Introducción al álgebra

Radmila Bulajich Manfrino
Gabriela Hinojosa Palafox
Rogelio Valdez Delgado

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS
Ciencias y Praxis 1

Introducción al álgebra

Introducción al álgebra

Radmila Bulajich Manfrino
Gabriela Hinojosa Palafox
Rogelio Valdez Delgado

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS

Facultad de Ciencias

Esta publicación fue financiada por el Programa Integral de Fortalecimiento Institucional (PIFI) reprogramación 2011.

Bulajich Manfrino, Radmila

Introducción al álgebra / Radmila Bulajich Manfrino, Gabriela Hinojosa Palafox, Rogelio Valdez Delgado - - México : Universidad Autónoma del Estado de Morelos, 2013.
138 p. : il.

ISBN 978-607-7771-86-9 UAEM

1. Algebra 2. Números reales 3. Teoría de los números I. tít. II. Hinojosa Palafox, Gabriela III. Valdez Delgado, Rogelio

LCC QA152.8 DC 512.9

Introducción al álgebra
Radmila Bulajich Manfrino
Gabriela Hinojosa Palafox
Rogelio Valdez Delgado

Av. Universidad 1001
Chamilpa, CP 62209
Cuernavaca, Morelos
publicaciones@uaem.mx

Ilustración de portada: Edgar Martínez, *Ritmos y secuencias* (detalle), óleo sobre tela, 150 x 100 cm, 2011.

ISBN: 978-607-7771-86-9 UAEM

Impreso en México

Introducción al álgebra

Radmila Bulajich Manfrino

Gabriela Hinojosa Palafox

Rogelio Valdez Delgado

Facultad de Ciencias,
Universidad Autónoma del Estado de Morelos.

Introducción

El álgebra es una de las ramas de las matemáticas en las que se construye y desarrolla el conocimiento matemático, digamos que son los cimientos de las matemáticas, además de que es una herramienta fundamental en casi cualquier disciplina científica. Su principal tema de estudio son las llamadas estructuras algebraicas, es decir, conjuntos cuyos elementos están dotados de ciertas operaciones. Estudiar las estructuras algebraicas desde un punto de vista general garantiza la aplicabilidad de la teoría en distintos ámbitos de las ciencias. A través del álgebra se establecen las bases del rigor y el formalismo matemático.

En la Facultad de Ciencias de la UAEM se ofrece el curso de Álgebra Introductoria, el cual es un curso básico del primer semestre de la carrera "Licenciatura en Ciencias", en las áreas terminales de Matemáticas, Física y de Ciencias Computacionales.

Después de haber impartido el curso de Álgebra Introductoria durante varios años y conscientes del problema con el que se encuentran los alumnos al iniciar sus estudios, nos enfrentamos a la necesidad de elaborar un libro que introdujera a los alumnos, poco a poco, al formalismo matemático necesario para afrontar otras áreas dentro de la misma matemática.

En este libro se presentan los requisitos teóricos básicos y las herramientas fundamentales para el estudio de las estructuras algebraicas numéricas, que son el primer eslabón para desarrollos posteriores. También, se dan las bases del pensamiento lógico matemático, indispensable para crear una estructura de pensamiento.

Los principales temas que se tratan en este libro son los conocimientos fundamentales de la lógica, de la teoría de conjuntos y de las estructuras numéricas. En el primer capítulo se dan las bases de la lógica para ir introduciento a los alumnos a una noción fundamental en el quehacer del matemático: la **demostración de una afirmación**. En el capítulo 2, se dan las bases de las demostraciones por inducción que nos permiten probar afirmaciones o proposiciones que cumplen algunos conjuntos infinitos. El capítulo 3 está dedicado a las funciones, que es la base de cualquier conocimiento matemático. Como uno de los problemas fundamentales en matemáticas es la clasificación de objetos, la necesidad de definir relaciones entre los objetos estudiados y poderlos dividir en conjuntos que cumplen dichas relaciones es fundamental. Por lo que el capítulo 4 está dedicado al estudio de estas divisiones o particiones. En el capítulo 5 se dan los principios básicos del conteo, que también es una herramienta fundamental para saber cuántos objetos cumplen ciertas propiedades. Finalmente en el último capítulo se dan las bases para la solución de sistemas de ecuaciones, así como sus interpretaciones geométricas, y algunas de sus aplicaciones.

A lo largo del libro se ilustran los conceptos con ejemplos concretos. A través de los ejemplos, el alumno adquirirá las herramientas necesarias para poder construir sus propias demostraciones. Además, al final de la mayoría de las secciones, se incluye una serie de ejercicios que se resuelven con la teoría expuesta y que pueden servir al lector como afirmación del conocimiento adquirido.

Contenido

Capítulo 1

Conceptos preliminares

1.1. Lógica Matemática

De manera informal, diremos que un razonamiento es válido cuando nos permite obtener conclusiones verdaderas si hemos comenzado con proposiciones verdaderas (las hipótesis). En cambio, un razonamiento que a partir de proposiciones verdaderas produce conclusiones falsas, no es un razonamiento válido.
Comenzaremos con los conceptos primitivos de Falso (F) y Verdadero (V). Decimos que ambos conceptos son primitivos porque no los explicamos en términos de conceptos más elementales. Así pues no definiremos lo que significan las palabras falso y verdadero, pero debemos de estar de acuerdo en que una afirmación no puede ser **falsa** y **verdadera** a la vez.

Definición 1.1.1 *Diremos que una* **proposición** *es cualquier afirmación de la que podamos decidir si es falsa o verdadera.*

Por ejemplo, aceptaremos que "Un perro es un mamífero" y que "México es un país" son proposiciones. En cambio, "Esta frase es falsa" que es una frase extraña pues habla de sí misma, no es una proposición, ya que no la podemos clasificar como verdadera o falsa, es decir, si pensamos en que la frase es falsa, inmediatamente vemos que es verdadera. Pero en el momento en decimos que es verdadera, se vuelve falsa.

Para formar nuevas proposiciones a partir de otras usaremos los conectivos lógicos:

$$\sim, \ \vee, \ \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, = .$$

De tal manera que si P y Q son proposiciones, entonces también lo son:

$$\sim P, \ P \vee Q, \ P \wedge Q, \ P \Rightarrow Q, \ P \Leftrightarrow Q, \ P = Q.$$

Definimos los conectivos lógicos mediante **tablas de verdad**.

La negación

Si P es una proposición, denotaremos por $\sim P$ su negación, que se lee como "no P".

Definición 1.1.2 *El conectivo "$\sim$" está definido por medio de la tabla*

P	$\sim P$
V	F
F	V

Esta tabla nos dice que si $\sim P$ es una proposición verdadera entonces P es falsa y viceversa. Por ejemplo, la negación de "Un perro es un mamífero"es falsa.

La conjunción

Si P y Q son dos proposiciones, denotaremos la conjunción por $P \wedge Q$, que se lee como "P y Q ". Esta proposición es verdadera cuando tanto P como Q son verdaderas.

Definición 1.1.3 *El conectivo "$\wedge$" está definido por medio de la tabla*

P	Q	$P \wedge Q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Es decir, $P \wedge Q$ es falsa si alguna de las dos proposiciones o ambas son falsas.

La disyunción

Si P y Q son dos proposiciones, denotaremos la disyunción por $P \vee Q$, que se lee como "P o Q ". Esta proposición es verdadera cuando P o Q es verdadera, es decir, $P \vee Q$ es falsa sólo cuando tanto P como Q son falsas.
En este sentido, la disyunción que se usa en la lógica difiere del uso de la "o" en el lenguaje cotidiano, en el que es frecuente que se use en un sentido excluyente. Por ejemplo, en el lenguaje cotidiano decir una frase como "mañana comeremos carne o mañana comeremos verduras" va implícito que sólo sucederá una de las dos posibilidades. En cambio, en el lenguaje de la lógica $((2+2=4) \vee (3 \cdot 3 = 9))$ es verdadera y ambas proposiciones son verdaderas.

Definición 1.1.4 *El conectivo "$\vee$" está definido por medio de la tabla*

P	Q	$P \vee Q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Es decir, $P \vee Q$ es falsa cuando tanto P como Q son falsas.

La implicación

Dadas dos proposiciones P y Q, denotaremos la proposición P implica Q por $P \Rightarrow Q$, como la proposición que es cierta cuando P es falsa o Q es verdadera. Así que si uno tiene que tanto $P \Rightarrow Q$ como P son verdaderas, sería porque Q es verdadera.

Definición 1.1.5 *El conectivo "$\Rightarrow$" está definido por medio de la tabla*

P	Q	$P \Rightarrow Q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Aquí $P \Rightarrow Q$ se lee como P implica Q, si P entonces Q, P sólo si Q, P es condición suficiente para Q o por último, Q es condición necesaria para P.
Veamos algunos ejemplos:

(a) Si $3 = 4$ entonces $2 + 2 = 4$, es una proposición verdadera ya que se tiene que la segunda parte es verdadera a pesar de que $3 = 4$ es falso.
(b) Si $\sqrt{2}$ es racional entonces $5 > 7$. También es una proposición verdadera, a pesar de que tanto la primera como la segunda afirmación son falsas.

Se dice que dos proposiciones P y Q son equivalentes si tienen la misma tabla de verdad y se escribe $P \equiv Q$.
Por ejemplo, observemos que $P \Rightarrow Q$ tiene la misma tabla de verdad que $\sim Q \Rightarrow \sim P$.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

$\sim Q$	$\sim P$	$\sim Q \Rightarrow \sim P$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

Luego, demostrar que $P \Rightarrow Q$ es equivalente a mostrar que $\sim Q \Rightarrow \sim P$.

Si y sólo si

Este conectivo tiene la misma tabla de verdad que $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ y se lee P si y sólo si Q, P es equivalente a Q o P es condición necesaria y suficiente para Q.

Definición 1.1.6 *El conectivo "$\Leftrightarrow$" está definido por medio de la tabla*

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
F	F	V	V	V
F	V	V	F	F
V	F	F	V	F
V	V	V	V	V

Así, que omitiendo dos columnas podemos escribir:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

1.1.1. Tautologías y absurdos

Hagamos ahora algunas tablas de verdad:
(a) $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

P	$\wedge$	$(Q$	$\wedge$	$R)$	$\Leftrightarrow$	$(P$	$\wedge$	$Q)$	$\vee$	$(P$	$\wedge$	$R)$
F	F	F	F	F	V		F		F		F	
F	F	F	V	V	V		F		F		F	
F	F	V	V	F	V		F		F		F	
F	F	V	V	V	V		F		F		F	
V	F	F	F	F	V		F		V		V	
V	V	F	V	V	V		F		V		V	
V	V	V	V	F	V		V		V		F	
V	V	V	V	V	V		V		V		V	

(b) $\sim (P \wedge Q) \Leftrightarrow (\sim P) \vee (\sim Q)$.

$\sim$	$(P$	$\wedge$	$Q)$	$\Leftrightarrow$	$(\sim P$	$\vee$	$\sim Q)$
V	F	F	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	F	F	F

En las dos tablas anteriores, las dos proposiciones siempre tienen el valor de V. Las proposiciones con esta propiedad, que son verdaderas independientemente de los valores de verdad de sus proposiciones componentes, se llaman tautologías. Las proposiciones que son falsas independientemente de los valores de verdad de sus proposiciones componentes, se llaman contradicciones o absurdos.

1.1.2. Negaciones

Veamos algunas de las negaciones de las proposiciones.

Teorema 1.1.7 *(De Morgan) Las leyes de De Morgan nos dicen que:*

$$\begin{aligned} \sim (P \wedge Q) &\equiv \sim P \vee \sim Q \\ \sim (P \vee Q) &\equiv \sim P \wedge \sim Q. \end{aligned}$$

Demostración. Para la demostración tenemos únicamente que considerar las tablas de verdad y ver que son equivalentes.

P	Q	$P \wedge Q$	$\sim(P \wedge Q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

$\sim P$	$\sim Q$	$\sim P \vee \sim Q)$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

$\square$

La negación de $P \Rightarrow Q$

La negación de $P \Rightarrow Q$, es decir, $\sim (P \Rightarrow Q)$ es equivalente a $P\wedge \sim Q$. Intuitivamente, uno podría pensar que si $P \Rightarrow Q$ significa "si pasa P entonces pasa Q" es natural que lo contrario es "pasa P pero no pasa Q".
Otra forma de recordarlo es la siguiente: el único caso en que $P \Rightarrow Q$ es falsa es cuando P es verdadera y Q es falsa. Así que $P \Rightarrow Q$ significa lo mismo que "no pasa P o pasa Q" o sea $\sim P \vee Q$. Luego, la negación de $P \Rightarrow Q$ debe de coincidir con la negación de $\sim (\sim P \vee Q) \equiv \sim\sim P\wedge \sim Q) \equiv P\wedge \sim Q$.

Ejercicio 1.1 *Considera los siguientes enunciados. P: México exporta petróleo, Q: La selección Mexicana ganó el último campeonato mundial, R: Los gatos tienen plumas y S: Todos los estudiantes de la facultad hacen sus tareas. Traduce los siguientes enunciados en palabras y determina si son verdaderos o falsos:*
(i) $P \wedge Q$.
(ii) $(Q \wedge R) \Rightarrow S$.
(iii) $R \Rightarrow (Q \wedge S)$.
(iv) $(P \wedge S) \Leftrightarrow (Q \wedge R)$.

Ejercicio 1.2 *Haz una tabla de verdad para los siguientes enunciados:*
(i) $(A \vee B) \wedge C$.
(ii) $(A \vee B) \wedge C$.
(iii) $(A \vee B) \wedge (C \wedge D)$.
(iv) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow C$.
(v) $(A \Rightarrow B) \wedge (C \Leftrightarrow D)$.

Ejercicio 1.3 *Supongamos que X es falso, Y es verdadero, Z es falso y W es verdadero. Determina si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos:*

(i) $(X \Leftrightarrow Y) \Rightarrow Z$.
(ii) $W \Rightarrow (X \Rightarrow W)$.
(iii) $(W \Rightarrow X) \Leftrightarrow (Z \wedge Y)$.

Ejercicio 1.4 *Supongamos que X es verdadero, Y es falso, Z es falso y W es verdadero. Determina si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos:*
(i) $X \vee (Y \vee Z)$.
(ii) $(Y \vee Z) \wedge (W \wedge X)$.

1.2. Teoría de Conjuntos

Intuitivamente un **conjunto** es una colección de objetos, no necesariamente matemáticos. Los objetos contenidos en el conjunto son llamados los *elementos* del conjunto. En general, se utilizan las letras mayúsculas para representar a los conjuntos y las letras minúsculas para representar a sus elementos.
Si A es un conjunto y a es un elemento de A, escribimos $a \in A$. Si a no está contenido en el conjunto A, escribimos $a \notin A$. Vamos a asumir que siempre es posible determinar si un elemento pertenece o no a un conjunto.
La forma más simple de representar un conjunto es enlistando sus elementos, los cuales por convención se escriben entre llaves. Por ejemplo, el conjunto consistente de las letras a, b, c y d, se escribe como

$$A = \{a, b, c, d\}.$$

El orden en el que aparecen los elementos de un conjunto es irrelevante, de aquí que el conjunto $\{1, 2, 3\}$ es el mismo que el conjunto $\{3, 2, 1\}$. Además, no escribimos un mismo elemento repetidas veces, por ejemplo no escribimos $\{1, 1, 2, 2, 2, 3\}$.
Si A es un conjunto y $\mathcal{P}$ es una propiedad, los elementos de A que tienen la propiedad $\mathcal{P}$ forman otro conjunto. Este conjunto se denota como

$$\{x \in A \,|\, \mathcal{P}(x)\}$$

y se lee como “el conjunto de las x en A tales que x tiene la propiedad $\mathcal{P}$”.

