo largo de este libro son los números complejos, por lo que empezamos con la definición formal de ellos.

Definición 1.1.1 *El sistema de los números complejos, denotado por $\mathbb{C}$, es el conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ junto con las reglas usuales de la adición de vectores y la multiplicación escalar por un número real, es decir,*

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$
$$a(x,y)=(ax,ay)$$

y con la operación de multiplicación compleja, definida como

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+y_1x_2).$$

Es posible mostrar sin mucha dificultad, que con estas operaciones, el conjunto $\mathbb{C}$ satisface todas las propiedades para ser un campo algebraico.
Al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, lo podemos ver como un subconjunto de los números complejos, bajo la identificación $x \mapsto (x,0)$. Si se define $i=(0,1)$, entonces se tiene que $i^2=-1$, por lo que cualquier número complejo (x,y) puede ser escrito de la siguiente forma

$$(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(0,1)\cdot(y,0)=x+iy.$$

Entonces, si escribimos $z = x + iy$, la **parte real** del número complejo z, la cual se denota como $\operatorname{Re} z$, es el número x y la **parte imaginaria** de z, la cual se denota como $\operatorname{Im} z$, es el número y.

Una de las primeras ventajas de usar números complejos, es que se pueden calcular raíces cuadradas de números reales negativos, de hecho es posible calcular estas raíces para cualquier número complejo.

Proposición 1.1.2 *Sea $z \in \mathbb{C}$, entonces existe un $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^2 = z$.*

De hecho, si $z = a + ib$ entonces $w = \pm(\alpha + i\mu\beta)$, donde $\mu = 1$ si $b \geq 0$, $\mu = -1$ si $b < 0$, y

$$\alpha = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \quad \text{y} \quad \beta = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}. \tag{1.1}$$

A continuación, presentamos ejercicios y problemas relacionados con las operaciones aritméticas elementales de los números complejos, donde se incluyen problemas de raíces cuadradas complejas, así como una caracterización de la multiplicación compleja por medio de una transformación lineal.

1. Exprese los siguientes números complejos en la forma $a + ib$.

   a) $(2 + 3i)(4 + i)$.

   b) $(8 + 6i)^2$.

   c) $\left(1 + \frac{3}{1+i}\right)^2$.

   Solución.

   a) $(2 + 3i)(4 + i) = (2 \cdot 4 - 3 \cdot 1) + (3 \cdot 4 + 2 \cdot 1)i = 5 + 14i$.

   b) $(8 + 6i)^2 = (8 \cdot 8 - 6 \cdot 6) + (2 \cdot 8 \cdot 6)i = (64 - 36) + 96i = 28 + 96i$.

   c) $\left(1 + \frac{3}{1+i}\right)^2 = \left(\frac{4+i}{1+i}\right)^2 = \frac{15+8i}{2i} = 4 - \frac{15}{2}i$.

2. Encuentre las soluciones de las ecuaciones:

   a) $(z + 1)^2 = 3 + 4i$.

   b) $z^4 - i = 0$.

Solución.

a) Sea $w = z+1$, entonces se debe resolver la ecuación $w^2 = 3+4i$. Sustituyendo en la fórmula (1.1), se obtiene que si $a = 3$ y $b = 4$,

$$\alpha = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3^2+4^2}}{2}} = 2 \quad \text{y} \quad \beta = \sqrt{\frac{-3+\sqrt{3^2+4^2}}{2}} = 1,$$

por lo que $w = z+1 = \pm(2+i)$, de donde $z = \pm(2+i)-1$. Por lo tanto, $z_1 = 1+i$ y $z_2 = -3-i$ son las soluciones buscadas.

b) Sea $w^2 = z^4 = i$. Sustituyendo en la fórmula (1.1), $a = 0$ y $b = 1$, se obtiene que $\alpha = \sqrt{\frac{0+\sqrt{0^2+1^2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\beta = \sqrt{\frac{-0+\sqrt{0^2+1^2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, de donde

$$w = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i).$$

Considere la ecuación $z^2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$. Otra vez sustituya en la fórmula (1.1), ahora con $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, con lo cual se tienen las soluciones

$$z = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\right).$$

Del otro valor para w se obtienen dos soluciones más,

$$z = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} - i\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\right).$$

3. Encuentre las partes real e imaginaria de los siguientes números complejos, donde $z = x+iy$:

   a) $\dfrac{z+1}{2z-5}$.

   b) z^3.

Solución.

a) Sea $z = x + iy$, entonces se puede escribir

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{2z-5} &= \frac{(x+iy)+1}{2(x+iy)-5} = \frac{(x+1)+iy}{(2x-5)+2iy} \\ &= \frac{(x+1)+iy}{(2x-5)+2iy} \cdot \frac{(2x-5)-2iy}{(2x-5)-2iy} \\ &= \frac{(x+1)(2x-5)+2y^2}{(2x-5)^2+4y^2} \\ &\quad +i\frac{(2x-5)y-2y(x+1)}{(2x-5)^2+4y^2}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\text{Re}\left(\frac{z+1}{2z-5}\right) = \frac{2y^2+2x^2-3x-5}{4y^2+4x^2-20x+25},$$
$$\text{Im}\left(\frac{z+1}{2z-5}\right) = \frac{(2x-5)y-2y(x+1)}{(2x-5)^2+4y^2}.$$

b) Como $z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3$, entonces

$$\text{Re}\left(z^3\right) = x^3 - 3xy^2 \text{ e } \text{Im}\left(z^3\right) = 3x^2y - y^3.$$

4. ¿Es cierto que $\text{Re}(z \cdot w) = \text{Re}(z)\text{Re}(w)$?

   Solución. Sea $z = w = i$. Entonces $z \cdot w = i^2 = -1$ de donde $\text{Re}(z \cdot w) = -1$ y $\text{Re}(z)\text{Re}(w) = 0$, por lo que la igualdad no es necesariamente cierta.

5. Si a es un número real y z es un número complejo, demuestre que $\text{Re}(az) = a\,\text{Re}(z)$ y que $\text{Im}(az) = a, \text{Im}(z)$. En general, muestre que $\text{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ es una transformación lineal real, es decir, que $\text{Re}(az + bw) = a\,\text{Re}(z) + b\,\text{Re}(w)$ para a, $b \in \mathbb{R}$ y z, $w \in \mathbb{C}$.

   Solución. Sea $z = x + iy$, entonces $az = ax + aiy$ por lo que $\text{Re}(az) = ax$, por otro lado $a\,\text{Re}(z) = ax$. Por lo tanto, $\text{Re}(az) = a\,\text{Re}(z)$.
   Ahora, se tiene que mostrar que $\text{Re}(z + w) = \text{Re}(z) + \text{Re}(w)$; sean $z = x + iy$ y $w = c + id$, entonces $z + w = (x + c) + i(y + d)$, por lo tanto $\text{Re}(z + w) = x + c = \text{Re}(z) + \text{Re}(w)$. Por lo anterior, se puede concluir que
   $$\text{Re}(az + bw) = a\,\text{Re}(z) + b\,\text{Re}(w).$$

6. Demuestre que $\text{Re}(zi) = -\text{Im}(z)$ y que $\text{Im}(zi) = \text{Re}(z)$ para cualquier número complejo z.

   Solución. Sea $z = x + iy$, entonces $\text{Re}(zi) = \text{Re}(xi - y) = -y = -\text{Im}(z)$ y para el otro caso, $\text{Im}(zi) = \text{Im}(xi - y) = x = \text{Re}(z)$.

7. *a*) Dado un número complejo $z = x+iy$ fijo, considere la transformación lineal $\Phi_z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (es decir, de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$) definida por $\Phi_z(w) = z \cdot w$ (es decir, la multiplicación por z). Muestre que la matriz de Φ_z en la base canónica $(1, 0)$, $(0, 1)$ de $\mathbb{R}^2$, está dada por

   $$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

   b) Demuestre que $\Phi_{z_1 \cdot z_2} = \Phi_{z_1} \circ \Phi_{z_2}$.

   Solución.

   a) Sea $z = x + iy$, de la definición de Φ_z se tiene que

   $$\begin{aligned} \Phi_z(1, 0) &= z \cdot (1, 0) = (x, y)(1, 0) \\ &= (x + iy)(1 + i0) = x + iy = (x, y), \end{aligned}$$

   de donde $\Phi_z(1, 0) = x(1, 0) + y(0, 1)$. Por otro lado

   $$\begin{aligned} \Phi_z(0, 1) &= z \cdot (0, 1) = (x, y)(0, 1) \\ &= (x + iy)(0 + i1) = -y + ix = (-y, x), \end{aligned}$$

   luego $\Phi_z(0, 1) = -y(1, 0) + x(0, 1)$. Por lo tanto la matriz de Φ_z es

   $$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

   b) Sean $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ y $w = a + ib$, entonces $z_1 z_2 =$

$x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2)$. Luego

$$\begin{aligned}
\Phi_{z_1\cdot z_2}(w) &= \Phi_{(x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+y_1x_2))}(w) \\
&= ((x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2))\,(a+ib) \\
&= [(x_1x_2 - y_1y_2)a - (x_1y_2 + y_1x_2)b] \\
&\quad +i\,[(x_1x_2 - y_1y_2)b + (x_1y_2 + y_1x_2)a] \\
&= (x_1x_2a - y_1y_2a - x_1y_2b - y_1x_2b) \\
&\quad +i\,(x_1x_2b - y_1y_2b + x_1y_2a + y_1x_2a) \\
&= [x_1(x_2a - y_2b) - y_1(x_2b + y_2a)] \\
&\quad +i\,[x_1(x_2b + y_2a) + y_1(x_2a - y_2b)] \\
&= (x_1 + iy_1)\,[(x_2a - y_2b) + i(x_2b + y_2a)] \\
&= z_1\,[(x_2 + iy_2)(a+ib)] = z_1\,(z_2\cdot w) \\
&= z_1\,(\Psi_{z_2}(w)) = \Psi_{z_1}\circ\Psi_{z_2}(w).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Phi_{z_1\cdot z_2} = \Phi_{z_1}\circ\Phi_{z_2}$.

8. Use únicamente los axiomas de campo, para dar una demostración formal de las siguientes igualdades:

   a) $\frac{1}{z_1z_2} = \frac{1}{z_1}\cdot\frac{1}{z_2}$.

   b) $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{z_1+z_2}{z_1z_2}$.

   Solución.

   a) Se tiene que $(z_1z_2)(z_1z_2)^{-1} = 1$, multiplicando por z_1^{-1} en ambos lados se obtiene $z_1^{-1}[(z_1z_2)(z_1z_2)^{-1}] = z_1^{-1}(1)$; asociando términos se tiene que $(z_1^{-1}z_1)z_2(z_1z_2)^{-1} = z_1^{-1}$.

   Aplicando el inverso y el neutro multiplicativo, $(1)z_2(z_1z_2)^{-1} = z_1^{-1}$, y multiplicando por z_2^{-1} en ambos lados, $z_2^{-1}z_2(z_1z_2)^{-1} = z_2^{-1}z_1^{-1}$.

   Usando el inverso y el neutro multiplicativo, se tiene que $(1)(z_1z_2)^{-1} = z_2^{-1}z_1^{-1}$; por la conmutatividad en el lado derecho, $(z_1z_2)^{-1} = z_1^{-1}z_2^{-1}$, por lo tanto,

$$\frac{1}{z_1z_2} = \frac{1}{z_1}\cdot\frac{1}{z_2}.$$

b) Inicie con la igualdad $z_1 + z_2 = z_1 + z_2$, multiplicando por $1 = \frac{z_1 z_2}{z_1 z_2}$ de lado derecho, se tiene que $z_1 + z_2 = (z_1 + z_2)\left(\frac{z_1 z_2}{z_1 z_2}\right)$; multiplicando por z_2^{-1} de lado derecho se tiene que, $(z_1 + z_2)z_2^{-1} = (z_1 + z_2)\left(\frac{z_1 z_2}{z_1 z_2}\right) z_2^{-1}$.

Distribuyendo en el lado izquierdo y asociando en el lado derecho, $z_1 z_2^{-1} + z_2 z_2^{-1} = (z_1 + z_2)\left(\frac{z_1}{z_1 z_2}\right) z_2 z_2^{-1}$.

Tomando el inverso multiplicativo, $z_1 z_2^{-1} + 1 = (z_1 + z_2)\left(\frac{z_1}{z_1 z_2}\right)(1)$, y por la conmutatividad en el lado derecho,

$$z_1 z_2^{-1} + 1 = z_1 (z_1 + z_2)\left(\frac{1}{z_1 z_2}\right).$$

Multiplicando por z_1^{-1} de ambos lados, se tiene que

$$z_1^{-1}(z_1 z_2^{-1} + 1) = z_1^{-1} z_1 (z_1 + z_2)\left(\frac{1}{z_1 z_2}\right),$$

y distribuyendo en el lado izquierdo,

$$z_1^{-1} z_1 z_2^{-1} + z_1^{-1}(1) = (z_1^{-1} z_1)(z_1 + z_2)\left(\frac{1}{z_1 z_2}\right).$$

Nuevamente usando el inverso multiplicativo

$$(1)z_2^{-1} + z_1^{-1}(1) = (1)(z_1 + z_2)\left(\frac{1}{z_1 z_2}\right),$$

para obtener

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2}.$$

9. Sea $\frac{x - iy}{x + iy} = a + ib$, muestre que $a^2 + b^2 = 1$.

Solución. Observe que

$$\begin{aligned} \frac{x - iy}{x + iy} &= \frac{x - iy}{x + iy} \cdot \frac{x - iy}{x - iy} \\ &= \frac{x^2 - y^2 - 2ixy}{x^2 + y^2} \\ &= a + ib, \end{aligned}$$

por lo que $a = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ y $b = \frac{-2xy}{x^2+y^2}$. Por lo tanto,

$$a^2 + b^2 = \frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4} = 1.$$

10. Demuestre el teorema del binomio para números complejos, esto es, si z, w son números complejos y n es un entero positivo, se cumple que

$$(z+w)^n = z^n + \binom{n}{1} z^{n-1}w + \binom{n}{2} z^{n-2}w^2 + \cdots + \binom{n}{n} w^n,$$

donde $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

Solución. Proceda por inducción sobre n. Para $n = 1$, se cumple

$$(z+w)^1 = z^1 + \binom{1}{1} z^{1-1}w = z + w.$$

Supongase que el resultado es cierto para $n-1$, es decir

$$(z+w)^{n-1} = z^{n-1} + \binom{n-1}{1} z^{n-2}w + \cdots + \binom{n-1}{n-1} w^{n-1}.$$

Para demostrar el resultado para n, multiplique por $z+w$ en ambos lados de la igualdad

$$\begin{aligned}
(z+w)^n &= \left[z^{n-1} + \binom{n-1}{1} z^{n-2}w + \cdots + \binom{n-1}{n-1} w^{n-1} \right](z+w) \\
&= z^{n-1}z + \binom{n-1}{1} z^{n-2}wz + \cdots + \binom{n-1}{n-1} w^{n-1}z \\
&\quad + z^{n-1}w + \binom{n-1}{1} z^{n-2}ww + \cdots + \binom{n-1}{n-1} w^{n-1}w \\
&= z^n + \binom{n-1}{1} z^{n-1}w + \cdots + \binom{n-1}{n-1} zw^{n-1} \\
&\quad + z^{n-1}w + \binom{n-1}{1} z^{n-2}w^2 + \cdots + \binom{n-1}{n-1} w^n \\
&= z^n + \left(\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0} \right) z^{n-1}w + \\
&\quad \cdots + \left(\binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1}{n-2} \right) zw^{n-1} + w^n.
\end{aligned}$$

Usando el hecho de que $\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}$, se puede concluir que,

$$(z+w)^n = z^n + \binom{n}{1} z^{n-1}w + \binom{n}{2} z^{n-2}w^2 + \cdots + \binom{n}{n} w^n.$$

11. Muestre que para cualquier entero positivo k, se tiene que

$$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i.$$

Muestre cómo este resultado proporciona una fórmula para i^n, para todo entero positivo n, si escribimos $n = 4k + j$, $0 \leq j \leq 3$.

Solución. Primero, $i^{4k} = (i^2)^{2k} = (-1)^{2k} = 1^k = 1$, a continuación $i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i = 1 \cdot i = i$; en el siguiente caso, $i^{4k+2} = i^{4k} \cdot i^2 = 1 \cdot -1 = -1$, y finalmente $i^{4k+3} = i^{4k} \cdot i^3 = 1 \cdot -i = -i$. En general, se tiene que $i^n = i^{4k+j} = i^{4k} \cdot i^j = 1 \cdot i^j = i^j$, para $j \in \{0, 1, 2, 3\}$.

12. Simplifique las siguientes expresiones:

a) $(1-i)^{-1}$.

b) $\dfrac{1+i}{1-i}$.

c) $\sqrt{1+\sqrt{i}}$.

d) $\sqrt{1+i}$.

e) $\sqrt{\sqrt{-i}}$.

Solución.

a) $(1-i)^{-1} = \frac{1}{1-i} = \left(\frac{1}{1-i}\right)\left(\frac{1+i}{1+i}\right) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$.

b) $\frac{1+i}{1-i} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)\left(\frac{1+i}{1+i}\right) = \frac{2i}{2} = i$.

c) Sea $z = \sqrt{1+\sqrt{i}}$, de donde $z^2 = 1 + \sqrt{i}$, es decir, $z^2 - 1 = \sqrt{i}$ por lo que $(z^2-1)^2 = i$. Si se hace $\mu = z^2$, se tiene que $(\mu - 1)^2 = i$, y si $\nu = \mu - 1$, se tiene la ecuación $\nu^2 = i$, la cual tiene soluciones $\nu_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\nu_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Por lo que, $\mu_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\mu_2 = \frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$ son soluciones de la ecuación $\nu = \mu - 1$.

Si $z^2 = \mu_1$, entonces

$$z = \pm\left(\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}{2^{\frac{3}{4}}} + i\frac{\sqrt{-1-\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}{2^{\frac{3}{4}}}\right).$$

Ahora, si $z^2 = \mu_2$ entonces

$$z = \pm\left(\frac{\sqrt{-1+\sqrt{2}+\sqrt{4-2\sqrt{2}}}}{2^{\frac{3}{4}}} - i\frac{\sqrt{1-\sqrt{2}+\sqrt{4-2\sqrt{2}}}}{2^{\frac{3}{4}}}\right).$$

d) Sea $z = \sqrt{1+i}$, $z^2 = 1+i$, luego $a = 1$, $b = 1$ en la fórmula (1.1), entonces

$$z = \pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}\right).$$

e) Sea $z = \sqrt{\sqrt{-i}}$, elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad, se obtiene $z^2 = \sqrt{-i}$ por lo que $z^4 = -i$; después haciendo $\mu = z^2$, $\mu^2 = -i$ y tomando $a = 0$, $b = -1$ en la fórmula (1.1), se concluye que $\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\mu_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Recordando que $\mu = z^2$, si $z^2 = \mu_1$ se tiene que

$$z = \pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} - i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}\right).$$

Ahora, si $z^2 = \mu_2$ entonces

$$z = \pm\left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}\right).$$

13. Demuestre que las siguientes reglas determinan en forma única la multiplicación compleja en $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

a) $(z_1 + z_2)w = z_1w + z_2w$

b) $z_1z_2 = z_2z_1$

c) $i \cdot i = -1$

d) $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$

e) Si z_1 y z_2 son reales, $z_1 \cdot z_2$ es el producto usual de números reales.

Solución. Sea $z_1 = a \in \mathbb{R}$, $z_2 = ib \in \mathbb{C}$ y $w = x + iy \in \mathbb{C}$, entonces $(a+ib)(x+iy)$ es igual a

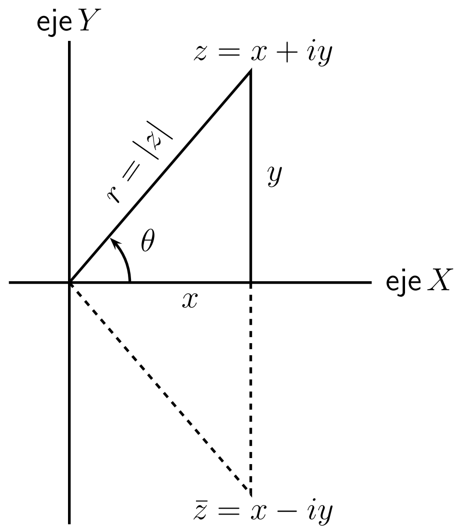
$$\begin{aligned}
& a(x+iy) + ib(x+iy) && \text{aplicando a)} \\
= \ & (x+iy)a + (x+iy)ib && \text{aplicando b)} \\
= \ & xa + (iy)a + x(ib) + (iy)(ib) && \text{aplicando a)} \\
= \ & ax + a(iy) + x(ib) + (ib)iy && \text{aplicando b)} \\
= \ & ax + i(ay) + i(xb) + i((ib)y) && \text{aplicando d)} \\
= \ & ax + i(ay) + i(bx) + i(y(ib)) && \text{aplicando b)} \\
= \ & ax + i(ay) + i(bx) + i(i(yb)) && \text{aplicando b)} \\
= \ & ax + i(ay) + i(bx) + i(i(by)) && \text{aplicando b)} \\
= \ & ax + i(ay) + i(bx) + (ii)(by) && \text{aplicando d)} \\
= \ & ax + i(ay) + i(bx) + (-1)(by) && \text{aplicando c)} \\
= \ & ax - (by) + i(ay) + i(bx) && \\
= \ & (ax - by) + i(ay + bx) && \text{aplicando a)}
\end{aligned}$$

en donde varias veces se uso la regla e). Por lo tanto, las reglas anteriores determinan de manera única la multiplicación compleja.

1.2. Propiedades de los números complejos

Para trabajar con los números complejos, necesitamos los siguientes tres conceptos: el **conjugado complejo** de $z = x + iy$, denotado por $\bar{z}$, es el número complejo $x - iy$; el **módulo** o la **norma** de z, denotado por $|z|$, es el número real $\sqrt{x^2 + y^2}$, el cual mide la distancia del origen al punto (x, y) que representa a z. Finalmente, el **argumento** de z es el ángulo formado entre el eje real positivo y la recta que une 0 con z, medido en el sentido contrario a las manecillas del reloj. El argumento de z se denota por $\arg z$ y generalmente se le asigna un valor entre 0 y 2π.

Una relación importante entre la norma de un complejo z y su conjugado es el hecho de que $z\bar{z} = |z|^2$. Para ver esto note que si $z = x + iy$ entonces $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$.



Existe otra manera de escribir un número complejo z, la cual se conoce como la **forma polar** del complejo z. Llamemos r a la norma de z, $r = |z|$, y $\theta = \arg z$, entonces $z = r(\cos\theta + i\text{sen}\,\theta)$.
La multiplicación compleja, usando la representación en coordenadas polares, nos conduce a una fórmula que nos permite encontrar las raíces n-ésimas de cualquier complejo.
Si $z = r(\cos\theta + i\text{sen}\,\theta)$, entonces se tiene la **fórmula de De Moivre**, donde para cualquier entero n,

$$(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta.$$

Sea w un número complejo, usando la fórmula de De Moivre podemos resolver la ecuación $z^n = w$. Supongamos que $w = r(\cos\theta + i\text{sen}\,\theta)$, entonces se tiene que las soluciones de la ecuación estan dadas por

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\ \text{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right). \tag{1.2}$$

Cada uno de los valores de $k = 0, 1, \ldots, n-1$ da un valor diferente de z.

A continuación, presentamos problemas acerca de las propiedades de los números complejos, como la norma, la conjugación y el argumento. También se presentan problemas relacionados con las raíces n-ésimas y con funciones trigonométricas.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $z^6 + 8 = 0$.

b) $z^3 - 4 = 0$.

Solución.

a) Para $z^6 = -8$, se tiene que $n = 6$, $r = 8$ y $\theta = \pi$ en la fórmula (1.2), es decir,

$$z_k = \sqrt[6]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{6}\right) + i\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{6}\right)\right)$$

para $k = 0, 1, \ldots, 5$. Entonces

$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{6})\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2})\right) = i\sqrt{2}$

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{5\pi}{6})\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{7\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{7\pi}{6})\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_4 = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{3\pi}{2})\right) = -i\sqrt{2}$

$z_5 = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{11\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{11\pi}{6})\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Para $z^3 = 4$, se tiene que $n = 3$, $r = 4$, $\theta = 0$, entonces

$z_0 = \sqrt[3]{4}(\cos(0) + i\,\mathrm{sen}(0)) = \sqrt[3]{4}$

$z_1 = \sqrt[3]{4}\left(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{3})\right) = \sqrt[3]{4}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$

$z_2 = \sqrt[3]{4}\left(\cos(\frac{4\pi}{3}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{4\pi}{3})\right) = \sqrt[3]{4}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} - i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$.

2. ¿Cuál es el conjugado complejo de $\dfrac{(8-2i)^{10}}{(4+6i)^5}$?

Solución. Sea $z = \frac{(8-2i)^{10}}{(4+6i)^5}$, entonces

$$\overline{z} = \overline{\left(\frac{(8-2i)^{10}}{(4+6i)^5}\right)} = \frac{\overline{(8-2i)^{10}}}{\overline{(4+6i)^5}} = \frac{(8+2i)^{10}}{(4-6i)^5}.$$

3. Exprese $\cos 6x$ y $\mathrm{sen}\, 6x$ en términos de $\cos x$ y $\mathrm{sen}\, x$.

Solución. Utilizando la fórmula de De Moivre para $r = 1$ y $n = 6$ se obtiene la identidad
$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^6 = \cos 6x + i \operatorname{sen} 6x.$$

Cuando se expande el lado izquierdo, utilizando el teorema del binomio, se obtiene que

$$\cos^6 x + 6i \cos^5 x \operatorname{sen} x - 15 \cos^4 x \operatorname{sen}^2 x - 20i \cos^3 x \operatorname{sen}^3 x$$

$$+15 \cos^2 x \operatorname{sen}^4 x + 6i \cos x \operatorname{sen}^5 x - \operatorname{sen}^6 x.$$

Al igualar las partes reales e imaginarias se llega a que

$$\cos 6x = \cos^6 x - 15 \cos^4 x \operatorname{sen}^2 x + 15 \cos^2 x \operatorname{sen}^4 x - \operatorname{sen}^6 x$$

$$\operatorname{sen} 6x = 6 \cos^5 x \operatorname{sen} x - 20 \cos^3 x \operatorname{sen}^3 x + 6 \cos x \operatorname{sen}^5 x.$$

4. Encuentre el valor absoluto de $\dfrac{(2-3i)^2}{(8+6i)^2}$.

   Solución. Aplicando las propiedades de la norma de los números complejos, se tiene que

$$\left|\frac{(2-3i)^2}{(8+6i)^2}\right| = \frac{|(2-3i)|^2}{|(8+6i)|^2} = \left(\frac{|(2-3i)|}{|(8+6i)|}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{100}}\right)^2 = \frac{13}{100}.$$

5. Sea w una raíz n-ésima de la unidad, con $w \neq 1$. Demuestre que

$$1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = 0.$$

   Solución. Sea $S = 1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1}$, multiplicando por w en ambos lados de la igualdad se obtiene

$$w + w^2 + \cdots + w^{n-1} + w^n = Sw,$$

   y restando a $1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1}$ la igualdad anterior, se obtiene $1 - w^n = S - Sw$, por lo tanto $S = \frac{1-w^n}{1-w} = 0$.

6. Sea w una raíz $n-$ésima de la unidad, con $w \neq 1$. Evalúe

$$1 + 2w + 3w^2 + \cdots + nw^{n-1}.$$

Solución. Sea $S = 1 + 2w + 3w^2 + \cdots + nw^{n-1}$, multiplicando por w, se obtiene

$$Sw = w + 2w^2 + 3w^3 + \cdots + nw^n.$$

Entonces,

$$S - Sw = 1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^{n-1} - nw^n = -nw^n,$$

ya que por el problema anterior (5), $1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^{n-1} = 0$. Por lo tanto, $S = \frac{-nw^n}{1-w}$, de donde $1 + 2w + 3w^2 + \cdots + nw^{n-1} = \frac{-n}{1-w}$.