Definición 1.2.1 *Sean A y B conjuntos. Decimos que B está contenido en A o B es* **subconjunto** *de A, si todo elemento de B es un elemento de A y escribimos $B \subseteq A$.*

Definición 1.2.2 *Sean A y B conjuntos. Decimos que los conjuntos son* **iguales** *y escribimos $A = B$ si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.*

Definición 1.2.3 *Decimos que B está contenido propiamente en A o que B es subconjunto* **propio** *si todo elemento de B es un elemento de A, pero no todo elemento de A es un elemento de B y escribimos $B \subsetneq A$.*

Propiedades 1.2.4 *Sean A, B y C conjuntos. Tenemos las siguientes propiedades:*

(a) $A \subseteq A$.

(b) *Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.*

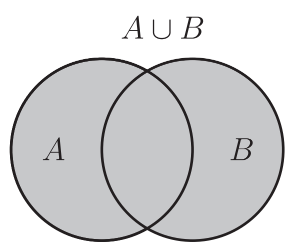
Definición 1.2.5 *Definimos el conjunto* **vacío** *como el conjunto que no tiene elementos y lo denotamos como $\emptyset$, es decir, es el conjunto*

$$\emptyset = \{x \,|x \neq x\}.$$

Definición 1.2.6 *Sean A y B conjuntos. Definimos la* **unión** *y la denotamos como $A \cup B$, al conjunto*

$$A \cup B = \{x \,|x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Podemos representar la unión de dos conjuntos, con los diagramas de Venn, como sigue:



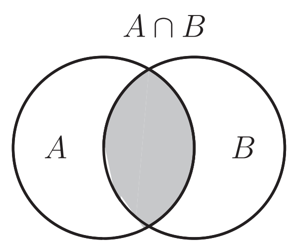
Propiedades 1.2.7 *Sean A, B y C conjuntos. Tenemos las siguientes propiedades:*

(a) $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$.
(b) *La unión de conjuntos es conmutativa, es decir, $A \cup B = B \cup A$.*
(c) *La unión de conjuntos es asociativa, es decir, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.*

Definición 1.2.8 *Sean A y B conjuntos. Definimos la* **intersección** *y la denotamos como $A \cap B$, al conjunto*

$$A \cap B = \{x \,|x \in A \,\text{y}\, x \in B\}.$$

Utilizando diagramas de Venn, representamos la intersección como sigue:



Propiedades 1.2.9 *Sean A, B y C conjuntos. Tenemos las siguientes propiedades:*

(a) $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$.
(b) *La intersección de conjuntos es conmutativa, es decir, $A \cap B = B \cap A$.*
(c) *La intersección de conjuntos es asociativa, es decir, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.*

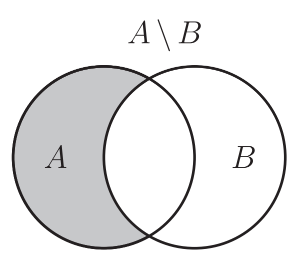
Propiedades 1.2.10 *Sean A, B y C conjuntos. Tenemos que:*

(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Definición 1.2.11 *La* **diferencia** *de dos conjuntos A y B es el conjunto*

$$A \setminus B = \{x \in A \,|\, x \notin B\}.$$

Podemos representar la diferencia de dos conjuntos usando los diagramas de Venn, como sigue:



Ejemplo 1.2.12 $A \setminus \emptyset = A$ *y* $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

Ejemplo 1.2.13 $A \setminus B = A$ *entonces* $A \cap B = \emptyset$.

Ejemplo 1.2.14 $A \setminus B = \emptyset$ *si y sólo si* $A \subseteq B$.

La operación diferencia no tiene propiedades tan simples como la unión y la intersección; por ejemplo, si $A \neq \emptyset$ entonces $(A \cup A) \setminus A \neq A \cup (A \setminus A)$, es decir, la colocación del paréntesis es importante. Otra diferencia importante es que, mientras que la unión y la intersección son operaciones conmutativas, la diferencia no lo es.

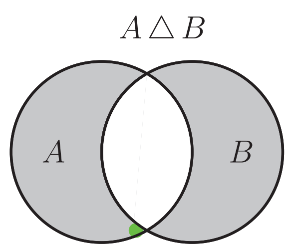
Ejemplo 1.2.15 *Para conjuntos arbitrarios* A *y* B *tenemos que*

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B).$$

Definición 1.2.16 *La* **diferencia simétrica** *de dos conjuntos* A *y* B *es el conjunto*

$$A \bigtriangleup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (B \cap A).$$

Podemos representar la diferencia de dos conjuntos utilizando los diagramas de Venn, como sigue:



Propiedades 1.2.17 *Sean* A, B *y* C *conjuntos. Tenemos las siguientes propiedades:*

(a) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.
(b) $A \triangle B = B \triangle A$.
(c) $A \triangle \emptyset = A$, $A \triangle A = \emptyset$.
(d) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

Definición 1.2.18 *Definimos el conjunto* **universal** *como el conjunto que tiene todos los elementos y lo denotamos por* $\mathbb{X}$.

Definición 1.2.19 *Definimos el* **complemento** *de un conjunto A como el conjunto de las a tal que $a \notin A$ y lo denotamos como A^c, es decir,*

$$A^c = \{a \,|\, a \notin A\}.$$

Propiedades 1.2.20 *Sean A, B y C conjuntos. Tenemos las siguientes propiedades:*

(a) $(A^c)^c = A$.
(b) $A \cup A^c = \mathbb{X}$.
(c) $A \cap A^c = \emptyset$.

Ejemplo 1.2.21 $A \setminus B = A \cap B^c$.

Teorema 1.2.22 *Para cualesquiera dos conjuntos A y B y cualquier conjunto E que contenga a $A \cup B$,*

$$A \setminus B = A \cap (E \setminus B).$$

Demostración. Como $A \cup B \subseteq E$, tenemos que

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x \in E \,|\, x \in A \text{ y } x \in B\} \\ &= \{x \in E \,|\, x \in A\} \cap \{x \in E \,|\, x \notin B\} = A \cap (E \setminus B). \end{aligned}$$

□

Teorema 1.2.23 *(Leyes de De Morgan) Dados dos conjuntos A y B tenemos que:*

(a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
(b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Demostración. (a) Para demostrar que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ tenemos que probar que $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$ y $(A \cup B)^c \supseteq A^c \cap B^c$.
Supongamos que $x \in (A \cup B)^c$ entonces $x \notin (A \cup B)$, es decir, $x \notin A$ y $x \notin B$, pero entonces tenemos que $x \in A^c$ y $x \in B^c$. Luego, $x \in A^c \cap B^c$.
Mostremos ahora la otra contención. Supongamos que $x \in A^c \cap B^c$ entonces $x \in A^c$ y $x \in B^c$. Es decir, $x \notin A$ y $x \notin B$ que equivale a escribir $x \notin A \cup B$. Luego, $x \in (A \cup B)^c$. Con esto hemos probado la primera igualdad.

(b) La demostración de la segunda igualdad es análoga. $\square$

Ejercicio 1.5 *Encontrar conjuntos A y B tales que $A \subset B$ y $A \subsetneq B$.*

Ejercicio 1.6 *Sean A, B y C conjuntos. Supongamos que $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ y $C \subseteq A$. Probar que $A = B = C$.*

Ejercicio 1.7 *Sean $A = \{1, 3, 5, 7\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Encontrar cada uno de los siguientes conjuntos y dibuja sus diagramas de Venn.*

(i) $A \cup B$.
(ii) $A \cap B$.
(iii) $A \setminus B$.
(iv) $B \setminus A$.

Ejercicio 1.8 *Sean $C = \{a, b, c, d, e, f\}$, $D = \{a, c, e\}$, $E = \{d, e, f\}$ y $F = \{a, b\}$. Encontrar:*

(i) $C \setminus (D \cup E)$.
(ii) $(C \setminus D) \cup E$.
(iii) $F \setminus (C \setminus E)$.
(iv) $F \cap (D \cup E)$.
(v) $(F \cap D) \cup E$.
(vi) $(C \setminus D) \cup (F \cap E)$.

Ejercicio 1.9 *Sean*
$G = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n = 3m$ *para todo* $m \in \mathbb{Z}\}$, $\quad I = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n^2$ *es impar* $\}$,
$H = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n = 6k$ *para todo* $k \in \mathbb{Z}\}$, $\quad J = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, 0 \leq n \leq 10\}$.
Encuentra los siguientes conjuntos:

(i) $G \cup I$.
(ii) $G \cap H$.
(iii) $J \setminus G$.
(iv) $J \cap (G \setminus H)$.

Ejercicio 1.10 *Prueba que:*

(i) $A \cup (A \cap B) = A$ y $A \cap (A \cup B) = A$.

(ii) *Si* $A \subseteq B$, *entonces* $A \cup C \subseteq B \cup C$ *y* $A \cap C \subseteq B \cap C$.

Ejercicio 1.11 *Sea* X *un conjunto y sean* $A, B, C \subseteq X$. *Supongamos que* $A \cap B = A \cap C$ *y que* $(X \setminus A) \cap B = (X \setminus A) \cap C$. *Probar que:*

(i) $B = C$.
(ii) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

Ejercicio 1.12 *Dibuja los respectivos diagramas de Venn para cada uno de los ejercicios anteriores.*

Ejercicio 1.13 *Sea* $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x \leq 1\}$ *y* $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, \frac{1}{2} < x \leq 2\}$. *Encuentra* $A \setminus B$.

Ejercicio 1.14 *Si* E *es un conjunto que contiene a* $A \cup B$, *muestra que:*

(i) $A \cap (E \setminus A) = \emptyset, \quad A \cup (E \setminus A) = E$.
(ii) $E \setminus (E \setminus A) = A$.
(iii) $E \setminus \emptyset = E, \quad E \setminus E = \emptyset$.
(iv) $A \subset B$ *si y sólo si* $E \setminus B \subset E \setminus A$.

Ejercicio 1.15 *Si* $X = \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$ *y* A *es un subconjunto de* X, *resuelva la ecuación*

$$\{0, 3, 6, 7\} \triangle A = \{0, 7, 1, 2\},$$

donde $\triangle$ *denota la diferencia simétrica.*

1.3. Producto cartesiano

Un concepto importante para el desarrollo de la teoría de conjuntos, así como para el estudio de las funciones, los sistemas coordenados y varias cosas más, es el concepto de **pareja ordenada**.
Con este término nos referimos a dos elementos, no necesariamente de un mismo conjunto, pero que juegan papeles distintos. Es decir, si A y B son conjuntos, se define el conjunto

$$A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Este conjunto se lee "A cruz B" y sus elementos son entonces las parejas ordenadas $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$.
Nótemos que lo que queremos recalcar es la distinción entre el primer lugar y el segundo lugar en la pareja. Esta definición nos lleva a esta distinción, ya que se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.3.1 *Sean (a,b) y (c,d) dos elementos de $A \times B$ entonces*

$$(a,b) = (c,d) \quad \text{si y sólo si} \quad a = c \text{ y } b = d.$$

Demostración. Existen dos posibilidades, a saber:
(a) $\{a\} = \{c\}$ y $\{a,b\} = \{c,d\}$,

(b) $\{a\} = \{c,d\}$ y $\{a,b\} = \{c\}$.
En el primer caso tenemos que $a = c$ por lo que $\{a,b\} = \{a,d\}$ y entonces $b = d$.
En el caso (b), tenemos que $a = c = d$ y entonces $\{a,b\} = \{a\}$ por lo que $b = a$.

□

Ejemplo 1.3.2 *Sean $A = \{a,b\}$, $B = \{c,d\}$, hay cuatro parejas ordenadas tales que el primer elemento pertenezca a A y el segundo a B, es decir, son las parejas*

$$(a,c),(a,d),(b,c) \text{ y } (b,d).$$

Ejemplo 1.3.3 *Si $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{a,b\}$ entonces*

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}.$$

Propiedades 1.3.4 *Si A, B, C y D son conjuntos, tenemos las siguientes propiedades:*
(a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,
(b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
(c) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,
(d) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$,
(e) $(A \cap C) \times (B \cap D) = (A \times B) \cap (C \times D)$,
(f) $A \times B = \emptyset$ *si y sólo si* $A = \emptyset$ *o* $B = \emptyset$,
(e) $(A \backslash B) \times C = (A \times C) \backslash (B \times C)$.

Demostración. (a) Sea $(a, b) \in A \times (B \cup C)$, entonces $a \in A$ y $b \in B \cup C$, es decir, $a \in A$ y $b \in Bob \in C$. Luego, $a \in A$ y $b \in B$ o $a \in A$ y $b \in C$. Por lo tanto, $(a, b) \in A \times B$ o $(a, b) \in A \times C$, es decir, $(a, b) \in (A \times B) \cup (A \times C)$.
Las demostraciones de (b), (c) y (d) son análogas.
Para demostrar (e), supongamos que $(a, b) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$ entonces $a \in (A \cap C)$ y $b \in (B \cap D)$, de donde se deduce que $a \in A$ y $a \in C$ y $b \in B$ y $b \in D$. Lo cual es equivalente a decir que, $a \in A$ y $b \in B$ y $a \in C$ y $b \in D$. Por lo tanto, $(a, b) \in A \times B$ y $(a, b) \in C \times D$, esto es, $(a, b) \in (A \times B) \cap (C \times D)$.
Las demostraciones de (f) y (e) se dejan como ejercicio al lector. $\square$

El concepto de producto cartesiano de conjuntos nos permite tratar en forma precisa el de relación. Por ejemplo, si $X = \{2, 3, 4, \ldots, 9\}$ y consideramos la relación de "ser divisor de", dicha relación nos da el conjunto

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} (2,2) & (2,4) & (2,6) & (2,8) & (3,3) & (3,6) & (3,9) \\ (4,4) & (4,8) & (5,5) & (6,6) & (7,7) & (8,8) & (9,9) \end{array} \right\}.$$

En la siguiente sección daremos más ejemplos de relaciones y la definición.

Ejercicio 1.16 *Sean $A = \{1, 3, 5, 7\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Encontrar $A \times B$.*

Ejercicio 1.17 *Sean A, B, C y D subconjuntos cualesquiera, si $C \times D \neq \emptyset$ entonces $C \times D \subseteq A \times B$ si y sólo si $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$.*

1.4. Los números y sus propiedades

Consideraremos que el lector está familiarizado con el conjunto de números que se utilizan para contar. A este conjunto lo definimos de la siguiente manera.

Definición 1.4.1 *Los números naturales son los números que utilizamos para contar y los denotamos por $\mathbb{N}$, es decir, el conjunto de números naturales está definido por*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

En este conjunto estamos acostumbrados a realizar dos operaciones, la suma (o adición) y el producto. Entendiendo con esto que si sumamos o multiplicamos dos números del conjunto obtenemos otro número natural, es decir, los números naturales cumplen los siguientes axiomas:

Axiomas 1.4.2 *Las propiedades de la suma.*

(a) $a + b$ *es un número natural.*

(b) $a + b = b + a$, *es decir, la suma es conmutativa.*

(c) $a + (b + c) = (a + b) + c$, *es decir, la suma es asociativa.*

Axiomas 1.4.3 *Las propiedades de la multiplicación.*

(a) $a \cdot b$ *es un número natural.*

(b) $a \cdot b = b \cdot a$, *es decir, la multiplicación es conmutativa.*

(c) $a(b \cdot c) = (a \cdot b)c$, *es decir, la multiplicación es asociativa.*

Axiomas 1.4.4 *La propiedad distributiva.*

$$(a + b)c = ac + bc \quad \textit{y} \quad a(b + c) = ab + ac.$$

Ahora, supongamos que deseamos resolver la ecuación $x + a = 0$, con $a \in \mathbb{N}$. Esta ecuación no tiene solución en el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, por lo cual necesitamos definir un conjunto de números que incluya al conjunto de números $\mathbb{N}$ y a sus negativos. Es decir, necesitamos extender el conjunto de los números $\mathbb{N}$ para que este tipo de ecuaciones tenga solución en el nuevo conjunto. A este conjunto lo llamamos el conjunto de los números enteros que denotamos por $\mathbb{Z}$, es decir,

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

En este conjunto también hay dos operaciones la adición y la multiplicación, que satisfacen las mismas propiedades que los números $\mathbb{N}$. Además de las tres propiedades que tienen los números naturales con la suma, en los enteros tenemos que aumentar dos propiedades más:

Axiomas 1.4.5 (d) *Existe en* $\mathbb{Z}$ *un elemento neutro para la suma, el 0. Es decir, si* $a \in \mathbb{Z}$ *entonces*

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

(e) *Para cada* $a \in \mathbb{Z}$ *existe su inverso aditivo que se denota por* $-a$. *Esto es,*

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

En el caso de la multiplicación también tenemos que aumentar una propiedad más.