7. Demuestre que las raíces de un polinomio con coeficientes reales ocurren en parejas conjugadas.

Solución. Sea $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z^1 + a_0 = 0$, donde a_n, a_{n-1}, ..., a_1, $a_0 \in \mathbb{R}$. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ una raíz de P, entonces

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha^1 + a_0 = 0.$$

Tomando el conjugado de la ecuación anterior, se obtiene

$$\overline{a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha^1 + a_0} = \overline{0},$$

y aplicando propiedades de la conjugación se tiene que

$$\overline{a_n\alpha^n} + \overline{a_{n-1}\alpha^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1\alpha^1} + a_0 = 0$$

$$a_n\overline{\alpha^n} + a_{n-1}\overline{\alpha^{n-1}} + \cdots + a_1\overline{\alpha^1} + a_0 = 0$$

$$a_n\overline{\alpha}^n + a_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + a_1\overline{\alpha}^1 + a_0 = 0.$$

Se concluye que si $\alpha \in \mathbb{C}$ es una raíz del polinomio P, entonces también $\overline{\alpha}$ es una raíz del polinomio P.

8. Si $a, b \in \mathbb{C}$, muestre la **identidad del paralelogramo**

$$|a - b|^2 + |a + b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2).$$

Solución. Observe que

$$\begin{aligned} |a-b|^2+|a+b|^2 &= (a-b)(\overline{a-b})+(a+b)(\overline{a+b}) \\ &= (a-b)(\overline{a}-\overline{b})+(a+b)(\overline{a}+\overline{b}) \\ &= |a|^2-a\overline{b}-b\overline{a}+|b|^2+|a|^2+a\overline{b}+b\overline{a}+|b|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $|a-b|^2+|a+b|^2=2(|a|^2+|b|^2)$.

9. Interprete geométricamente la identidad del ejercicio anterior.

   Solución. Note que $a-b$ y $a+b$ son los vectores que forman las diagonales de un paralelogramo generado por los vectores a y b, ver figura 1.1. Luego, la identidad del paralelogramo se puede interpretar así: la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los cuatro lados del paralelogramo.

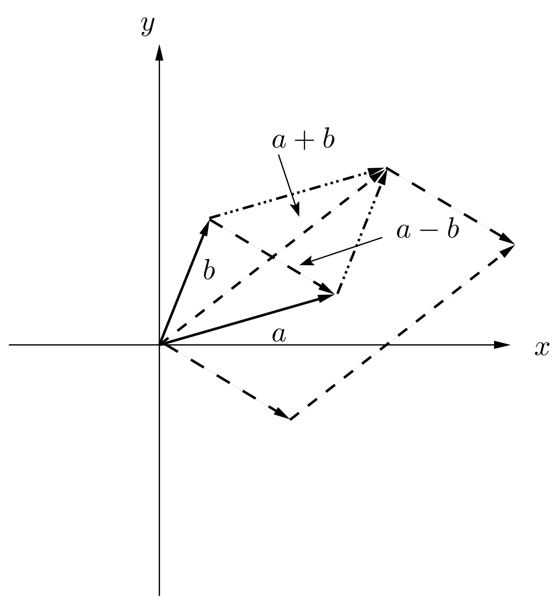


Figura 1.1: Identidad del paralelogramo.

10. Suponga que $|z|=1$ o $|w|=1$ y que $\bar{z}w\neq 1$. Demuestre que

$$\left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right|=1.$$

Solución. Se tienen dos casos:
Si $|z| = 1$, entonces $z\bar{z} = |z|^2 = 1$. Luego,

$$\left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right| = \left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right|\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{z-w}{z-z\bar{z}w}\right| = \left|\frac{z-w}{z-w}\right| = 1.$$

Si $|w| = 1$, se tiene que $w\bar{w} = |w|^2 = 1, w = \frac{1}{\bar{w}}$. Entonces

$$\left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right| = \left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right|\left|\frac{1}{\bar{w}}\right|\left|\frac{z-w}{\bar{w}-\bar{w}\bar{z}w}\right|\left|\frac{z-w}{\bar{w}-\bar{z}}\right| = \left|\frac{z-w}{\overline{z-w}}\right| = 1.$$

11. Si $z = x + iy$, muestre que $|x| + |y| \leq \sqrt{2}|z|$.
Solución. Como $z = x + iy$, entonces $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Por otra parte, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &\leq (|x| - |y|)^2 \\ 0 &\leq x^2 - 2|x||y| + y^2 \\ 2|x||y| &\leq x^2 + y^2 \\ x^2 + 2|x||y| + y^2 &\leq 2\left(x^2 + y^2\right) \\ (|x| + |y|)^2 &\leq 2\left(x^2 + y^2\right) \\ |x| + |y| &\leq \sqrt{2\left(x^2 + y^2\right)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $|x| + |y| \leq \sqrt{2}|z|$.

12. Muestre lo siguiente:

a) arg $\bar{z} = -$arg $z\,(\text{mod } 2\pi)$.
b) arg $\frac{z}{w} =$ arg $z -$ arg $w\,(\text{mod } 2\pi)$.
c) $|z| = 0$ si y sólo si $z = 0$.

Solución.

a) Sea $z = x + iy$, entonces $\bar{z} = x - iy$ y

$$\text{arg } \bar{z} = \tan^{-1}\left(\frac{-y}{x}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)(\text{mod } 2\pi),$$

por lo tanto arg $\bar{z} = -$arg $z\,(\text{mod } 2\pi)$.

b) Recuerde que

$$\text{arg }(z_1 z_2) = \text{arg } z_1 + \text{arg } z_2 \, (\text{mod } 2\pi),$$

y que $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, por lo que usando la observación y el inciso anterior, se tiene que

$$\text{arg } \frac{z}{w} = \text{arg } \left(z \cdot \frac{\bar{w}}{|w|^2} \right) = \text{arg } z - \text{arg } \left(\frac{w}{|w|^2} \right) \, (\text{mod } 2\pi).$$

Como arg $w =$ arg $\frac{w}{|w|^2}$, entonces arg $\frac{z}{w} =$ arg $z -$ arg $w \, (\text{mod } 2\pi)$.

c) Sea $z = x + iy$ tal que $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$, luego $x = 0$ y $y = 0$, por lo tanto $z = 0$.

Recíprocamente, si $z = 0$, entonces $x = 0$ y $y = 0$, por lo tanto $|z| = 0$.

13. Usando la fórmula $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$, muestre como construir geométricamente z^{-1}.

Solución. Sea $z = x + iy$, siguiendo la fórmula $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, para calcular $\bar{z}$ tiene que reflejar z con respecto al eje x y entonces $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}(x, -y)$, ver figura 1.2. La fórmula lo único que hace es reducir o alargar el vector $(x, -y)$ dependiendo de la magnitud de $\frac{1}{|z|^2} \in \mathbb{R}$.

14. Muestre la **identidad de Lagrange**

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k w_k \right|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2 \right) - \sum_{k<j} |z_k \bar{w}_j - z_j \bar{w}_k|^2 .$$

Deduzca la **desigualdad de Cauchy-Schwarz** a partir de su demostración.

Solución. Utilice la identidad $|z|^2 = z\bar{z}$. Sea S igual al lado derecho de la identidad. Entonces, desarrollando el lado derecho de la igualdad, se

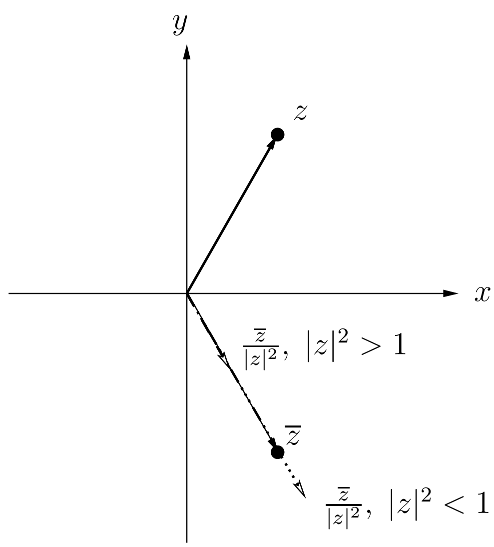


Figura 1.2: Construcción de z^{-1}.

obtiene

$$
\begin{aligned}
S &= \left(z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + \cdots + z_n\bar{z}_n\right)\left(w_1\bar{w}_1 + w_2\bar{w}_2 + \cdots + w_n\bar{w}_n\right) \\
&\quad - \sum_{1\le k<j\le n} \left(z_k\bar{w}_j - z_j\bar{w}_k\right)\left(\bar{z}_k w_j - \bar{z}_j w_k\right) \\
&= \left(z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + \cdots + z_n\bar{z}_n\right)\left(w_1\bar{w}_1 + w_2\bar{w}_2 + \cdots + w_n\bar{w}_n\right) \\
&\quad - \sum_{1\le k<j\le n} z_k\bar{z}_k w_j\bar{w}_j - \sum_{1\le k<j\le n} z_j\bar{z}_j w_k\bar{w}_k \\
&\quad - \sum_{1\le k<j\le n} z_k\bar{z}_j w_k\bar{w}_j + \sum_{1\le k<j\le n} z_j\bar{z}_k w_j\bar{w}_k.
\end{aligned}
$$

Observe que

$$
\sum_{1\le k<j\le n} a_k b_j + \sum_{1\le k<j\le n} a_j b_k = \sum_{k,j=1,k\neq j}^{n} a_k b_j.
$$

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k,j=1}^{n} z_k\bar{z}_k w_j\bar{w}_j - \sum_{k,j=1,k\neq j}^{n} z_k\bar{z}_k w_j\bar{w}_j + \sum_{k,j=1,k\neq j}^{n} z_k\bar{z}_j w_k\bar{w}_j \\
&= \sum_{k,j=1,}^{n} z_k\bar{z}_k w_j\bar{w}_j + \sum_{k,j=1,k\neq j}^{n} z_k\bar{z}_j w_k\bar{w}_j = \sum_{k,j=1}^{n} z_k\bar{z}_j w_k\bar{w}_j \\
&= \sum_{k,j=1}^{n} (z_k w_k)(\bar{z}_j\bar{w}_j) = \sum_{k,j=1}^{n} (z_k w_k)(\overline{z_j w_j}) \\
&= (z_1w_1 + z_2w_2 + \cdots + z_nw_n)(\overline{z_1w_1} + \overline{z_2w_2} + \cdots + \overline{z_nw_n}) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{z_k w_k}\right) = \left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right|^2,
\end{aligned}$$

lo cual completa la prueba.

La desigualdad de Cauchy-Schwarz está dada por

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2\right).$$

Si $z \in \mathbb{C}$, entonces $|z|^2 \in \mathbb{R}$ y $|z|^2 \geq 0$, por lo que

$$\sum_{k<j} |z_k\bar{w}_j - z_j\bar{w}_k|^2 \geq 0.$$

Así, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right|^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2\right) - \sum_{k<j} |z_k\bar{w}_j - z_j\bar{w}_k|^2 \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2\right).
\end{aligned}$$

15. Calcule la mínima cota superior (esto es, el supremo) del subconjunto de números reales
$$A = \{\mathrm{Re}(iz^3 + 1) \ \mid \ |z| < 2\}.$$

Solución. Sea $z = x + iy$, entonces $z^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$, así que $\text{Re}(iz^3 + 1) = y^3 - 3x^2y + 1$ y además $\sqrt{x^2 + y^2} < 2$. Si $y = 0$, entonces $\text{Re}(z^3i + 1) = 1$, pero si $x = 0$, se tiene que $\text{Re}(iz^3 + 1) = y^3 + 1$ y como $-2 < y < 2$, entonces $\text{Re}(iz^3 + 1)$ está acotada por $y^3 + 1 < 9$. Por lo tanto, $\sup A = 9$.

16. Muestre la **identidad trigonométrica de Lagrange**:

$$1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left((n + \frac{1}{2})\theta\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)},$$

donde $\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0$.

Solución. Sea $S = 1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta)$, multiplicando por $\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ en ambos lados de la igualdad se obtiene

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) S = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(\theta) + \cdots + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(n\theta).$$

Utilizando la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}(\theta)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\theta - \beta) + \operatorname{sen}(\theta + \beta)\right],$$

se puede reescribir lo anterior como

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) S &= \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{-\theta}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{-3\theta}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{5\theta}{2}\right)\right) + \cdots + \\ &\quad \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}\left(\left(\frac{1}{2} - n\right)\theta\right) + \operatorname{sen}\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\theta\right)\right)\end{aligned}$$

de donde

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) S = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2}.$$

Por lo tanto,

$$S = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

17. Suponga que los números complejos z_1, z_2, z_3 satisfacen la ecuación

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}.$$

Muestre que $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$.

Solución. Es fácil ver que la condición $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ es equivalente a $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$.

La última igualdad es equivalente a que el determinante siguiente es cero

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

El hecho de que el determinante sea cero, implica que el triángulo con vértices en z_1, z_2, z_3 es semejante al triángulo con vértices en z_2, z_3, z_1. Por lo tanto el triángulo debe ser equilátero, ver [2].

18. Muestre la identidad

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\operatorname{sen}\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Solución. Considere la ecuación $z^n - 1 = 0$ y sus n soluciones

$$1,\ e^{i\frac{2\pi}{n}},\ e^{i\frac{4\pi}{n}}, \dots,\ e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}.$$

Se puede escribir

$$z^n - 1 = (z-1)\left(z - e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)\left(z - e^{i\frac{4\pi}{n}}\right)\cdots\left(z - e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}\right),$$

y dividiendo la ecuación entre $z - 1$ se obtiene

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = \left(z - e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)\left(z - e^{i\frac{4\pi}{n}}\right)\cdots\left(z - e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}\right).$$

Ahora, utilice el hecho de que

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1},$$

entonces

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \left(z - e^{i\frac{2\pi}{n}}\right) \cdots \left(z - e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}\right);$$

si $z = 1$, se tiene que

$$n = \left(1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)\left(1 - e^{i\frac{4\pi}{n}}\right) \cdots \left(1 - e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}\right).$$

El conjugado de la ecuación anterior es

$$n = \left(1 - e^{-i\frac{2\pi}{n}}\right)\left(1 - e^{-i\frac{4\pi}{n}}\right) \cdots \left(1 - e^{-i\frac{2(n-1)\pi}{n}}\right).$$

Multiplique las dos ecuaciones anteriores y use la identidad

$$\left(1 - e^{-i\frac{2k\pi}{n}}\right)\left(1 - e^{-i\frac{2k\pi}{n}}\right) = 2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right),$$

para obtener

$$n^2 = 2^{n-1}\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) \cdots \left(1 - \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right).$$

Finalmente, sustituyendo la siguiente identidad en la ecuación anterior,

$$1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right),$$

se obtiene

$$n^2 = 2^{2(n-1)}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\mathrm{sen}^2\left(\frac{2\pi}{n}\right) \cdots \mathrm{sen}^2\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

que es equivalente a

$$n = 2^{n-1}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) \cdots \mathrm{sen}\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

Por lo tanto,

$$\frac{n}{2^{n-1}} = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) \cdots \mathrm{sen}\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

Segunda solución. Considere el polinomio $p(z) = (1-z)^n - 1$, el cual puede ser escrito como $w^n - 1$, donde $w = 1 - z$. Las raíces de $w^n = 1$ son las raíces n-ésimas de la unidad, $w_k = \cos\frac{2\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$, para $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Entonces las raíces de $p(z)$ son $z_k = 1 - w_k$.

Analizando el polinomio $p(z)$, observe que puede escribirse como $p(z) = z(-n + q(z))$ donde $q(z)$ es un polinomio de grado $n-1$. Entonces si se hace, $p(z) = 0$, se tiene que las raíces deben cumplir, por las fórmulas de Vieta, que $(-1)^n n = \prod_{i=1}^{n-1} z_i$, por lo que $n = \prod_{i=1}^{n-1} |z_i|$.

Calcule ahora $|z_i|$.

$$\begin{aligned}
|z_i| &= |1 - w_i| = \sqrt{\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right)^2 + \left(\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right)^2} \\
&= \sqrt{1 - 2\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi k}{n}\right)} \\
&= \sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right)} = \sqrt{4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi k}{n}\right)} = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi k}{n}\right),
\end{aligned}$$

donde se utilizó que $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ y $1 - \cos(2x) = 2\operatorname{sen}^2 x$. De donde se obtiene la identidad pedida.

19. La correspondencia del número complejo $z = a + ib$ con la matriz

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \Psi_z$$

dá otra manera de representar a los números complejos. Demuestre que:

a) $\Psi_{z\omega} = \Psi_z \Psi_\omega$.

b) $\Psi_{z+\omega} = \Psi_z + \Psi_\omega$.

c) $\Psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $\lambda \Psi_z = \Psi_{\lambda z}$, si λ es real.

e) $\Psi_{\overline{z}} = (\Psi_z)^t$ (la matriz transpuesta).

f) $\Psi_{\frac{1}{z}} = (\Psi_z)^{-1}$.

g) z es real si y sólo si $\Psi_z = (\Psi_z)^t$.

h) $|z| = 1$ si y sólo si Ψ_z es una matriz ortogonal.

Solución. Sean $z = a + ib$ y $w = c + id$.

a) Como $zw = (ac - bd) + i(ad + cb)$, se tiene que

$$\Psi_{zw} = \begin{pmatrix} ac - db & -ad - cb \\ ad + cb & ac - db \end{pmatrix}$$

$$\Psi_z \Psi_w = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - db & -ad - cb \\ ad + cb & ac - db \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $\Psi_{z\omega} = \Psi_z \Psi_\omega$.

b)

$$\begin{aligned} \Psi_{z+w} &= \begin{pmatrix} a + c & -d - b \\ d + b & a + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \Psi_z + \Psi_w. \end{aligned}$$

c) Sea $z = 1 + i0$

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $a = 1, b = 0$.

d)

$$\lambda \Psi_z = \lambda \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & -\lambda b \\ \lambda b & \lambda a \end{pmatrix} = \Psi_{\lambda z}.$$

e) Como $\bar{z} = a - ib$

$$\Psi_{\overline{z}} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^t = (\Psi_z)^t.$$

f) Tenemos que $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$, luego

$$\begin{aligned} (\Psi_z)^{-1} &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} = \Psi_{\frac{1}{z}}. \end{aligned}$$

g) Si $z \in \mathbb{R}$ entonces $z = a + i0$, por lo que

$$\Psi_z = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (\Psi_z)^t = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

por lo tanto $\Psi_z = (\Psi_z)^t$.

Recíprocamente, si $\Psi_z = (\Psi_z)^t$ donde $z = a + ib$, entonces

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Dos matrices son iguales si sus entradas respectivas son iguales

$$\begin{array}{cc} a = a & -b = b \\ b = -b & a = a. \end{array}$$

Para que $b = -b$ entonces $b = 0$, por lo tanto $z \in \mathbb{R}$.

h) Si $|z| = 1$, muestre que $(\Psi_z)^{-1} = (\Psi_z)^t$,

$$(\Psi_z)^t = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} (\Psi_z)^{-1} &= \frac{1}{\det(\Psi_z)} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por lo tanto $(\Psi_z)^{-1} = (\Psi_z)^t$, lo cual es equivalente a que Ψ_z sea ortogonal.
Recíprocamente, si $(\Psi_z)^{-1} = (\Psi_z)^t$, entonces

$$\frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

por lo que $\frac{a}{a^2+b^2} = a$, de donde $a^2 + b^2 = 1$. Entonces $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$, luego $|z| = 1$.

1.3. Algunas funciones elementales

Por funciones elementales complejas nos referimos a la función exponencial, a las funciones trigonométricas y a la función logaritmo, las cuales serán definidas a continuación.

Definición 1.3.1 *Si $z = x + iy$, entonces se define e^z como $e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$. Esta función se conoce como la función exponencial compleja.*

Una vez definida la función exponencial, es posible definir las funciones trigonométricas complejas.

Definición 1.3.2 *Para cualquier número complejo z, se definen*

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{y} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Definir la función logaritmo es un poco más complicado, pues su dominio de definición no es todo el plano complejo $\mathbb{C}$ y su rango es una banda de longitud 2π.

Definición 1.3.3 *La función $\log : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$, con rango $y_0 \leq$ Im $\log z < y_0 + 2\pi$, está definida como*

$$\log z = \log |z| + i \mathit{arg}\, z,$$

donde arg z toma valores en el intervalo $[y_0, y_0 + 2\pi)$ y $\log |z|$ es el logaritmo usual del número real positivo $|z|$.

La elección del intervalo $[y_0, y_0 + 2\pi)$, es llamada la elección de una rama de logaritmo. Notemos que podemos elegir cualquier intervalo de longitud 2π.

Una vez que se ha definido la función $\log$, es posible definir a^b para cualesquiera $a, b \in \mathbb{C}$, donde $a \neq 0$.

Definición 1.3.4 *Dados $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$, se define $a^b = e^{b \log a}$, donde se ha elegido una rama de $\log$.*

Un caso particular importante de la definición anterior es cuando $b = \frac{1}{n}$, para $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.3.5 *La función raíz n-ésima se define como*

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\log z}{n}}$$

para una elección específica de una rama de $\log$*; con esta elección,* $\sqrt[n]{z} = e^{\frac{\log z}{n}}$ *es llamada una rama de la función raíz n-ésima.*

A continuación presentamos varios problemas acerca de las funciones elementales definidas en los números complejos, así como la geometría de algunas funciones simples.

1. Exprese en la forma $a + ib$:

   a) e^{3-i}.

   b) $\cos(2+3i)$.

   Solución.

   a) Si $z = x + iy$, entonces como $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$, se tiene que $e^{3-i} = e^3(\cos(-1) + i \operatorname{sen}(-1)) = e^3(\cos 1 - i \operatorname{sen} 1)$.

   b) Por la defininción de la función coseno tenemos que $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, por lo que

$$\begin{aligned}
\cos(2+3i) &= \frac{e^{i(2+3i)} + e^{-i(2+3i)}}{2} = \frac{e^{2i-3} + e^{-2i+3}}{2} \\
&= \frac{e^{-3}(\cos 2 + i \operatorname{sen} 2) + e^{3}(\cos(-2) + i \operatorname{sen}(-2))}{2} \\
&= \frac{e^{-3}\cos 2 + e^{3}\cos(-2)}{2} + i\frac{e^{-3}\operatorname{sen} 2 + e^{3}\operatorname{sen}(-2)}{2} \\
&= \frac{(e^{-3}+e^{3})\cos 2}{2} + i\frac{(e^{3}-e^{-3})\operatorname{sen} 2}{2} \\
&= \cosh 3 \cos 2 + i \operatorname{senh} 3 \operatorname{sen} 2.
\end{aligned}$$

2. Resuelva

   a) $\operatorname{sen} z = \frac{3}{4} + \frac{i}{4}$.

   b) $\operatorname{sen} z = 4$.

Solución.

a) Por definición, $\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, entonces $\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \frac{3}{4} + \frac{i}{4}$, multiplicando por $4i$ en ambos de la igualdad se tiene

$$2e^{iz} - 2e^{-iz} = -1 + 3i.$$

Sean $w = -1 + 3i$ y $t = e^{iz}$, por lo que $2t - 2t^{-1} = w$, así que $2t^2 - wt - 2 = 0$, y usando la fórmula general se obtiene que $t = \frac{w \pm \sqrt{(-w)^2+16}}{4}$. Ahora, es necesario calcular $\sqrt{(-w)^2 + 16} = r$, entonces

$$r = \sqrt{(-1+3i)^2 + 16} = \sqrt{(-8-6i)+16} = \sqrt{8-6i}.$$

Para calcular la última raíz, se tiene que $a = 8$ y $b = -6$ en la fórmula (1.1), luego

$$\alpha = \sqrt{\frac{8 + \sqrt{8^2 + (-6)^2}}{2}} = 3 \text{ y } \beta = \sqrt{\frac{-8 + \sqrt{8^2 + (-6)^2}}{2}} = 1,$$

dado que $b < 0$ se tiene que $r = \pm(3 - i)$. Por lo tanto $t = \frac{w \pm r}{4} = \frac{(-1+3i)\pm(3-i)}{4}$, luego las dos raíces son $t_1 = \frac{2+2i}{4} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ y $t_2 = \frac{-4+4i}{4} = -1 + i$.
Para $t_1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$, se desea resolver $e^{iz} = t_1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$, luego

$$\begin{aligned} iz &= \log\left[\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\right] + i\left[\arg\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) + 2\pi n\right] \\ &= \log\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right). \end{aligned}$$

Haciendo uso de las propiedades de la función logaritmo real, se concluye que $iz = -\frac{1}{2}\log(2) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$. Por lo tanto $z_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n + \frac{i}{2}\log(2)$.
Ahora se considera $t_2 = -1+i$, entonces $iz = \log(\sqrt{2}) + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)$. Por lo tanto $z_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n + \frac{i}{2}\log 2$, luego $z_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n + \frac{i}{2}\log 2$ y $z_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n + \frac{i}{2}\log 2$, son las soluciones buscadas.

b) Como $\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 4$, entonces $e^{iz} - e^{-iz} = 8i$. Sea $t = e^{iz}$, entonces $t^2 - 8it - 1 = 0$, calculando t se tiene que $t = \frac{8i \pm \sqrt{(-8i)^2+4}}{2} = \frac{8i \pm \sqrt{-60}}{2} = 4i \pm \sqrt{-15} = i\left(4 \pm \sqrt{15}\right)$.
Por lo que $\log t = iz$, entonces $iz = \log|t| + i(\text{arg}(t) + 2\pi n) = \log(4 \pm \sqrt{15}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$. Por lo tanto $z = -\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) + i\log(4 \pm \sqrt{15})$.

3. Encuentre todos los valores de

a) $\log(-i)$.

b) $\log(1+i)$.

Solución.

a) $\log(-i) = \log|1| + i\text{arg}(-i) + i2\pi n = i\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, para $n \in \mathbb{Z}$.

b) $\log(1+i) = \log|\sqrt{2}| + i\text{arg}(i) + i2\pi n = \log\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$ para $n \in \mathbb{Z}$.

4. Encuentre todos los valores de

a) $(-1)^i$.

b) 2^i.

Solución.

a) $(-1)^i = e^{i\log(-1)} = e^{i(\log|1| + i\pi + 2i\pi n)} = e^{-\pi - 2\pi n}$, para $n \in \mathbb{Z}$.

b) $2^i = e^{i\log(2)} = e^{i(\log|2| + i2\pi n)} = e^{-2\pi n + i\log|2|}$, para $n \in \mathbb{Z}$.

5. Denótese por $\sqrt{\cdot}$, la raíz cuadrada particular definida por

$$\sqrt{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = r^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right], \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

La otra raíz es $r^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2\pi}{2}\right)\right]$. ¿Para qué valores de z se cumple la ecuación $\sqrt{z^2} = z$?

Solución. Se tiene que si $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, entonces

$$\sqrt{z} = r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{para} \;\; 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Luego, si $z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$, se tiene que $\sqrt{z^2} = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ si $0 \leq 2\theta < 2\pi$, es decir, $0 \leq \theta < \pi$. Por lo tanto, las z que satisfacen la propiedad pedida son las que estan en el semi-plano superior, incluyendo los reales positivos.

6. Muestre que

$$z = \tan\left[\frac{1}{i}\log\left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\tan\left[\frac{1}{i}\log\left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)^{\frac{1}{2}}\right] &= \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{1}{i}\log\left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)^{\frac{1}{2}}\right]}{\cos\left[\frac{1}{i}\log\left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)^{\frac{1}{2}}\right]} \\
&= \frac{\frac{e^{i\frac{1}{i}\log\left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)^{\frac{1}{2}}} - e^{-i\frac{1}{i}\log\left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)^{\frac{1}{2}}}}{2i}}{\frac{e^{i\frac{1}{i}\log\left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)^{\frac{1}{2}}} + e^{-i\frac{1}{i}\log\left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)^{\frac{1}{2}}}}{2}} \\
&= \frac{e^{i\frac{1}{i}\log\left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)^{\frac{1}{2}}} - e^{-i\frac{1}{i}\log\left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)^{\frac{1}{2}}}}{i\left(e^{i\frac{1}{i}\log\left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)^{\frac{1}{2}}} + e^{-i\frac{1}{i}\log\left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)} \\
&= \frac{e^{\log\left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)^{\frac{1}{2}}} - e^{-\log\left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)^{\frac{1}{2}}}}{i\left(e^{\log\left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)^{\frac{1}{2}}} + e^{-\log\left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)} \\
&= \frac{1}{i}\cdot\frac{\left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)^{-\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1}{i}\cdot\frac{\left(\frac{1+zi}{1-zi}\right) - 1}{\left(\frac{1+zi}{1-zi}\right) + 1} = \frac{1}{i}\cdot\frac{(1+zi)-(1-zi)}{(1+zi)+(1-zi)} \\
&= \frac{1}{i}\cdot\frac{2zi}{2} = z.
\end{aligned}$$

7. Examine el comportamiento de e^{x+iy} cuando $x \to \pm\infty$ y cuando $y \to \pm\infty$.

Solución. Se tiene que $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$, luego cuando $x \to \pm\infty$, el término e^{iy} permanece constante, entonces $e^{x+iy} \to \infty$ cuando $x \to \infty$ y $e^{x+iy} \to 0$

cuando $x \to -\infty$. Ahora, si $y \to \pm\infty$, e^x permanece constante, entonces e^{x+iy} pertenece a la circunferencia de radio e^x cuando $y \to \pm\infty$, pero no existe el límite.

8. Defina las funciones senh y $\cosh$ en todo $\mathbb{C}$ por $\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ y $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$. Muestre que:

   a) $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$.
   b) $\operatorname{senh}(z_1 + z_2) = \operatorname{senh} z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \operatorname{senh} z_2$.
   c) $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \operatorname{senh} z_1 \operatorname{senh} z_2$.
   d) $\operatorname{senh}(x + iy) = \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y$.
   e) $\cosh(x + iy) = \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$.

   Solución.

   a)

$$\begin{aligned}
\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z &= \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2z} + 2 + e^{-2z}}{4} - \frac{e^{2z} - 2 + e^{-2z}}{4} \\
&= \frac{4}{4} = 1.
\end{aligned}$$

   b) Sea $A = \operatorname{senh}(z_1 + z_2)$, entonces

$$\begin{aligned}
A &= \frac{e^{z_1+z_2} - e^{-(z_1+z_2)}}{2} = \frac{2e^{z_1+z_2} - 2e^{-(z_1+z_2)}}{2 \cdot 2} \\
&= \frac{e^{z_1+z_2} - e^{-z_1+z_2} + e^{z_1-z_2} - e^{-(z_1+z_2)}}{4} + \\
&\quad \frac{e^{z_1+z_2} + e^{-z_1+z_2} - e^{z_1-z_2} - e^{-(z_1+z_2)}}{4} \\
&= \frac{e^{z_1+z_2} - e^{-z_1+z_2} + e^{z_1-z_2} - e^{-(z_1+z_2)}}{4} + \\
&\quad \frac{e^{z_1+z_2} + e^{-z_1+z_2} - e^{z_1-z_2} - e^{-(z_1+z_2)}}{4} \\
&= \left(\frac{e^{z_1} - e^{-z_1}}{2}\right)\left(\frac{e^{z_2} + e^{-z_2}}{2}\right) + \left(\frac{e^{z_1} + e^{-z_1}}{2}\right)\left(\frac{e^{z_2} - e^{-z_2}}{2}\right) \\
&= \operatorname{senh} z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \operatorname{senh} z_2.
\end{aligned}$$

c) Sea $B = \cosh(z_1 + z_2)$, entonces

$$\begin{aligned} B &= \frac{e^{z_1+z_2} + e^{-(z_1+z_2)}}{2} = \frac{2e^{z_1+z_2} + 2e^{-(z_1+z_2)}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{e^{z_1+z_2} + e^{-z_1+z_2} + e^{z_1-z_2} + e^{-(z_1+z_2)}}{4} + \\ &\quad \frac{e^{z_1+z_2} - e^{-z_1+z_2} - e^{z_1-z_2} + e^{-(z_1+z_2)}}{4} \\ &= \frac{e^{z_1+z_2} + e^{-z_1+z_2} + e^{z_1-z_2} + e^{-(z_1+z_2)}}{4} + \\ &\quad \frac{e^{z_1+z_2} - e^{-z_1+z_2} - e^{z_1-z_2} + e^{-(z_1+z_2)}}{4} \\ &= \left(\frac{e^{z_1} + e^{-z_1}}{2}\right)\left(\frac{e^{z_2} + e^{-z_2}}{2}\right) + \left(\frac{e^{z_1} - e^{-z_1}}{2}\right)\left(\frac{e^{z_2} - e^{-z_2}}{2}\right) \\ &= \cosh z_1 \cosh z_2 + \operatorname{senh} z_1 \operatorname{senh} z_2. \end{aligned}$$

d) Usando la parte b), se tiene que $\operatorname{senh}(x + iy) = \operatorname{senh} x \cosh iy + \cosh x \operatorname{senh} iy$ y utilizando que $\cosh iy = \cos y$ y $\operatorname{senh} iy = i \operatorname{sen} y$ se puede concluir que $\operatorname{senh}(x + iy) = \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y$.

e) Usando la parte c), se tiene que $\cosh(x + iy) = \cosh x \cosh iy + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} iy$, entonces $\cosh(x + iy) = \cosh x \cos y + i \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$.

9. Si b es un número real y a es un número complejo, muestre que $|a^b| = |a|^b$.

Solución. Recuerde que si $z = x + iy$, entonces $|e^z| = |e^{x+iy}| = e^x = e^{\mathsf{Re}\, z}$. Por definición, $a^b = e^{b \log(a)}$, entonces

$$\begin{aligned} |a^b| &= |e^{b \log(a)}| = \left|e^{b(\log|a| + i(\mathsf{arg}(a) + 2\pi n))}\right| \\ &= e^{b \log |a|} = |a|^b. \end{aligned}$$

10. *a*) Para números complejos a, b, c, muestre que $a^b a^c = a^{b+c}$, usando una rama fija del logaritmo.

b) Demuestre que $(ab)^c = a^c b^c$, si escogemos ramas de $\log$ tales que $\log(ab) = \log a + \log b$.

Solución.

a) Fije una rama de logaritmo, entonces

$$\begin{aligned} a^b a^c &= e^{b\log(a)} e^{c\log(a)} \\ &= e^{b(\log|a| + i\arg(a))} e^{c(\log|a|+i\arg(a))} \\ &= e^{b(\log|a|+i\arg(a))+c(\log|a|+i\arg(a))} \\ &= e^{(b+c)(\log|a|+i\arg(a))} \\ &= e^{(b+c)\log a} \\ &= a^{b+c}. \end{aligned}$$

b) Por definición $(ab)^c = e^{c\log(ab)}$, luego en la rama donde $\log(ab) = \log a + \log b$, se tiene que $(ab)^c = e^{c(\log a + \log b)} = e^{c\log a + c\log b} = e^{c\log a} e^{c\log b} = a^c b^c$. Por lo tanto, $(ab)^c = a^c b^c$.

11. *a*) ¿Cuál es la imagen, bajo la función $z \to z^3$, del primer cuadrante?

    b) Discuta la geometría de $z \to \sqrt[3]{z}$.

Solución.

a) Sea $z = re^{i\theta}$, donde $r \in \mathbb{R}^+$ y el ángulo $\theta \in [0, \pi/2]$, entonces $z^3 = \left(re^{i\theta}\right)^3 = r^3 e^{i3\theta}$, donde $r^3 \in \mathbb{R}^+$ y $\theta \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$. Por lo tanto la función transforma el primer cuadrante a los tres primeros cuadrantes.

b) Sea $z = re^{i\theta}$, donde $r \in \mathbb{R}^+$ y $0 \leq \theta \leq \pi$, entonces $\sqrt[3]{z} = \left(re^{i\theta}\right)^{\frac{1}{3}} = r^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\theta}{3}}$, luego $r^{\frac{1}{3}} \in \mathbb{R}^+$ y $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$. Por lo tanto la función reduce el ángulo a un tercio del original y expande o reduce la norma.

12. ¿Cuál es la imagen de líneas horizontales y verticales bajo $z \to \cos z$?

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos(x+iy) = \cos(x)\cos(iy) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(iy) \\ &= \cos(x)\cosh(y) - \operatorname{sen}(x) i \operatorname{senh}(y) \\ &= \cos(x)\cosh(y) - i\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y). \end{aligned}$$

Suponga que $y = y_0$ es constante, entonces si $\cos z = u + iv$ donde $u = \cos(x)\cosh(y)$ y $v = -\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)$ se tiene que

$$\frac{u^2}{\cosh^2(y_0)} + \frac{v^2}{\operatorname{senh}^2(y_0)} = 1,$$

ya que $\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x) = 1$, y por lo tanto las coordenadas u, v satisfacen la ecuación de una elipse.

Similarmente, si $x = x_0$ es constante, de la ecuación $\cosh^2(y)-\operatorname{senh}^2(y) = 1$ se obtiene

$$\frac{u^2}{\cos^2(x_0)} - \frac{v^2}{\operatorname{sen}^2(x_0)} = 1$$

la cual es una hipérbola.

13. *a*) Demuestre que bajo la función $z \to z^2$, líneas paralelas al eje real son transformadas en parábolas.

   b) Demuestre que bajo (una rama) $z \to \sqrt{z}$, líneas paralelas al eje real son transformadas en hipérbolas.

Solución.

a) Sea $z = x + iy$, entonces $z^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$, como se quiere transformar las líneas paralelas el eje real, sea $y = y_0$ fijo donde $y_0 \in \mathbb{R}$. Ahora, si $z^2 = u(x, y_0) + iv(x, y_0)$ entonces $u(x, y_0) = x^2 - y_0^2$ y $v(x, y_0) = 2xy_0$, así que $x^2 = u(x, y_0) + y_0^2$ y elevando $v(x, y_0)$ al cuadrado se obtiene $v^2(x, y_0) = 4x^2y_0^2$. Sustituyendo x^2 en $v^2(x, y)$, se obtiene que $v^2(x, y) = 4(u(x, y)+y_0^2)y_0^2$. Por lo tanto, $v^2(x, y) = 4y_0^2(u(x, y) + y_0^2)$ es la ecuación de una párabola.

b) Sea $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\log z}$ con $0 \leq$ arg $z < 2\pi$. Calculando la parte real e imaginaria de $\sqrt{z}$, se tiene que

$$X = \text{Re } \left(\sqrt{z}\right) = |z|^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{1}{2} \text{ arg } z\right),$$

$$Y = \text{Im } \left(\sqrt{z}\right) = |z|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2} \text{ arg } z\right).$$

Una recta paralela al eje real puede ser descrita como $x + iy_0$, donde y_0 es fijo y $x \in \mathbb{R}$. Entonces para $z = x + iy_0$, $|z|^{\frac{1}{2}} = (x^2 + y_0^2)^{\frac{1}{4}}$, arg $z = \tan^{-1}\left(\frac{y_0}{x}\right)$. Luego,

$$XY = |z| \cos\left(\frac{1}{2} \text{ arg } z\right) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2} \text{ arg } z\right) = \frac{|z|}{2} \cos\left(\text{ arg } z\right).$$

Sea $m =$ arg $z = \tan^{-1}\left(\frac{y_0}{x}\right)$, entonces $\tan m = \frac{\operatorname{sen} m}{\cos m} = \frac{y_0}{x}$. Como $\cos m = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 m}$, haciendo $u = \operatorname{sen} m$, se tiene la ecuación

$\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{y_0}{x}$, es decir, $u^2x^2 = y_0^2(1-u^2)$, de donde $u^2 = \frac{y_0^2}{x^2+y_0^2}$, o $u = \frac{|y_0|}{|z|}$. Por lo tanto, $XY = \frac{|z|}{2} \cdot \frac{y_0|}{|z|} = \frac{|y_0|}{2}$, es decir, la imagen de una recta paralela el eje x es una hipérbola.

14. Demuestre que las identidades trigonométricas de suma de ángulos para las funciones seno y coseno, pueden deducirse si se supone $e^{i(x_1+x_2)} = e^{ix_1}e^{ix_2}$.

Solución. Por una parte se tiene que

$$e^{i(x_1+x_2)} = \cos(x_1+x_2) + i\,\text{sen}(x_1+x_2)$$

y por otra

$$e^{ix_1} = \cos x_1 + i\,\text{sen}\, x_1, \quad e^{ix_2} = \cos x_2 + i\,\text{sen}\, x_2.$$

Entonces

$$\begin{aligned} e^{ix_1}e^{ix_2} &= (\cos x_1 + i\,\text{sen}\, x_1)(\cos x_2 + i\,\text{sen}\, x_2) \\ &= (\cos x_1 \cos x_2 - \text{sen}\, x_1\,\text{sen}\, x_2) \\ &\quad +i(\cos x_1\,\text{sen}\, x_2 + \text{sen}\, x_1 \cos x_2). \end{aligned}$$

Dado que $e^{i(x_1+x_2)} = e^{ix_1}e^{ix_2}$, se puede concluir

$$\cos(x_1+x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \text{sen}\, x_1\,\text{sen}\, x_2$$

$$\text{sen}(x_1+x_2) = \cos x_1\,\text{sen}\, x_2 + \text{sen}\, x_1 \cos x_2.$$

15. Demuestre que el seno y el coseno son funciones periódicas con periodo mínimo 2π, esto es, que:

a) $\text{sen}(z+2\pi) = \text{sen}\, z$ para toda z.

b) $\cos(z+2\pi) = \cos z$ para toda z.

c) $\text{sen}(z+\omega) = \text{sen}\, z$ para toda z, implica que $\omega = 2\pi n$ para algún entero n.

d) $\cos(z+\omega) = \cos z$ para toda z, implica que $\omega = 2\pi n$ para algún entero n.

Solución.

a) Utilizando la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B$$

se obtiene

$$\operatorname{sen}(z+2\pi) = \operatorname{sen} z \cos 2\pi + \cos z \operatorname{sen} 2\pi$$

donde $\cos 2\pi = 1$ y $\operatorname{sen} 2\pi = 0$, por lo tanto $\operatorname{sen}(z+2\pi) = \operatorname{sen} z$ para toda z.

b) Recordando la identidad trigonométrica

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

se obtiene

$$\cos(z+2\pi) = \cos z \cos 2\pi - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} 2\pi,$$

entonces $\cos(z+2\pi) = \cos z$ para toda z.

c) Como $\operatorname{sen}(z+\omega) = \operatorname{sen} z \cos\omega + \cos z \operatorname{sen}\omega = \operatorname{sen} z$, entonces $\cos z \operatorname{sen}\omega = 0$ y $\cos\omega = 1$, por lo tanto $\omega = 2\pi n$, donde $n \in \mathbb{Z}$.

d) Como $\cos(z+\omega) = \cos z \cos\omega - \operatorname{sen} z \operatorname{sen}\omega = \cos z$, entonces $\operatorname{sen} z \operatorname{sen}\omega = 0$ y $\cos\omega = 1$, por lo tanto $\omega = 2\pi n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

16. Demuestre que $\log z = 0$ si $z = 1$, usando la rama $-\pi < \operatorname{arg}(z) \leq \pi$.

Solución. Se tiene que

$$\log z = \log|z| + i\operatorname{arg}(z) = \log 1 + i0 = 0$$

por lo tanto $\log z = 0$.

17. Muestre que $\operatorname{sen} z$ transforma la banda $A = \{z \mid -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}\}$ sobre $B = \mathbb{C} \setminus \{z \mid \operatorname{Im} z = 0 \text{ y } |\operatorname{Re} z| \geq 1\}$.

Solución. Sea $z = x + iy$, entonces $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \operatorname{senh} y \cos x$. Sea $C = \{z \mid \operatorname{Re} z = \frac{\pi}{2}\}$, por lo que en C se tiene que $\operatorname{sen} z = \cosh y$, por lo tanto, el conjunto C es enviado al conjunto $\{z \mid \operatorname{Re} z \geq 1, y = 0\}$.

De la misma manera, sea $D = \{z \mid \operatorname{Re} z = -\frac{\pi}{2}\}$, por lo que en D se tiene que $\operatorname{sen} z = -\cosh y$, por lo tanto, el conjunto D es enviado al conjunto $\{z \mid \operatorname{Re} z \leq -1, y = 0\}$.

Luego, la frontera de A bajo $\operatorname{sen} z$ se transforma en la frontera de B. De la misma manera, se puede ver que el eje imaginario se transforma en el eje imaginario.

Ahora, cualquier recta paralela al eje y se transforma en una hipérbola. Para ver esto, considere la recta $z = x_0 + iy$ donde $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, luego $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x_0 \cosh y + i \operatorname{senh} y \cos x_0 = u + iv$, satisface la ecuación

$$\frac{u^2}{\operatorname{sen}^2 x_0} - \frac{v^2}{\cos^2 x_0} = 1.$$

Como el conjunto B se puede descomponer en este tipo de hipérbolas, se termina la demostración.

1.4. Funciones continuas

Los conceptos topológicos en el plano complejo son los mismos que los del plano real. Así mismo, los conceptos de límite, continuidad y convergencia de sucesiones son los mismos que los del cálculo real.
Aquí presentamos problemas acerca de estas nociones, pero en los números complejos. Al final se pide considerar una métrica en la esfera de Riemann, es decir, $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$.

1. *a*) Para cualesquiera dos números complejos z_1 y z_2, muestre que

   $$|\mathrm{Re}(z_1) - \mathrm{Re}(z_2)| \leq |z_1 - z_2| \leq |\mathrm{Re}(z_1) - \mathrm{Re}(z_2)| + |\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2)|.$$

   b) Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, demuestre que

   $$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{x \to x_0, y \to y_0} u(x,y) + i \lim_{x \to x_0, y \to y_0} v(x,y)$$

   existe si ambos límites en el lado derecho de la ecuación existen. Recíprocamente, si el límite de la izquierda existe, demuestre que ambos límites de la derecha también existen y que la igualdad se cumple. Demuestre que $f(z)$ es continua si u y v lo son.

Solución.

a) Se tiene que si $w \in \mathbb{C}$, entonces $|\mathsf{Re}(w)| \leq |w|$, $|\mathsf{Im}(w) \leq |w|$ y $|w| \leq |\mathsf{Re}(w)| + |\mathsf{Im}(w)|$. Sea $w = z_1 - z_2$, entonces

$$|\mathsf{Re}(z_1 - z_2)| \leq |z_1 - z_2| \leq |\mathsf{Re}(z_1 - z_2)| + |\mathsf{Im}(z_1 - z_2)|.$$

Por lo tanto,

$$|\mathsf{Re}(z_1) - \mathsf{Re}(z_2)| \leq |z_1 - z_2| \leq |\mathsf{Re}(z_1) - \mathsf{Re}(z_2)| + |\mathsf{Im}(z_1) - \mathsf{Im}(z_2)|.$$

b) Primero suponga que

$$\lim_{x\to x_0, y\to y_0} u(x,y) = u_0 \ \text{ y } \ \lim_{x\to x_0, y\to y_0} v(x,y) = v_0,$$

entonces para cada $\epsilon > 0$ existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$|u(x,y) - u_0| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall (x,y) \in D_{\delta_1}(z_0)$$
$$|v(x,y) - v_0| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall (x,y) \in D_{\delta_2}(z_0),$$

donde $D_{\delta_i}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0|\} < \delta_i$. Sea $\delta = \text{mín}\ (\delta_1, \delta_2)$, entonces las dos desigualdades se satisfacen para toda z tal que $z \in D_\delta(z_0)$. Sea $w_0 = u_0 + iv_0$, entonces usando la desigualdad del triángulo

$$\begin{aligned} |f(z) - w_0| &= |u(x,y) - u_0 + i(v(x,y) - v_0)| \\ &\leq |u(x,y) - u_0| + |v(x,y) - v_0| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

para todo $z \in D_\delta(z_0)$. Por lo tanto, $\text{lím}_{z\to z_0} f(z)$ existe y es w_0.

Ahora suponga que $\text{lím}_{z\to z_0} f(z) = w_0$. Entonces se tiene que $\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta > 0$ tal que $|f(z) - w_0| < \epsilon$ para toda $z \in D_\delta(z_0)$. Ya que

$$|u(x,y) - u_0| = |\mathsf{Re}(f(z) - w_0)| \leq |f(z) - w_0|$$
$$|v(x,y) - v_0| = |\mathsf{Im}(f(z) - w_0)| \leq |f(z) - w_0|,$$

entonces

$$|u(x,y) - u_0| < \epsilon \quad \forall (x,y) \in D_\delta(z_0)$$
$$|v(x,y) - v_0| < \epsilon \quad \forall (x,y) \in D_\delta(z_0).$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to x_0, y\to y_0} u(x,y) \ \text{ y } \ \lim_{x\to x_0, y\to y_0} v(x,y)$$

existen y son iguales a u_0 y v_0, respectivamente.

2. Si $z_0 \in \mathbb{C}$, demuestre que el conjunto $\{z_0\}$ es cerrado.

   Solución. Mostrar que el conjunto $\{z_0\}$ es cerrado es lo mismo que mostrar que su complemento es abierto, es decir, $A = \mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ es abierto. Sea $z \in A$ y sea $\delta = \frac{1}{2}|z - z_0|$, entonces z_0 no puede estar en $D(z, \delta)$. Por lo que $D(z, \delta) \subset A$, de donde A es abierto y por lo tanto $\{z_0\}$ es cerrado.

3. Use el hecho de que una función es continua si y sólo si la imagen inversa de todo conjunto abierto es abierta, para demostrar que la composición de dos funciones es continua.

   Solución. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones continuas, se tiene que mostrar que $g \circ f : A \to C$ es continua. Sea $V \subset C$ un subconjunto abierto, se debe ver que $(g \circ f)^{-1}(V)$ es abierto en A. Se tiene que $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right)$ es abierto en A ya que $g^{-1}(V)$ es abierto en B, por ser una función continua y $f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right)$ es abierto en A ya que f es continua. Por lo tanto $g \circ f$ es continua.

4. Muestre que $f(z) = |z|$ es continua.

   Solución. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y sea $\epsilon > 0$, se tiene que mostrar que existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$ implica que $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$.

   Se tiene que $|f(z) - f(z_0)| = ||z| - |z_0|| \leq |z - z_0| < \delta$, por lo que se puede tomar $\delta = \epsilon$. Por lo tanto, $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, de donde f es continua.

5. Demuestre o dé un ejemplo si es falso: Si $\lim_{z \to z_0} f(z) = a$, h está definida en los puntos $f(z)$, $\lim_{w \to a} h(w) = c$, entonces $\lim_{z \to z_0} h(f(z)) = c$.

   Solución. Dada $\epsilon > 0$ se tiene que existe $\delta_1 > 0$, tal que si $|w - a| < \delta_1$, entonces $|h(w) - c| < \epsilon$. Para esta δ_1, existe $\delta_2 > 0$, tal que si $|z - z_0| < \delta_2$, entonces $|f(z) - a| < \delta_1$.

   Por lo tanto, si $|z - z_0| < \delta_2$, entonces $|f(z) - a| < \delta_1$, pero entonces $|h(f(z)) - c| < \epsilon$, lo que demuestra el resultado.

6. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida como $f(0) = 0$ y $f(r[\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta]) = \operatorname{sen}\theta$ si $r > 0$. Muestre que f es discontinua en 0 pero es continua en cualquier otro punto.

   Solución. Como $f(0) = 0$, para ver que f es discontinua en 0, es suficiente mostrar que $\lim_{z \to 0} f(z) \neq 0$. Para esto, considere $z = r\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$,

$r > 0$, es decir, puntos en el eje imaginario positivo, y haga $r \to 0$. Entonces, $\lim_{r\to 0} f\left(r\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)\right) = \lim_{r\to 0}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$. Por lo tanto, f no es continua en 0.

Para ver que f es continua en puntos $z \neq 0$, note que $\operatorname{sen}\theta$ es una función continua en θ.

7. Para cada uno de los siguientes conjuntos, establezca si es o no abierto y si es o no es cerrado.

   a) $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathsf{Im}(z) > 2\}$.

   b) $B = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 2\}$.

   c) $C = \{z \in \mathbb{C} \mid -1 < \mathsf{Re}(z) \leq 2\}$.

   Solución.

   a) El conjunto A es abierto porque no contiene los puntos frontera $z = x + 2i$ y no es cerrado porque su complemento no es abierto ya que contiene a los puntos frontera $z = x + 2i$, ver figura 1.3.

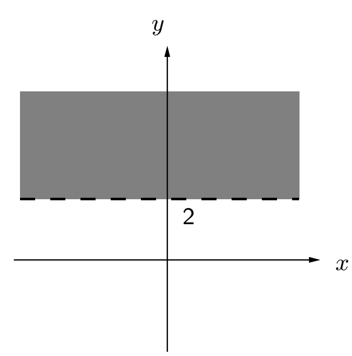


Figura 1.3: Conjunto A.

   b) El conjunto B es cerrado por contener todos sus puntos frontera, luego B no es abierto, ver figura 1.4.

   c) El conjunto C no es ni abierto, ni cerrado porque la frontera izquierda del conjunto no está contenida pero la frontera derecha si, ver figura 1.5.

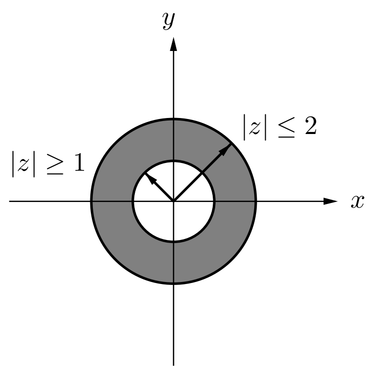


Figura 1.4: Conjunto B.

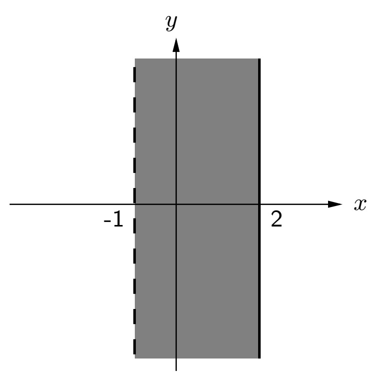


Figura 1.5: Conjunto C.

8. Para cada uno de los siguientes conjuntos establezca si es o no conexo y si es o no compacto.

    a) $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < \text{Re } (z) \leq 2\}$.
    b) $B = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 \leq |z| \leq 3\}$.
    c) $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 5 \text{ y } |\text{Im}(z)| \geq 1\}$.

    Solución.

    a) El conjunto *no es compacto* porque no es cerrado ni acotado. *Es conexo*, por ser conexo por trayectorias, ver figura 1.6.

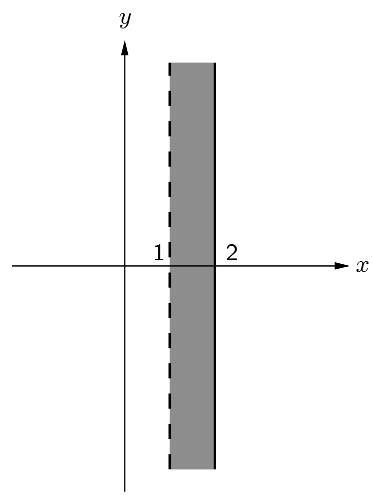


Figura 1.6: Conjunto A.

b) El conjunto *es compacto*, por ser cerrado y acotado y *es conexo*, por ser conexo por trayectorias, ver figura 1.7.

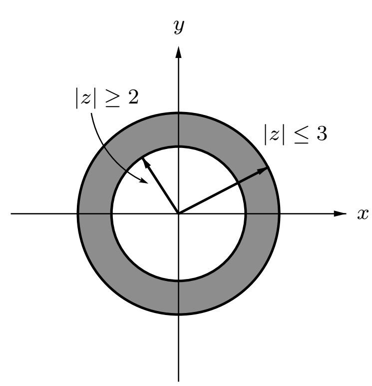


Figura 1.7: Conjunto B.

c) El conjunto *es compacto* por ser cerrado y acotado, pero *no es conexo* ya que no hay una trayectoria del punto $1+i$ al $1-i$, ver figura 1.8.