Axiomas 1.4.6 (d) *Existe en $\mathbb{Z}$ un elemento neutro para la multiplicación, el 1. Esto es, si $a \in \mathbb{Z}$ entonces*

$$a1 = 1a = a.$$

Un conjunto que cumple todas las propiedades de los números enteros, se llama un **anillo**. Como tenemos que los elementos de $\mathbb{Z}$ conmutan le llamamos un **anillo conmutativo** y como además posee un elemento 1, decimos que tenemos un **anillo conmutativo, con unidad**, es decir, un anillo conmutativo con elemento unitario (el 1).

Notemos que la existencia del inverso aditivo nos permite resolver cualquier ecuación del tipo mencionado, es decir, $x + a = b$, donde a y b son números enteros. Sin embargo, no necesariamente existe un número entero que resuelva la ecuación $bx = a$, por lo que nuevamente surge la necesidad de extender el conjunto de números. Consideraremos ahora el conjunto de los números racionales, que denotamos como $\mathbb{Q}$, es decir,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad b \in \mathbb{Z} \backslash \{0\} \right\}.$$

En el conjunto de números racionales también existen las operaciones de suma y producto, las cuales cumplen las mismas propiedades que los números enteros, sin embargo en el producto existe otra propiedad, el inverso multiplicativo.

Axioma 1.4.7 (e) *Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, con $a \neq 0$, entonces existe un único número, $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$, llamado el inverso multiplicativo, tal que*

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

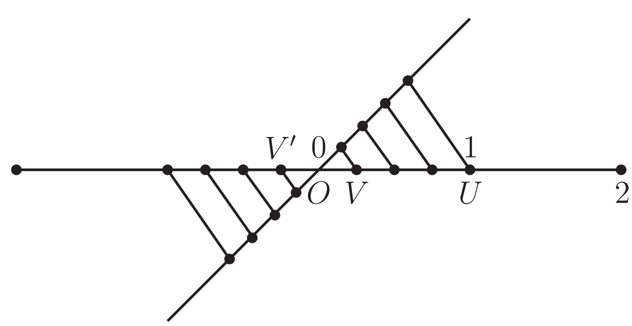
Con esta nueva propiedad tenemos garantía de poder resolver cualquier ecuación de la forma $bx = a$. Sin embargo, existen números que no podemos escribir como cociente de dos números enteros, por ejemplo, si queremos resolver la ecuación $x^2 - 2 = 0$, ésta no tiene solución en el conjunto de los números $\mathbb{Q}$. Escribimos $x = \pm\sqrt{2}$ y mostraremos que $\sqrt{2}$ no está en $\mathbb{Q}$.

Proposición 1.4.8 *El número $\sqrt{2}$ no es un número racional.*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, que $\sqrt{2}$ es un número racional, entonces lo podemos escribir como $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, donde a y b no tienen factores comunes. Elevando al cuadrado de ambos lados tenemos que $2 = \frac{a^2}{b^2}$, es decir, $2b^2 = a^2$. Esto quiere decir, que a^2 es un número par, pero entonces la misma a es par. Pero si a es par, digamos de la forma $a = 2m$, entonces $2b^2 = (2m)^2 = 4m^2$. Despejando la ecuación tenemos que $b^2 = 2m^2$, esto es b^2 es par y entonces b es también par. Así a y b son pares, contradiciendo el hecho de que a y b no tienen factores comunes. Por lo tanto, $\sqrt{2}$ no es un número racional. $\square$

Podemos dar una representación geométrica de los números racionales como puntos sobre una recta, que llamaremos la **recta numérica** . Una recta la podemos recorrer en dos sentidos, uno de ellos que llamaremos **positivo** y al otro **negativo**. Una vez convenido cual es el sentido positivo decimos que tenemos una **recta orientada** . Por ejemplo, podemos convenir que el sentido positivo es el que va de izquierda a derecha. Si consideramos dos puntos O y U en la recta, le daremos la misma orientación al segmento que a la recta que lo contiene. Esto es, tomando el punto O como el 0 y U a la derecha de él, diremos que el segmento OU se recorre en el sentido positivo. Si el punto U representa al 1, llamaremos a OU un segmento orientado y unitario. Así, podemos ir colocando, hacia la derecha, todos los números enteros positivos a lo largo de la recta separados una distancia OU. Para representar los números enteros negativos basta que hagamos lo mismo pero ahora iniciando en O y recorriendo la recta en sentido negativo.
Los números racionales de la forma $\frac{p}{q}$, los definimos como el segmento orientado $\frac{p}{q}OU$ que es el segmento que se obtiene al sumar p veces la q-ésima parte del segmento OU. Con más precisión, hacemos lo siguiente:

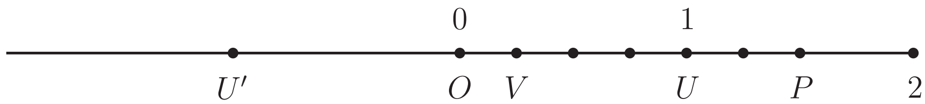
(a) Dividimos en q partes iguales el segmento OU. Sea OV una de esas partes, es decir, V es un punto entre O y U que representa al número $\frac{1}{q}$ (OV tiene la misma orientación de OU). Consideramos también V' el simétrico, con respecto a O, de V. En la siguiente figura, hemos tomado $q = 4$



(b) Si p es un entero no negativo, tomamos

$$OP = \underbrace{OV + OV + \cdots + OV}_{p-\text{ veces}} = p \cdot OV.$$

El segmento OP es, por definición, $\frac{p}{q}OU$. En la siguiente figura, marcamos el punto con $p = 6$.

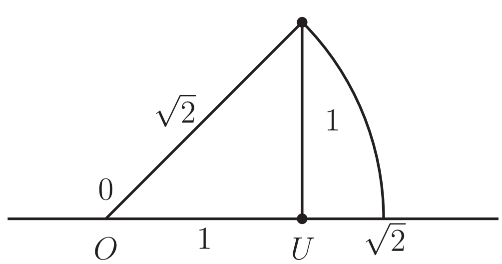


(c) Si p es negativo, sea p' el entero positivo tal que $p = -p'$. Tomamos entonces

$$OP = \underbrace{OV' + OV' + \cdots + OV'}_{p'-\text{ veces}} = p'OV' = (-p')OV = p \cdot OV.$$

El segmento OP es, por definición, $\frac{p}{q}OU$. Como OU es el segmento unitario, a este punto lo denotaremos simplemente como $\frac{p}{q}$.

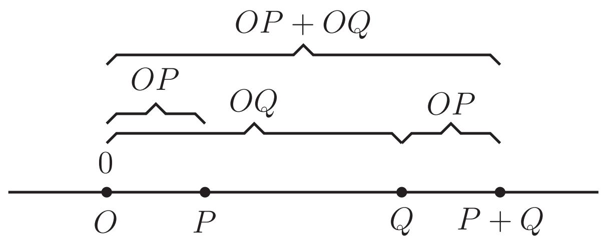
Con esta representación de los números racionales, tenemos que todo número racional está representado por un punto en la recta numérica, pero hay puntos en la recta numérica que no representan ningún número racional. Por ejemplo, veamos en donde se encuentra, en la recta numérica, el número $\sqrt{2}$ que ya vimos que no es racional. Si tomamos un triángulo rectángulo con catetos de longitud 1, entonces, por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa de este triángulo es $\sqrt{2}$. Si tomamos un compás y trazamos una circunferencia de radio $\sqrt{2}$ con centro en 0, el punto donde la circunferencia intersecta a la recta numérica es el punto en la recta numérica que corresponde a $\sqrt{2}$.



A estos números que no podemos escribir como cociente de dos números enteros los llamamos números irracionales y al conjunto de estos números lo denotamos por $\mathbb{I}$.

A la unión de estos dos últimos conjuntos, le vamos a llamar el conjunto de los números reales, que denotaremos como $\mathbb{R}$, es decir, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$.
El conjunto de los números $\mathbb{R}$ contiene al conjunto de los números naturales, al de los enteros y al de los racionales. De hecho, tenemos las siguientes contenciones $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

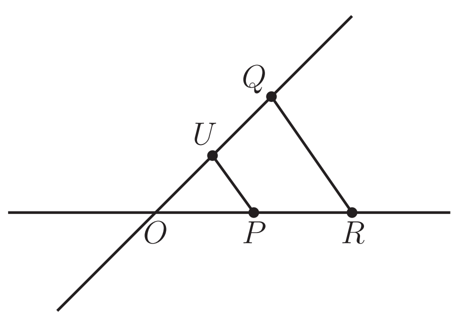
Dados dos puntos en la recta numérica, que sabemos representan a dos números reales, podemos localizar, en la recta númerica, al punto que es la suma de ellos , de la siguiente manera: si P y Q son dos puntos sobre la recta y O es el origen, la suma será la suma de los segmentos dirigidos OP y OQ, como se muestra en la siguiente figura



Asimismo, podemos encontrar el punto que representa el producto de dos puntos P y Q sobre la recta numérica como sigue. Consideremos una recta auxiliar que será una copia de la recta real con el mismo origen O. Localizamos en la recta auxiliar la unidad U y el punto Q. Por Q trazamos la recta paralela a UP la cual intersecta a la recta real en R.
Como los triángulos ORQ y OPU son semejantes tenemos que

$$\frac{OR}{OP} = \frac{OQ}{OU} \quad \Rightarrow \quad OR = OP \cdot OQ,$$

de donde, OR representa al producto de P y Q.



Con esto podemos localizar, la suma y el producto de cualesquiera dos números reales sobre la recta numérica, sin importar si son números racionales o irracionales. Además, al igual que en el conjunto de los números enteros, las operaciones en el conjunto de números reales cumplen todas las propiedades mencionadas, esto es:

Propiedades 1.4.9 (a) *La suma de dos números reales es un número real.*

(b) *La suma de dos números reales es conmutativa.*

(c) *La suma es asociativa.*

(d) *El número 0 es el neutro aditivo. Es decir, $x + 0 = x$, para todo x.*

(e) *Todo número real x tiene un inverso aditivo, es decir, existe un número real que se denota por $-x$ y cumple que $x + (-x) = 0$.*

Las propiedes del producto, para los números reales, son:

Propiedades 1.4.10 (a) *El producto de dos números reales es un número real.*

(b) *El producto es conmutativo.*

(c) *El producto es asociativo.*

(d) *El número 1 es el neutro multiplicativo. Es decir, $x \cdot 1 = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

(e) *Todo número real x, distinto de 0, tiene inverso multiplicativo, es decir, existe un número real que se denota por x^{-1}, tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.*

Por último, tenemos la propiedad que relaciona las dos operaciones, esto es, el producto distribuye a la suma, es decir, si x, y, $z \in \mathbb{R}$ entonces

$$x\,(y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Un conjunto que cumple todas las propiedades de los números reales, se llama un **campo**.

Ejercicio 1.18 *Sean a, b números reales. Muestra que, si $a + b$, $a^2 + b$ y $a + b^2$ son racionales y $a + b \neq 1$ entonces a y b son racionales.*

Ejercicio 1.19 *Sean a, b números reales tales que $a^2 + b^2$, $a^3 + b^3$ y $a^4 + b^4$ son racionales. Muestra que $a + b$, ab son también racionales.*

Ejercicio 1.20 *Demuestra que* $\sqrt{p}$ *es irracional, con* p *un número primo.*

Ejercicio 1.21 *Si los coeficientes de*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

son números enteros impares entonces las raíces de la ecuación no pueden ser números racionales.

Ejercicio 1.22 *Sean* x*,* y *y* $z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *tales que* xy*,* yz *y* $zx \in \mathbb{Q}$*. Muestra que:*
(i) $x^2 + y^2 + z^2 \in \mathbb{Q}$.
(ii) *Si* $x^3 + y^3 + z^3 \in \mathbb{Q}$ *entonces* x*,* y *y* $z \in \mathbb{Q}$*.*

Ejercicio 1.23 *Sean* a*,* b *números reales positivos y distintos, tales que* $a - \sqrt{ab}$ *y* $b - \sqrt{ab}$ *son ambos números racionales. Muestra que* a *y* b *son racionales.*

Ejercicio 1.24 *Demuestra que si* $a + b = c$*, con* a*,* b *y* c *números enteros, entonces* $a = c - b$*.*

1.5. Órdenes parciales

En realidad la contención entre los conjuntos de una familia no es más que un ejemplo de lo que se conoce un orden parcial.

Definición 1.5.1 *Diremos que una relación "*$\leq$*", entre los elementos de un conjunto* A*, es un orden parcial en el conjunto si:*
(a) *La relación es* **reflexiva***, es decir, para cada elemento* $x \in A$*,* $x \leq x$*.*
(b) *La relación es* **antisimétrica***, es decir, para cualesquiera dos elementos* x *y* y *en* A*, si* $x \leq y$ *y* $y \leq x$*, entonces* $x = y$*.*
(b) *La relación es* **transitiva***, es decir, para cualesquiera tres elementos* x*,* y *y* z *en* A*, si* $x \leq y$ *y* $y \leq z$*, entonces* $x \leq z$*.*

La expresión $x \leq y$ se lee "x menor o igual a y". Un conjunto que cumple estas propiedades diremos que es un conjunto parcialmente ordenado o con un orden parcial.

Ejemplo 1.5.2 *Un orden parcial en los números naturales es la relación "divide a".*

En los números enteros tenemos propiedades de orden, es decir, dados dos números enteros a y b decimos que a **es mayor que** b si $a - b$ es un número natural, en símbolos tenemos

$$a > b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{N}.$$

Esto es equivalente a decir que $a - b > 0$.
En general, la notación $a > b$ es equivalente $b < a$ y $a \geq b$ significa que $a > b$ o $a = b$. Análogamente, $a \leq b$ significa que $a < b$ o $a = b$.

Propiedades 1.5.3 *Si a es un número entero, se cumple una y solamente una de las condiciones siguientes:*
(a) $a > 0$,
(b) $a = 0$,
(c) $a < 0$.

Los números racionales y los números reales también cumplen las propiedades de orden.
El orden en los números reales nos permitirá comparar dos números y decidir cual de ellos es mayor o bien si son iguales. A fin de evitar justificaciones tediosas, asumiremos que en los números reales hay un conjunto P que llamaremos el conjunto de números positivos, y simbólicamente escribiremos $x > 0$, para decir que un número x está en P. Resaltamos que cumplen las tres propiedades siguientes.

Propiedad 1.5.4 *Cada número real x tiene una y sólo una de las siguientes características:*

(a) $x = 0$,
(b) $x \in P$ *(esto es $x > 0$)*,
(c) $-x \in P$ *(esto es $-x > 0$)*.

Propiedad 1.5.5 *Si x, $y \in P$, entonces $x + y \in P$
(en símbolos $x > 0$, $y > 0 \Rightarrow x + y > 0$).*

Propiedad 1.5.6 *Si x, $y \in P$, entonces $xy \in P$
(en símbolos $x > 0$, $y > 0 \Rightarrow xy > 0$).*

Hacemos notar que el 1 es positivo, ya que si fuera negativo, como cumple con la propiedad $1 \cdot x = x$, para cada x, tendríamos que cualquier número $x \neq 0$ cumpliría con $x \in P$ y $-x \in P$, lo cual contradice la propiedad 1.5.4.