9. Muestre que $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es continua si y sólo si $z_n \to z_0$ en A implica que $f(z_n) \to f(z_0)$.

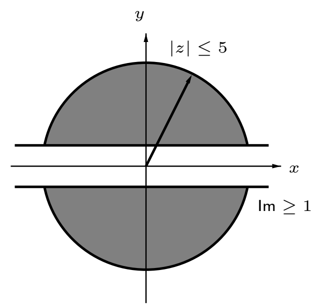


Figura 1.8: Conjunto C.

Solución. Suponga que f es continua en A, y sea $\{z_n\}$ una sucesión en A tal que $z_n \to z_0 \in A$. Como f es continua en z_0, dada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$, entones $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Para esta $\delta > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq N$ entonces $|z_n - z_0| < \delta$, por la convergencia de z_n a z_0. Luego, como $|z_n - z_0| < \delta$ si $n \geq N$, entonces $|f(z_n) - f(z_0)| < \epsilon$, es decir, $f(z_n) \to f(z_0)$.

Recíprocamente, suponga que existe $z_0 \in A$, tal que f no es continua en z_0, es decir existe $\epsilon > 0$, tal que para toda $\delta > 0$, existe z con $|z - z_0| < \delta$ y $|f(z) - f(z_0)| > \epsilon$.
Para $\delta = 1$, existe z_1 con $|z_1 - z_0| < 1$ tal que $|f(z_1) - f(z_0)| > \epsilon$.
Para $\delta = \frac{1}{2}$, existe z_2 con $|z_2 - z_0| < \frac{1}{2}$ tal que $|f(z_2) - f(z_0)| > \epsilon$.
Para $\delta = \frac{1}{3}$, existe z_3 con $|z_3 - z_0| < \frac{1}{3}$ tal que $|f(z_3) - f(z_0)| > \epsilon$, y así sucesivamente. Por lo tanto se ha encontrado una sucesión $\{z_n\}$ tal que $z_n \to z_0$ pero $f(z_n) \nrightarrow f(z_0)$.

10. Muestre que la intersección de cualquier colección finita de subconjuntos abiertos en $\mathbb{C}$ es abierta.

    Solución. Sea $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ una colección finita de subconjuntos abiertos, por demostrar que $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ es abierto.

    Sea $z \in A$, entonces existen discos abiertos N_i con centros en z y radios ϵ_i, tal que $N_i \subset A_i$ para toda $i = 1, 2, \ldots, n$. Haga $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n\}$, y sea N el disco con centro en z y radio ϵ, entonces $N \subset A_i$ para toda $i = 1, 2, \ldots, n$, luego $N \subset A$, por lo tanto A es abierto.

11. Demuestre que si f es una función continua en un conjunto abierto A

en $\mathbb{C}$ y h es continua en $f(A)$, entonces la función composición $(h \circ f)(z) = h(f(z))$ es continua en A, usando que si $\lim_{z\to z_0} f(z) = a$ y h es una función definida en una vecindad de a y continua en a, entonces $\lim_{z\to z_0} h(f(z)) = h(a)$.

Solución. Para mostrar que $h \circ f : A \to \mathbb{C}$ es continua en A, basta probar que $h \circ f$ es continua en cada punto de A.

Sea $z_0 \in A$, luego como f es continua en A, se tiene que $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$. Como h es continua en $f(A)$, lo es en $f(z_0)$, luego $\lim_{z\to z_0} h(f(z)) = h(f(z_0))$, por lo tanto $h \circ f$ es continua en z_0.

12. Defina la **métrica Cordal** ρ en $\hat{\mathbb{C}}$ haciendo $\rho(z_1, z_2) = d(z_1', z_2')$ donde z_1' y z_2' son los puntos correspondientes en la esfera de Riemann y d es la distancia usual entre puntos de $\mathbb{R}^3$.

    a) Muestre que $z_n \to z$ en $\mathbb{C}$ si y sólo si $\rho(z_n, z) \to 0$.

    b) Muestre que $z_n \to \infty$ en $\mathbb{C}$ si y sólo si $\rho(z_n, \infty) \to 0$.

    c) Si $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ y $ad - bc \neq 0$, muestre que f es continua en ∞.

Solución. Recuerde que si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, el punto correspondiente en la esfera de Riemman z' tiene coordenadas $z' = \left(\frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$. A la función $z \mapsto z'$ se le conoce como la proyección estereográfica.

a) El hecho de que $z_n \to z$ en $\mathbb{C}$ es equivalente a tener que $|z_n| \to |z|$, Re $z_n \to$ Re z e Im $z_n \to$ Im z. Note que

$$\begin{aligned}
\rho(z_n, z) &= d(z_n', z') \\
&= \left[\left(\frac{2\ \mathrm{Re}\ z_n}{|z_n|^2+1} - \frac{2\ \mathrm{Re}\ z}{|z|^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2\ \mathrm{Im}\ z_n}{|z_n|^2+1} - \frac{2\ \mathrm{Im}\ z}{|z|^2+1}\right)^2\right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{|z_n|^2-1}{|z_n|^2+1} - \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

de donde $\rho(z_n, z) \to 0$ si y sólo si $z_n \to z$.

b) El punto ∞ en $\hat{\mathbb{C}}$ corresponde a $N = (0, 0, 1)$, además $z_n \to \infty$ es equivalente a $|z_n| \to \infty$, luego

$$\begin{aligned}\rho(z_n,\infty) &= d(z_n',N)\\ &= \left[\left(\frac{2\ \mathrm{Re}\ z_n}{|z_n|^2+1}\right)^2+\left(\frac{2\ \mathrm{Im}\ z_n}{|z_n|^2+1}\right)^2\right.\\ &\qquad \left.+\left(\frac{|z_n|^2-1-|z_n|^2-1}{|z_n|^2+1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

luego, $\rho(z_n,\infty) \to 0$ cuando $|z_n| \to \infty$. Por lo que $z_n \to \infty$ si y sólo si $\rho(z_n,\infty) \to 0$.

c) $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$, $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$. Para ver que es continua en ∞, se tiene que ver que $\lim_{z\to\infty} f(z) = f(\infty)$. Pero si definimos $f(\infty) = \frac{a}{c}$, es claro que $\lim_{z\to\infty} f(z) = f(\infty)$.

1.5. Funciones analíticas

Una vez que hemos estudiado la noción de continuidad para funciones complejas, el siguiente paso natural es definir el concepto de la derivada compleja.

Definición 1.5.1 *Sea $f : A \to \mathbb{C}$, donde $A \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto. Entonces se dice que f es diferenciable (en el sentido complejo) en $z_0 \in A$ si*

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

existe. Este límite se denota por $f'(z_0)$ o por $df/dz(z_0)$. Se dice que f es analítica en A si f es compleja-diferenciable en cada $z_0 \in A$.

La diferencia más importante entre las funciones diferenciables en el sentido real y las complejo-diferenciables, radica en que estas últimas satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Teorema 1.5.2 (Cauchy-Riemann) *Sea $f : A \to \mathbb{C}$, donde $A \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto con $f = u + iv$. Entonces $f'(z_0)$ existe si y sólo si f es diferenciable en el sentido de las variables reales, y en $(x_0, y_0) = z_0$ las funciones u, v satisfacen*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(llamadas las ecuaciones de Cauchy-Riemann).

Observación 1.5.3 *(i) Usando el teorema anterior, la derivada de una función analítica se puede expresar como*

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \ \text{ y } \ f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}.$$

(ii) A una función analítica en todo el plano complejo se le llama función entera.

Un teorema básico del análisis real es el teorema de la función inversa. Aquí enunciamos la contraparte compleja.

Teorema 1.5.4 (Función Inversa) *Sea $f : A \to \mathbb{C}$, analítica donde $A \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto, con f' continua y tal que $f'(z_0) \neq 0$. Entonces existe una vecindad U de z_0 y una vecindad V de $f(z_0)$ tal que $f : U \to V$ es una biyección y su función inversa f^{-1} es analítica con derivada dada por*

$$\frac{d}{dw}f^{-1}(w) = \frac{1}{f'(z)} \quad \text{donde } \ w = f(z).$$

Las partes real e imaginaria de una función analítica $f = u + iv$, deben satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann. La manipulación de estas ecuaciones nos llevan a otra propiedad importante que deben satisfacer estas funciones u y v.

Definición 1.5.5 *Una función dos veces continuamente diferenciable $u : A \to \mathbb{R}$ definida en un conjunto abierto A, es llamada armónica si*

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Luego, si $f = u + iv$ es analítica, entonces u, v son armónicas, y de hecho decimos que u y v son conjugadas armónicas.

Observación 1.5.6 *La función $f(z) = z^n$ es analítica en todo $\mathbb{C}$. Para ver esto, se tiene que determinar si el límite siguiente existe, para cualquier $z_0 \in \mathbb{C}$,*

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} &= \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + z_0^{n-1})}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \to z_0} (z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + z_0^{n-1}) = nz_0^{n-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función $f(z) = z^n$ es analítica en cualquier z_0, con derivada $f'(z_0) = nz_0^{n-1}$. Luego, todo polinomio también es una función analítica.

A continuación presentamos una serie de problemas acerca de los temas descritos en esta sección, todos ellos relacionados con la definición de analiticidad de las funciones complejas.

1. Determine los conjuntos en los cuales las siguientes funciones son analíticas y calcule sus derivadas:

   a) $3z^2 + 7z + 5$.

   b) $(2z + 3)^2$.

   c) $\dfrac{3z - 1}{3 - z}$.

   Solución.

   a) $f(z) = 3z^2 + 7z + 5$ es analítica en todo $\mathbb{C}$ ya que f es un polinomio, además $f'(z) = 6z + 7$.

   b) $f(z) = (2z + 3)^2$ es un polinomio, entonces es analítica en todo $\mathbb{C}$ y $f'(z) = 4(2z + 3)$.

   c) $f(z) = \frac{3z-1}{3-z}$ es analítica en $A = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 3\}$, la derivada es $f'(z) = \frac{(3-z)3-(3z-1)(-1)}{(3-z)^2} = \frac{9-3z+3z-1}{(3-z)^2} = \frac{8}{(3-z)^2}$.

2. Para $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ diferenciable y $f : A \to \mathbb{C}$ analítica, con $\gamma([a, b]) \subset A$, pruebe que $\sigma = f \circ \gamma$ es diferenciable con $\sigma'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$.

   Solución. Se mostrará la diferenciabilidad de σ en $t_0 \in [a, b]$. Sea $z_0 = \gamma(t_0)$ y para $z \in A$ defina

   $$h(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0) & , \quad z \neq z_0 \\ 0 & , \quad z = z_0. \end{cases}$$

   Como $f'(z_0)$ existe, entonces h es continua. Por la continuidad de la composición de funciones continuas, se tiene que

   $$\lim_{t \to t_0} h \circ \gamma(t) = h(z_0) = 0.$$

   De la definición de h y haciendo $z = \gamma(t)$, se obtiene que $f \circ \gamma(t) - f(z_0) = [h(\gamma(t)) + f'(z_0)](\gamma(t) - z_0)$, aún si $\gamma(t) = z_0$.

Para $t \neq t_0$ se tiene que

$$\frac{f \circ \gamma(t) - f \circ \gamma(t_0)}{t - t_0} = \left[h\left(\gamma(t)\right) + f'(z_0)\right] \cdot \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}.$$

Cuando $t \to t_0$, el lado derecho de la ecuación tiende a $(0 + f'(z_0)) \cdot \gamma'(t_0) = f'\left(\gamma(t_0)\right) \cdot \gamma'(t_0)$.

3. Estudie el comportamiento infinitesimal de las siguientes funciones en los puntos indicados:

   a) $f(z) = 2z + 5, \quad z_0 = 5 + 6i$.

   b) $f(z) = z^4 + 4z, \quad z_0 = i$.

   c) $f(z) = \dfrac{1}{z-1}, \quad z_0 = i$.

   Solución. En este problema se utilizará el **teorema de la transformación conforme**: Si $f : A \to \mathbb{C}$ es analítica y si $f'(z_0) \neq 0$, entonces f es conforme en z_0 con $\theta = \arg f'(z_0)$ y $r = |f'(z_0)|$.

   Esencialmente, el resultado señala que en los puntos donde la derivada de una función analítica no se anula, la función preserva ángulos entre curvas que se intersectan en esos puntos, para más detalles ver [6].

   a) Al calcular $f'(z)$ en z_0, se obtiene $f'(z_0) = 2 \neq 0$. Así f rota localmente con ángulo $0 = \arg(2)$ y multiplica longitudes por $2 = |f'(z_0)|$. Si γ es cualquier curva que pasa a través de $z_0 = 5 + 6i$, la curva imagen tendrá, en $f(z_0)$ su vector tangente multiplicado por un factor 2.

   b) Se calcula $f'(z) = 4z^3 + 4$, entonces $f'(z_0) = 4 - 4i \neq 0$. Así f rota localmente con ángulo $-\frac{\pi}{4} = \arg(4 - 4i)$ y multiplica longitudes por $4\sqrt{2} = |f'(z_0)|$. Si γ es cualquier curva que pasa a través de $z_0 = i$, la curva imagen tendrá en $f(z_0)$, su vector tangente rotado por $-\frac{\pi}{4}$ y alargado por un factor $4\sqrt{2}$.

   c) Se calcula $f'(z) = \frac{-1}{(z-1)^2}$, entonces $f(z_0) = f(i) = \frac{-1}{(i-1)^2} = \frac{-1}{-2i} = \frac{-i}{2} \neq 0$. Así f rota localmente con ángulo $\frac{3\pi}{2} = \arg(\frac{-i}{2})$ y multiplica longitudes por $\frac{1}{2} = |f'(z_0)|$. Si γ es cualquier curva que pasa a través de $z_0 = i$, la curva imagen tendrá en $f(z_0)$, su vector tangente rotado por $\frac{3\pi}{2}$ grados y alargado por un factor $\frac{1}{2}$.

4. Use el teorema de la función inversa para mostrar que si $f : A \to \mathbb{C}$ es analítica y $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in A$, entonces f transforma conjuntos abiertos de A en conjuntos abiertos.

   Solución. Sea $U \subset A$ abierto, se tiene que mostrar que $f(U)$ es abierto. Sea $w_0 \in f(U)$, es decir, existe $z_0 \in U$ tal que $f(z_0) = w_0$. Como $f'(z_0) \neq 0$, por el teorema de la función inversa, existen U_1, V_1 abiertos con $z_0 \in U_1$, $f(z_0) \in V_1$ y $f : U_1 \to V_1$ biyectiva. Sea $h : V_1 \to U_1$ la inversa de f. Como $z_0 \in U$ y U es abierto, existe un disco abierto D con centro en z_0 tal que $z_0 \in D \subset U$, luego $W = D \cap U_1$ es un abierto que contiene a z_0 y $W \subset U_1$, de donde $f(W) \subset V_1 \cap f(U)$, además $w_0 = f(z_0) \in f(W)$ y $f(W) = h^{-1}(W)$. Note que h es analítica, por lo que es continua y como W es abierto, $h^{-1}(W)$ es un abierto que contiene a w_0 y está contenido en $f(U)$, por lo tanto $f(W)$ es una vecindad abierta de w_0 en $f(U)$, lo cual muestra que $f(U)$ es abierto.

5. Demuestre que $f(z) = |z|$ no es analítica.

   Solución. Suponga que f es analítica, entonces debe cumplir con las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Para $z = x + iy$, se tiene que $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{|z|}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{|z|}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$
   por lo que
$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial u}{\partial y} \neq \frac{\partial v}{\partial x}.$$
   Por lo tanto, f no es analítica.

6. Realice cuidadosamente los cálculos para mostrar que las ecuaciones de Cauchy-Riemann, en términos de coordenadas polares, son
$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$
   por medio del siguiente procedimiento. Sea f definida en el conjunto abierto $A \subset \mathbb{C}$ (esto es, $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) y suponga que $f(z) = u(z) + iv(z)$. Sea $T : [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ donde $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$,

dada por $T(\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$. Así T es uno a uno y sobre en el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \geq 0\}$. Defínase $\widetilde{u}(\theta, r) = u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ y $\widetilde{v}(\theta, r) = v(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$. Demuestre que:

a) T es continuamente diferenciable y tiene una inversa continuamente diferenciable.

b) f es analítica en $A\backslash\{x+iy \mid y = 0, x \geq 0\}$ si y sólo si $(\widetilde{u}, \widetilde{v}) : T^{-1}(A) \to \mathbb{R}^2$ es diferenciable y

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \theta}$$

en $T^{-1}(A)$.

Solución.

a) La función $T : (0, 2\pi)\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ está dada por $T(\theta, r) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, entonces la matriz derivada de T es

$$[T'] = \begin{pmatrix} -r\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ r\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}.$$

Luego, el determinante de $[T']$ es $-r\operatorname{sen}^2\theta - r\cos^2\theta = -r \neq 0$. Por lo tanto, $[T']$ es invertible y por el teorema de la función inversa, T es continuamente diferenciable con inversa continuamente diferenciable.

b) La función $f : A \setminus \{x+iy \mid y = 0, x \geq 0\} \to \mathbb{R}$ es analítica si y sólo si $\tilde{u}, \tilde{v} : T^{-1}(A) \to \mathbb{R}$ son diferenciables (con $f = \tilde{u} + i\tilde{v}$ y si $\tilde{u}, \tilde{v}$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $T^{-1}(A)$,

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta}$$

lo cual se muestra a continuación.

Puesto que $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$, la regla de la cadena implica que

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Al resolver para $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$ se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Similarmente,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \operatorname{sen}\theta\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

y así, las ecuaciones de Cauchy-Riemann resultan

$$\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = \operatorname{sen}\theta\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

y

$$\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\cos\theta\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

Si se multiplica la primera ecuación por $\cos\theta$ y la segunda por $\operatorname{sen}\theta$ y se suman, se obtiene que $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$. Similarmente, $\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$.

7. Defina los símbolos $\frac{\partial f}{\partial z}$ y $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ como

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

   a) Demuestre que si f es analítica, entonces $f' = \frac{\partial f}{\partial z}$.
   b) Si $f(z) = z$, demuestre que $\frac{\partial f}{\partial z} = 1$ y $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.
   c) Si $f(z) = \bar{z}$, demuestre que $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 1$.
   d) Demuestre que los símbolos $\frac{\partial f}{\partial z}$ y $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ cumplen las reglas de suma, producto y multiplicación por escalar para las derivadas.
   e) Demuestre que la expresión $\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} a_{nm}z^n\bar{z}^m$ es una función analítica de z si y sólo si $a_{nm} = 0$ siempre que $m \neq 0$.

Solución.

a) Como f es analítica en A entonces $f'(z)$ existe, luego

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \ \text{ y } \ f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{i}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}. \quad (1.3)$$

Sustituya (1.3) en $\frac{\partial f}{\partial z}$, para obtener

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(f'(z) + f'(z)\right) = \frac{1}{2}2f'(z) = f'(z),\end{aligned}$$

por lo tanto, $f' = \frac{\partial f}{\partial z}$.

b) Sea $f(z) = z = x + iy$, usando el inciso a) se tiene $\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{i}i\right) = 1$ y $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{i}i\right) = 0$.

c) Sea $f(z) = \bar{z} = x - iy$, usando el inciso a) se tiene $\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{i}i\right) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{i}i\right) = 1$.

d) Se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial(f+g)}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(f+g)}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial(f+g)}{\partial y}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{i}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial g}{\partial y}\right)\\ &= \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple la regla de suma $\frac{\partial(f+g)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z}$.
Análogamente,

$$\begin{aligned}\frac{\partial(f\cdot g)}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(f\cdot g)}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial(f\cdot g)}{\partial y}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}g + \frac{\partial g}{\partial x}f + \frac{1}{i}\left(\frac{\partial f}{\partial y}g + \frac{\partial g}{\partial y}f\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}g + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}g\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x}f + \frac{1}{i}\frac{\partial g}{\partial y}f\right)\\ &= \frac{\partial f}{\partial z}g + \frac{\partial g}{\partial z}f.\end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple la regla del producto $\frac{\partial(f\cdot g)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}g + \frac{\partial g}{\partial z}f$.
Sea $c \in \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial(cf)}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(cf)}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial(cf)}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(c\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{c}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\ &= \frac{c}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = c\frac{\partial f}{\partial z}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple la regla de la multiplicación por escalar $\frac{\partial(cf)}{\partial z} = c\frac{\partial f}{\partial z}$.

e) Sea $H(z,\bar{z})=\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}a_{nm}z^n\bar{z}^m$ una función analítica, entonces $\frac{\partial H}{\partial \bar{z}}=0$ por ser analítica. Luego,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}a_{nm}z^n\bar{z}^m &= \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}a_{nm}z^n\bar{z}^m\\ &= \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}a_{nm}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}z^n\bar{z}^m\\ &= \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}a_{nm}\left(z^n\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\bar{z}^m+\frac{\partial}{\partial \bar{z}}z^n\cdot\bar{z}^m\right)\\ &= \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}a_{nm}z^n m\bar{z}^{m-1}=0.\end{aligned}$$

Así,

$$\sum_{n=0}^{N}\left(a_{n0}z^n\cdot 0\cdot\bar{z}^{-1}+a_{n1}z^n\bar{z}^0+a_{n2}z^n\cdot 2\cdot\bar{z}^1+\cdots\right)=0,$$

por lo tanto, $a_{nm}=0$ para todo $m\neq 0$.
Ahora, suponga que $a_{nm}=0$ para todo $m\neq 0$, entonces

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}a_{nm}z^n\bar{z}^m=\sum_{n=0}^{N}a_{n0}z^n,$$

de donde es analítica.

8. *a*) Sea $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ una función analítica en un conjunto conexo A. Si $au(x,y)+bv(x,y)=c$ en A, donde a, b, c son constantes reales no todas 0, demuestre que f es constante en A.

   b) ¿El resultado obtenido en a) es aún válido si a, b, c son constantes complejas?

Solución.

a) En la ecuación $au(x,y)+bv(x,y)=c$, no es posible tener $a=b=0$, ya que en este caso $c=0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, se puede suponer que $a^2+b^2 \neq 0$. Derivando con respecto a x y con respecto a y, obtenemos

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial v}{\partial x}=0, \quad a\frac{\partial u}{\partial y}+b\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial v}{\partial x}&=0\\ b\frac{\partial u}{\partial x}-a\frac{\partial v}{\partial x}&=0 \end{aligned}$$

con incógnitas $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ y constantes a, b.
El sistema se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}=0.$$

La matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ tiene determinante $-(a^2+b^2) \neq 0$, por lo que el sistema tiene una única solución $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=0$. Por lo tanto $f'=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}=0$, y como A es conexo, se tiene que f es constante en A.

b) El resultado es válido si a, b, c son complejos, ya que siguen siendo constante.

9. Sea $f(z)=\frac{z^5}{|z|^4}$ si $z \neq 0$ y $f(0)=0$.

a) Muestre que $\frac{f(z)}{z}$ no tiene límite cuando $z \to 0$.

b) Si $u=$Ref y $v=$Imf, muestre que $u(x,0)=x,\ v(0,y)=y,\ u(0,y)=v(x,0)=0$.

c) Concluya que las parciales de u y v existen, y que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen, pero que $f'(0)$ no existe. ¿Contradice esta conclusión el teorema de Cauchy-Riemann?

d) Repita el ejercicio (c), haciendo $f=1$ en los ejes x y y, y 0 en cualquier otro lado.

e) Repita el ejercicio (c) haciendo $f(z)=\sqrt{|xy|}$.

Solución.

a) Note primero que $|z|^4 = (|z|^2)^2 = (z \cdot \bar{z})^2 = z^2 \cdot \bar{z}^2$, luego

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{z^5}{z \cdot z^2 \cdot \bar{z}^2} = \frac{z^2}{\bar{z}^2}, \text{ para } z \neq 0.$$

Si $z = x$, tenemos que $\frac{f(z)}{z} = \frac{x^2}{x^2} = 1$, por lo que $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. Si $z = x + ix$, se tiene que $\frac{f(z)}{z} = \frac{x^2(1+i)^2}{x^2(1-i)^2} = \frac{2i}{-2i} = -1$ por lo que $\lim_{x+ix \to 0} \frac{f(z)}{z} = -1$. Por lo tanto, $\frac{f(z)}{z}$ no tiene límite cuando $z \to 0$.

b) Del hecho que $f(z) = \frac{z^3}{\bar{z}^2}$ es fácil ver que si $f = u + iv$, entonces $f(x,0) = \frac{x^3}{x^2} = x$ por lo que $u(x,0) = x$, $v(x,0) = 0$ y $f(0,y) = \frac{-iy^3}{-y^2} = iy$, luego $u(0,y) = 0$, $v(0,y) = y$.

c) Como $\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0}$ no existe, entonces $f'(0)$ no existe.

Ahora,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{u(h,0) - u(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{u(0,h) - u(0,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{v(h,0) - v(0,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{v(0,h) - v(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Por lo tanto, $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0,0)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)$. Esto no contradice el teorema de Cauchy-Riemann ya que es posible ver que las parciales de u y v no son continuas en 0.

d) Sea $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad xy = 0 \\ 0 & \text{si} \quad xy \neq 0 \end{cases}$ de donde $f(0,0) = 1$. Sea $f = u + iv$, en este caso $u(x,0) = u(0,y) = 1$, $v(x,0) = v(0,y) = 0$ por lo que $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = 0$, pero

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - 1}{z}$$

no existe pues si $z = (x,0) \to 0$ el límite es 0 y si $z = (x + ix) \to 0$ el límite no existe.

e) Note que $f(z) = \sqrt{|xy|} = \begin{cases} 0 & \text{si } \; xy = 0 \\ \sqrt{|xy|} & \text{si } \; xy \neq 0 \end{cases}$ por lo que es similar a los casos anteriores.

10. Sea f una función analítica en un conjunto abierto conexo A y suponga que $f^{n+1}(z)$ (la derivada $n+1$) existe y es 0 en A. Muestre que f es un polinomio de grado n.

    Solución. Use repetidamente el hecho de que si $f : A \to \mathbb{C}$ es analítica, donde A es abierto y conexo, con $f'(z) \equiv 0$, entonces f es constante en A. Sea $g_n(z) = f^{(n)}(z)$, entonces por hipótesis $g_n'(z) = f^{(n+1)}(z) = 0$ en A, luego $g_n(z)$ es una constante c_n, es decir $g_n(z) = f^{(n)}(z) = c_n$ en A.

    Sea $g_{n-1}(z) = f^{(n-1)}(z) - c_n z$, entonces $g_{n-1}'(z) = f^{(n)}(z) - c_n \equiv 0$, de donde $g_{n-1}(z) \equiv c_{n-1}$ en A, es decir, $g_{n-1}(z) = f^{(n-1)}(z) - c_n z = c_{n-1}$.

    Sea $g_{n-2}(z) = f^{(n-2)}(z) - \frac{c_n}{2} z^2 - c_{n-1} z$, entonces $g_{n-2}'(z) = f^{(n-1)}(z) - c_n z - c_{n-1} \equiv 0$ de donde $g_{n-2}(z) \equiv c_{n-2}$ en A, es decir, $g_{n-2}(z) = f^{(n-2)}(z) - \frac{c_n}{2} z^2 - c_{n-1} z = c_{n-2}$.

    Ahora es claro que continuando de manera similar, se obtiene que

    $$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

    para constantes complejas a_0, a_1, ..., a_n.

11. Verifique directamente que las partes real e imaginaria de $f(z) = z^4$ son armónicas.

    Solución. Sea $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ y $z = x+iy$ por lo que $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ y $v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3$. Entonces,

    $$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 12xy^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x^2 - 12y^2;$$

    $$\frac{\partial u}{\partial y} = -12x^2y + 4y^3, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -12x^2 + 12y^2.$$

    $$\frac{\partial v}{\partial x} = 12x^2y - 4y^3, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 24xy;$$

    $$\frac{\partial v}{\partial y} = 4x^3 - 12xy^2, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -24xy.$$

Por lo tanto, $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ y $\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$.