Ahora podemos definir la relación, x **es mayor que** y, si $x - y \in P$ (en símbolos $x > y$). Análogamente, x **es menor que** y, si $y - x \in P$ (en símbolos $x < y$). Observemos que $x < y$ es equivalente a $y > x$. Definimos también x **es menor o igual que** y, si $x < y$ ó $x = y$, (en símbolos $x \leq y$).
Al conjunto P de números reales positivos, lo denotamos por $\mathbb{R}^+$.

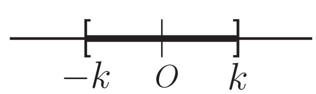
Ejemplo 1.5.7 (a) *Si* $x < y$ *y* z *es cualquier número, entonces* $x + z < y + z$.
(b) *Si* $x < y$ *y* $z > 0$*, entonces* $xz < yz$.

En efecto, para mostrar (a) tenemos que $x + z < y + z \Leftrightarrow (y + z) - (x + z) > 0 \Leftrightarrow y - x > 0 \Leftrightarrow x < y$. Para ver (b) tenemos que $x < y \Rightarrow y - x > 0$ y como $z > 0$, resulta que $(y - x)z > 0$, luego $yz - xz > 0$ y entonces $xz < yz$.
Observemos que las propiedades de orden también las cumplen los números enteros y los números racionales.

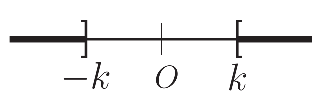
Definimos el **valor absoluto** de un número real como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

La identidad $|x| = k$ sólo la satisfacen los números $x = k$ y $x = -k$.
La desigualdad $|x| \leq k$ es equivalente a $-k \leq x \leq k$, lo cual podemos ver de la siguiente manera. Si $x \geq 0$, entonces $0 \leq x = |x| \leq k$. Por otro lado, si $x \leq 0$, entonces $-x = |x| \leq k$, de donde $x \geq -k$. Como consecuencia de lo anterior observemos que $x \leq |x|$. En la figura siguiente se muestran los valores de x que satisfacen la desigualdad, estos son los que se encuentran entre $-k$ y k, incluyéndolos.



Análogamente, la desigualdad $|x| \geq k$ es equivalente a $x \geq k$ o $-x \geq k$. En la figura siguiente los valores de x que satisfacen las desigualdades son los que se encuentran antes, o son iguales, a $-k$ o después, o son iguales, a k.



Ejemplo 1.5.8 *Sea x un número real. Encuentre, en el plano cartesiano, el área encerrada por la gráfica de la relación $|x| + |y| = 1$.*

Para $|x| + |y| = 1$ tenemos que considerar cuatro casos:

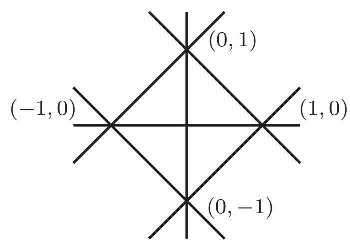
(a) $x \geq 0$ y $y \geq 0$ lo que implica que $x + y = 1$, es decir, $y = 1 - x$.

(b) $x \geq 0$ y $y < 0$ lo que implica que $x - y = 1$, es decir, $y = x - 1$.

(c) $x < 0$ y $y \geq 0$ lo que implica que $-x + y = 1$, es decir, $y = x + 1$.

(d) $x < 0$ y $y < 0$ lo que implica que $-x - y = 1$, es decir, $y = -x - 1$.

Podemos ahora dibujar la gráfica.



El área encerrada por las cuatro rectas está formada por cuatro triángulos rectángulos isósceles, que tienen cada uno, dos lados iguales a 1. Como el área de cada uno de estos triángulos es $\frac{1\times 1}{2} = \frac{1}{2}$, el área del cuadrado es $4(\frac{1}{2}) = 2$.

Ejemplo 1.5.9 *Resuelva la ecuación $|2x - 4| = |x + 5|$.*

Tenemos que

$$|2x - 4| = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si} \quad x \geq 2 \\ -2x + 4 & \text{si} \quad x < 2. \end{cases}$$

Además, tenemos que

$$|x + 5| = \begin{cases} x + 5 & \text{si} \quad x \geq -5 \\ -x - 5 & \text{si} \quad x < -5. \end{cases}$$

Si $x \geq 2$ entonces $2x - 4 = x + 5$, es decir, $x = 9$. Si $x < -5$ entonces $-2x + 4 = -x - 5$, de donde $x = 9$. El último caso que nos falta considerar es

$-5 \leq x < 2$ entonces la ecuación que tenemos que resolver es $-2x+4 = x+5$, despejando x, tenemos que $x = -\frac{1}{3}$.

Muchas veces es más fácil resolver estas ecuaciones sin utilizar la forma explícita del valor absoluto, si observamos que $|a| = |b|$ si y sólo si $a = \pm b$.

Observación 1.5.10 *Si x es un número real cualquiera entonces la relación entre la raíz cuadrada y el valor absoluto está dada por*

$$\sqrt{x^2} = |x|,$$

la identidad se sigue de que $|x|^2 = x^2$ y $|x| \geq 0$.

Propiedades 1.5.11 *Si x y y son números reales, se cumple lo siguiente:*

(a) $|xy| = |x||y|$. *De aquí se sigue también que* $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, *si* $y \neq 0$.

(b) $|x+y| \leq |x| + |y|$, *donde la igualdad se da si y sólo si* $xy \geq 0$.

Demostración.

(a) La demostración es directa de $|xy|^2 = (xy)^2 = (x)^2(y)^2 = |x|^2|y|^2$, y ahora sacando raíz obtenemos el resultado.

(b) Como ambos lados de la desigualdad son números positivos, bastará entonces verificar que $|x+y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$.

$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = |x|^2 + 2xy + |y|^2 \\ &\leq |x|^2 + 2\,|xy| + |y|^2 = |x|^2 + 2\,|x|\,|y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2 . \end{aligned}$$

En las relaciones anteriores hay una sola desigualdad y ésta es inmediata ya que $xy \leq |xy|$. Además obtenemos la igualdad si y sólo si $xy = |xy|$ que sucede únicamente cuando $xy \geq 0$. $\square$

La última desigualdad se puede escribir en su forma general como

$$|x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|,$$

para números reales x_1, x_2, ..., x_n. La igualdad se tiene cuando todos los x_i tienen el mismo signo. Esta se demuestra de manera similar, o bien por inducción.

Ejercicio 1.25 *Muestra las siguientes afirmaciones:*

(i) $a < 0$, $b < 0 \Rightarrow ab > 0$.
(ii) $a < 0$, $b > 0 \Rightarrow ab < 0$.
(iii) $a < b$, $b < c \Rightarrow a < c$.
(iv) $a < b$, $c < d \Rightarrow a + c < b + d$.
(v) $a > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} > 0$.
(vi) $a < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} < 0$.

Ejercicio 1.26 *Demuestra que el cuadrado de cualquier entero distinto de cero es positivo.*

Ejercicio 1.27 *Demuestra que si a y b son enteros positivos tales que $a < b$ entonces $a^2 < b^2$.*

Ejercicio 1.28 *Demuestra que si a y b son enteros positivos tales que $a^2 < b^2$ entonces $a < b$.*

Ejercicio 1.29 *Demuestra que si $a > b$ entonces $-a < -b$.*

Ejercicio 1.30 *Con ejemplos ve que la condición de que los enteros sean positvos en el ejercicio anterior no se puede omitir.*

Ejercicio 1.31 *Demuestra que si $a > b$ y $c > d$ entonces $a + c > b + d$.*

Ejercicio 1.32 *Calcula $|a + b|$ y $|a| + |b|$ si*

$a = 7$ *y* $b = 3$.
$a = 7$ *y* $b = -3$.
$a = -7$ *y* $b = 3$.
$a = -7$ *y* $b = -3$.

Ejercicio 1.33 *Si a y b son números reales demuestra que*

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

Ejercicio 1.34 *En cada caso encuentra los números reales x que satisfacen:*

(i) $|x-1|-|x+1|=0.$

(ii) $|x-1||x+1|=1.$

(iii) $|x-1|+|x+1|=2.$

Ejercicio 1.35 *Encuentra las ternas de números reales que satisfacen*

$$\begin{aligned} 2xy - z^2 &\geq 1 \\ z - |x+y| &\geq -1. \end{aligned}$$

Capítulo 2

Inducción

2.1. El principio de inducción simple

Empecemos analizando la suma de los primeros n números naturales, para lo cual hacemos los primeros casos, $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 3 = 6$, $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ y en general se puede deducir que la suma de los primeros n números naturales está dada por

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{2.1}$$

La fórmula de la suma de los primeros n naturales, es en realidad una colección de afirmaciones, $\mathcal{P}(n)$, que son válidas para cada entero positivo n. Si se desea mostrar que todas ellas son verdaderas, es claro que probando sucesivamente $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$, $\mathcal{P}(3)$, ... nunca vamos a terminar, ya que los números naturales son infinitos.

La validez de esta serie de afirmaciones se puede probar utilizando lo que se conoce como el principio de inducción matemática, que es lo que desarrollaremos en este capítulo.
El principio de inducción matemática asegura que una sucesión de proposiciones $\{\mathcal{P}(n)\}$ son todas ciertas si:

1. La afirmación $\mathcal{P}(1)$, es verdadera.

2. La afirmación: $\mathcal{P}(k)$ implica $\mathcal{P}(k+1)$, es verdadera.

Esta última afirmación se puede garantizar que es verdadera suponiendo que $\mathcal{P}(k)$ es verdadera y mostrando la veracidad de $\mathcal{P}(k+1)$. [1]

Observación 2.1.1 *Al punto* $1.$ *se le conoce como la* **base de inducción** *y al punto* $2.$ *como el* **paso inductivo**.

Demostraremos que la fórmula (2.1) es verdadera para todo número natural, procediendo de acuerdo a lo descrito. Esto es,

Ejemplo 2.1.2 *Demuestre que* $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ *es válida para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Si $n=1$ el término izquierdo de la ecuación consta de un único sumando que es 1 y el término derecho es $\frac{1(1+1)}{2}$. Como este término también es 1 se tiene que la fórmula es válida para $n=1$.
Supongamos ahora que la afirmación $\mathcal{P}(k)$ es verdadera, es decir, que

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2} \tag{2.2}$$

es verdadera. Probamos la fórmula correspondiente para $k+1$.
El término izquierdo en la fórmula para $k+1$ es $1+2+3+\cdots+k+(k+1)$ y si usamos (2.2) tenemos

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k^2+k+2k+2}{2} \\ &= \frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}, \end{aligned}$$

lo que prueba la validez de la fórmula para $k+1$ y por lo tanto, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 2.1.3 *Demuestre que* n^3-n *es un múltiplo de* 6 *para todo número natural* n.

Si $n=1$ entonces $n^3-n=0$ que es un múltiplo de 6, ya que, $0=6\cdot 0$.
Supongamos que k^3-k es un múltiplo de 6, es decir, $k^3-k=6\,r$, para algun entero r. Demostremos que la afirmación para $k+1$ es verdadera, es decir, tenemos que probar que $(k+1)^3-(k+1)$ es un múltiplo de 6.

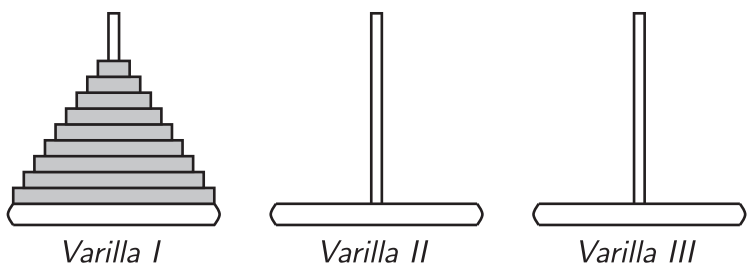
[1] Mostrar el inciso 2. es equivalente a mostrar que: no $\mathcal{P}(k+1)$ implica no $\mathcal{P}(k)$, es verdadera.

Ahora bien,

$$\begin{aligned}(k+1)^3-(k+1) &= k^3+3\,k^2+3\,k+1-k-1\\ &= (k^3-k)+3(k^2+k)\\ &= 6\,r+3(k^2+k)\end{aligned}$$

aquí hemos usado la validez de $\mathcal{P}(k)$ y $k^3-k=6r$. Como $k^2+k=k(k+1)$ es el producto de números consecutivos, uno de ellos es par, luego k^2+k es par. Entonces, $3(k^2+k)$ es múltiplo de 6. Luego, $(k+1)^3-(k+1)$ es suma de múltiplos de 6.

Ejemplo 2.1.4 *(Las torres de Hanoi) Dice una leyenda que Brahma, al crear el mundo, situó sobre la Tierra tres varillas de diamante y 64 discos de oro. Los discos son todos de diferentes tamaños e inicialmente fueron colocados en orden decreciente de diámetros sobre la primera de las varillas. También creó Brahma un monasterio cuyos monjes tienen la tarea de trasladar todos los discos desde la primera varilla a la tercera. La única operación permitida es mover un disco de una varilla a otra cualquiera, pero con la condición de que no se puede situar encima de un disco otro de diámetro mayor. La leyenda dice también que cuando los monjes terminen su tarea, el mundo se acabará. ¿Cuál es el mínimo número de movimientos necesarios para mover los discos?*



Sea x_n el mínimo número de movimientos necesarios para mover n discos. Si $n=1$ hay un sólo disco y basta un movimiento, es decir que $x_1=1$. Con dos discos en la primera varilla, se mueve el pequeño a la segunda varilla, luego el grande de la primera a la tercera y finalmente el pequeño de la segunda a la tercera varilla. Por lo tanto $x_2=3$. Con tres discos el problema comienza a ponerse interesante.

Designando con $i\to j$ el movimiento del disco superior de la varilla i a la varilla j, los tres discos pueden moverse con la secuencia $1\to 3$, $1\to 2$, $3\to 2$, $1\to 3$,

$2 \to 1$, $2 \to 3$, $1 \to 3$. Es decir que $x_3 = 7$. Observando la secuencia obtenida 1, 3, 7, con un poco de suerte se puede notar que sumando 1 a cada término se obtienen potencias de 2 consecutivas. Por lo tanto se puede conjeturar que $x_n = 2^n - 1$. Para probar esta conjetura por inducción sólo nos falta el paso inductivo. Supongamos que $x_n = 2^n - 1$ movimientos y veamos qué ocurre con $n+1$ discos. Los n discos superiores, por la hipótesis inductiva, se pueden mover a la segunda varilla en $2^n - 1$ movimientos. Hecho esto, el disco mayor se mueve de la primera a la tercera varilla en un movimiento, y finalmente los n discos en la segunda varilla se mueven a la tercera en $2^n - 1$ movimientos más. En total se han empleado $(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2^{n+1} - 1$ movimientos.

Lo anterior muestra que $2^n - 1$ movimientos son suficientes, ¿pero es ese el mínimo? Probemos por inducción que en efecto lo es. Para $n = 1$ esto es obvio. Supongamos que es cierto para n. Si ahora se mueven $n+1$ discos de la primera a la tercera varilla, en algún momento se debe mover el disco mayor de la primera varilla. En ese momento los n discos restantes deben estar todos juntos en otra varilla, y no pueden haber llegado allí en menos de $2^n - 1$ movimientos, por la hipótesis inductiva. Del mismo modo cuando el disco mayor se mueva a su posición definitiva en la tercera varilla los n discos restantes deben estar todos en otra varilla, y para moverlos a la tercera se necesitarán al menos $2^n - 1$ movimientos.

Sumando se ve que no se pueden mover $n + 1$ discos en menos de $(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2^{n+1} - 1$ movimientos, lo que completa la prueba.
Con 64 discos como en la leyenda, se necesitan $2^{64} - 1$ movimientos y suponiendo que los monjes hagan un movimiento por segundo, les llevaría más de 584542 millones de años completar su tarea.