12. ¿En qué conjuntos son armónicas cada una de las siguientes funciones?

    a) $u(x,y) = \text{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

    b) $u(x,y) = \frac{y}{(x-1)^2+y^2}$

    Solución.

    a) Como $u(x,y) = \text{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ entonces es armónica donde $z + \frac{1}{z}$ sea analítica, esto es en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

    b) La función $u(x,y) = \frac{y}{(x-1)^2+y^2}$ es la parte imaginaria de la función $f(z) = \frac{1}{1-z}$ ya que si $z = x + iy$, entonces

    $$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-x-iy} = \frac{1}{1-x-iy} \cdot \frac{1-x+iy}{1-x+iy} = \frac{1-x+iy}{(x-1)^2+y^2}.$$

    Por lo tanto, $u(x,y)$ es armónica en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ que es donde f es analítica.

13. Si u es armónica, demuestre que, en términos de coordenadas polares,

    $$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

    Solución. Dado que u es armónica, existe v su conjugada armónica, por lo que u, v satisfaen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Por el problema (**6**) de esta sección, la forma polar de las ecuaciones de Cauchy-Riemann es

    $$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

    Luego,

    $$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) \\ &= -\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta}, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = -\frac{\partial v}{\partial \theta} + r\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial \theta}.$$

De manera similar se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-r\frac{\partial v}{\partial r}\right)\\ &= -r\frac{\partial^2 v}{\partial \theta\,\partial r}.\end{aligned}$$

Finalmente, como $r\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \theta}$, entonces

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -\frac{\partial v}{\partial \theta} + r\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \theta} - r\frac{\partial^2 v}{\partial \theta\,\partial r} = 0,$$

donde se ha usado el hecho de que las parciales mixtas de v son iguales ya que v es continuamente diferenciable.

14. Muestre que $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ es armónica en $\mathbb{C}$ y encuentre una armónica conjugada v tal que $v(0, 0) = 2$.

Solución. Para demostrar que u es armónica se tiene que ver que el Laplaciano de u es cero. Como $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x.$$

Por lo tanto $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0$. Se puede observar que $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ es la parte real de $z^3 + 2i$, así que $v(x, y) = 3x^2y - y^3 + 2$ es la conjugada armónica buscada.

15. Considere la función $f(z) = \frac{1}{z}$. Dibuje los contornos de $u = \text{Re}f = cte$ y $v = \text{Im} = cte$. ¿Cómo se intersectan?

Solución. Sea $z = x + iy$, entonces $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}$, luego

$$u(z) = \text{Re }(f(z)) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v(z) = \text{Im }(f(z)) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Si $c = 0$, $u(z) = 0$ implica que $x = 0$, es decir, todo el eje imaginario tiene parte real cero bajo f. De la misma manera, $v(z) = 0$, implica que $y = 0$,

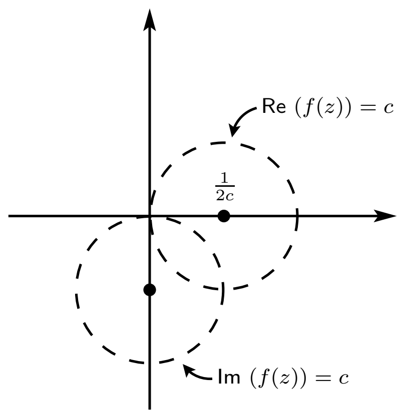


Figura 1.9: Curvas de nivel de $f(z) = \frac{1}{z}$.

es decir, todo el eje real. Por lo tanto, las curvas $u(z) = 0$ y $v(z) = 0$ son ortogonales.

Sea $c \neq 0$. $u(z) = c$, es equivalente a $c(x^2 + y^2) = x$, lo cual podemos escribir como $x^2+y^2-\frac{x}{c} = 0$, que es la ecuación de un círculo, $\left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4c^2}$, con centro en $\left(\frac{1}{2c}, 0\right)$ y radio $\frac{1}{2|c|}$.

De la misma manera, se puede ver que la curva $v(z) = c$ es el círculo $x^2 + \left(y + \frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{4c^2}$, por lo que nuevamente $u(z) = c$ y $v(z) = c$ son ortogonales.

1.6. Diferenciación de las funciones elementales

En esta sección presentamos una serie de problema acerca de la diferenciación de las funciones elementales estudiadas en la seccion 1.3.

1. Calcule la derivada y dé la región apropiada de analiticidad para cada una de las siguientes funciones:

    a) 3^z
    b) $\log(z+1)$
    c) z^{1+i}
    d) $\sqrt{z}$

e) $\sqrt[3]{z}$.

Solución.

a) Para cualquier elección de una rama para el logaritmo, la función $z \to a^z$ es entera y tiene derivada $z \to (\log a)a^z$. Entonces 3^z es analítica en $\mathbb{C}$ y la derivada en z es $3^z \log 3$.

b) Como la función $z \mapsto z+1$ es analítica en todo $\mathbb{C}$, y $\log w$ es analítica en

$$\mathbb{C} \setminus \{w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(w) = 0, \mathrm{Re}(w) \leq 0\},$$

entonces $\log(z+1)$ es analítica en

$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,(z) = 0, \mathrm{Re}\,(z) \leq -1\}.$$

La derivada es $\frac{1}{z+1}$.

c) Sea $z^{1+i} = e^{(1+i)\log z}$, entonces es analítica en

$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0, \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$$

y la derivada es $z^{1+i}\left(\frac{1+i}{z}\right) = (1+i)z^i$.

d) Sea $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\log z}$, entonces es analítica en

$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0, \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$$

y la derivada es $\frac{1}{2\sqrt{z}}$.

e) Sea $\sqrt[3]{z} = e^{\frac{1}{3}\log z}$, entonces es analítica en

$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0, \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$$

y la derivada es $\frac{1}{3\sqrt[3]{z^2}}$.

2. Determine si existen los siguientes límites complejos y encuentre sus valores, cuando corresponda.

a) $\lim_{z\to 1} \dfrac{\log z}{z-1}$.

b) $\lim_{z\to 1} \dfrac{\bar{z}-1}{z-1}$.

Solución.

a) Sea $\lim_{z\to 1} \frac{\log z}{z-1} = \lim_{z\to 1} \frac{\log z - \log 1}{z-1} = 1$, pues el límite es la derivada de la función $\log z$ en el punto $z_0 = 1$, en la rama principal.

b) Sea $z \to 1$ a lo largo del eje y, entonces $z = 1 + iy$ y $\bar{z} = 1 - iy$, así que $\lim_{z\to 1} \frac{\bar{z}-1}{z-1} = \lim_{y\to 0} \frac{1-iy-1}{1+iy-1} = \lim_{y\to 0} \frac{-iy}{iy} = -1$.
Sea $z \to 1$ a lo largo del eje x, entonces $z = x + i0 = x$ y $\bar{z} = x - i0 = x$, así que $\lim_{z\to 1} \frac{\bar{z}-1}{z-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x} = 1$. Por lo tanto el límite no existe.

3. Resuelva la ecuación $\operatorname{sen} z = w$, muestre cómo escoger un dominio y de esta manera cómo escoger una rama particular de $\operatorname{sen}^{-1} z$, de modo que sea analítica en el dominio. De la derivada en esta rama de $\operatorname{sen}^{-1} z$.

Solución. Se desea resolver la ecuación $w = \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, de donde $e^{2iz} - 1 = 2iwe^{iz}$. Haciendo $e^{iz} = u$, se obtiene $u^2 - 2iwu - 1 = 0$, por lo que resolviendo para u se obtiene que $u = iw \pm \sqrt{-w^2+1}$. Entonces, $e^{iz} = iw \pm \sqrt{1-w^2}$, por lo que hay dos soluciones para z, dependiendo la rama de $\log$ que se eliga. Si se elige una de ellas, se tiene que $z = -i\log(iw + \sqrt{1-w^2})$ es solución de la ecuación.

En esta rama de $\log$ que se ha elegido, se tiene que $\operatorname{sen}^{-1} z = -i\log(iz + \sqrt{1-z^2})$. Por lo tanto, la derivada de esta rama de $\operatorname{sen}^{-1} z$ es

$$\frac{-i}{iz+\sqrt{1-z^2}}\left(i - \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

4. Sean $u(x,y)$ y $v(x,y)$ funciones con valores reales definidas en un conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ y suponga que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en A. Demuestre que

$$u_1(x,y) = [u(x,y)]^2 - [v(x,y)]^2 \quad \text{y} \quad v_1(x,y) = 2u(x,y)v(x,y)$$

y

$$u_2(x,y) = e^{u(x,y)} \cos v(x,y) \quad \text{y} \quad v_2(x,y) = e^{u(x,y)} \operatorname{sen} v(x,y)$$

satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en A. ¿Puede usted hacer esto sin realizar ningún cálculo?

Solución. Se tiene

$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 2u(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} - 2v(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}$, $\qquad \frac{\partial v_1}{\partial x} = 2u(x,y)\frac{\partial v}{\partial x} + 2v(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}$

$\frac{\partial u_1}{\partial y} = 2u(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} - 2v(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}$, $\qquad \frac{\partial v_1}{\partial y} = 2u(x,y)\frac{\partial v}{\partial y} + 2v(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}$.

Como $u(x,y)$ y $v(x,y)$ cumplen que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, entonces

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = 2u\frac{\partial u}{\partial x} - 2v\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = -2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y} = -\left(2u\frac{\partial u}{\partial y} - 2v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial u_1}{\partial y}.$$

Por lo tanto, si satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Ahora,

$\frac{\partial u_2}{\partial x} = -e^u \operatorname{sen} v\frac{\partial v}{\partial x} + e^u \cos v\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \frac{\partial v_2}{\partial x} = e^u \cos v\frac{\partial v}{\partial x} + e^u \operatorname{sen} v\frac{\partial u}{\partial x}$

$\frac{\partial u_2}{\partial y} = -e^u \operatorname{sen} v\frac{\partial u}{\partial y} + e^u \cos v\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v_2}{\partial y} = e^u \cos v\frac{\partial v}{\partial y} + e^u \operatorname{sen} v\frac{\partial u}{\partial y}$.

Como $u(x,y)$ y $v(x,y)$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_2}{\partial y} &= e^u \cos v\frac{\partial u}{\partial x} - e^u \operatorname{sen} v\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x},\\ \frac{\partial v_2}{\partial x} &= -e^u \cos v\frac{\partial u}{\partial y} + e^u \operatorname{sen} v\frac{\partial v}{\partial y}\\ &= -\left(e^u \cos v\frac{\partial u}{\partial y} - e^u \operatorname{sen} v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial u_2}{\partial y}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, si cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Note que $u_1 = \text{Re}\left((u+iv)^2\right)$ y $v_1 = \text{Im}\left((u+iv)^2\right)$, y que $u_2 = \text{Re}\left(e^{u+iv}\right)$ y $v_2 = \text{Im}\left(e^{u+iv}\right)$.

5. Encuentre la región de analiticidad y la derivada de cada una de las siguientes funciones:

   a) $f(z) = \sqrt{z^3 - 1}$

   b) $f(z) = \operatorname{sen}\sqrt{z}$.

   Solución.

a) Como $\sqrt{z^3-1} = e^{\frac{1}{2}\log(z^3-1)}$, para determinar donde es analítica, se deben buscar que puntos del plano complejo son transformados bajo z^3-1 en la región

$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \leq 0, \mathrm{Im}(z) = 0\},$$

que es el dominio de analiticidad de la función $\log$ considerando la rama principal; o inversamente, que puntos del plano complejo son transformados bajo z^3-1 en la región

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \leq 0, \mathrm{Im}(z) = 0\}.$$

Sean 1, ω, ω^2 las raíces cúbicas de la unidad. No es díficil determinar que las tres semi-rectas, l_1, l_2, l_3 con origen en los tres puntos anteriores y que pasan por el 0, son los únicos conjuntos que se buscan, es decir, que se transforman bajo z^3-1 en la región

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \leq 0, \mathrm{Im}(z) = 0\}.$$

Por lo tanto f es analítica en $\mathbb{C} \setminus (l_1 \cup l_2 \cup l_3)$. La derivada de f es $\frac{3z^2}{2\sqrt{z^3-1}}$.

b) La función $f(z) = \operatorname{sen}\sqrt{z}$ es la composición de la función $\operatorname{sen} z$ y de la función $\sqrt{z}$. Como sen es una función analítica en todo $\mathbb{C}$, se tiene que f es analítica donde $\sqrt{z}$ lo sea. Pero se sabe que $\sqrt{z}$ es analítica en la misma región donde $\log$ es analítica, al considerar la rama principal, es decir, en la región $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,(z) \leq 0, \mathrm{Im}\,(z) = 0\}$. La derivada de f es $\frac{1}{2\sqrt{z}}\cos\sqrt{z}$.

6. Muestre que la función $z \mapsto z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$ es analítica en el dominio de $\log z$ (por ejemplo en la rama principal) y tiene derivada

$$z \mapsto \frac{1}{n} z^{\left(\frac{1}{n}\right)-1}.$$

Solución. Se sabe que la función $f(z) = \sqrt[n]{z}$ es la función inversa de $g(z) = z^n$, y está definida en la rama principal de $\log$. Como $g'(z) = nz^{n-1} \neq 0$ en la rama principal, se tiene por el teorema de la función inversa, que $g(z)$ tiene localmente una inversa analítica. Puesto que la inversa es única, esta debe ser $f(z)$.

La derivada de $g^{-1}(w)$ es $\frac{1}{g'(z)}$, donde $g(z) = w$, luego

$$f'(w) = \frac{1}{nz^{n-1}} = \frac{1}{nw^{\frac{1}{n}(n-1)}} = \frac{1}{n}w^{\frac{1}{n}-1}.$$

7. Defina la rama de $\sqrt{1+\sqrt{z}}$ y muestre que es analítica.

   Solución. Note que $\log z = \log|z| + i \text{ arg } z$, donde $-\pi < \text{ arg } z < \pi$, la rama principal. Luego, $\sqrt{z} = r^{\frac{1}{2}(\log|z|+i \text{ arg } z)}$ por lo que $-\frac{\pi}{2} < \text{ arg } z < \frac{\pi}{2}$, es decir, la imagen de la función $\sqrt{z}$ está contenida en el semi-plano superior derecho, el cual está contenido en la región analíticidad de $\log z$.

   Entonces es posible definir $f(z) = \sqrt{1+\sqrt{z}}$ en la rama principal de $\log$, aquí f es analítica y $f'(z) = \frac{1}{4\sqrt{z}\cdot\sqrt{1+\sqrt{z}}}$.

Capítulo 2

Teorema de Cauchy

Una de las ventajas del análisis complejo, es que está basado en pocos pero poderosos teoremas sencillos, de los cuales son consecuencia la mayoría de los resultados del área. Entre estos teoremas, uno de los principales es el Teorema de Cauchy.

2.1. Integrales de contorno

Para poder estudiar el teorema de Cauchy, se necesita primero definir la integral de contorno. Sea $a_0 = a$, a_1, $\ldots$, $a_n = b$ una partición del intervalo $[a, b]$, decimos que una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ es una curva suave por tramos si γ es diferenciable en cada intervalo (a_i, a_{i+1}).

Definición 2.1.1 *Sea f una función continua definida en un conjunto abierto $A \subset \mathbb{C}$ y sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva suave por tramos que satisface $\gamma([a, b]) \subset A$. La expresión*

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

es llamada la integral de f a lo largo de γ.

Algunas veces es complicado calcular explicítamente algunas integrales, pero se tiene un resultado que nos dice como acotar integrales de contorno. Para ello necesitamos primero la definición de **longitud de arco** de una curva.

Definición 2.1.2 *Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, se define la longitud de arco de γ por*

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

donde $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$.

Proposición 2.1.3 *Sea f continua en un conjunto abierto A y sea γ una curva C^1 por tramos en A. Si existe una constante $M \geq 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo punto z en γ, entonces*

$$\left| \int_\gamma f \right| \leq Ml(\gamma).$$

A esta desigualdad se le conoce como la **estimación estándar**.

Así como en el cálculo real, también en los números complejos se tiene el teorema fundamental del cálculo para integrales de contorno, el cual enunciamos a continuación.

Teorema 2.1.4 *Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ una curva suave por tramos y sea F una función definida y analítica en un conjunto abierto G que contiene a γ. Entonces,*

$$\int_\gamma F'(z)dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)).$$

En particular, si $\gamma(0) = \gamma(1)$, entonces

$$\int_\gamma F'(z)dz = 0.$$

En este sentido, se tiene un teorema acerca de la independencia de la integral con respecto de la trayectoria.

Teorema 2.1.5 (Independencia con respecto de la trayectoria) *Suponga que f es una función continua en un conjunto abierto y conexo G. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) Las integrales son independientes de la trayectoria. Si z_0 y z_1 son dos puntos distintos cualesquiera en G, y γ_0 y γ_1 son trayectorias en G de z_0 a z_1, entonces

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

(ii) Las integrales a lo largo de curvas cerradas son iguales a 0. Si Γ es una curva cerrada contenida en G, entonces $\int_\Gamma f(z)dz = 0$.

(iii) Existe una antiderivada (global) de f en G. Existe una función F definida y analítica en todo G tal que $F'(z) = f(z)$ para toda z en G.

A continuación presentamos una serie de problemas que ilustran los conceptos y resultados anteriores.

1. Evalúe las siguientes integrales:

   a) $\int_\gamma x dz$, donde γ es la unión de los segmentos de recta que unen a 0 con i y luego i con $2+i$.

   b) $\int_\gamma (z^2 + 2z + 3)dz$, donde γ es el segmento de línea que une a 1 con $2+i$.

   c) $\int_\gamma \dfrac{1}{z-1}dz$, donde γ es el círculo de radio 2 con centro en 1, recorrido una vez en sentido contrario a las manecillas de reloj.

   Solución.

   a) Se define $\gamma : [0,3] \to \mathbb{C}$ como $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, donde

   $$\gamma_1(t) = 0 + it; \;\; 0 \leq t \leq 1, \qquad \gamma_2(t) = (t-1) + i; \;\; 1 \leq t \leq 3.$$

   Ahora, se puede calcular la integral como sigue,

   $$\int_{\gamma_1} x dz = \int_0^1 (0)(i)dt = 0$$

   $$\int_{\gamma_2} x dz = \int_1^3 (t-1)dt = \left[\frac{t^2}{2} - t\right]_1^3 = 2.$$

   Por lo tanto, $\int_\gamma x dz = \int_{\gamma_1} x dz + \int_{\gamma_2} x dz = 0 + 2 = 2.$

b) Si $f(z) = z^2 + 2z + 3$, entonces f tiene antiderivada, por lo que es suficiente evaluar la integral en los extremos,

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \left[\frac{1}{3}z^3 + z^2 + 3z\right]_1^{2+i} \\ &= \left[\frac{1}{3}(2+i)^3 + (2+i)^2 + 3(2+i)\right] - \left(\frac{1}{3} + 1 + 3\right) \\ &= \frac{2+11i}{3} + 3 + 4i + 6 + 3i - \frac{13}{3} \\ &= \frac{11i}{3} + 7i + 9 - \frac{11}{3} \\ &= \frac{16}{3} + \frac{32}{3}i.\end{aligned}$$

c) Se parametriza γ como $\gamma(\theta) = 2e^{i\theta} + 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Por la regla de la cadena, $\gamma'(\theta) = 2ie^{i\theta}$, y así

$$\int_\gamma \frac{1}{z-1}dz = \int_0^{2\pi} \frac{2}{(2e^{i\theta}+1)-1} ie^{i\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} id\theta = 2\pi i.$$

2. Evalúe $\int_\gamma \frac{1}{z^2-2z}dz$, donde γ es el círculo de radio 1 centrado en 2, recorrido una vez en sentido contrario a las manecillas de reloj.

Solución. Sea $\int_\gamma \frac{1}{z^2-2z}dz = \int_\gamma \frac{1}{z(z-2)}dz$ donde $\frac{1}{z(z-2)} = \frac{-1}{2z} + \frac{1}{2(z-2)}$, entonces

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{1}{z^2-2z}dz &= \int_\gamma \left(\frac{-1}{2z} + \frac{1}{2(z-2)}\right)dz \\ &= \int_\gamma \frac{-1}{2z}dz + \int_\gamma \frac{1}{2(z-2)}dz \\ &= \frac{-1}{2}\int_\gamma \frac{1}{z}dz + \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1}{z-2}dz \\ &= 0 + \frac{1}{2}2\pi i = \pi i.\end{aligned}$$

La primer integral es cero ya que $\frac{1}{z}$ tiene antiderivada dentro de γ, es decir, $\log z$ en la rama principal. Para la segunda integral, podemos escribir $\gamma(\theta) = e^{i\theta} + 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Por la regla de la cadena, $\gamma'(\theta) = ie^{i\theta}$, y así

$$\int_\gamma \frac{1}{z-2}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(e^{i\theta}+2)-2} ie^{i\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} id\theta = 2\pi i.$$

3. Demuestre que para funciones continuas f, g, constantes complejas c_1, c_2 y curvas $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ de clase C^1, se tiene que

   a)
   $$\int_\gamma (c_1 f + c_2 g) = c_1 \int_\gamma f + c_2 \int_\gamma g.$$

   b)
   $$\int_{-\gamma} f = -\int_\gamma f.$$

   c)
   $$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$$

   Solución.

   a) Por la definición de la integral de h a lo largo de γ

   $$\int_\gamma h = \int_\gamma h(z)dz = \int_a^b h(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

   Si se considera $h = c_1 f + c_2 g$, entonces

   $$\begin{aligned}
   \int_\gamma (c_1 f + c_2 g)dz &= \int_a^b (c_1 f + c_2 g)(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
   &= \int_a^b (c_1 f(\gamma(t)) + c_2 g(\gamma(t)))\,\gamma'(t)dt \\
   &= \int_a^b (c_1 f(\gamma(t))\gamma'(t) + c_2 g(\gamma(t)\gamma'(t)))\,dt \\
   &= \int_a^b c_1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt + \int_a^b c_2 g(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
   &= c_1 \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt + c_2 \int_a^b g(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
   &= c_1 \int_\gamma f dz + c_2 \int_\gamma g dz
   \end{aligned}$$

b) Note que

$$\begin{aligned}\int_{-\gamma} f dz &= \int_a^b f(\gamma(a+b-t))(-\gamma)'(a+b-t)dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(a+b-t))\gamma'(a+b-t)(-1)dt \\ &= \int_b^a f(\gamma(u))\gamma'(u)du \\ &= -\int_a^b f(\gamma(u))\gamma'(u)du \\ &= -\int_\gamma f dz,\end{aligned}$$

donde se hizo el cambio de variable $u = a + b - t$.

c) Sean $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ y $\gamma_2 : [b, c] \to \mathbb{C}$, luego $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 : [a, c] \to \mathbb{C}$ está definida como $\gamma(t) = \gamma_1(t)$ si $t \in [a, b]$, y $\gamma(t) = \gamma_2(t)$ si $t \in [b, c]$. Luego,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1+\gamma_2} f dz &= \int_a^c f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt + \int_b^c f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz.\end{aligned}$$

4. Evalúe $\int_\gamma \bar{z}^2 dz$ a lo largo de 2 trayectorias que unen $(0, 0)$ con $(1, 1)$, como sigue:

   a) γ es la línea recta que une $(0, 0)$ con $(1, 1)$.

   b) γ es la línea quebrada que une $(0, 0)$ con $(1, 0)$ y luego une $(1, 0)$ con $(1, 1)$.

   En vista de la respuesta $a)$ y $b)$, y el teorema fundamental para integrales, ¿podría ser $\bar{z}^2$ la derivada de alguna función analítica $F(z)$?

   Solución.

a) Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, con $\gamma(t) = t + it$, y sea $z = x + iy$, entonces $\bar{z}^2 = (x^2 - y^2) - 2ixy$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \bar{z}^2 dz &= \int_0^1 \left[(t^2 - t^2) - 2it^2\right](1+i)dt \\
&= \int_0^1 -2it^2(1+i)dt = \int_0^1 (-2it^2 + 2t^2)dt \\
&= \left[\frac{-2it^3}{3} + \frac{2t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{-2i}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{2i}{3}.
\end{aligned}$$

b) Sea $\gamma : [0,2] \to \mathbb{C}$ definida como $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, donde

$$\gamma_1(t) = t; \;\; 0 \le t \le 1, \qquad \gamma_2(t) = 1 + (t-1)i; \;\; 1 \le t \le 2.$$

Calculando la integral se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \bar{z}^2 dz &= \int_{\gamma_1} \bar{z}^2 dz + \int_{\gamma_2} \bar{z}^2 dz \\
&= \int_0^1 t^2 dt + \int_1^2 \left[1 - (t-1)^2 - 2i(t-1)\right] idt \\
&= \int_0^1 t^2 dt + \int_1^2 [-t^2 + 2t - 2ti + 2i]idt \\
&= \int_0^1 t^2 dt + \int_1^2 (-t^2 i + 2ti + 2t - 2)dt \\
&= \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{-t^3 i}{3} + \frac{2t^2 i}{2} + \frac{2t^2}{2} - 2t\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{3} + \left(\frac{-8i}{3} + 4i + 4 - 4\right) - \left(\frac{-i}{3} + i + 1 - 2\right) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{4i}{3} + \frac{2i}{3} + 1 = \frac{4}{3} + 2i.
\end{aligned}$$

Con respecto a la pregunta de que si $\bar{z}^2$ podría ser la derivada de alguna función analítica $F(z)$, la respuesta es no. Por el teorema de la independencia con respecto a la trayectoria, se tiene que si $\bar{z}^2$ fuera la antiderivada de alguna función $F(z)$, entonces la integral sería independiente de la trayectoria, lo cual no es cierto en este caso, como se acaba de mostrar.

5. Sea C el arco del círculo $|z| = 2$ que está en el primer cuadrante. Muestre que
$$\left|\int_C \frac{dz}{z^2+1}\right| \leq \frac{\pi}{3}.$$

Solución. Se sabe que $\left|\int_\gamma f\right| \leq Ml(\gamma)$, donde $M = $ sup $|f|$ sobre puntos en γ y donde $l(\gamma)$ es la longitud de γ. Dado que C es el arco de un círculo de radio 2 que se encuentra en el primer cuadrante, se tiene que $l(\gamma) = \pi$. Además $|z^2| - |1| \leq |z^2+1|$, entonces $\frac{1}{|z^2+1|} \leq \frac{1}{|z^2|-|1|} = \frac{1}{|z|^2-1} = \frac{1}{4-1}$, para puntos z sobre γ. Luego
$$\frac{1}{|z^2+1|} \leq \frac{1}{3}.$$
En este caso $M = \frac{1}{3}$, por lo tanto $\left|\int_C \frac{dz}{z^2+1}\right| \leq \frac{\pi}{3}$.

6. Sea γ una curva cerrada que está enteramente contenida en $\mathbb{C}\backslash\{z \mid \text{Re}(z) \leq 0\}$. Muestre que $\int_\gamma \frac{1}{z}dz = 0$.

Solución. Sean $A = \mathbb{C}\backslash\{z \mid \text{Re}(z) \leq 0\}$ y $f(z) = \frac{1}{z}$, entonces se tiene que A es un conjunto abierto y conexo en $\mathbb{C}$ y f es continua en A. Haciendo uso del teorema de la independencia de la trayectoria, ya que f tiene una antiderivada en A, se tiene que las integrales, bajo curvas cerradas contenidas en A, son iguales a cero. Si γ es una curva cerrada contenida en A, entonces $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

7. Dé algunas condiciones sobre una curva cerrada γ que garanticen que $\int_\gamma \frac{1}{z}dz = 0$.

Solución.

   a) La curva γ debe de estar contenida en un conjunto abierto conexo que sea subconjunto de $\mathbb{C}\backslash\{z \mid \text{Re}(z) \leq 0\}$, ya que este último conjunto es el dominio de definición de la antiderivada de $\frac{1}{z}$, la función $\log z$ definida en la rama principal.

   b) La curva γ debe estar contenida en un conjunto abierto conexo que sea subconjunto del plano complejo menos un semi-rayo con centro en 0, ya que en estos conjuntos es posible definir una rama de la función logaritmo, la cual es una antiderivada de $\frac{1}{z}$.

8. Demuestre que la longitud de arco $l(\gamma)$ de una curva γ, no cambia si se reparametriza la curva.

   Solución. Sea $\tilde{\gamma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to \mathbb{C}$ una reparametrización de $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, es decir, existe una función de clase C', $\alpha : [a, b] \to [\tilde{a}, \tilde{b}]$ con $\alpha'(t) > 0$, tal que $\alpha(a) = \tilde{a}$, $\alpha(b) = \tilde{b}$ y $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(\alpha(t))$. Luego,

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_a^b |\gamma'(t)|dt = \int_a^b |\tilde{\gamma}'(\alpha(t))||\alpha'(t)|dt \\ &= \int_a^b |\tilde{\gamma}'(\alpha(t))|\alpha'(t)dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} |\tilde{\gamma}'(u)|du \\ &= l(\tilde{\gamma}), \end{aligned}$$

   donde se hizo el cambio de variable $u = \alpha(t)$, por lo que $du = \alpha'(t)dt$.

2.2. El teorema de Cauchy: versión intuitiva

En esta sección se presenta la primera versión del teorema de Cauchy, la cual se puede decir que es una versión intuitiva. De hecho presentamos varias formulaciones del teorema, en donde en cada una de ellas, se tienen diferentes hipótesis.

Versión 1. Suponga que f es analítica, tal que la derivada f' es continua sobre y en el interior de una curva cerrada simple γ. Entonces

$$\int_\gamma f = 0.$$

Versión 2. Si γ es una curva cerrada simple y si f es analítica sobre y en el interior de γ, entonces

$$\int_\gamma f = 0.$$

Versión 3. Sea f analítica en una región A, y sea γ una curva cerrada simple en A. Supóngase que γ puede deformarse continuamente en otra curva cerrada simple $\tilde{\gamma}$ sin salirse de la región A, (es decir, $\tilde{\gamma}$ es homotópica a γ en A). Entonces

$$\int_\gamma f = \int_{\tilde{\gamma}} f.$$

Definición 2.2.1 *Una región $A \subset \mathbb{C}$ se llama simplemente conexa, si A es conexa y cualquer curva cerrada γ en A es homótopica a un punto en A.*

Los teoremas de independencia de la integral con respecto a la trayectoria y la existencia de la antiderivada, pueden reescribirse en el contexto de la definición anterior.

Proposición 2.2.2 *Sea f una función analítica en una región simplemente conexa A. Entonces, para cualesquiera dos curvas γ_1 y γ_2 que unen dos puntos z_0 y z_1 en A, se tiene que $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$.*

Teorema 2.2.3 (Antiderivada) *Sea f una función definida y analítica en una región simplemente conexa A. Entonces existe una función analítica F definida en A, única módulo la adición de una constante, tal que $F'(z) = f(z)$ para toda $z \in A$. Se dice que F es la antiderivada de f.*

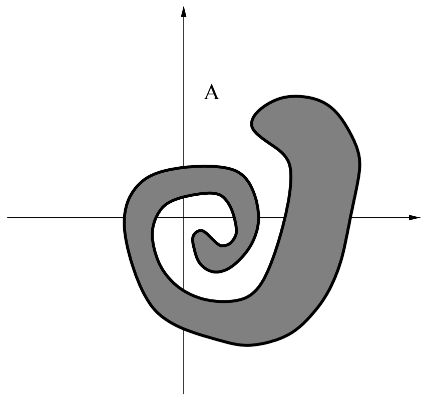
A continuación presentamos algunos problemas donde se pueden aplicar las versiones del teorema de Cauchy que acabamos de enumerar.

1. Sea γ una curva cerrada simple que contiene al 0 en su interior. Argumente informalmente que
$$\int_\gamma \frac{1}{z^2} dz = 0.$$

   Solución. Sea $f(z) = \frac{1}{z^2}$, observe que f tiene antiderivada en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ la cual es $F(z) = \frac{-1}{z}$. Si $\tilde{\gamma}$ es el círculo unitario, entonces se tiene que
$$\int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z^2} dz = 0.$$

   Por el teorema de deformación, como γ y $\tilde{\gamma}$ son curvas cerradas simples homotópicas, entonces
$$\int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z^2} dz = \int_\gamma \frac{1}{z^2} dz = 0.$$

2. Discuta la validez de la fórmula $\log z = \log r + i\theta$, para $\log$ definida en la región A que se muestra en la figura.



Solución. Si A es un región simplemente conexa tal que $0 \notin A$, entonces existe una función analítica $F(z)$ tal que $e^{F(z)} = z$, a F se le conoce como la rama de $\log$ en A y se escribe $F(z) = \log z$.

En este caso, la región A es simplemente conexa y no contiene a 0, por lo que existe tal función F. Si $z = re^{i\theta} \in A$, tenemos que $e^{F(z)} = z$, pero no se puede garantizar que $F(z) = \log r + i\theta$.

3. Evalúe $\int_\gamma \left(z - \frac{1}{z}\right) dz$, donde γ es la trayectoria de la línea recta de 1 a i.

   Solución. La función es analítica en los puntos de la trayectoria γ, entonces

$$\begin{aligned} \int_\gamma \left(z - \frac{1}{z}\right) dz &= \left[\frac{z^2}{2} - \log z\right]_1^i \\ &= \left(\frac{-1}{2} - \log i\right) - \frac{1}{2} = -1 - i\frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

   donde se considera $\log$ con la rama principal. Por lo tanto, $\int_\gamma \left(z - \frac{1}{z}\right) dz = -\left(1 + i\frac{\pi}{2}\right)$.

4. Sea γ_1 el círculo de radio 1 y sea γ_2 el círculo de radio 2, ambos centrados en el origen (recorridos en sentido contrario a las manecillas del reloj). Muestre que

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^3\left(z^2+10\right)} = \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^3\left(z^2+10\right)}.$$

   Solución. Sea $f(z) = \frac{1}{z^3(z^2+10)}$, la cual no es analítica en $z = 0$, $i\sqrt{10}$, $-i\sqrt{10}$. Entonces, es posible deformar la curva cerrada γ_1 a la curva cerrada

γ_2 en la región donde f es analítica, es decir, sin pasar por los puntos $z = 0$, $i\sqrt{10}$, $-i\sqrt{10}$.

Luego, las dos integrales son iguales por el teorema de Cauchy.

5. Evalúe $\int_\gamma \sqrt{z^2-1}dz$, donde γ es el círculo de radio $\frac{1}{2}$ centrado en 0.

   Solución. Por el ejercicio resuelto **1.6.8** en [6], se tiene que existe una rama de la función $w \mapsto \sqrt{w}$ de tal forma que $z \mapsto \sqrt{z^2-1}$ es analítica en $A = \mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0, |\operatorname{Re} z| \geq 1\}$. Como $\gamma \subset A$, se tiene por el teorema de Cauchy que $\int_\gamma \sqrt{z^2-1}dz = 0$.

2.3. El teorema de Cauchy: versión precisa

La versión precisa del teorema de Cauchy utiliza los conceptos de curvas homotópicas a un punto y de regiones simplemente conexas.

Teorema 2.3.1 (Teorema de Cauchy) *Sea f una función analítica en una región G. Sea γ una curva cerrada en G la cual es homotópica a un punto en G. Entonces*

$$\int_\gamma f = 0.$$

Teorema 2.3.2 *Si f es una función analítica en una región simplemente conexa G y γ es una curva cerrada en G, entonces*

$$\int_\gamma f = 0.$$

Veamos a continuación algunos ejemplos del uso del teorema de Cauchy.

1. Muestre que todo disco es **convexo**.

   Solución. Sea D el disco con centro z_0 y radio r, es decir, $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < r$. Para ver que D que es convexo, sean $z, w \in D$, entonces se tiene que mostrar que $tz + (1-t)w \in D$ para toda $t \in [0,1]$. Esto es equivalente a mostrar que $|tz + (1-t)w - z_0| < r$. Observe que

$$\begin{aligned} |tz + (1-t)w - z_0| &= |tz + (1-t)w - (t+1-t)z_0| \\ &= |t(z-z_0) + (1-t)(w-z_0)| \\ &\leq |t(z-z_0)| + |(1-t)(w-z_0)| \\ &< tr + (1-t)r = r, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $z, w \in D$.

2. Demuestre que un conjunto A es convexo si y sólo si tiene forma de estrella con respecto a cada uno de sus puntos.

   Solución. Si el conjunto A es convexo, entonces con centro en cualquier punto w en A, podemos considerar el segmento que une w con cualquier otro punto z en A, este segmento esta en A, por la convexidad del conjunto.

   Si A tiene forma de estrella con respecto a cualquiera de sus puntos, en particular tomando dos de ellos vemos que el segmento que lo une debe estar contenido en A, lo que implica que A es convexo.

3. Suponga que f es analítica en una región simplemente conexa A. Muestre que para cualesquiera dos curvas γ_1 y γ_2 que unen dos puntos z_0 y z_1 en A, se tiene que $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$.

   Solución. Considere la curva $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$, la cual es cerrada en A. Como A es simplemente conexo, por el teorema de Cauchy se tiene que $\int_\gamma f = 0$. Ahora, simplemente note que
$$0 = \int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f.$$

4. Evalúe $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ donde γ es el segmento de la recta que une 1 con i.

   Solución. Note que $\frac{1}{z}$ tiene antiderivada $\log z$ en la rama principal. Entonces, la integral de $\frac{1}{z}$ is independiente de la trayectoria, cuando las trayectorias se encuentren en el dominio de definición de la antiderivada. De esta forma, podemos considerar el arco del círculo unitario γ_1 que une 1 con i. Luego
$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = \frac{\pi i}{2}.$$

5. Evalúe las siguientes integrales:

   a) $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{(1-z)^3}$.

   b) $\int_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{(1-z)^3}$.

   c) $\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{(1-z)^3}$.

Solución.

a) $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{(1-z)^3} = 0$, ya que la función $\frac{1}{(1-z)^3}$ es analítica en todo el plano complejo con excepción de $z = 1$ y $z = 1$, puntos que están en el exterior del círculo de integración, por lo que el teorema de Cauchy asegura que la integral es cero.

b) $\int_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{(1-z)^3} = 0$, por la misma razón que el inciso anterior.

c) $\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{(1-z)^3} = 0$, en este caso se debe a la existencia de una antiderivada de $\frac{1}{(1-z)^3}$ en una región que contiene a la curva de integración.

2.4. Fórmula integral de Cauchy

Una de las consecuencias importantes del teorema de Cauchy es el hecho de que los valores de una función analítica están completamente determinados en cualquier lugar del interior de una curva cerrada, por sus valores a lo largo de la curva, y además proporciona una fórmula explícita que relaciona estos valores.
Antes necesitamos el concepto de índice de una curva con respecto a un punto.

Definición 2.4.1 *Sean γ una curva cerrada en $\mathbb{C}$ y z_0 un punto que no está en γ. Entonces, el índice de γ con respecto a z_0 está definido como*

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}.$$

Es decir, $I(\gamma, z_0)$ representa el número de vueltas que da γ alrededor de z_0.

Teorema 2.4.2 (Fórmula integral de Cauchy) *Sea f una función analítica en una región A y sea γ una curva cerrada contenida en A que es homotópica a un punto, y sea $z_0 \in A$ un punto que no está en γ. Entonces,*

$$f(z_0) \cdot I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

De hecho, es posible mostrar que una función analítica es en realidad infinitamente diferenciable y se tiene una fórmula integral de Cauchy para todas las derivadas.

Teorema 2.4.3 (Fórmula integral de Cauchy para las derivadas) *Sea f una función analítica en una región A. Entonces, todas las derivadas de f existen en A. Más aún, para $z_0 \in A$ y γ cualquier curva cerrada homotópica a un punto en A, tal que z_0 no está en γ, se tiene que*

$$f^{(k)}(z_0) \cdot I(\gamma, z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \ k = 1, 2, 3, \ldots$$

donde $f^{(k)}$ denota la k-derivada de f.

Teorema 2.4.4 (Desigualdad de Cauchy) *Sea f analítica en una región A y sea γ un círculo de radio R y centro z_0 que está en A. Asuma que el disco $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ también está en A. Suponga que $|f(z)| \leq M$ para toda $z \in \gamma$. Entonces, para cada $k = 0, 1, 2, \ldots$*

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{R^k} M.$$

Como una consecuencia del teorema anterior, se tiene el siguiente resultado. Recordamos que una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es **entera** si es analítica en todo $\mathbb{C}$.

Teorema 2.4.5 (Liouville) *Toda función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entera y acotada es constante.*

Finalmente, enunciamos un resultado que se puede interpretar como un recíproco parcial del teorema de Cauchy.

Teorema 2.4.6 (Morera) *Sea f una función continua en una región A y suponga que $\int_\gamma f = 0$, para cualquier curva γ cerrada en A. Entonces, f es analítica en A, y $f = F'$ para alguna función analítica F en A.*

1. Evalúe las siguientes integrales:

   a) $\int_\gamma \frac{z^2-1}{z^2+1} dz$, donde γ es el círculo de radio 2, con centro en 0.

   b) $\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} e^z}{z}$, donde γ es el círculo unitario.

   Solución.

a) Note que

$$\frac{z^2-1}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z-i} - \frac{z^2-1}{z+i}\right).$$

Para utilizar la fórmula integral de Cauchy, sea $f(z) = z^2 - 1$, luego $f(i) = f(-i) = -2$, entonces

$$-2 = f(\pm i) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^2-1}{z \pm i}dz.$$

Por lo tanto, como γ es un curva cerrada simple,

$$\int_\gamma \frac{z^2-1}{z^2+1}dz = \frac{1}{2i}\int_\gamma \left(\frac{z^2-1}{z-i} - \frac{z^2-1}{z+i}\right) dz = \frac{1}{2i}(-4\pi i + 4\pi i) = 0.$$

b) Aquí se puede tomar $f(z) = \operatorname{sen} e^z$, y aplicando la fórmula integral de Cauchy, se obtiene

$$\operatorname{sen} 1 = f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z}dz,$$

luego,

$$\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} e^z}{z}dz = 2\pi i \cdot \operatorname{sen} 1.$$

2. Sea f analítica en el interior y sobre una curva cerrada simple γ. Suponga que $f = 0$ sobre γ. Muestre que $f = 0$ en el interior de γ.

Solución. Sea z_0 un punto en el interior de γ, entonces por la fórmula integral de Cauchy

$$f(z_0) \cdot I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}dz.$$

La curva γ es simple, entonces $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz$, y como $f(z) = 0$ cuando z está sobre γ, se tiene que $\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 0$, luego $f(z_0) = 0$. Por lo tanto, $f = 0$ en el interior de γ.

3. Sea f analítica en una región A y sea γ una curva cerrada en A. Para cualquier $z_0 \in A$ que no está sobre γ, muestre que
$$\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta.$$
¿Puede usted pensar en una forma de generalizar este resultado?

   Solución. Como f es analítica en A, entonces f' también es analítica en A, lo que se sigue de la fórmula integral de Cauchy.

   Sea $z_0 \in A$, por la fórmula integral de Cauchy aplicada a f', se tiene que
$$f'(z_0) \cdot I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$$
luego,
$$\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = f'(z_0) \cdot I(\gamma, z_0) \cdot 2\pi i = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta,$$
donde la segunda igualdad se debe a la fórmula integral de Cauchy para derivadas.

   Por lo tanto,
$$\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta.$$

4. Suponga que f es entera y que $\lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{z} = 0$. Muestre que f es constante.

   Solución. Primero se mostrará que si f es entera y $|f(z)| \leq M|z|^n$ para $|z|$ grande, donde M es una constante y n es un entero positivo, entonces f es un polinomio de grado a lo más n.

   Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, para $|z| = R$ grande de tal manera que z_0 sea un punto interior de ese círculo, se tiene que $|f(z)| \leq MR^n$, por lo que aplicando la desigualdad de Cauchy (2.4.4), se tiene que
$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{R^k} MR^n = \frac{Mk!}{R^{k-n}}.$$
Entonces, si $k > n$, y haciendo $R \to \infty$, se tiene que $|f^{(k)}(z_0)| = 0$. Como z_0 fue arbitrario, por el ejercicio 10 de la seccion 1.5, se obtiene que f es un polinomio de grado a lo más n.

Regresando al problema original, la condición $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0$ es equivalente a que para toda ϵ y para $|z|$ grande se tiene que $\left|\frac{f(z)}{z}\right| < \epsilon$, es decir, $|f(z)| < \epsilon|z|$. Por lo que se demostró antes, se tiene que $f(z) = az + b$, pero como $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z\to\infty} a + \frac{b}{z} = 0$, entonces $a = 0$, por lo tanto $f(z) = b$.

5. Sea $f(z, w)$ una función continua de z y w, para z en una región A y w sobre una curva γ. Para cada w sobre γ asuma que f es analítica en z. Se define
$$F(z) = \int_\gamma f(z, w)dw.$$
Entonces, F es analítica y
$$F'(z) = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(z, w)dw.$$
Use lo anterior para demostrar que
$$F(z) = \int_0^1 e^{-z^2x^2}dx$$
es analítica en z. Calcule $F'(z)$.

Solución. El resultado enunciado al principio del problema es el ejercicio resuelto **2.4.15** de [6].

En este caso, $f(z, w) = e^{-z^2w^2}$ es continua en ambas variables, con $z \in \mathbb{C}$ y w en la curva $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(x) = x$. Además, $f(z, w)$ es analítica en z. Entonces, $F(z) = \int_\gamma f(z, w)dw = \int_0^1 e^{-z^2x^2}\gamma'(x)dx = \int_0 e^{-z^2x^2}dx$ es analítica en z.

Luego,
$$F'(z) = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(z, w)dw = \int_0^1 (-2z)e^{-z^2x^2}dx.$$

6. Muestre que si la imagen de una curva cerrada γ está en una región simplemente conexa A, y si $z_0 \notin A$, entonces $I(\gamma, z_0) = 0$.

Solución. Recuerde que el índice de la curva γ alrededor de z_0 está dada por

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}.$$

Como γ está en una región simplemente conexa A, la curva es homotópica a un punto y la función $\frac{1}{z-z_0}$ es analítica en A, ya que $z_0 \notin A$, por lo tanto $\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = 0$, es decir, $I(\gamma, z_0) = 0$.

7. Demuestre que $\int_0^\pi e^{\cos\theta}\cos(\operatorname{sen}\theta)d\theta = \pi$, considerando $\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz$, donde γ es el círculo unitario.

   Solución. Primero se calcula $\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz$. Sea $f(z) = e^z$ y $z_0 = 0$, se tiene que $f(z_0)\cdot I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz$, entonces $1 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz$. Por lo tanto $\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz = 2\pi i$.

   Por otro lado, si se parametriza $\gamma(t) = e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$, entonces

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{it}}}{e^{it}} i e^{it} dt \\ &= i\int_0^{2\pi} e^{e^{it}}dt = i\int_0^{2\pi} e^{\cos t + i\operatorname{sen} t}dz \\ &= i\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\left[\cos(\operatorname{sen} t) + i\operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)\right]dt.\end{aligned}$$

   Así, $2\pi i = i\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\left[\cos(\operatorname{sen} t) + i\operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)\right]dt$, luego

$$2\pi = \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(\operatorname{sen} t)dt \quad \text{y} \quad 0 = \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)dt.$$

   De esta forma se tiene que

$$\begin{aligned}2\pi &= \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(\operatorname{sen} t)dt \\ &= \int_0^{\pi} e^{\cos t}\cos(\operatorname{sen} t)dt + \int_\pi^{2\pi} e^{\cos t}\cos(\operatorname{sen} t)dt,\end{aligned}$$

   y como la función coseno es una función par, entonces $\int_0^\pi e^{\cos t}\cos(\operatorname{sen} t)dt = \int_\pi^{2\pi} e^{\cos t}\cos(\operatorname{sen} t)dt$, por lo tanto

$$\int_0^\pi e^{\cos\theta}\cos(\operatorname{sen}\theta)d\theta = \pi.$$

8. Considere la función $f(z) = \frac{1}{z^2}$.

   a) Se satisface que $\int_\gamma f(z)dz = 0$ para toda curva cerrada γ (que no pasa a través del origen), pero no es analítica en $z = 0$. ¿Contradice esta afirmación el teorema de Morera?

   b) La función f está acotada conforme $z \to \infty$, pero no es constante. ¿Contradice esta afirmación el teorema de Liouville?

   Solución.

   a) No se contradice el teorema de Morera, ya que f no es continua en el interior de curvas que contengan al cero, pues f no esta definida en 0.

   b) No contradice el teorema de Liouville pues la función f no es entera, al no ser analítica en 0.

9. ¿Es $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2} dz = 0$? ¿Es $\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^2} dz = 0$?

   Solución. Por la fórmula integral de Cauchy, la primera integral es

$$2\pi i = e^0 \cdot 2\pi i = \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2} dz.$$

   Para la segunda integral, observe que si $f(z) = \cos z$, entonces $f'(z) = -\operatorname{sen} z$, por lo que $f'(0) = 0$. Luego,

$$0 = f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^2} dz.$$

10. Muestre que para curvas cerradas γ_1, γ_2 se tiene que

$$I(-\gamma_1, z_0) = -I(\gamma_1, z_0)$$

   y

$$I(\gamma_1 + \gamma_2, z_0) = I(\gamma_1, z_0) + I(\gamma_2, z_0).$$

   Interprete geométricamente estos resultados.

   Solución. Por definición

$$I(-\gamma_1, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma_1} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Como $\int_{-\gamma} f dz = -\int_{\gamma} f dz$, entonces

$$I(-\gamma_1, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\gamma_1} \frac{dz}{z - z_0} = -\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z - z_0} = -I(\gamma_1, z_0).$$

Análogamente, por definición se tiene que

$$I(\gamma_1 + \gamma_2, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1+\gamma_2} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Usando que $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz$ se tiene que

$$I(\gamma_1 + \gamma_2, z_0) = I(\gamma_1, z_0) + I(\gamma_2, z_0).$$

2.5. El teorema de módulo máximo y funciones armónicas

Una de las consecuencias mas importantes de la fórmula integral de Cauchy es el teorema del módulo máximo, también llamado **el principio del módulo máximo**.

Teorema 2.5.1 (Principio del módulo máximo, versión local). *Sea f analítica en una región A y supóngase que $|f|$ tiene un máximo relativo $z_0 \in A$. Entonces, f es constante en alguna vecindad de z_0.*

Teorema 2.5.2 (Principio del módulo máximo). *Sea A un conjunto conexo, abierto y acotado, y sea $f : \bar{A} \to \mathbb{C}$ una función analítica en A y continua en $\bar{A}$. Sea M el máximo de $|f(z)|$ en la frontera de A, es decir, $M =$ sup $|f(z)|$ para z en la frontera de A. Entonces,*

1. *$|f(z)| \leq M$ para toda $z \in A$.*
2. *Si $|f(z)| = M$ para alguna $z \in A$, entonces f es constante en A.*

Una de las aplicaciones del teorema del módulo máximo es el siguiente resultado.

Teorema 2.5.3 (Lema de Schwarz). *Sea f analítica en el disco abierto unitario $\mathbb{D}$ tal que $|f(z)| \leq 1$ para $z \in \mathbb{D}$ y $f(0) = 0$. Entonces $|f(z)| \leq |z|$ para toda $z \in \mathbb{D}$ y $|f'(0)| \leq 1$. Si $|f(z_0)| = |z_0|$ para algún $z_0 \in \mathbb{D}$, $z_0 \neq 0$, entonces $f(z) = cz$ para toda $z \in \mathbb{D}$ y para alguna constante c, con $|c| = 1$.*

Se mencionó anteriormente que si $f = u + iv$ es una función analítica, entonces u, v son funciones armónicas. De hecho el recíproco también es cierto.

Proposición 2.5.4 *Sea A una región en $\mathbb{C}$ y sea u una función armónica, dos veces continuamente diferenciable en A. Entonces u es C^∞, y en una vecindad de cada punto $z_0 \in A$, u es la parte real de alguna función analítica. Si A es simplemente conexo, existe una función analítica f en A tal que $u =$ Re f.*

La importancia de la proposición anterior es que nos permite mostrar algunos resultados de funciones analíticas para funciones armónicas, como el resultado siguiente o el principio del módulo máximo para funciones armónicas, tanto en su versión local como en la general.

Propiedad del valor medio para funciones armónicas. Sea u una función armónica en una región que contiene un círculo de radio r alrededor de $z_0 = x_0 + iy_0$ y a su interior. Entonces

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Un problema muy importante en matemáticas y física, es llamado el **problema de Dirichlet**: Sea A una región acotada y abierta y sea u_0 una función continua dada en fr(A). Encuentre una función de valores reales u en $\overline{A}$ que es continua en $\overline{A}$ y armónica en A, y que es igual a u_0 en fr(A).
A pesar de que la solución del problema es complicado, la unicidad es fácil de mostrar. Cuando la región A es un disco abierto, la solución al problema de Dirichlet se puede encontrar explícitamente. En ese sentido, se tiene el siguiente resultado.

Fórmula de Poisson. Si u está definida y es continua en el disco cerrado $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ y es armónica en el disco abierto $\mathbb{D}_r$, entonces para $\rho < r$,

$$u(\rho e^{i\phi}) = \frac{r^2 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(re^{i\theta})}{r^2 - 2r\rho\cos(\theta - \phi) + \rho^2} d\theta.$$

A continuación presentamos una serie de problemas relacionados con los resultados de esta sección.

1. Encuentre el máximo de $|\cos z|$ en $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

Solución. Se tiene que $\cos z$ es una función entera, y entonces se puede aplicar el principio del módulo máximo, el cual dice que el máximo ocurre en la frontera del cuadrado.

Ahora, usando que $\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cos(iy) + i \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(iy) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$, se tiene que

$$\begin{aligned} |\cos z|^2 &= \cos^2 x \cosh^2 y + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{senh}^2 y \\ &= \cos^2 x \cosh^2 y + (1-\cos^2 x) \operatorname{senh}^2 y \\ &= \cos^2 x (\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y) + \operatorname{senh}^2 y \\ &= \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y. \end{aligned}$$

En la frontera $y = 0$, $|\cos z|^2$ tiene como máximo 1; para $x = 0$ el máximo es $1 + \operatorname{senh}^2(2\pi)$, ya que $\operatorname{senh}^2 y$ crece con y; para $x = 2\pi$ el máximo es otra vez $1 + \operatorname{senh}^2(2\pi)$; para $y = 2\pi$, el máximo es $1 + \operatorname{senh}^2(2\pi)$. Así, el máximo de $|\cos z|^2$ ocurre en $x = 0$, $x = 2\pi$ y $y = 2\pi$ y es $1+\operatorname{senh}^2(2\pi) = \cosh^2(2\pi)$. Por lo tanto, el máximo de $|\cos z|$ en $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ es $\cosh(2\pi)$.

2. *a*) Muestre que para $|z_0| < R$, la transformación

$$T : z \to \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \overline{z_0} z}$$

envía el disco abierto de radio R, en forma uno a uno y sobre, en el disco de radio 1 y envía z_0 al origen.

b) Suponga que f es analítica en el disco abierto $|z| < R$ y que $|f(z)| < M$ para $|z| < R$. Suponga también que $f(z_0) = w_0$. Muestre que

$$\left| \frac{M[f(z) - w_0]}{M^2 - \overline{w_0} f(z)} \right| \leq \left| \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \overline{z_0} z} \right|.$$

Solución.

a) Se tiene que mostrar que $T : \mathbb{D}_R \to \mathbb{D}_1$ es biyectiva, donde $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Es directo ver que $T(z_0) = 0$.

Sea z tal que $|z| = R$, entonces $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = R^2$. Como $T(z) = \frac{R(z-z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z}$, se tiene que $|Tz| = \left| \frac{R(z-z_0)}{z \cdot \bar{z} - \bar{z}_0 \cdot z} \right| = \frac{R|z-z_0|}{|z||\bar{z}-\bar{z_0}|} = \frac{R|z-z_0|}{R|\bar{z}-\bar{z_0}|} = 1$ para $|z| = R$.