Observación 2.1.5 *En muchos casos el paso base no es $n = 1$ sino $n = k$, para algún natural k. Entonces, si se prueba el paso inductivo, se concluye que $\mathcal{P}(n)$ es verdadera para todo natural $n \geq k$.*

Ejemplo 2.1.6 *Para x, y números reales y para $n \geq 2$ se cumple*

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1}).$$

Si $n = 2$ el resultado claramente es cierto ya que $(x^2 - y^2) = (x - y)(x + y)$.
Supongamos que $x^k - y^k$ se puede escribir como $x^k - y^k = (x - y)q(x, y)$, con

$$q(x, y) = x^{k-1} + x^{k-2}y + \cdots + xy^{k-2} + y^{k-1}.$$

Probamos el resultado para $k+1$. Partimos de la siguiente identidad,

$$\begin{aligned} x^{k+1} - y^{k+1} &= x^{k+1} - xy^k + xy^k - y^{k+1} \\ &= x(x^k - y^k) + y^k(x-y), \end{aligned}$$

utilizando la hipótesis de inducción tenemos que

$$\begin{aligned} x(x^k - y^k) + y^k(x-y) &= x(x-y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + \cdots + y^{k-1}) + y^k(x-y) \\ &= (x-y)(x(x^{k-1} + x^{k-2}y + \cdots + y^{k-1}) + y^k) \\ &= (x-y)(x^k + x^{k-1}y + \cdots + xy^{k-1} + y^k). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x^{k+1} - y^{k+1} = (x-y)(x^k + x^{k-1}y + \cdots + xy^{k-1} + y^k)$, como se quería probar.

Ejemplo 2.1.7 *La suma de los ángulos internos de un polígono convexo de n lados es $180°(n-2)$.*

La afirmación tiene sentido práctico para $n \geq 3$, es decir, a partir de un triángulo. Para $n = 3$ es válida pues la suma de los ángulos de un triángulo es $180° = 180°(3-2)$.
Supongamos la afirmación válida para n-ágonos convexos. Dado un $(n+1)$-ágono convexo con vértices A_1,..., A_{n+1}, la diagonal A_nA_1 lo divide en un n-ágono convexo $A_1A_2\ldots A_n$ y un triángulo $A_nA_{n+1}A_1$. La suma de los ángulos internos del $(n+1)$-ágono será la suma de los ángulos del n-ágono $A_1\ldots A_n$ más la suma de los ángulos internos del triángulo $A_nA_{n+1}A_1$, es decir $180°(n-2) + 180° = 180°(n-1)$.

Otra forma del principio de inducción utilizada con frecuencia es la siguiente.

Principio de inducción fuerte. El conjunto de proposiciones $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$, $\mathcal{P}(3)$, ..., $\mathcal{P}(n)$, ... son todas ciertas si:

1. La proposición $\mathcal{P}(1)$, es verdadera.

2. La afirmación: $\mathcal{P}(1)$, ..., $\mathcal{P}(n)$ implican $\mathcal{P}(n+1)$, es verdadera.

Observación 2.1.8 (a) *En el principio de inducción fuerte el paso inductivo es válido si cada vez que $\mathcal{P}(k)$ es válida para toda $k \leq n$ entonces, a partir de esta hipótesis, se demuestra que $\mathcal{P}(n+1)$ es válida.*

(b) Es claro que el principio de inducción fuerte implica el simple. Pero en realidad ambos son equivalentes, ya que la inducción fuerte es consecuencia de la inducción simple. Para verlo basta considerar la conjunción lógica $\mathcal{Q}(n)$[2] de las proposiciones $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$, ..., $\mathcal{P}(n)$. Si $\mathcal{P}(1)$ es verdadera también lo es $Q(1)$ (pues son idénticas). Si $\mathcal{Q}(n)$ es verdadera entonces también lo son $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$,..., $\mathcal{P}(n)$, y por la hipótesis inductiva fuerte también lo es $\mathcal{P}(n+1)$, lo que implica que $\mathcal{Q}(n+1)$ es verdadera. Entonces por inducción simple $\mathcal{Q}(n)$ es verdadera para todo natural n y lo mismo ocurre con $\mathcal{P}(n)$.
Aunque la inducción fuerte y la inducción simple son lógicamente equivalentes, en algunos casos es más cómodo usar una que la otra. La inducción fuerte está implícita en la definición de sucesiones mediante relaciones de recurrencia.

Ejemplo 2.1.9 *Si a es un número real tal que $a + \frac{1}{a}$ es un número entero entonces $a^n + \frac{1}{a^n}$ es un número entero para toda $n \geq 1$.*

Para $n = 1$, la afirmación es cierta por la hipótesis de que $a + \frac{1}{a}$ es entero. Veamos como resolver para $n = 2$, muchas veces este caso da idea de como justificar el paso inductivo.
Notemos que $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + 2a\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2$, luego $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2$, es entero y entonces tenemos la validez de la afirmación para $n = 2$.
Revisemos de nuevo, $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = \left(a + \frac{1}{a}\right) \cdot \left(a + \frac{1}{a}\right) = a^2 + \frac{1}{a^2} + a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \cdot a = a^2 + \frac{1}{a^2} + a^0 + \frac{1}{a^0}$, lo que nos lleva a que, $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right) \cdot \left(a + \frac{1}{a}\right) - (a^0 + \frac{1}{a^0})$, ahora hay otra idea, la afirmación para $n = 2$ depende de la afirmación para $n = 1$ y para $n = 0$ (que por cierto también es válida).
Para obtener la afirmación para $n = 3$, trabajemos con la idea anterior,

$$\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) \cdot \left(a + \frac{1}{a}\right) = a^3 + \frac{1}{a^3} + a + \frac{1}{a}$$

y ahora despejemos,

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) \cdot \left(a + \frac{1}{a}\right) - \left(a + \frac{1}{a}\right)$$

el lado derecho es entero si tanto $a + \frac{1}{a}$ como $a^2 + \frac{1}{a^2}$ son enteros, pero esto ya lo sabemos. Ahora es claro como podría funcionar el paso inductivo. Supongamos

[2] La conjunción lógica de $\mathcal{P}(1)$, ..., $\mathcal{P}(n)$ quiere decir que todas ellas son verdaderas a la vez.

que la afirmación es válida para enteros menores o iguales a n, entonces de la identidad

$$a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}} = \left(a^n + \frac{1}{a^n}\right) \cdot \left(a + \frac{1}{a}\right) - \left(a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}}\right)$$

se sigue que la afirmación es también válida para $n + 1$.

Hay otras formas de considerar la inducción.

Principio de inducción a la Cauchy. El conjunto de proposiciones $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$, $\ldots$, $\mathcal{P}(n)$, $\ldots$ son todas ciertas si:

1. La afirmación $\mathcal{P}(2)$, es verdadera.
2. La afirmación: $\mathcal{P}(n)$ implica $\mathcal{P}(n-1)$, es verdadera.
3. La afirmación: $\mathcal{P}(n)$ implica $\mathcal{P}(2n)$, es verdadera.

Aplicaremos estos pasos inducticos para demostrar la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica.

Ejemplo 2.1.10 *Para números reales no negativos x_1, x_2, $\ldots$, x_n es válida la desigualdad*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}. \tag{2.3}$$

Denotemos por $A = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ y $G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$ a la media aritmética y a la media geométrica de los números x_1, x_2, $\ldots$, x_n, respectivamente. La demostración la haremos por inducción sobre n números, utilizando los pasos inductivos antes descritos.

(1) En este caso, la base de inducción es mostrar la desigualdad $\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$, para x_1 y x_2 números no negativos. Elevando al cuadrado obtenemos la desigualdad equivalente $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$, la cual es claramente cierta.

(2) Sean x_1, x_2, ... , x_n números no negativos y sea $g = \sqrt[n-1]{x_1 \cdots x_{n-1}}$. Con este número agregado a los números x_1, $\ldots$, x_{n-1} obtenemos n números a los que aplicamos $\mathcal{P}(n)$,

$$\frac{x_1 + \cdots + x_{n-1} + g}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1} g} = \sqrt[n]{g^{n-1} \cdot g} = g.$$

Luego, $x_1 + \cdots + x_{n-1} + g \geq ng$ y entonces se sigue que $\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1} \geq g$, por lo que $\mathcal{P}(n-1)$ es verdadera.

(3) Sean x_1, x_2, ... , x_{2n} números no negativos, entonces

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n} &= (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + \cdots + (x_{2n-1} + x_{2n}) \\ &\geq 2\left(\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_3x_4} + \cdots + \sqrt{x_{2n-1}x_{2n}}\right) \\ &\geq 2n\left(\sqrt{x_1x_2}\sqrt{x_3x_4}\cdots\sqrt{x_{2n-1}x_{2n}}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= 2n\left(x_1x_2\cdots x_{2n}\right)^{\frac{1}{2n}}. \end{aligned}$$

Hemos aplicado primero varias veces la afirmación $\mathcal{P}(2)$ que sabemos es cierta y después la afirmación $\mathcal{P}(n)$ a los números $\sqrt{x_1x_2}$, $\sqrt{x_3x_4}$, ..., $\sqrt{x_{2n-1}x_{2n}}$.

Veamos otra forma de demostrar la misma desigualdad pero utilizando otra variante del principio de inducción.
Observemos primero que si algún $x_i = 0$ entonces la desigualdad es clara.
Supongamos entonces que todo $x_i > 0$ y que $x_1x_2 \dots x_n = 1$. Queremos demostrar las afirmaciones $\mathcal{P}(n) : x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$.

Claramente se cumple la base de inducción, es decir, $\mathcal{P}(1)$: $x_1 \geq 1$ es verdadera, de hecho $x_1 = 1$.
Supongamos que $\mathcal{P}(n)$ cierta para cualesquiera n números positivos cuyo producto es 1, y sean $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ números positivos cuyo producto es 1. Entonces deberán existir $x_i \geq 1$ y $x_j \leq 1$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $x_1 \geq 1$ y $x_2 \leq 1$. Por lo anterior, $(x_1 - 1)(x_2 - 2) \leq 0$, luego $x_1x_2 + 1 \leq x_1 + x_2$. Por lo tanto, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} \geq 1 + x_1x_2 + x_3 + \cdots + x_{n+1}$.
Aplicamos ahora la hipótesis de inducción a los n números $x_1x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$ para obtener $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} \geq n + 1$, es decir, la afirmación $\mathcal{P}(n+1)$ es verdadera.
Para el caso general, si $a_1, \dots, a_n$ son positivos y definimos $G = \sqrt[n]{a_1a_2 \dots a_n}$, al considerar $x_1 = \frac{a_1}{G}, \dots, x_n = \frac{a_n}{G}$ se tiene que $x_1 \dots x_n = 1$. Luego, $x_1 + \cdots + x_n \geq n$, lo cual es equivalente a $\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$.

Ejemplo 2.1.11 *Sean $x_1, x_2, \dots, x_n$ y $y_1, y_2, \dots, y_n$ números naturales diferentes de cero. Supongamos que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_m < mn$. Demuestra que es posible eliminar algunos términos (pero no todos) de un lado y del otro de la igualdad $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_m$ pero siempre conservando una igualdad.*

Razonamos por inducción sobre $m + n$. Como $n \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_n < mn$, tenemos que $n > 1$ y $m > 1$. Para $m + n = 4$ tenemos que $m = n = 2$ y los

únicos casos posibles son $1+1=1+1$ y $1+2=1+2$ (tal vez en otro orden) y el resultado es immediato.
Supongamos que $k=m+n\geq 4$. Consideramos

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=y_1+y_2+\cdots+y_m<mn.$$

con $m+n=k+1$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que x_1 es el mayor de los términos x_i, con $i=1,2,\ldots,n$, y y_1 es el mayor de los y_j, con $j=1,2,\ldots,m$. Podemos también suponer que $x_1>y_1$, ya que si $x_1=y_1$ el problema está resuelto. Tenemos entonces

$$(x_1-y_1)+x_2+\cdots+x_n=y_2+\cdots+y_m$$

con $y_2+\cdots+y_m<mn-\frac{mn}{m}=n(m-1)$. Como $n+(m-1)=k$ podemos aplicar el principio de inducción para concluir.

Ejercicio 2.1 *Demuestra que* $1+2^1+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1.$

Ejercicio 2.2 *Demuestra que* $1+5+\cdots+(4n-3)=n(2n-1).$

Ejercicio 2.3 *Demuestra que* $1^3+3^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1).$

Ejercicio 2.4 *Demuestra que*

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

Ejercicio 2.5 *Demuestra que* $3+3^2+\cdots+3^n=\frac{1}{2}(3^{n+1}-3).$

Ejercicio 2.6 *Demuestra que* $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$

Ejercicio 2.7 *Demuestra que* $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$

Ejercicio 2.8 *Demuestra por inducción que*

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ejercicio 2.9 *En la sucesión de Fibonacci:* $a_1=1$, $a_2=1$, $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$. *Demuestre que*

$$a_{n+2}=1+a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

Ejercicio 2.10 (i) *Demuestre por inducción para* $q \neq 1$, *que*

$$1 + q + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

(ii) *Demuestre que* $1 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

Ejercicio 2.11 *Muestre la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética, siguiendo los pasos indicados.*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

(i) *Muestre por inducción la identidad,*

$$x^{n+1} - (n+1)x + n = (x-1)^2(x^{n-1} + 2x^{n-2} + 3x^{n-3} + \cdots + n).$$

(ii) *Por tanto, para* $x > 0$ *se cumple que,* $x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0$. *Aplique la desigualdad anterior a* $x = \frac{a}{b}$ *donde* $a = \frac{x_1 + \cdots + x_{n+1}}{n+1}$ *y* $b = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$, *y concluya que,*

$$\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} \geq x_{n+1} \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n.$$

(iii) *Ahora use inducción de nuevo para concluir.*

2.2. Coeficientes binomiales

El **factorial** de un número $n \in \mathbb{N}$, denotado por $n!$, se define inductivamente como sigue:
(a) $0! = 1$,
(b) $n! = n(n-1)!$, para $n \geq 1$.

Observación 2.2.1 *Si* $n \geq 1$ *entonces*

$$n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1.$$

Para todos los enteros n y m, con $0 \leq m \leq n$, definimos el **coeficiente binomial** $\binom{n}{m}$ como

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{2.4}$$

Observación 2.2.2 *Usando la defínción es inmediato que para* $0 \leq m \leq n$ *tenemos que:*

(a) $\binom{n}{m}$ *es un número entero positivo.*

(b) $\binom{n}{0} = 1.$

(c) $\binom{n}{n} = 1$ *y* $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$.

(d) *Para cada* $m = 1, 2, \ldots, n-1$, *tenemos que*

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}.$$

Esta identidad se conoce como la fórmula de Pascal.

Teorema 2.2.3 (Binomio de Newton) *Sean* a *y* b *números reales y sean* n *y* m *números enteros, con* $0 \leq m \leq n$. *Los números* $\binom{n}{m}$ *son los coeficientes en el desarrollo de* $(a+b)^n$, *es decir,*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{m}a^{n-m}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n. \quad (2.5)$$

Utilizando la notación de sumas, tenemos

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i}b^i.$$

Esta ecuación se conoce como el **binomio de Newton**.
Demostración. La demostración se hace por inducción sobre n.
Si $n = 0$ entonces $(a+b)^0 = 1$ y $\binom{0}{0}a^0b^0 = 1$.
Supongamos que $n > 0$ y que es válida la identidad para $n-1$, es decir,

$$(a+b)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} a^{n-i-1}b^i, \quad \text{es válida}$$

entonces

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= (a+b)(a+b)^{n-1} = (a+b)\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}a^{n-i-1}b^i \\
&= \binom{n-1}{0}a^n + \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}a^{n-i}b^i + \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i-1}a^{n-i}b^i + \binom{n-1}{n-1}a^0b^n \\
&= \binom{n}{0}a^n + \sum_{i=1}^{n-1}\left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right]a^{n-i}b^i + \binom{n-1}{n-1}b^n \\
&= \binom{n}{0}a^n + \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i + \binom{n}{n}b^n \\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i.
\end{aligned}$$

En el último paso utilizamos la fórmula de Pascal. □

Ejemplo 2.2.4 *Veamos que si n es entero, entonces*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0.$$

Existen varias demostraciones de esta identidad, veamos una.
Si $a = 1$ en la ecuación (2.5), obtenemos

$$(1+b)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}b + \cdots + \binom{n}{k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n.$$

Si ahora hacemos $b = -1$ obtenemos

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^k\binom{n}{k} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0.$$

Ejercicio 2.12 *Para todos los números reales x, y, se tiene:*

(i) $x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$.