Luego, T manda la frontera de $\mathbb{D}_R$ en la frontera de $\mathbb{D}$. Por el teorema del módulo máximo si $|z| < R$, entonces $|T(z)| < 1$, por lo que en efecto $T : \mathbb{D}_R \to \mathbb{D}_1$. Para ver que T es biyectiva, defina $S(z) = \frac{R^2 z + R z_0}{\bar{z}_0 z + R}$. Luego, es posible ver que $S : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_R$ y que $S \circ T(z) = z$, $T \circ S(z) = z$, es decir $S = T^{-1}$.

b) Por hipótesis $f : \mathbb{D}_R \to \mathbb{D}_M$ con $f(z_0) = w_0$. Sea $T_R : \mathbb{D}_R \to \mathbb{D}_1$ dada por $T_R(z) = \frac{R(z-z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z}$ y $T_M : \mathbb{D}_M \to \mathbb{D}_1$ dada por $T_M(z) = \frac{M(z-w_0)}{M^2 - \bar{w}_0 z}$.
Entonces, $g = T_M \circ f \circ T_R^{-1} : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_1$ con $g(0) = T_M \circ f \circ T_R^{-1}(0) = T_M \circ f(z_0) = T_M(w_0) = 0$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}_R & \xrightarrow{f} & \mathbb{D}_M \\ T_R \big\downarrow & & \big\downarrow T_M \\ \mathbb{D}_1 & \xrightarrow{g} & \mathbb{D}_1 \end{array}$$

Por el lema de Schwarz, se tiene que $|g(z)| \leq |z|$ es decir $|T_M \circ f \circ T_R^{-1}(z)| \leq |z|$. Si $w = T_R^{-1}(z)$ entonces $T_R(w) = z$ y $|T_M \circ f(w)| \leq |T_R(w)|$, luego

$$\left| \frac{M\left(f(z) - w_0\right)}{M^2 - \bar{w}_0 f(z)} \right| \leq \left| \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z} \right|.$$

3. Sea u armónica en la región acotada A y continua en $\bar{A}$. Entonces muestre que u alcanza su mínimo únicamente en fr(A), a menos que u sea constante.

   Solución. Como $u : \bar{A} \to \mathbb{R}$ es continua y armónica en A, entonces $-u : \bar{A} \to \mathbb{R}$ también es continua y armónica en A. Por el principio del máximo para funciones armónicas, existe M el máximo de $-u$ en ∂A, es decir, $-u(x,y) \leq M$ para toda $(x,y) \in \bar{A}$ y si $-u(x,y) = M$ para alguna $(x,y) \in A$, se sigue que $-u$ es constante en A.

   Por lo anterior $u(x,y) \geq -M$ para toda $(x,y) \in \bar{A}$ y si $u(x,y) = -M$ para alguna $(x,y) \in A$, entonces $-u(x,y) = M$, de donde u es constante en A.

4. Encuentre el máximo de $u = \mathrm{Re}(z^3)$ en el cuadrado unitario $[0,1] \times [0,1]$.

Solución. Sea $z = x + iy$, entonces $z^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$, luego $u(x, y) = \text{Re } z^3 = x^3 - 3xy^2$. Para encontrar el máximo de u en $[0, 1] \times [0, 1]$ sólo se tiene que analizar la frontera del cuadrado unitario.

Para $y = 0$, $u(x, y) = x^3 \leq 1$; para $x = 0$, $u(x, y) = 0$. Para $y = 1$, $u(x, y) = x^3 - 3x \leq x^3 \leq 1$; para $x = 1$, $u(x, y) = 1 - 3y^2 \leq 1$. Por lo tanto, el máximo de $u = \text{Re } z^3$ es 1.

5. Muestre que $u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ es armónica, pero que no tiene armónica conjugada en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

   Solución. Como $u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{(x^2 + y^2) - x(2x)}{(x^2 + y^2)} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{(x^2 + y^2) - y(2y)}{(x^2 + y^2)} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

   Por lo tanto, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, de donde u es armónica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

   En el ejemplo resuelto 1.5.21 en [6] se muestra que la conjugada armónica de u tiene que ser $v(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ que no está definida en todo $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

6. *a*) Demuestre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \phi) + r^2} d\theta = 2\pi$$

   para $R > r$ y cualquier ϕ.

   b) Resuelva directamente el problema de Dirichlet con la condición de ser acotada $u_0(z) = x$. Deduzca para $r < 1$,

$$r \cos\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - r^2)\cos\theta}{1 - 2r\cos(\theta - \phi) + r^2} d\theta.$$

   Solución.

a) La fórmula de Poisson permite encontrar una solución del problema de Dirichlet para el caso en que la región es un disco. Es decir, si u_0 es una función continua definida en el círculo de radio R, entonces una solución al problema de Dirichlet está dada por

$$u(re^{i\phi}) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u_0(Re^{i\theta})}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \phi) + r^2} d\theta.$$

Si se considera $u_0 \equiv 1$, entonces por la unicidad del problema de Dirichlet, se tiene que $u \equiv 1$, de donde

$$\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \phi) + r^2} d\theta = 2\pi.$$

b) De la fórmula

$$u(re^{i\phi}) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u_0(Re^{i\theta})}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \phi) + r^2} d\theta,$$

se obtiene para $u_0(z) = x$, $R = 1$ y $r < 1$, que $u(z) = x$ por la unicidad del problema de Dirichlet y que

$$r\cos\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - r^2)\cos\theta}{1 - 2r\cos(\theta - \phi) + r^2} d\theta.$$

7. Demuestre el **teorema de Hadamard de los tres círculos**: Sea f analítica en una región que contiene al conjunto $R = \{z \mid r_1 \le |z| \le r_3\}$, donde $0 < r_1 < r_2 < r_3$. Sean M_1, M_2, M_3, los máximos de $|f|$ en los círculos $|z| = r_1$, r_2, r_3, respectivamente. Entonces

$$M_2^{\log(\frac{r_3}{r_1})} \le M_1^{\log(\frac{r_3}{r_2})} M_3^{\log(\frac{r_2}{r_1})}.$$

Solución. Sea $s = \frac{\log r_2 - \log r_1}{\log r_3 - \log r_1}$, entonces la desigualdad que se quiere demostrar es equivalente a

$$\log M_2 \le (1 - s)\log M_1 + s \log M_3.$$

Sea α un número real, defina la función $u(z) = \alpha \log|z| + \log|f(z)|$, la cual es armónica (ver ejercicio **5** de esta sección) fuera de los ceros de

f. Cerca de los ceros de f, la función u tiene valores grandes negativos. Luego, por el principio del módulo máximo para funciones armónicas, u alcanza su máximo en la frontera del anillo R, específicamente, en los dos círculos $|z| = r_1$ y $|z| = r_3$.

Entonces

$$\alpha \log |z| + \log |f(z)| \leq \text{máx}\{\alpha \log r_1 + \log M_1, \alpha \log r_3 + \log M_3\},$$

para toda $z \in R$. En particular, se tiene la desigualdad

$$\alpha \log r_2 + \log M_2 \leq \text{máx}\{\alpha \log r_1 + \log M_1, \alpha \log r_3 + \log M_3\}.$$

Ahora, sea α el número real tal que los dos valores dentro del parentésis en la parte derecha de la desigualdad, sean iguales, es decir,

$$\alpha = \frac{\log M_3 - \log M_1}{\log r_1 - \log r_3}.$$

Luego, de la desigualdad anterior, se obtiene que

$$\log M_2 \leq \alpha \log r_1 + \log M_1 - \alpha \log r_2,$$

y sustituyendo el valor de α se tiene el resultado deseado.

8. Demuestre que si $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ es continua y satisface la propiedad de valor medio, entonces $u \in \mathbb{C}^\infty$ y es armónica.

   Solución. Se mostrará que u es armónica en cualquier disco D de radio r con centro en 0. Por la solución al problema de Dirichlet en un disco abierto, existe una función continua $w : \bar{D} \to \mathbb{R}$, la cual es armónica en D y coincide con u en la frontera de D.

   Como w es armónica, satisface la propiedad del valor medio, por lo que también $u - w$ satisface la propiedad, además $u - w = 0$ en la frontera de D, y como la propiedad del valor medio es suficiente para tener el principio de módulo máximo, entonces $u = w$ en todo D. En particular, u es armónica.

9. La función $f(z)$ es analítica en todo el plano complejo, e Im$f \leq 0$. Demuestre que f es una constante.

Solución. Sea $f(z) = u + iv$, entonces $-if(z) = v - iu$, luego

$$\begin{aligned} \left|e^{-if(z)}\right| &= \left|e^{v-iu}\right| \\ &= e^{v} \\ &= e^{Imf} \leq 1 \end{aligned}$$

ya que Im$f \leq 0$. Por el teorema de Liouville se concluye que $e^{-if(z)}$ es constante, por ser una función entera y acotada. Pero si $e^{-if(z)}$ es constante, es inmediato ver que f es constante.

Capítulo 3

Representación en series de funciones analíticas

Existe una forma alternativa de definir una función analítica. En algunos tratamientos de la teoría de funciones complejas, una función f es llamada analítica si localmente se representa como una serie de potencias. Si esto se puede hacer, esta serie debe ser la serie de Taylor de f.

3.1. Series convergentes y funciones analíticas

La noción de convergencia de sucesiones númericas complejas, así como la de convergencia de sucesiones de funciones de variable compleja, son las mismas que las del cálculo real. Para determinar convergencia, se pueden aplicar los criterio de la razón, de la raíz y de Cauchy, por mencionar algunos. Además, se tiene también la noción de convergencia uniforme para sucesiones de funciones complejas y de series de funciones complejas, donde es posible usar el criterio de Cauchy para determinar este tipo de convergencia.

Un resultado importante en convergencia es el siguiente.

El criterio M de Weierstrass. Sea g_n una sucesión de funciones definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$. Suponga que existe una sucesión de constantes $M_n \geq 0$ tal que

1. $|g_n(z)| \leq M_n$ para toda $z \in A$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge.

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge absoluta y uniformemente en A.

El resultado más importante en esta sección tiene que ver con la convergencia de funciones analíticas.

Teorema de convergencia analítica.

1. *Sea A una región en $\mathbb{C}$ y sea f_n una sucesión de funciones analíticas definidas en A. Si $f_n \to f$ uniformemente en cualquier disco cerrado contenido en A, entonces f es analítica. Más aún, $f_n' \to f'$ puntualmente en A y uniformemente en cualquier disco cerrado en A.*

2. *Si g_k es una sucesión de funciones analíticas definidas en una región A en $\mathbb{C}$ y $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ converge uniformemente en cualquier disco cerrado en A, entonces g es analítica en A y $g'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k'(z)$ converge puntualmente en A y también uniformemente en cualquier disco cerrado contenido en A.*

Veamos algunos ejemplos.

1. Sea c una constante compleja. Defina una sucesión por medio de $z_0 = 0$ y $z_1 = c$ y para $n \geq 1$, $z_{n+1} = z_n^2 + c$.

   a) Muestre que si $|c| > 2$, entonces $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$. (*Sugerencia*: Haga $r = |c| - 1$ y use inducción para mostrar que $|z_n| > |c| r^{n-1}$ para toda n.)

   b) Muestre que si $|c| \leq 2$ y existe un valor de k con $|z_k| > 2$, entonces $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$. (*Sugerencia*: Haga $r = |z_k| - 1$ y muestre que $|z_{k+p}| \geq |z_k| r^p$ para toda $p \geq 0$.)

   Observación: Aquellos valores de c para los cuales la sucesión z_n, definida en este problema, permanece acotada, forman un conjunto muy interesante con varios patrones agradables, llamado el **conjunto de Mandelbrot**.

   Solución.

a) Sea $r = |c| - 1$, muestre por inducción que $|z_n| > |c|r^{n-1}$ para $n \geq 2$. Para $n = 2$ se tiene que $z_2 = z_1^2 + c = c^2 + c$, luego como $|c^2 + c| > |c|^2 - |c|$, entonces $|z_2| > |c|r = |c|(|c| - 1)$.

Suponga que $|z_n| > |c|r^{n-1}$, entonces se tiene que mostrar

$$|z_{n+1}| = |z_n^2 + c| > |c|r^n,$$

pero se tiene por hipótesis de inducción que

$$|z_n^2 + c| \geq |z_n|^2 - |c| > |c|^2 r^{2n-2} - |c| = |c|(|c|r^{2n-2} - 1).$$

Luego, se tiene que mostrar que $|c|(|c|r^{2n-2} - 1) > |c|r^n$, o equivalentemente que $|c|r^{2n-2} - 1 > r^n$, lo cual es cierto para $n \geq 2$, lo que termina la inducción.

Por lo tanto, como $|c|r^{n-1} \to \infty$ cuando $n \to \infty$, ya que $r > 1$, se concluye que $z_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

b) Sea $r = |z_k| - 1$, muestre que $|z_{k+p}| \geq |z_k|r^p$ para toda $p \geq 0$. Para $p = 0$, se tiene que $|z_k| \geq |z_k|$, lo cual es cierto. Para $p = 1$, se debe mostrar que $|z_{k+1}| \geq |z_k|r$, lo cual es equivalente a mostrar que $|z_k^2 + c| \geq |z_k|(z_k - 1)$. Pero $|z_k^2 + c| \geq |z_k|^2 - |c| \geq |z_k|^2 - |z_k|$ donde la última desigualdad es cierta si y sólo si $|z_k| \geq |c|$, la cual es cierta ya que $|z_k| > 2 \geq |c|$.

Suponga que $|z_{k+p}| \geq |z_k|r^p$ y demuestre que $|z_{k+p+1}| \geq |z_k|r^{p+1}$. Observe que

$$\begin{aligned} |z_{k+p+1}| = |z_{k+p}^2 + c| &\geq |z_{k+p}|^2 - |c| \\ &\geq |z_k|^2 r^{2p} - |c| \\ &\geq |z_k|r^{p+1}, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es cierta ya que $|z_k| > 2$ y $r \geq 1$.

Por lo tanto, como $|z_{k+p}| \geq |z_k|r^p$, para todo $p \geq 0$, se tiene que $z_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

2. *a*) Muestre que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+z}$ converge en el conjunto

$$\mathbb{C} \setminus \{z = ni \mid n \text{ es un entero}\}.$$

b) Muestre que la convergencia es uniforme y absoluta en cualquier disco cerrado contenido en esta región.

Solución.

a) Sea $z = x + iy$, entonces la desigualdad $|n^2 + z| \geq n^2$ es equivalente a la desigualdad $2n^2x + x^2 + y^2 \geq 0$, la cual es cierta si $x \geq 0$.

Considere z tal que Re $(z) \geq 0$ y $z \neq ni$, para toda $n \in \mathbb{Z}$. Luego, $|n^2 + z| \geq n^2$, entonces $\frac{1}{|n^2+z|} \leq \frac{1}{n^2} = M_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Por el criterio de comparación se tiene que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+z}$ converge absolutamente, y por lo tanto, converge.

Ahora, considere el caso donde Re $(z) < 0$. Se tiene que

$$|n^2 + z| \geq |\text{Re } (n^2 + z)| = |n^2 + x|;$$

como $(1 - x)/2 \geq 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \geq (1 - x)/2$, es decir, para toda $n \geq n_0$ se tiene que $|n^2 + x| \geq (n - 1)^2$. Por lo tanto, para toda $n \geq n_0$ se tiene que $|n^2 + z| \geq (n - 1)^2$. Nuevamente, se puede aplicar el criterio de comparación para asegurar la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+z}$, ya que $\sum_{n=n_0}^{\infty} M_n$ converge, donde $M_n = \frac{1}{(n-1)^2}$.

b) Sea D un disco cerrado contenido en $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}z \geq 0, \text{Im}z \neq ni,$ para toda $n \in \mathbb{Z}\}$. Luego, $|n^2 + z| \geq n^2$ para toda $z \in D$, entonces $\frac{1}{|n^2+z|} \leq \frac{1}{n^2} = M_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Por el criterio M de Weierstrass se tiene que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+z}$ converge absoluta y uniformemente en A.

Ahora, considere un disco cerrado D contenido en $B = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) < 0\}$. Sea $x_0 = \text{mín } \{\text{Re}(z) \mid z \in D\}$. Ya que

$$|n^2 + z| \geq |\text{Re } (n^2 + z)| = |n^2 + x_0|$$

y como $(1 - x_0)/2 \geq 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \geq (1 - x_0)/2$, es decir, para toda $n \geq n_0$ se tiene que $|n^2 + x_0| \geq (n - 1)^2$. Por lo tanto, para toda $n \geq n_0$ y para toda $z \in D$, se tiene que $|n^2 + z| \geq (n - 1)^2$. Nuevamente, se puede aplicar el criterio M de Weierstrass para asegurar la convergencia absoluta y uniforme de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+z}$ en B, ya que $\sum_{n=n_0}^{\infty} M_n$ converge, donde $M_n = \frac{1}{(n-1)^2}$.

Para terminar, note que $A \cup B = \mathbb{C} \setminus \{z = ni \mid n \text{ es un entero}\}$.

3. *a*) Muestre que la sucesión de funciones $f_n(x) = \cos\left(\frac{x}{n}\right)$ converge uniformemente a la función constante $f(x) = 1$ para $x \in [0, \pi]$.

   b) Muestre que converge puntualmente a 1 en todo $\mathbb{R}$.

   c) ¿La convergencia es uniforme en todo $\mathbb{R}$?

   Solución.

   a) Observe que $|1 - f_n(x)| = |1 - \cos\left(\frac{x}{n}\right)| = 1 - \cos\left(\frac{x}{n}\right) \leq \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{n}\right)^2$. Para verificar la desigualdad, se considera la función $g(x) = \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{n}\right)^2 - 1 - \cos\left(\frac{x}{n}\right)$, luego al calcular la derivada se obtiene que $g'(x) = \frac{x}{n^2} - \frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{x}{n}$ la cual es siempre positiva ya que $x \geq \operatorname{sen} x$ para $x \in [0, \pi]$, es decir, g es una función creciente, por lo que se tiene la desigualdad considerada.

   Por lo tanto, para $x \in [0, \pi]$, se tiene que

   $$|1 - f_n(x)| \leq \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2$$

   de donde la convergencia uniforme.

   Segunda solución. Del cálculo real, se tiene que $\cos\theta$ es decreciente y $\cos\theta \leq \theta + 1$ para $0 \leq \theta \leq \pi$. Luego, para $x \in [0, \pi]$ y $n \geq 1$, se tiene que $|f_n(x) - f(x)| = \left|\cos\left(\frac{x}{n}\right) - 1\right| \leq \left|\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - 1\right| \leq \frac{\pi}{n}$. Por lo tanto $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ siempre que $n >$ máx$(1, \frac{\pi}{\epsilon})$.

   b) Como $\frac{x}{n} \to 0$, cuando $n \to \infty$, y $\cos x$ es una función continua, se tiene que $\cos\left(\frac{x}{n}\right) \to \cos 0 = 1$ cuando $n \to \infty$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

   c) Para ver que la convergencia no es uniforme en todo $\mathbb{R}$, note que en los puntos $x = \pi \cdot n$, se tiene que $\cos\left(\frac{\pi \cdot n}{n}\right) = \cos\pi = 0$, por lo que la convergencia falla ser uniforme en estos puntos.

4. Demuestre que

   $$\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

   no converge uniformemente en $A = \{z \mid \text{Re}z > 1\}$.

Solución. Note que si $z = x$ es real, la serie toma la forma

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Para $x > 1$, se sabe que la serie converge, además $\phi(x) \to \infty$, cuando $x \to 1$, ahora vea que la serie no converge uniformemente en $(1, \infty)$.

5. Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, demuestre que $a_k \to 0$. Si $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ converge uniformemente, muestre que $g_k(z) \to 0$ uniformemente.

   Solución. Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, es decir la sucesión de sumas parciales $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ converge, por lo que es una sucesión de Cauchy. Luego, para toda $\epsilon > 0$ existe una $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ implica que

$$|s_{n+p} - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \epsilon, \quad \text{para toda } p = 1, 2, 3, \ldots.$$

   Con $p = 1$, se tiene que si $n \geq N$ entonces $|a_{n+1}| < \epsilon$, luego $a_k \to 0$.

   Si $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ converge uniformemente, por el **criterio de Cauchy**, se tiene que para toda $\epsilon > 0$ existe una $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ implica que

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(z) \right| < \epsilon, \quad \text{para toda } z \text{ y para toda } p = 1, 2, 3, \ldots.$$

   Nuevamente, haciendo $p = 1$, se tiene que si $n \geq N$ entonces $|g_{n+1}(z)| < \epsilon$ para toda z, es decir, $g_k(z) \to 0$ uniformemente.

6. Muestre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$$

   es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Calcule su integral alrededor del círculo unitario.

   Solución. Como $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ es analítica en $\mathbb{C}$, entonces

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$$

es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ahora

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} dz &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_\gamma \frac{1}{z^n} dz \\
&= \int_\gamma dz + \int_\gamma \frac{1}{z} dz + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_\gamma \frac{1}{z^n} dz \\
&= 0 + 2\pi i + 0 = 2\pi i.
\end{aligned}$$

El hecho de que se pueda sacar el símbolo de la suma de la integral, se justifica por la convergencia de la serie en todo $\mathbb{C}$. La última igualdad se debe al hecho de que para $n \geq 2$, la función $\frac{1}{z^n}$ tiene antiderivada, y como la curva es cerrada, la integral es cero.

Por lo tanto, $\int_\gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} dz = 2\pi i$.

7. Demuestre que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 + z^{2n}}$$

converge tanto en el interior como en el exterior del círculo unitario y representa una función analítica en cada región.

Solución. Observe que siempre se tiene que $\frac{z^n}{1+z^{2n}} = \frac{1}{z^n + z^{-n}}$.

Para el caso $|z| < 1$,

$$|z^n + z^{-n}| \geq |z^{-n}| - |z^n| \geq |z^{-n}| - 1 \geq |z^{-n}|/2,$$

a partir de cierta n, entonces

$$\left| \frac{z^n}{1 + z^{2n}} \right| \leq 2|z|^n.$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |z|^n$ converge, entonces por el criterio de comparación para series, se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1+z^{2n}}$ converge absolutamente en $|z| < 1$, de donde también se tiene la convergencia de la serie.

En el caso $|z| > 1$, como

$$|z^n + z^{-n}| \geq |z^n| - |z^{-n}| \geq |z^n| - 1 \geq |z^n|/2,$$

a partir de cierta n, entonces

$$\left|\frac{z^n}{1+z^{2n}}\right| = \left|\frac{1}{z^n + z^{-n}}\right| \leq \frac{2}{|z|^n}.$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z|^n}$ converge, entonces por el criterio de comparación para series, se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1+z^{2n}}$ converge absolutamente en $|z| > 1$, de donde se tiene la convergencia de la serie también.

Como las series $\sum_{n=1}^{\infty} |z|^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z|^n}$ convergen uniformemente en discos cerrados contenidos en $\mathbb{D}_1$ y $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_1$, respectivamente, entonces lo mismo es cierto para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1+z^{2n}}$.

Por lo tanto, la serie representa una función analítica en cada región.

8. Sea f una función analítica en el disco $\mathbb{D}_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$ tal que $|f(z)| \leq 7$ para toda $z \in \mathbb{D}_2$. Demuestre que existe una $\delta > 0$ tal que si $z_1, z_2 \in \mathbb{D}_1$ y si $|z_1 - z_2| < \delta$, entonces $|f(z_1) - f(z_2)| < \frac{1}{10}$. Encuentre un valor numérico de δ independiente de f, que tenga esta propiedad.

Solución. Por hipótesis, se tiene que $f : \mathbb{D}_2 \to \overline{\mathbb{D}}_7$ es analítica, donde $\mathbb{D}_7$ es el disco abierto con centro en 0 y radio 7. En particular, $f : \overline{\mathbb{D}}_1 \to \overline{\mathbb{D}}_7$ es continua con dominio un conjunto compacto, por lo que f en $\overline{\mathbb{D}}_1$ es uniformemente continua. Luego, para $\epsilon = \frac{1}{10}$ existe $\delta > 0$ tal que si $z_1, z_2 \in \mathbb{D}_1$ con $|z_1 - z_2| < \delta$, entonces $|f(z_1) - f(z_2)| < \frac{1}{10}$.

Usando la fórmula integral de Cauchy, se tiene para $z_1, z_2 \in \mathbb{D}_1$ y para $\gamma(t) = 2e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$, lo siguiente

$$\begin{aligned}
|f(z_1) - f(z_2)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_1}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_2}dz\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\frac{f(z)}{z - z_1} - \frac{f(z)}{z - z_2}\right) dz\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{f(z)(z_1 - z_2)}{(z - z_1)(z - z_2)}dz\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}4\pi \cdot \frac{7 \cdot |z_1 - z_2|}{(1 - |z_1|)(1 - |z_2|)} \\
&\leq 14 \cdot |z_1 - z_2|.
\end{aligned}$$

Ahora, para que $|f(z_1) - f(z_2)| < \frac{1}{10}$ se necesita que $14 \cdot |z_1 - z_2| < \frac{1}{10}$, entonces $|z_1 - z_2| < \frac{1}{140}$. Por lo tanto, si toma $\delta = \frac{1}{140}$ se obtiene el resultado.

9. Demuestre que $f_n \to f$ uniformemente en cualquier disco cerrado en una región A si y sólo si $f_n \to f$ uniformemente en cualquier subconjunto compacto (cerrado y acotado) de A.

   Solución. Si $f_n \to f$ converge uniformemente en un subconjunto compacto de A, el resultado es inmediato ya que todo disco cerrado en A es un compacto en A por ser acotado.

   Recíprocamente, si $f_n \to f$ converge uniformemente en cualquier disco cerrado en una región A, y como cualquier compacto puede ser cubierto por un número finito de discos cerrados, entonces también $f_n \to f$ converge uniformemente en el compacto.

10. Sea f_n analítica en una región acotada A y continua en cl(A), $n = 1, 2, 3, \ldots$. Suponga que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente en fr(A). Entonces demuestre que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente a una función analítica en A.

    Solución. Como la sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente en fr(A), se tiene que para toda $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que si n, $m \geq N$, entonces $|f_n(z) - f_m(z)| \leq \epsilon$, para toda $z \in$ fr(A), es decir, la sucesión es uniforme de Cauchy en la fr(A).

    Para todas n, $m \geq N$, se tiene que las funciones $f_n - f_m$ son analíticas en A, y alcanzan su máximo en la fr(A). Si D es un disco cerrado contenido en A, por el principio del módulo máximo, se tiene que $|f_n(z) - f_m(z)| \leq \epsilon$ para toda $z \in D$. Por lo tanto, la sucesión $\{f_n\}$ es uniforme de Cauchy en D, luego converge uniformemente en D. Por el teorema de convergencia analítica, tenemos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a una función analítica en A.

3.2. Series de potencias y el teorema de Taylor

Una **serie de potencias** es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

donde z_0 y todos los a_n son números complejos fijos. Este tipo de series convergen en discos abiertos como se enuncia a continuación.

Teorema de convergencia de series de potencias. *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ una serie de potencias. Existe un único número $R \geq 0$, posiblemente ∞, llamado el* **radio de convergencia**, *tal que si $|z-z_0| < R$, la serie converge y si $|z-z_0| > R$, la serie diverge. Más aún, la convergencia es uniforme y absoluta en cualquier disco cerrado en $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < R\}$. En caso de que $|z-z_0| = R$ no se puede hacer un enunciado general de convergencia.*

Combinando los teoremas de convergencia analítica y de convergencia de series de potencias, podemos deducir lo siguiente:

Analiticidad de las series de potencias. Una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ es una función analítica en el interior de su círculo de convergencia.

Teorema 3.2.1 (Taylor) *Sea f una función analítica en una región A. Sea $z_0 \in A$ y sea $A_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < r\}$ contenido en A (es posible que $r = \infty$, $A_r = A = \mathbb{C}$). Entonces, para cada $z \in A_r$, la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

converge en A_r (es decir, tiene un radio de convergencia mayor o igual que r), y tenemos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

La serie anterior es llamada **la serie de Taylor** de f alrededor de z_0.

1. Encuentre el radio de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias:

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$.
   b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{4^n}$.
   c) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$.
   d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+2^n}$.