(ii) $(x+y)^3 - (x^3+y^3) = 3xy(x+y)$.

Ejercicio 2.13 *Muestra las siguientes igualdades:*

(i) $\binom{n}{m} = \frac{n}{m}\binom{n-1}{m-1}$.

(ii) $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$.

Ejercicio 2.14 *Muestra las siguientes igualdades:*

(i) $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} = 2^n$.

(ii) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$.

(iii) $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^j = 3^n$.

Ejercicio 2.15 *Calcule las siguientes sumas:*

(i) $\sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j}$.

(ii) $\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j+1}\binom{n}{j}$.

Ejercicio 2.16 *Para cada primo p, muestre que el número $\binom{2p-1}{p-1} - 2$ es divisible entre p^2.*

2.3. El descenso infinito

El siguiente método de demostración fue utilizado frecuentemente por Pierre Fermat (1601-1665) por lo que a él se le atribuye. Por lo general, es usado para demostrar que algo no sucede, por ejemplo, lo utilizó para mostrar que no hay soluciones enteras de la ecuación $x^4 + y^4 = z^2$, con $xyz \neq 0$.

La base teórica de su método es que no hay una colección infinita de enteros positivos que sea decreciente, esto es, no podemos encontrar una infinidad de enteros positivos que cumplan $n_1 > n_2 > n_3 > \cdots$.

Hay dos maneras de usar esta idea para demostrar afirmaciones. La primera es tener una afirmación $\mathcal{P}(n_1)$ que se supone válida. Si de ésta se puede encontrar un entero positivo $n_2 < n_1$ tal que $\mathcal{P}(n_2)$ es válida y, a su vez, de ésta se encuentra un entero positivo $n_3 < n_2$ tal que $\mathcal{P}(n_3)$ es válida, y así sucesivamente. Luego, se han generado una infinidad de enteros positivos que cumplen que $n_1 > n_2 > n_3 > \cdots$, pero esto es imposible, por lo que $\mathcal{P}(n_1)$ no es verdadera. Veamos un ejemplo para ilustrar este método.

Ejemplo 2.3.1 *Muestre que $\sqrt{2}$ no es racional.*

Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, entonces $\sqrt{2} = \frac{m_1}{n_1}$, con m_1 y n_1 enteros positivos.
Como $\sqrt{2}+1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$, tenemos que

$$\sqrt{2}+1 = \frac{1}{\frac{m_1}{n_1}-1} = \frac{n_1}{m_1-n_1}, \quad \text{por lo que} \quad \sqrt{2} = \frac{n_1}{m_1-n_1} - 1 = \frac{2n_1-m_1}{m_1-n_1}.$$

Como $1 < \sqrt{2} < 2$, sustituyendo el valor original de $\sqrt{2}$ se tiene que $1 < \frac{m_1}{n_1} < 2$, de donde $n_1 < m_1 < 2n_1$. De aquí tenemos que, $2n_1 - m_1 > 0$ y $m_1 - n_1 > 0$. Luego, si definimos $m_2 = 2n_1 - m_1 < m_1$, ya que $n_1 < m_1$ y $n_2 = m_1 - n_1 < n_1$, ya que $m_1 < 2n_1$. Luego, $\sqrt{2} = \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}$, con $m_2 < m_1$ y $n_2 < n_1$. Siguiendo este proceso, podemos generar una infinidad de enteros positivos m_i y n_i que cumplen que

$$\sqrt{2} = \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_3}{n_3} = \cdots ,$$

pero esto no es posible. Por lo tanto, $\sqrt{2}$ no es racional.

Ejemplo 2.3.2 *Encuentre todas las parejas de enteros positivos a, b que satisfacen la ecuación*

$$a^2 - 2b^2 = 0. \tag{2.6}$$

Supongamos que existen números enteros positivos a_1, b_1 tales que

$$a_1^2 - 2b_1^2 = 0.$$

Esto implica que a_1 es un número par, es decir, $a_1 = 2a_2$ para algún entero positio a_2. Entonces de

$$(2a_2)^2 - 2b_1^2 = 0, \quad \text{se sigue que} \quad 2a_2^2 - b_1^2 = 0.$$

Luego, b_1 es par, esto es, $b_1 = 2b_2$, con b_2 un entero positivo. Sustituyendo en la última ecuación, tenemos que

$$2a_2^2 - (2b_2)^2 = 0, \quad \text{o} \quad a_2^2 - 2b_2^2 = 0. \tag{2.7}$$

Esto quiere decir que a_2 y b_2 es otro par de soluciones de la ecuación (2.6). Como $a_1 = 2a_2$, tenemos que $a_1 > a_2$. Más aún, las ecuaciones anteriores implican que

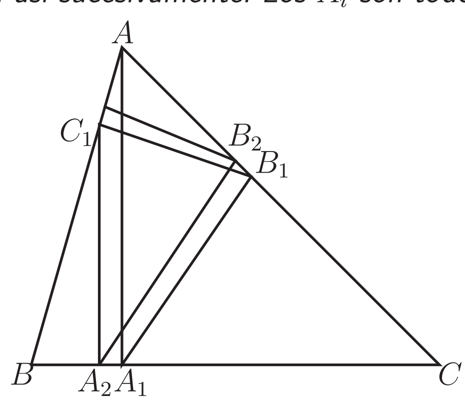
$a_1 > b_1 > a_2 > b_2$. La ecuación (2.7) muestra que a_2 es par, esto es, $a_2 = 2a_3$ para algún entero a_3.
Repitiendo los argumentos anteriores, obtenemos una sucesión infinita de números naturales, en la cual cada términio es menor que el anterior, esto es,

$$a_1 > b_1 > a_2 > b_2 > a_3 > b_3 > \cdots .$$

Sin embargo, todo conjunto de números naturales tiene un elemento menor que todos los demás, luego esta sucesión no puede existir. Por lo tanto, no existe una pareja de números naturales que satisface la ecuación (2.6).

La otra forma tiene un carácter más propositivo. Se utiliza para ver que una serie de proposiciones $\mathcal{P}(a)$ son válidas, con a perteneciente a algún conjunto $A \subset \mathbb{N}$. Para esto seguimos el siguiente razonamiento: supongamos que $\mathcal{P}(a)$ no es válida para toda $a \in A$ y formemos el conjunto $B = \{a \in A : \mathcal{P}(a) \text{ no es verdadera}\}$, como $B \neq \emptyset$, en B debe haber un primer elemento que llamamos b. Ahora, si usando las hipótesis del problema, se encuentra un entero positivo $c < b$ y $\mathcal{P}(c)$ no es verdadera, entonces llegaríamos a una contradicción, ya que b era el mínimo elemento de B. Luego, $\mathcal{P}(a)$ deberá ser verdadera para toda $a \in A$.

Ejemplo 2.3.3 *Sea ABC un triángulo acutángulo. Sea A_1 el pie de la altura desde A, B_1 el pie de la altura desde A_1, C_1 el pie de la altura desde B_1, A_2 el pie de la altura desde C_1 y, así sucesivamente. Los A_i son todos distintos.*



Observemos que cada A_n se encuentra dentro de un lado del triángulo, es decir, no puede estar en la extensión del lado y no puede ser vértice del triángulo. Para probar la afirmación anterior veamos que si A_n está en la prolongación del lado

del triángulo, éste es obtuso, y si está en el vértice entonces el triángulo es obtuso o rectángulo.
Notemos también que A_n y A_{n+1} no coinciden, ya que están en lados adyacentes del triángulo y no son vértices.
Supongamos ahora que A_n coincide con A_m, con $n < m$, y supongamos también que n es el menor índice con la propiedad de que A_n coincide con algún A_m. Veamos que $n = 1$, ya que en caso contrario se tendría que A_{n-1} coincide con A_{m-1}, luego n no cumple con la propiedad de ser el menor índice n con $A_n = A_m$, para alguna $m > n$.
Ahora si A_1 coincide con A_m, con $m \geq 3$, entonces A_{m-1} deberá ser el vértice A, pero hemos visto que ningún A_m es vértice del triángulo. Luego, A_1 no puede coincidir con algún A_m.

Ejercicio 2.17 *Muestra que*

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right) < \frac{5}{2}.$$

Ejercicio 2.18 *Muestra que*

$$\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^3}\right) < 3.$$

Ejercicio 2.19 *Encuentra los números primos p para los cuales existen enteros a, b y n tales que $p^n = a^3 + b^3$.*

Ejercicio 2.20 *La ecuación*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

no tiene soluciones enteras excepto cuando $x = y = z = 0$.

2.4. Demostraciones erróneas por inducción

Ejemplo 2.4.1 *Todas las potencias no negativas de 2 son iguales a 1.*

La base de inducción es $n = 0$. La afirmación es cierta ya que $2^0 = 1$.
Supongamos que para toda $k \leq n$ la afirmación es válida, esto es, $2^0 = 2^1 = \cdots = 2^n = 1$. Veamos ahora que la afirmación se cumple también para 2^{n+1}. Pero,

$$2^{n+1} = \frac{2^{2n}}{2^{n-1}} = \frac{2^n \cdot 2^n}{2^{n-1}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1.$$

Luego, la demostración está completa!!

Error. El paso inductivo usa que las afirmaciones para n y $n-1$ son válidas, entonces en la base de inducción se deben verificar los dos primeros casos $n = 0$ y $n = 1$. Pero este último no es cierto, ahí el error. El paso inductivo no es válido para $n = 0$, esto es $P(0) \Rightarrow P(1)$ es una afirmación falsa.

Ejemplo 2.4.2 *Todos los enteros mayores o iguales a 2 son pares.*

La base de inducción para $n = 2$ es claramente válida, ya que 2 es par.
Supongamos que para todo entero k con $2 \leq k \leq n$, la afirmación es cierta, esto es que tales números k son pares. Veamos ahora que $n+1$ también es par. Representemos a $n+1$ como $n+1 = k_1 + k_2$ con $k_1, k_2 \leq n$, por hipótesis de inducción k_1 y k_2 son pares por lo que su suma $n+1$ también es par. La demostración está completa!!
Error. El paso inductivo es erróneo, los números k_1 y k_2 deben de ser mayores o iguales a 2, esto no siempre sucede por ejemplo para $n = 3$. También puede justificarse que en el paso inductivo se requiere de 2 números anteriores donde sea válida la afirmación, pero la afirmación no es válida para los dos primeros números el 2 y el 3, ya que 3 no es par.

Ejemplo 2.4.3 *¿Cuál es el error en la siguiente demostración de la afirmación?*

$$I_n : n(n+1) \quad \textit{es impar para todo entero positivo.}$$

Supóngase que la afirmación I_n es válida para n y veamos que es cierta para $n+1$. Partimos de la identidad

$$(n+1)(n+2) = n(n+1) + 2(n+1),$$

en el lado derecho tenemos, por hipótesis de indución que $n(n+1)$ es impar y al sumar a este último número el número par $2(n+1)$ se tiene que $n(n+1)+2(n+1)$ es impar, y entonces la afirmación I_{n+1} es también verdadera.
Error. Faltó verificar la base de inducción.

Ejemplo 2.4.4 *¿Cuál es el error en la siguiente demostración de la afirmación?*

R_n : *si tenemos* n *rectas, no dos de ellas paralelas,*
entonces todas tienen un punto común.

La afirmación R_1 es cierta, también R_2 pues como las dos rectas no son paralelas se cortan en un punto.
Supongamos la afirmación válida para $n-1$ rectas y consideremos ahora n rectas $l_1, l_2, ..., l_n$ donde no hay 2 de ellas paralelas. Por hipótesis de inducción las $n-1$ rectas $l_1, ..., l_{n-1}$ tienen un punto común, digamos P. Ahora en lugar de quitar la recta l_n quitemos la recta l_{n-1} y entonces por hipótesis de inducción las $n-1$ rectas $l_1, ..., l_{n-2}, l_n$ tienen un punto en común Q. Pero l_1 y l_2 solamente tienen un punto en común, luego $P = Q$, por lo que las n rectas $l_1, ..., l_n$ tienen un punto común.
Error. La base de inducción debe ser con $n = 3$, pero la afirmación R_3 es falsa.

Ejercicio 2.21 *Afirmación: Toda función definida en un conjunto finito es constante.*
Sea $f : A \to B$ *una función definida en un conjunto finito* A. *Se hará la demostración sobre* n, *la cantidad de elementos del conjunto* A. *Si* $n = 1$, *es claro que* f *es constante. Suponga que la afirmación es verdadera para todas las funciones definidas en conjuntos de* n *elementos y sea* f *una función definida en un conjunto* $A = \{a_1, ..., a_{n+1}\}$ *con* $n+1$ *elementos. Considere* $C = A \setminus \{a_{n+1}\}$, *que es un conjunto con* n *elementos, por hipótesis de inducción, la función* f *restringida a* C *es constante. Si ahora se considera a* $D = A \setminus \{a_n\}$, *que también tiene* n *elementos, la función* f *restringida a* D *es constante, pero estas dos constantes coinciden con* $f(a_1)$, *luego la función* f *es constante en todo* A *y entonces ¡la demostración está completa!*
Encuentra el error en la demostración anterior.

Capítulo 3

Funciones

3.1. Funciones

El concepto de función es uno de los más importantes en la matemática, ya que permite describir muchos fenómenos de la naturaleza, además de relaciones de la matemática misma.

Definición 3.1.1 *Una* **función** *de un conjunto A en un conjunto B, es una regla denotada por $f : A \to B$, que asigna a cada elemento $a \in A$, un elemento único $f(a)$ en B; en otras palabras, una función satisface:*

(a) *Al elemento $x \in A$ le corresponde el elemento $y \in B$ y escribimos $f(x) = y$.*

(b) *Cada elemento $a \in A$ tiene asociado uno y sólo un elemento de B, es decir, si $f(x) = y_1$ y $f(x) = y_2$ entonces $y_1 = y_2$.*

Al conjunto A le llamamos **dominio** y al conjunto B **codominio o contradominio**.

Definición 3.1.2 *Decimos que dos funciones $f : A \to B$ y $g : C \to D$ son* **iguales** *si y sólo si $A = C$ y $f(x) = g(x)$ para toda $x \in A$.*

Definición 3.1.3 *Definimos la* **imagen** *de una función $f : A \to B$ como*

$$\textit{Im}\, f = \{y \in B : \text{ existe } x \in A \text{ tal que } f(x) = y\}.$$

Así, Im f es un subconjunto del codominio de la función.

Ejemplo 3.1.4 *Sean X y Y dos conjuntos y $b \in Y$. La función $f : X \to Y$ definida como $f(x) = b$ para toda $x \in X$ es llamada la* **función constante** *de X en Y.*

El dominio de la función es X, el contradominio de la función es Y y la imagen es el conjunto formado por un elemento, $\{b\}$.

Ejemplo 3.1.5 *Si X es un conjunto, la función $Id : X \to X$ tal que $Id(x) = x$ para toda $x \in X$ es llamada la* **función identidad**.

Ejemplo 3.1.6 *La función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(n) = 2n$, le asocia a cada número entero n el entero par $2n$.*

Como n es un entero, Im f son todos los enteros pares.

Ejemplo 3.1.7 *Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(3n) = n + f(3n-3)$, si n un entero positivo mayor que 1, y $f(3n) = 1$ cuando $n = 1$. Encuentra el valor de $f(12)$.*

Podemos reescribir la ecuación como $f(3n) - f(3n-3) = n$. Entonces tenemos la siguiente relación

$$\begin{array}{rcl} f(3n) - f(3n-3) & = & n \\ f(3n-3) - f(3n-6) & = & n-1 \\ \vdots & & \vdots \\ f(6) - f(3) & = & 2. \end{array}$$

Sumando todas las ecuaciones obtenemos que $f(3n) - f(3) = 2 + 3 + \cdots + n$ y como $f(3) = 1$ tenemos que $f(3n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, la suma de los primeros n números naturales. Luego, $f(12) = f(3 \cdot 4) = 10$.