   Solución.

a) Usando el criterio de la razón sea $a_n = n^2$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+2\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el radio de convergencia es 1.

b) Sea $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^2}{4}\right)^n$, entonces para que se de la convergencia $\left|\frac{z^2}{4}\right| < 1$, por lo que $|z| < 2$. Por lo tanto, el radio de convergencia es 2.

c) Se tiene que $\lim_{n\to\infty}\frac{|n!|}{|(n+1)!|} = \lim_{\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$, por lo tanto, el radio convergencia es 0.

d) Como $\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{1}{1+2^n}\right|}{\left|\frac{1}{1+2^{n+1}}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+2^{n+1}}{1+2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n}+2}{\frac{1}{2^n}+1} = 2$, se tiene que el radio de convergencia es 2.

2. Establezca la serie de Taylor para:

a) $f(z) = \operatorname{sen} z$.

b) $g(z) = \cos z$.

c) $h(z) = (1+z)^\alpha$, usando la rama principal con $\alpha \in \mathbb{C}$ fija.

Solución. La expansión en serie de Taylor de una función analítica alrededor de z_0 es

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

a) Sea $f(z) = \operatorname{sen} z$ y $z_0 = 0$, se tienen que calcular las derivadas de la función y evaluar en $z_0 = 0$. Como $f(z) = \operatorname{sen} z$, $f'(z) = \cos z$, $f''(z) = -\operatorname{sen} z$, $f^{(3)}(z) = -\cos z$, $f^{(4)}(z) = \operatorname{sen} z$, entonces $f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$, $f'(0) = \cos 0 = 1$, $f''(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0$, $f^{(3)}(0) = -\cos 0 = -1$, $f^{(4)}(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$, y de aquí se repite cada cuatro derivadas.

Por lo tanto,

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

b) Sean $g(z) = \cos z$ y $z_0 = 0$, entonces

$$\begin{array}{rclrcl} g(z) &=& \cos z & g(0) &=& \cos 0 = 1 \\ g'(z) &=& -\operatorname{sen} z & g'(0) &=& -\operatorname{sen} 0 = 0 \\ g''(z) &=& -\cos z & g''(0) &=& -\cos 0 = -1 \\ g^{(3)}(z) &=& \operatorname{sen} z & g^{(3)}(0) &=& \operatorname{sen} 0 = 0 \\ g^{(4)}(z) &=& \cos z & g^{(4)}(0) &=& \cos 0 = 1. \end{array}$$

Por lo tanto,

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

c) Sean $h(z) = (1+z)^\alpha$ y $z_0 = 0$, entonces

$$\begin{array}{rcl} h(z) &=& (1+z)^\alpha, \quad h(0) = 1 \\ h'(z) &=& \alpha(1+z)^{\alpha-1}, \quad h'(0) = \alpha \\ h''(z) &=& (\alpha)(\alpha-1)(1+z)^{\alpha-2} \\ h''(0) &=& (\alpha)(\alpha-1) \\ h^{(3)}(z) &=& (\alpha)(\alpha-1)(\alpha-2)(1+z)^{\alpha-3} \\ h^{(3)}(0) &=& (\alpha)(\alpha-1)(\alpha-2) \\ h^{(4)}(z) &=& (\alpha)(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(1+z)^{\alpha-4} \\ h^{(4)}(0) &=& (\alpha)(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3). \end{array}$$

Por lo tanto,

$$\begin{array}{rcl} (1+z)^\alpha &=& 1 + \alpha z + \dfrac{(\alpha)(\alpha-1)}{2!} z^2 + \dfrac{(\alpha)(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 \\ && + \dfrac{(\alpha)(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!} z^4 + \cdots . \end{array}$$

Por otro lado, se tiene que $\binom{\alpha}{n} = \frac{(\alpha)(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$, por lo tanto, $(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$.

3. Calcule los primeros cuatro términos de la serie de Taylor de $f(z) = \frac{1}{1+e^z}$ alrededor de $z_0 = 0$. ¿Cuál es el radio de convergencia?

Solución. Se calculan las tres primeras derivadas de f:

$$f(z) = \frac{1}{1+e^z},\ f(0) = \frac{1}{2},\ f'(z) = \frac{-e^z}{(1+e^z)^2},\ f'(0) = -\frac{1}{4}$$

$$f''(z) = \frac{2e^{2z}}{(1+e^z)^3} - \frac{e^z}{(1+e^z)^2},\ f''(0) = 0$$

$$f'''(z) = -\frac{6e^{3z}}{(1+e^z)^4} + \frac{6e^{2z}}{(1+e^z)^3} - \frac{6e^z}{(1+e^z)^2},\ f'''(0) = \frac{1}{8}.$$

De donde $f(z) = \frac{1}{1+e^z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z + \frac{1}{48}z^3 + \cdots$.

La función $f(z) = \frac{1}{1+e^z}$ no es analítica en $\{z \in \mathbb{C} \mid e^z + 1 = 0\}$, esto es si $e^z = -1$, luego $e^{2z} = 1$. Se sabe que $e^w = 1$ si y sólo si $w = 2\pi i n$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $2z = 2\pi i n$, de donde $z = \pi i n$, con n impar. Así que el radio de convergencia es π.

4. Calcule la serie de Taylor de las siguientes funciones alrededor de los puntos indicados:

   a) $\operatorname{sen} z^2, \quad z_0 = 0$.

   b) $e^{2z}, \quad z_0 = 0$.

   Solución.

   a) Recuerde que $\operatorname{sen} w = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{w^{2n-1}}{(2n-1)!}$, haciendo el cambio de variable $w = z^2$, se tiene que

   $$\operatorname{sen} z^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{{z^2}^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

   Por lo tanto, $\operatorname{sen} z^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{4n-2}}{(2n-1)!}$.

   b) Como $e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$, con el cambio de variable $w = 2z$, se obtiene que $e^{2z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!}$.

5. Sean $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ convergentes para $|z| < R$. Sea γ un círculo de radio $r < R$ y defina

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta} g\left(\frac{z}{\zeta}\right) d\zeta.$$

Muestre que $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$.

Solución. Note que $f^{(n)}(0) = n!a_n$ y $g^{(n)}(0) = n!b_n$. Sea $f_0(z,w) = \frac{1}{2\pi i}\frac{f(w)}{w} g\left(\frac{z}{w}\right)$ para $|z| < R$ y $w \in \gamma$, entonces f_0 es continua en z y w, además si se fija w, f_0 es analítica en z. Por el ejemplo resuelto **2.4.15** en [6], se tiene que

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta}\, g\left(\frac{z}{\zeta}\right) d\zeta$$

es analítica y

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{\partial f_0}{\partial z}(z,\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta^2}\, g'\left(\frac{z}{\zeta}\right) d\zeta.$$

De hecho note que

$$F^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, g^{(n)}\left(\frac{z}{\zeta}\right) d\zeta.$$

Por la fórmula integral de Cauchy se tiene que

$$n!a_n = f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta,$$

luego

$$F^{(n)}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, g^{(n)}\left(\frac{0}{\zeta}\right) d\zeta = \frac{n!b_n}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = n!a_n b_n.$$

Por lo tanto, $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$.

6. ¿Cuál es la falla del siguiente razonamiento?

Ya que $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, se obtiene que $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}$. Dado que esto converge (pues e^z es entera) y ya que la expansión de Taylor es única, la expansión de $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ alrededor de $z = 0$ es $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}$.

Solución. Se tiene que $\frac{1}{z}$ no está definida cuando $z = 0$, así que no es analítica.

7. Suponga que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene radio de convergencia R y sea $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$. Sea $z_0 \in A$ y sea $\widetilde{R}$ el radio de convergencia de la serie de Taylor de f alrededor de z_0. Demuestre que $R - |z_0| \leq \widetilde{R} \leq R + |z_0|$.

   Solución. Sean $z_0 \in A$ y $r = R - |z_0|$. Cualquier punto en el disco $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ esta contenido en A, por lo que f es analítica en B. De hecho

$$
\begin{aligned}
f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(z - z_0) + z_0)]^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_0^{n-k} \right] (z - z_0)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} z_0^{n-k} (z - z_0)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} A_k (z - z_0)^k,
\end{aligned}
$$

   donde

$$
A_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} z_0^{n-k}.
$$

   Para justificar el cambio de orden en la serie iterada, basta demostrar la convergencia absoluta como sigue. Si $|z - z_0| < r$, entonces

$$
\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |z_0^{n-k}| \right] |z - z_0|^k = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left[|z_0| + |z - z_0| \right]^n
$$

   donde la última serie converge ya que $|z_0| + |z - z_0| < R$.

   Por lo tanto, el radio de convergencia de la serie de Taylor de f alrededor de z_0 no es menor que $R - |z_0| = r$, es decir, $r \leq \widetilde{R}$.

   Ahora, sea $s = R + |z_0|$ y suponga que $s < \widetilde{R}$. Entonces, A está contenido en el disco de convergencia de la serie de Taylor de f alrededor de z_0. De la misma manera que antes, es posible mostrar que la serie de Taylor de f alrededor de 0 tiene radio de convergencia al menos $\widetilde{R}$, lo cual es una contradicción.

8. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$. Para cualquier curva cerrada γ en $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$, muestre que $\int_\gamma f = 0$.

   a) Usando el teorema de Cauchy.

   b) Justificando la integración término a término.

   Solución.

   a) Como la serie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene radio de convergencia R, f es analítica en el disco con centro 0 y radio R. Como γ es una curva cerrada y está contenida en ese disco, el teorema de Cauchy asegura que la integral $\int_\gamma f = 0$.

   b) Como la serie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene radio de convergencia R, la serie converge uniformemente en cualquier disco cerrado con centro 0 y radio r, con $r < R$, entonces

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_\gamma z^n dz = 0$$

   ya que cada z^n tiene una antiderivada y γ es una curva cerrada.

9. Encuentre los primeros términos de la expansión de Taylor de $\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$ alrededor de $z = 0$.

   Solución. Sea $f(z) = \tan z$ y $z_0 = 0$, luego

$$\begin{aligned}
f(z) &= \tan z, \ f(0) = 0 \\
f'(z) &= \sec^2(z), \ f'(0) = 1 \\
f''(z) &= 2\sec^2(z)\tan(z), \ f''(0) = 0 \\
f^{(3)}(z) &= 2\sec^4(z) + 4\sec^2(z)\tan^2(z), \ f^{(3)}(0) = 2 \\
f^{(4)}(z) &= 16\sec^4(z)\tan(z) + 8\sec^2(z)\tan^3(z), \ f^{(4)}(0) = 0,
\end{aligned}$$

   y de hecho $f^{(5)}(0) = 16$. Por lo tanto, $\tan(z) = z + \frac{2z^3}{3!} + \frac{16z^5}{5!} + \cdots$.

10. Demuestre que una serie de potencias converge absolutamente en todo su círculo de convergencia, o en ningún lugar de éste. Dé un ejemplo para mostrar que cada uno de estos casos puede ocurrir.

Solución. Considere la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

con radio de convergencia R. Para determinar la convergencia absoluta, se tiene que considerar la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||(z-z_0)|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|R^n,$$

la cual converge o diverge pues es una serie de números reales no negativos, por lo que se tiene el resultado pedido.

Considere la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, la cual tiene radio de convergencia $R = 1$, por lo que en el círculo de convergencia, la serie de valores absolutos se convierte en $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, la cual es convergente en todo el círculo de convergencia.

Para el otro caso, considere la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ que tiene radio de convergencia $R = 1$; en este caso la serie no converge absolutamente en ningún punto de su círculo de convergencia.

11. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ convergente para $|z| < R$. Si $0 < r < R$, muestre que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$, donde $z = re^{i\theta}$ y para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta} d\theta. \tag{3.1}$$

Además, muestre que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}. \tag{3.2}$$

La ecuación (3.2) es referida como el **teorema de Parseval**, y decimos que la ecuación (3.1) expresa a la serie se Taylor como una **serie de Fourier**.

Solución. Sustituyedo $z = re^{i\theta}$ en $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es inmediato que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$.

Por la fórmula integral de Cauchy, con $\gamma(\theta) = re^{i\theta}$, para $\theta \in [0, 2\pi]$, se tiene que

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}rie^{i\theta}d\theta,$$

por lo tanto

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta.$$

Note que si $z = re^{i\theta}$, entonces se tiene que

$$|f(z)|^2 = f(re^{i\theta}) \cdot \overline{f(re^{i\theta})} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n r^n e^{-in\theta}\right).$$

Como la integral $\int_0^{2\pi} e^{im\theta}d\theta = 0$ para todo entero $m \neq 0$, se tiene que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |a_n|^2 r^{2n} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

Para más detalles, ver problema 6 de la seccion 3.3.

12. Calcule la expansión de Taylor de $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ alrededor de $z = 2$.

Solución. Por el ejemplo resuelto **3.1.15** de [6], se tiene que $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ es analítica en la región $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}z > 1\}$ con derivada $\zeta'(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} (\log n)\, n^{-z}$.

La serie de Taylor de $\zeta(z)$ alrededor de $z = 2$ es

$$\zeta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-2)^n$$

donde

$$a_n = \frac{\zeta^{(n)}(2)}{n!}.$$

Luego, se tienen que encontrar las derivadas de $\zeta(z)$, evaluadas en $z_0 = 2$. Como $\zeta'(z) = -\sum_{n=1}^{\infty}(\log n)\, n^{-z}$, entonces $\zeta''(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(\log n)^2\, n^{-z}$ y en general

$$\zeta^{(k)}(z) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^k\, n^{-z}.$$

Por lo tanto, al evaluar en $z = 2$ las derivadas, se obtiene que

$$\zeta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left((-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^k}{n^2} \right) (z-2)^n.$$

13. Encuentre una función f tal que $f(0) = 1$ y $f'(x) = xf(x)$ para toda x.

    Solución. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, con $a_0 = 1$ ya que $f(0) = 1$.

    También, $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$. Luego, de la ecuación dada se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = z \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1}.$$

    Lo anterior es equivalente a

$$0 = a_1 + (2a_2 - a_0)z + (3a_3 - a_1)z^2 + (4a_4 - a_2)z^3 + \cdots$$

    donde el término general es $[(n+1)a_{n+1} - a_{n-1}]z^n$ para $n \geq 1$. Entonces, $a_1 = 0,\ 2a_2 - a_0 = 0,\ \ldots,\ (n+1)a_{n+1} - a_{n-1} = 0,\ \ldots$.

    Es decir, $a_{n+1} = \frac{a_{n-1}}{n+1}$, para toda $n \geq 1$. Usando que $a_0 = 1$ se tiene que $a_1 = 0, 2a_2 = 1, 3a_3 - a_1 = 0, 4a_4 - a_2 = 0, \ldots$. Por lo tanto, $a_{2n+1} = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $a_{2n} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdots 2n} = \frac{1}{2^n(1 \cdot 2 \cdots n)} = \frac{1}{2^n \cdot n!}$. De donde se tiene que $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z^2}{2} \right)^n = e^{\frac{z^2}{2}}$. Por lo tanto, una función que resuelve la ecuación pedida es $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$.

3.3. Series de Laurent y clasificación de singularidades

El teorema de la expansión de Taylor no aplica a funciones como $f(z) = \frac{1}{z}$ o $f(z) = \frac{e^z}{z}$ en $z_0 = 0$, pues no son analíticas en ese punto. Para tales funciones existe otra expansión, llamada la **expansión de Laurent**, que utiliza potencias inversas de z. Esta expansión es importante en el estudio de puntos singulares de una función.

Teorema 3.3.1 (Expansión de Laurent). *Sea $r_1 \geq 0$, $r_2 > r_1$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ y considere la región $A = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}$. Se admite que $r_1 = 0$ o $r_2 = \infty$ (o ambos). Sea f analítica en la región A. Entonces, podemos escribir*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

donde ambas series en el lado derecho de la ecuación, convergen absolutamente en A y uniformemente en cualquier conjunto de la forma $B_{\rho_1,\rho_2} = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2\}$, donde $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$. Si γ es un círculo alrededor de z_0 con radio r, con $r_1 < r < r_2$, entonces los coeficientes están dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

La serie para f en el teorema anterior es llamada la **serie de Laurent** o **expansión de Laurent** alrededor de z_0 en el anillo A. Además, la expansión de Laurent es única.

Es de suma importancia considerar el caso $r_1 = 0$, ya que entonces f es analítica en $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r_2\}$, la r_2-vecindad agujerada de z_0 y decimos que z_0 es una **singularidad aislada** de f. De esta forma, podemos expander a f en serie de Laurent como sigue:

$$f(z) = \cdots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots,$$

válida para $0 < |z - z_0| < r_2$.

El coeficiente b_1 es de cierta relevancia y se le conoce como el **residuo** de f en z_0. Su importancia radica en el hecho de que es suficiente conocer este coeficiente para calcular la integral de f sobre una curva cerrada, a este resultado se le conoce como el **teorema del residuo**.

1. Encuentre la expansión en serie de Laurent de $\frac{1}{z(z+1)}$ alrededor de $z_0 = 0$, válida en la región $1 < |z| < \infty$.

Solución. Sea

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z+1)} &= \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z}\cdot\frac{\frac{1}{z}}{1+\frac{1}{z}}\\ &= \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{1-(-\frac{1}{z})}\right) = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z^{n+2}}\right),\end{aligned}$$

la cual converge ya que $1 < |z|$. Por lo tanto, $\frac{1}{z(z+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z^{n+2}}\right)$.

2. Expanda $\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ en una serie de Laurent, en las siguientes regiones:

   a) $0 < |z| < 1$.

   b) $1 < |z| < 2$.

   Solución.

   a) Note que

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z}\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}\right)\\ &= \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2(1-z/2)}\right)\\ &= \frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}z^{n-1}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n-1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^{n-1}.\end{aligned}$$

   Por lo tanto, $\frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^{n-1}$ cuando $0 < |z| < 1$.

b) Ahora para $1 < |z| < 2$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z}\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}\right) \\
&= \frac{1}{z}\left(-\frac{1}{z(1-1/z)}-\frac{1}{2(1-z/2)}\right) \\
&= \frac{1}{z}\left(-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\right) \\
&= \frac{1}{z^2}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^{n+2}}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^{n+2}}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^n\right).
\end{aligned}$$

3. Suponga que la serie de Laurent de $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$, válida para $0 < |z| < 1$, es $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$. Calcule $c_{-2},\ c_{-1},\ c_0,\ c_1,\ c_2$.

   Solución. Para $0 < |z| < 1$, se tiene que $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. También, $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \frac{1}{z^3 3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$. Por lo que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

   Para calcular c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, se deben calcular los coeficientes de $\frac{1}{z^2}$, $\frac{1}{z}$, el término independiente, z, z^2, respectivamente.

   Por ejemplo, para calcular c_{-2} se debe encontrar el coeficiente de $\frac{1}{z^2}$ en $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, el cual despues de comparar términos, se obtiene que es
   $$\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!} = e-2 = c_{-2}.$$

   Análogamente, se tiene $c_{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e-1$, $c_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = c_1 = c_2 = e$.

4. Demuestre, usando series de Taylor, la siguiente versión compleja de la **regla de L'Hospital**: Sean $f(z)$ y $g(z)$ analíticas, ambas con ceros de

orden k en z_0. Entonces $\frac{f(z)}{g(z)}$ tiene una singularidad removible, y

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f^{(k)}(z_0)}{g^{(k)}(z_0)}.$$

Solución. Como f y g son analíticas, ambas con un cero de orden k en z_0, se pueden escribir de la siguiente forma, $f(z)=(z-z_0)^k h(z)$ donde $h(z)$ es analítica en z_0, y $h(z_0)=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\neq 0$; $g(z)=(z-z_0)^k t(z)$ donde $t(z)$ es analítica en z_0, y $t(z_0)=\frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}\neq 0$. Entonces

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{(z-z_0)^k h(z)}{(z-z_0)^k t(z)}=\frac{h(z)}{t(z)}.$$

Por lo tanto, $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f^{(k)}(z_0)}{g^{(k)}(z_0)}$ y como el límite existe, entonces $\frac{f(z)}{g(z)}$ tiene una singularidad removible en z_0.

5. Si f es analítica en una región que contiene a un círculo γ y a su interior, y tiene un cero de orden 1 únicamente en z_0 en el interior o sobre γ, muestre que

$$z_0=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{zf'(z)}{f(z)}dz.$$

Solución. Como f tiene un cero de orden 1 en z_0, existe una función analítica ϕ en una vecindad de z_0, tal que $f(z)=(z-z_0)\phi(z)$, con $\phi(z_0)\neq 0$. Luego, $f'(z)=(z-z_0)\phi'(z)+\phi(z)$, por lo que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{zf'(z)}{f(z)}dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z\left[(z-z_0)\,\phi'(z)+\phi(z)\right]}{(z-z_0)\,\phi(z)}dz\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z\phi'(z)}{\phi(z)}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z}{z-z_0}dz.\end{aligned}$$

Es claro que $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z\phi'(z)}{\phi(z)}dz=0$ ya que $h(z)=\frac{z\phi'(z)}{\phi(z)}$ es analítica. Además, si $g(z)=z$, entonces $g(z_0)=z_0$ y utilizando la fórmula integral de Cauchy, se tiene

$$z_0=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z}{z-z_0}dz.$$

Por lo tanto, $z_0=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{zf'(z)}{f(z)}dz.$

6. Para f como en el teorema de expansión de Laurent, muestre que si $r_1 < r < r_2$, entonces

$$\int_0^{2\pi} \left|f(z_0 + re^{i\theta})\right|^2 d\theta = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} + 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 r^{-2n}.$$

Solución. Por el teorema de expansión de Laurent, se tiene que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad \text{para} \quad r_1 < |z - z_0| < r_2.$$

Sea $z = z_0 + re^{i\theta}$ con $r_1 < r < r_2$, luego $f(z_0 + re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{i\theta})^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(re^{i\theta})^n}$, donde la convergencia es absoluta y uniforme. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta &= \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) \overline{f(z_0 + re^{i\theta})} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{i\theta})^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(re^{i\theta})^n} \right) \cdot \\
&\quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n (re^{-i\theta})^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{b}_n}{(re^{-i\theta})^n} \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} + \sum \frac{|b_n|^2}{r^{2n}} \right) d\theta \\
&= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} + 2\pi \sum \frac{|b_n|^2}{r^{2n}}.
\end{aligned}$$

Note que se ha usado el hecho de que

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} a_n (re^{i\theta})^n \cdot \bar{a}_m (re^{-i\theta})^m d\theta &= a_n \bar{a}_m r^{n+m} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-m)} d\theta \\
&= \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 2\pi |a_n|^2 r^{2n} & n = m, \end{cases}
\end{aligned}$$

y que

$$\int_0^{2\pi} a_n (re^{i\theta})^n \frac{\bar{b}_m}{(re^{-i\theta})^m} d\theta = 0 \quad \text{si} \quad n \neq m$$

$$\int \frac{b_n}{(re^{i\theta})^n} \cdot \frac{\bar{b}_m}{(re^{-i\theta})^m} d\theta = 0 \quad \text{si} \quad n \neq m.$$

7. Suponga que f tiene un cero en z_0 de multiplicidad k. Muestre que el residuo de $\frac{f'}{f}$ en z_0, es k.

   Solución. Como f tiene un cero de orden k en z_0, existe g analítica en una vecindad de z_0, con $g(z_0) \neq 0$ tal que $f(z) = (z-z_0)^k g(z)$. Ahora, la derivada de f es igual a $f'(z) = k(z-z_0)^{k-1}g(z) + (z-z_0)^k g'(z)$, entonces

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k(z-z_0)^{k-1}g(z) + (z-z_0)^k g'(z)}{(z-z_0)^k g(z)} = \frac{k}{z-z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

   Como $\frac{g'(z)}{g(z)}$ es analítica en una vecindad de z_0, se tiene que Res $\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = k$.

8. Evalúe $\int_\gamma z^n e^{\frac{1}{z}} dz$, donde γ es el círculo de radio 1 centrado en 0 y recorrido una vez en dirección contraria al sentido de las manecillas de reloj.

   Solución. Sea $f(z) = z^n e^{\frac{1}{z}}$, está función solo tiene una singularidad en $z_0 = 0$ que esta dentro de γ. Se sabe que $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot b_1$, donde b_1 es el coeficiente de $\frac{1}{z}$ de la serie de Laurent alrededor del 0.

   Como $e^{\frac{1}{z}} = \Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$, entonces $z^n e^{\frac{1}{z}} = \Sigma_{k=0}^{n} \frac{z^{n-k}}{k!} + \Sigma_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(n+m)!} \frac{1}{z^m}$ por lo que el coeficiente de $\frac{1}{z}$ es $\frac{1}{(n+1)!}$. Por lo tanto, $\int_\gamma f(z)dz = \frac{2\pi i}{(n+1)!}$.

9.
   a) Sea z_0 una **singularidad esencial** de f y sea U una vecindad agujerada de z_0. Demuestre que la cerradura de $f(U)$ es $\mathbb{C}$.

   b) Suponga el **teorema de Picard** y derive el "teoremita de Picard": La imagen de una función entera no constante, es todo $\mathbb{C}$, excepto posiblemente por a lo más un punto.

   Solución.

   a) Para demostrar que la cerradura de $f(U)$ es $\mathbb{C}$, se tiene que mostrar que $f(U)$ es denso en $\mathbb{C}$.

      Sea $w \in \mathbb{C}$, por el teorema de Picard, la ecuación $f(z) = w$ tiene infinidad de soluciones $z \in U$, con excepción de un valor w. Si w no es este valor excepcional, cualquier vecindad W de w intersecta a $f(U)$. Sea w el valor excepcional, y sea W una vecindad de w. Luego si $u \in W \setminus \{w\}$, entonces la ecuación $f(z) = u$ tiene solución $z \in U$, por lo tanto $U \cap W \neq \emptyset$. Esto muestra que $f(U)$ es denso en $\mathbb{C}$.

b) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera no constante. Si f es un polinomio, entonces por el teorema fundamental del álgebra se tiene el resultado.

Suponga ahora que f es una función entera que no es un polinomio y considere la función $g(z) = f(1/z)$. Como f no es un polinomio, g tiene una singularidad esencial en $z = 0$. El resultado ahora se sigue del teorema de Picard.

Bibliografía

[1] Ahlfors L., *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 3rd edition 1979.

[2] Andreescu T., Andrica, D., *Complex Numbers from A to ... Z*, Birkhäuser, 2006.

[3] Conway J. B., *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, New York, Second Edition 1973.

[4] Gamelin T. W., *Complex Analysis*, Springer, 2001.

[5] Lang S., *Complex Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1999.

[6] Marsden J.E., Hoffman M.J., *Análisis básico de Variable Compleja*, Editorial Trillas, México, DF. Primera Edición, 1996.

[7] Remmert R., *Theory of Complex Functions*, Springer-Verlag, New York, 1989.

[8] Rudin W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, Third edition, 1976.

[9] Spivak M., *Calculus*, Editorial Reverté, S.A., segunda edición, 1993.

Indice

Una introducción a la variable compleja
se terminó de imprimir en el mes de Mayo de 2013,
en los talleres de Dicograf, S.A. de C.V.
Poder Legislativo 304, Cuernavaca, Morelos.

La variable compleja es una rama de las matemáticas que posee algo para todos los gustos. Además de tener aplicaciones en la física y, en específico, en otras partes del análisis, representa una puerta de entrada en otras áreas de las matemáticas, por ejemplo, la teoría de homotopía, la geometría hiperbólica, la dinámica holomorfa, entre otras.

Este libro incluye algunos de los tópicos de variable compleja que se han enseñado en la última década en la Licenciatura en Ciencias de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos (UAEM), en las áreas terminales de Matemáticas y Física. Los temas aquí desarrollados corresponden a un curso estándar de variable compleja en cualquier licenciatura en estas áreas.

La motivación principal para realizar este libro es proporcionar al estudiante un apoyo adicional para este curso, que le sirva como base para adentrarse tanto en la teoría como en la resolución de problemas.

Universidad Autónoma del Estado de Morelos

Facultad de Ciencias

ISBN: 978-607-7771-94-4

9 786077 771944