Ejemplo 3.1.8 *Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n) = n(n+1)$. Encuentra los valores de m y n tal que $4f(n) = f(m)$, donde m es un número natural.*

Supongamos que $4f(n) = f(m)$, es decir, tenemos que $4n(n+1) = m(m+1)$. Entonces $4n^2 + 4n = m^2 + m$. Si completamos cuadrados tenemos que

$$\begin{aligned} 4n^2 + 4n + 1 &= m^2 + m + 1 \\ (2n+1)^2 &= m^2 + m + 1 \end{aligned}$$

pero $m^2 + m + 1$ no puede ser el cuadrado de un entero. Por lo tanto, no hay números naturales m y n que cumplan la relación.

Definición 3.1.9 *Sean A y B conjuntos y $S \subset A$.*

(a) *La función* **inclusión** *de S en A es la función $j : S \to A$ definida como $j(x) = x$, para $x \in S$.*

(b) *Si $f : A \to B$ es una función, la* **restricción** *de f a S, denotada como $f|_S$, es la función $f|_S : S \to B$ definida como $f|_S(x) = f(x)$ para $x \in S$.*

(c) *Si $g : S \to B$ es una función, una* **extensión** *de g a A es cualquier función $G : A \to B$ tal que $G|_S = g$.*

(d) *Las* **proyecciones** *de $A \times B$ son las funciones $\pi_1 : A \times B \to A$ y $\pi_2 : A \times B \to B$ definidas por $\pi_1((a, b)) = a$ y $\pi_2((a, b)) = b$ para $(a, b) \in A \times B$.*

Ejemplo 3.1.10 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$ para $x \in \mathbb{R}$.*

Entonces la restricción de f a $\mathbb{Q}$ es la función $f|_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definida por $f|_{\mathbb{Q}}(x) = \operatorname{sen} x$, para $x \in \mathbb{Q}$.

Ejemplo 3.1.11 *Sean $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{a, b\}$ y $Z = \{1, 2, 3\}$. Sea $f : Y \to Z$ definida por $f(a) = 3$ y $f(b) = 2$. Ahora definimos dos funciones $g, h : X \to Z$ como sigue. Sean $g(a) = 3$, $g(b) = 2$, $g(c) = 1$ y $g(d) = 3$. Sean $h(a) = 3$, $h(b) = 1$, $h(c) = 2$ y $h(d) = 3$.*

Entonces la función g es una extensión de f, ya que $g|_Y = f$, pero la función h no lo es. Existen otras posibles extensiones de f.

Ejemplo 3.1.12 *Podemos pensar a $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Entonces tenemos dos proyecciones $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas como $\pi_1((x, y)) = x$ y $\pi_2((x, y)) = y$, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.*

Definición 3.1.13 *Dada una función $f : A \to B$, y $Q \subset B$. Definimos* **la imagen inversa** *de Q, denotada por $f^{-1}(Q)$ como*

$$\begin{aligned} f^{-1}(Q) &= \{a \in A \,:\, f(a) = q, \text{ para algún } q \in Q\} \\ &= \{a \in A \,:\, f(a) \in Q\}. \end{aligned}$$

Así, $f^{-1}(Q)$ es un subconjunto de A.

Ejemplo 3.1.14 *Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $h(x) = x + 4$.*

Luego, para cada $y \in \mathbb{R}$ consideremos $x = y - 4$. Así $h(x) = x + 4 = (y - 4) + 4 = y$, por lo que $\operatorname{Im} h = \mathbb{R}$. Sea $Q = (-2, 3) \subset \mathbb{R}$. Por lo anterior, tenemos que $h^{-1}(Q) = (-6, -1)$.

Ejemplo 3.1.15 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$.*

Como f le asocia a cada número x un número positivo x^2, tenemos que $\operatorname{Im} f = [0, \infty)$. Consideremos ahora el subconjunto $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, así $f^{-1}([0, 1]) = [-1, 1]$.

Teorema 3.1.16 *Sea $f : A \to B$ una función. Sean $C, D \subset A$ y $S, T \subset B$. Sean I y J conjuntos no vacíos y consideremos una familia de conjuntos $\{U_i\}_{i \in I}$ indexada por I tales que $U_i \subset A$ para cada $i \in I$ y una familia de conjuntos $\{V_j\}_{j \in J}$ indexada por J tales que $V_j \subset B$ para cada $j \in J$. Entonces*

(a) $f(\emptyset) = \emptyset$ *y* $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

(b) $f^{-1}(B) = A$.

(c) $f(C) \subseteq S$ *si y sólo si* $C \subseteq f^{-1}(S)$.

(d) *Si* $C \subseteq D$, *entonces* $f(C) \subseteq f(D)$.

(e) *Si* $S \subseteq T$, *entonces* $f^{-1}(S) \subseteq f^{-1}(T)$.

(f) $f(\cup_{i \in I} U_i) = \cup_{i \in I} f(U_i)$.

(g) $f(\cap_{i \in I} U_i) \subseteq \cap_{i \in I} f(U_i)$.

(h) $f^{-1}(\cup_{j \in J} V_j) = \cup_{j \in J} f^{-1}(V_j)$.

(i) $f^{-1}(\cap_{j \in J} V_j) = \cap_{j \in J} f^{-1}(V_j)$.

Demostración. Probaremos únicamente los incisos (e) y (f), el resto se dejan de ejercicio al lector.
(e) Sea $x \in f^{-1}(S)$, por definición tenemos que $f(x) \in S$. Puesto que $S \subseteq T$, se sigue que $f(x) \in T$. De aquí que $x \in f^{-1}(T)$. Por lo que $f^{-1}(S) \subseteq f^{-1}(T)$.
(f) Sea $b \in f(\cup_{i\in I}U_i)$, entonces existe $a \in \cup_{i\in I}U_i$ tal que $f(a) = b$ y existe $j \in I$ tal que $a \in U_j$, luego $f(a) = b \in f(U_j) \subseteq \cup_{i\in I}f(U_i)$. De aquí que $f(\cup_{i\in I}U_i) \subseteq \cup_{i\in I}f(U_i)$. Ahora, sea $a \in \cup_{i\in I}f(U_i)$. Así $a \in f(U_k)$, para algún $k \in I$. Luego $a = f(v)$ para algún $v \in U_k$. Como $v \in \cup_{i\in I}U_i$, se sigue que $a \in f(\cup_{i\in I}U_i)$. Por lo que $\cup_{i\in I}f(U_i) \subseteq f(\cup_{i\in I}U_i)$. Por lo tanto, $f(\cup_{i\in I}U_i) = \cup_{i\in I}f(U_i)$. $\square$

Ejercicio 3.1 *Sea* $f(x) = \frac{1}{x^2}$ *;* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(i) *Determina la imagen directa* $f(E)$ *donde* $E = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 \leq x \leq 2\}$.
(ii) *Determina la imagen inversa* $f^{-1}(G)$ *donde* $G = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 \leq x \leq 4\}$.

Ejercicio 3.2 *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*;* $f(x) = x^2$.
(i) *Encuentra un subconjunto* $E \subset \mathbb{R}$ *tal que* $f^{-1}(f(E)) \neq E$.
(ii) *Encuentra un subconjunto* $H \subset \mathbb{R}$ *tal que* $f(f^{-1}(H)) \neq H$.

Ejercicio 3.3 *Sea* $f : A \to B$ *una función y sean* $C, D \subseteq B$. *Probar que* $f^{-1}(D - C) = f^{-1}(D) - f^{-1}(C)$.

Ejercicio 3.4 *Sea* $f : A \to B$ *una función. Sea* $X \subseteq A$ *y* $Y \subseteq B$.
(i) *Probar que* $X = f^{-1}(f(X))$ *si y sólo si* $X = f^{-1}(Z)$, $Z \subseteq B$.
(ii) *Probar que* $Y = f(f^{-1}(Y))$ *si y sólo si* $Y = f(W)$, *para algún* $W \subseteq A$.

Ejercicio 3.5 *Sean* X *y* Y *conjuntos. Sea* $A \subseteq X$ *y* $B \subseteq Y$. *Sean* $\pi_1 : X \times Y \to X$ *y* $\pi_2 : X \times Y \to Y$ *las proyecciones definidas como* $\pi_1(x, y) = x$ *y* $\pi_2(x, y) = y$.
(i) *Probar que* $\pi_1^{-1}(A) = A \times Y$ *y* $\pi_2^{-1}(B) = X \times B$.
(ii) *Probar que* $A \times B = (\pi_1)^{-1}(A) \cap (\pi_2)^{-1}(B)$.

3.2. Composición de funciones y la función inversa

Las funciones se pueden combinar para formar nuevas funciones. Por ejemplo, si tenemos funciones cuyo dominio y contradominio son los reales, entonces las podemos sumar o multiplicar y obtener nuevas funciones, tal como se hace en los cursos de cálculo. Sin embargo, no necesariamente en todos los conjuntos tenemos definidas estas operaciones. Otra manera de crear nuevas funciones a partir de funciones conocidas es la "composición".

Definición 3.2.1 *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. La* **composición** *de f y g es la función $g \circ f : A \to C$ definida por*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

para cada $x \in A$.

Observemos que la composición de dos funciones puede ser definida únicamente si el codominio de la primer función es igual al dominio de la segunda función.

Ejemplo 3.2.2 *Sea m : $\{$Todas las personas$\}$ $\to$ $\{$Apellidos de las personas$\}$, la función que a cada persona le asigna su padre.*

Así $m \circ m$ es la función que a cada persona le asigna el apellido de su abuelo paterno.

Ejemplo 3.2.3 *Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 1$.*

Luego, $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2$, para $x \in \mathbb{R}$ y $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$, para $x \in \mathbb{R}$. Lo que implica que $f \circ g \neq g \circ f$. Por lo tanto, la composición de dos funciones *no es conmutativa*.

Ejemplo 3.2.4 *Sea $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $k(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$; y sea $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \ln x$, $x \in \mathbb{R}$.*

Entonces $k \circ h$ está definida y $k \circ h(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$. Por otra parte, no podemos formar la composición $h \circ k$, ya que el dominio de h no es igual al codominio de k.

Lema 3.2.5 *Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ funciones. Entonces*

(a) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ *(asociatividad).*

(b) $f \circ Id_A = f$ *y* $Id_B \circ f = f$*, donde Id_A y Id_B denotan la función identidad en A y B, respectivamente.*

Demostración. (a) Observemos que $(h \circ g) \circ f$ y $h \circ (g \circ f)$ tienen el mismo dominio y codominio, por lo que solo tenemos que verificar que ambas funciones son iguales para cada elemento de A. Sea $a \in A$, entonces

$$\begin{aligned} ((h \circ g) \circ f)(a) &= (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))) \\ &= h((g \circ f)(a)) = (h \circ (g \circ f))(a), \end{aligned}$$

lo cual prueba que ambas funciones son iguales.
(b) Al igual que en el inciso anterior, $f \circ Id_A$ y f poseen el mismo dominio y contradominio. Luego para $x \in A$, $(f \circ Id_A)(x) = f(Id_A(x)) = f(x)$. Análogamente se prueba que $Id_B \circ f = f$. □

Definición 3.2.6 *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to A$ funciones. Decimos que*

(a) *la función g es la* **inversa derecha** *de f si $f \circ g = Id_B$,*

(b) *la función g es la* **inversa izquierda** *de f si $g \circ f = Id_A$ y*

(c) *la función g es la* **inversa** *de f si es inversa izquierda e inversa derecha.*

Observemos que $f \circ g = Id_B$ significa que $f(g(x)) = x$ para todo $x \in B$ y que $g \circ f = Id_A$ significa que $g(f(x)) = x$ para toda $x \in A$.

Lema 3.2.7 *Sea $f : A \to B$ una función.*

(a) *Si f tiene una inversa, entonces la inversa es única.*

(b) *Si f tiene una inversa derecha g y una inversa h, entonces $g = h$. De aquí que f tiene una inversa.*

(c) *Si f tiene una inversa g, entonces g tiene una inversa, la cual es f.*

Demostración. (a) Supongamos que $g, h : B \to A$ son ambas inversas de f. Entonces, satisfacen entre otras cosas que $f \circ g = Id_B$ y $h \circ f = Id_A$. Luego,

$$g = Id_A \circ g = (h \circ f) \circ g = h \circ (f \circ g) = h \circ Id_B = h.$$

(b) La prueba es prácticamente igual a la del inciso anterior.

(c) Como $g : B \to A$ es inversa de f, entonces $g \circ f = Id_A$ y $f \circ g = Id_B$. Por la definición de inversa, tenemos que f es una inversa de g y por la parte (a), sabemos que f es la única inversa de g. $\square$

Por el teorema anterior, tenemos que si una función $f : A \to B$ tiene una inversa, entonces es única. Usualmente, la inversa de f es denotada por $f^{-1} : B \to A$. Recordemos que en la sección anterior, denotamos la imagen inversa de un conjunto $Q \subset B$, como $f^{-1}(Q)$. Notemos que $f^{-1}(Q)$ es un conjunto no una función y siempre existe independientemente de que la inversa de f exista. Si la función inversa existe, entonces la notación $f^{-1}(Q)$ significa la imagen inversa del conjunto Q bajo la función f o la imagen del conjuntos Q bajo la función f^{-1}. Afortunadamente, ambas opciones se refieren al mismo subconjunto de A.

Ejemplo 3.2.8 *Sea* $k : (0,1) \to (3,5)$ *dada por* $k(x) = 2x+3$, *para* $x \in (0,1)$.

Luego k tiene una inversa. En efecto, supongamos que existe una función $j : (3,5) \to (0,1)$ tal que $k \circ j = Id_{(3,5)}$, tenemos que para $x \in (3,5)$, $k(j(x)) = x$; es decir, $2(j(x)) + 3 = x$, de donde $j(x) = \frac{x-3}{2}$. Es fácil verificar que $j \circ k = Id_{(0,1)}$. Por lo tanto j es la inversa de k.

Ejemplo 3.2.9 *Sea* $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ *dada por* $f(x) = x^2$, *para toda* $x \in \mathbb{R}$.

Esta función no tiene inversa izquierda, pero si tiene inversas derechas. En efecto, sean $g, h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dadas por $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = -\sqrt{x}$, para toda $x \in [0,\infty)$. Luego $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$ y $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(-\sqrt{x}) = (-\sqrt{x})^2 = x$.

Para ver que f no tiene inversa izquierda, supongamos lo contrario que f tiene una inversa izquerda $m : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, ¿Cuál es el valor de $m(9)$? Como $m(f(x)) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos que $m(9) = m(3^2) = m(f(3)) = 3$ y $m(9) = m((-3)^2) = m(f(-3)) = -3$. Por lo que, no es posible definir $m(9)$, lo que implica que m no es función. Por lo tanto, f no tiene una inversa izquierda.

Ejemplo 3.2.10 *Sea* $p : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, *dada por* $p(x) = x^2$, *para toda* $x \in [0,\infty)$.

Entonces p no tiene inverso derecho, pero si tiene muchos inversos izquierdos. Por ejemplo, las funciones q, $r : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ dadas por

$$q(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x < 0, \end{cases} \qquad r(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

son inversas izquierdas de p, ya que $(q \circ p)(x) = q(p(x)) = \sqrt{x^2} = x$, para $x \in [0, \infty)$ y $(r \circ p)(x) = r(p(x)) = \sqrt{x^2} = x$, para $x \in [0, \infty)$.

Para ver que p no tiene inverso derecho, supongamos lo contrario y sea $u : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ un inverso derecho. ¿Cuál es el valor de $u(-4)$? Como u es un inverso derecho de p, sabemos que $p \circ u = Id_{\mathbb{R}}$. De aquí que $p(u(x)) = x$, para toda $x \in \mathbb{R}$. Así $(u(x))^2 = x$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Por lo que $(u(-4))^2 = -4$, lo cual es imposible. Por lo tanto, no hay manera de definir $u(-4)$, lo que implica que p no tiene inverso derecho.

Ejemplo 3.2.11 *La función $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $s(x) = x^2$ para toda $x \in \mathbb{R}$ no tiene inversa derecha ni inversa izquierda, por los mismos argumentos de los dos ejemplos anteriores.*

Ejercicio 3.6 *Dar un ejemplo de dos funciones f y g de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ tales que $f \neq g$, pero tales que $f \circ g = g \circ f$.*

Ejercicio 3.7 *Sean f y g dos funciones cuyos valores están dados por $f(x) = 2x$, $g(x) = 3x^2 - 1$ para $x \in \mathbb{R}$, calcula $f \circ g$.*

Ejercicio 3.8 *Para cada par de funciones f y g, encontrar fórmulas para $f \circ g$ y $g \circ f$, cuando sea posible. (i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \text{sen}\, x$.*
(ii) $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ dada por $f(x) = x^6$ y $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^{\frac{1}{6}}$.
(iii) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \geq 0 \\ |x|, & \text{si } x < 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{si } x \geq 0 \\ 4x + 3, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Ejercicio 3.9 *Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x - 1$ y $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \sqrt{x}$.*
Describe la función $f \circ g$ y $g \circ f$.
Determina el dominio, el contradominio y la imagen de las dos composiciones (en caso necesario restringe la función).

Ejercicio 3.10 *Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ y $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \frac{1}{x}$.*
Describe la función $f \circ g$ y $g \circ f$.

Determina el dominio, el contradominio y la imagen de las dos composiciones (en caso necesario restringe la función).

Ejercicio 3.11 *Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por*

$$f(x) = x^2 + 2x - 3, \qquad g(x) = 3x - 4.$$

Encuentra las fórmulas para las funciones $g \circ f$ y $f \circ g$.
Describe en cada caso el dominio, el contradominio y la imagen de la función.

Ejercicio 3.12 *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones que ambas tienen inversas. Probar que $g \circ f$ tiene inversa y que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Ejercicio 3.13 *Encuentra dos inversos derechos para cada una de las siguientes funciones. (i) $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ dada por $f(x) = |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. (ii) $h : \mathbb{R} \to [1, \infty)$ dada por $h(x) = e^{x^2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

3.3. Funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas

Definición 3.3.1 *Decimos que una función $f : X \to Y$ es* **inyectiva** *si para toda pareja x_1, $x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$ se tiene que $f(x_1) \neq f(x_2)$, lo cual es equivalente a decir que si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$.*

Decimos que una función $f : X \to Y$ es suprayectiva si $\mathrm{Im} f = Y$, es decir, si para toda $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Finalmente, decimos que una función es **biyectiva** *si es inyectiva y suprayectiva.*

Ejemplo 3.3.2 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. ¿Es la función inyectiva y suprayectiva?*

La función no es inyectiva, ya que $f(1) = f(-1)$; tampoco es suprayectiva ya que $f(x) \geq 0$ y por lo tanto ningún elemento negativo está en la imagen de f.

Ejemplo 3.3.3 *Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(n) = 2n$. ¿Es la función inyectiva y suprayectiva?*

La función es inyectiva, ya que $f(n) = f(m)$ implica que $n = m$, pero no es suprayectiva ya que los números enteros impares no están en la imagen de f.

Ejemplo 3.3.4 *Sea $k : [0, \infty) \to [0, \infty)$, dada por $k(x) = x^2$. ¿Es la función inyectiva y suprayectiva?*

La función es ambas, inyectiva y suprayectiva. Para ver que es suprayectiva, sea $b \in [0, \infty)$ y consideremos $\sqrt{b} \in [0, \infty)$. Luego $k(\sqrt{b}) = (\sqrt{b})^2 = b$. De aquí que k es suprayectiva. Además es inyectiva, ya que si $x^2 = y^2$ se sigue que $\sqrt{x^2} = \sqrt{y^2}$ y como $x, y > 0$, tenemos que $x = \sqrt{x^2} = \sqrt{y^2} = y$.

Ejemplo 3.3.5 *Sea $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, dada por $h(x) = x^2$. ¿Es la función inyectiva y suprayectiva?*

La función es suprayectiva, por los mismos argumentos del ejemplo anterior; sin embargo, no es inyectiva ya que $h(-3) = 9 = h(3)$ y $-3 \neq 3$.

Lema 3.3.6 *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones.*

(a) *Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.*

(b) *Si f y g son suprayectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.*

(c) *Si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.*

Demostración. (a) Supongamos que f y g son inyectivas. Vamos a probar que $g \circ f : A \to C$ también es inyectiva. Sean $x, y \in A$, tales que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$, así $g(f(x)) = g(f(y))$ y como g es inyectiva, tenemos que $f(x) = f(y)$. Pero f también es inyectiva, por lo que $x = y$. Por lo tanto, $g \circ f$ es inyectiva.

(b) Supongamos que f y g son suprayectivas. Vamos a probar que $g \circ f : A \to C$ también es suprayectiva. Sea $p \in C$. Como g es suprayectiva, existe un $w \in B$ tal que $g(w) = p$. Ahora, puesto que f es suprayectiva, tenemos que existe $a \in A$ tal que $f(a) = w$, por lo que $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(w) = p$. Por lo tanto, $g \circ f$ es suprayectiva.

(c) Es consecuencia de los incisos (a) y (b). □

Teorema 3.3.7 *Sean A y B conjuntos no vacíos y sea $f : A \to B$ una función.*

(a) *La función f tiene inversa derecha si y sólo si f es suprayectiva.*

(b) *La función f tiene inversa izquierda si y sólo si f es inyectiva.*

(c) *La función f tiene inversa si y sólo si f es biyectiva.*

Demostración. (a) Supongamos que f tiene una inversa derecha g. De aquí que $f \circ g = Id_B$. Vamos a probar que f es suprayectiva. Sea $b \in B$ y sea $a = g(b)$. Entonces $f(a) = f(g(b)) = (f \circ g)(b) = Id_B(b) = b$. Por lo tanto, f es suprayectiva.
(b) Supongamos que f tiene una inversa izquierda h. Así $h \circ f = Id_A$. Vamos a probar que f es inyectiva. Sean x y $y \in A$, tales que $f(x) = f(y)$, así $x = Id_A(x) = (h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(f(y)) = (h \circ f)(x) = Id_A(y) = y$. Por lo tanto, f es inyectiva.
(c) Es consecuencia de los incisos (a) y (b). $\square$

Teorema 3.3.8 *Sean A y B conjuntos no vacíos y sea $f : A \to B$ una función.*

(a) *La función f es suprayectiva si y sólo si $g \circ f = h \circ f$ implica que $g = h$ para cualesquiera dos funciones $g,\ h : B \to X$, y para cualquier conjunto X.*

(b) *La función f es inyectiva si y sólo si $f \circ g = f \circ h$ implica que $g = h$ para cualesquiera dos funciones $g,\ h : Y \to A$, y para cualquier conjunto Y.*

Demostración. (a) Supongamos que f es suprayectiva. Sean $g,\ h : B \to X$ funciones tales que $g \circ f = h \circ f$, para algún conjunto X. Por el teorema anterior, la función f tiene un inverso derecho $q : B \to A$. Se sigue de las hipótesis que $(g \circ f) \circ q = (h \circ f) \circ q$ o equivalentemente $g \circ (f \circ q) = h \circ (f \circ q)$, de donde $g \circ Id_B = h \circ Id_B$ y como consecuencia $g = h$.

Ahora supongamos que f no es suprayectiva. Sea $b \in B$ un punto que no está en la imagen de f. Sea $X = \{1, 2\}$. Definimos $g,\ h : B \to X$ como $g(y) = 1$ para todo $y \in B$ y como $h(y) = 1$ para todo $y \in B - \{b\}$ y $h(b) = 2$. Se puede verificar que $g \circ f = h \circ f$, aunque $g \neq h$. El resultado se sigue usando la contrapositiva.

La parte (b) se deja como ejercicio. $\square$

Ejercicio 3.14 *Sea $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$. ¿Cuáles de las siguientes funciones son inyectivas, suprayectivas o biyectivas?*

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.15 *Considera la función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(n) = 2n - 3$. ¿Es inyectiva?, ¿Es suprayectiva?*
Describe el dominio, el contradominio y la imagen de la función.

Ejercicio 3.16 *Muestra que la función $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ dada por $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ es inyectiva.*

Ejercicio 3.17 *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 + 2$. ¿Es inyectiva?, ¿es suprayectiva?, ¿es biyectiva?*
Describe el dominio, el contradominio y la imagen de la función.

Ejercicio 3.18 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \textit{si} \quad x \geq 0 \\ 4 & \textit{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

¿Es inyectiva?, ¿es suprayectiva?, ¿es biyectiva?
Describe el dominio, el contradominio y la imagen de la función.

Ejercicio 3.19 *Sean $A = [1, 3]$ y $f : A \to \mathbb{R}$ tal que a cada número le corresponde su cuadrado. ¿Es inyectiva?, ¿es suprayectiva?, ¿es biyectiva?*
Describe el dominio, el contradominio y la imagen de la función.

Ejercicio 3.20 *Sean f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dados por*

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & \textit{si } x \geq 0 \\ |x|, & \textit{si } x < 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 3x + 1, & \textit{si } x \geq 0 \\ 1 - x, & \textit{si } x < 0. \end{cases}$$

(i) *Determinar si f es inyectiva. Justifica tu respuesta.*
(ii) *Determinar si g es suprayectiva. Justifica tu respuesta.*
(iii) *Encontrar $g \circ f$.*

Ejercicio 3.21 *Determina si las siguientes funciones son inyectivas, suprayectivas y biyectivas.*
(i) $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $s(x) = x^4 - 5$.
(ii) $g : [0, \infty) \to [0, 1)$ *dada por* $g(x) = \frac{x}{1+x}$.
(iii) $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por* $k(x, y) = x^2 + y^2$.

Ejercicio 3.22 *Probar que las proyecciones* $\pi_1 : A \times B \to A$ *y* $\pi_2 : A \times B \to B$ *son suprayectivas, ¿son inyectivas?*

Ejercicio 3.23 *Probar que la función identidad* $I : A \to A$ *es biyectiva.*

Ejercicio 3.24 *Sean* $f : A \to B$ *y* $g : B \to C$ *funciones.*
(i) *Probar que si* $g \circ f$ *es inyectiva, entonces* f *debe ser inyectiva.*
(ii) *Probar que si* $g \circ f$ *es suprayectiva, entonces* g *debe ser suprayectiva.*
(iii) *Probar que si* $g \circ f$ *es biyectiva, entonces* f *es inyectiva y* g *es suprayectiva.*

Ejercicio 3.25 *Muestra que si* $f : X \to Y$ *es inyectiva y* $E \subset X$, *entonces* $f^{-1}(f(E)) = E$.

Ejercicio 3.26 *Muestra que si* $f : X \to Y$ *es es sobreyectiva y* $H \subset Y$, *entonces* $f(f^{-1}(H)) = H$.

Ejercicio 3.27 *Sea* $f : A \to B$ *una función inyectiva y sean* P, $Q \subseteq A$. *Probar que* $f(P - Q) = f(P) - f(Q)$.

3.4. Cardinalidad de conjuntos

Una pregunta aparentemente sencilla es ¿Cómo determinar cuando dos conjuntos tienen el mismo tamaño? A simple vista, puede parecer que para contestar esta pregunta necesitamos calcular el tamaño de cada conjunto y después compararlos. La noción de tamaño de un conjunto finito parece intuitivamente clara, ya que es el número de elementos que contiene. Sin embargo, para conjuntos infinitos no lo es tanto.

El comportamiento de los conjuntos infinitos es mas extraño, a lo menos desde la perspectiva de los seres humanos que estamos mas acostumbrados a tratar con conjuntos finitos. Un correcto entendimiento del tamaño de los conjuntos infinitos fue debido al matemático alemán Georg Cantor (1845-1918), quien desarrolló la teoría de conjuntos, base de la matemática moderna.

Definición 3.4.1 *Sean A y B dos conjuntos. Decimos que A y B tienen la misma* **cardinalidad**, *denotada por $A \sim B$, si existe una función biyectiva $f : A \to B$.*

Notemos que para probar formalmente que dos conjuntos tienen la misma cardinalidad, es necesario encontrar una función biyectiva entre ellos, y no contar sus elementos.

Lema 3.4.2 *Sean A, B y C conjuntos.*

(a) $A \sim A$.

(b) *Si $A \sim B$, entonces $B \sim A$.*

(c) *Si $A \sim B$ y $B \sim C$, entonces $A \sim C$.*

Demostración. La parte (a) es inmediata, ya que la función identidad $Id_A : A \to A$ es biyectiva.
(b) Supongamos que $A \sim B$, así existe una función biyectiva $f : A \to B$. Luego, como f es biyectiva, existe su función inversa $f^{-1} : B \to A$ que también es biyectiva. Por lo que $B \sim A$.

(c) Supongamos que $A \sim B$ y $B \sim C$. Así existen funciones biyectivas $f : A \to B$ y $g : B \to C$. Luego $g \circ f : A \to C$ es una función biyectiva. Por lo tanto, $A \sim C$. $\square$

Ejemplo 3.4.3 *El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ y el conjunto de los cuadrados perfectos $S = \{1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots\}$ tienen la misma cardinalidad.*

En efecto, sea $h : \mathbb{N} \to S$ la función dada por $h(n) = n^2$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces la función $k : S \to \mathbb{N}$ dada por $k(n) = \sqrt{n}$ para toda $n \in S$ es la inversa de h. Por lo que h es biyectiva.

Ejemplo 3.4.4 *El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ y el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ tienen la misma cardinalidad.*

Una función biyectiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ es la siguiente.

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ es par} \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Ejemplo 3.4.5 *Sean $[a, b]$ y $[c, d]$ intervalos cerrados en $\mathbb{R}$ con $a < b$ y $c < d$. Entonces $[a, b] \sim [c, d]$.*

La función $g : [a, b] \to [c, d]$ dada por

$$g(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c$$

para toda $x \in [a, b]$, es biyectiva.
Un argumento similar prueba que cualesquiera dos intervalos abiertos (a, b) y (c, d) de $\mathbb{R}$ con $a < b$ y $c < d$, tienen la misma cardinalidad.

Para $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $\|1, n\|$ al siguiente conjunto

$$\|1, n\| = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq x \leq n\}.$$

A continuación, vamos a definir los diferentes tipos de cardinalidad.

Definición 3.4.6 (a) *Un conjunto es* **finito** *si es el conjunto vacío o tiene la misma cardinalidad que $\|1, n\|$ para alguna $n \in \mathbb{N}$.*

(b) *Un conjunto es* **infinito** *si no es finito.*

(c) *Un conjunto es* **infinito numerable** *si tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{N}$.*

(d) *Un conjunto es* **numerable** *si es finito o infinito numerable.*

(e) *Un conjunto es* **no numerable** *si no es numerable.*

Notemos que los conjuntos finitos existen, ya que el conjunto $\|1, n\|$ es finito para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto nos conduce a la siguiente definición.

Definición 3.4.7 *Sea A un conjunto finito. Definimos la cardinalidad de A, denotada por $|A|$, como sigue. Si $A = \emptyset$, decimos que $|A| = 0$. Si $A \sim \|1, n\|$, decimos que $|A| = n$.*

El siguiente resultado, nos muestra que la cardinalidad de un conjunto finito está bien definida; es decir, dado un conjunto finito A, no puede pasar que A tenga la misma cardinalidad de $\|1, n\|$ y de $\|1, m\|$ para $n \neq m$.

Lema 3.4.8 *Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces $\|1, n\| \sim \|1, m\|$ si y sólo si $n = m$.*

Demostración. Supongamos que $n \neq m$. Por simplicidad asumamos que $n < m$. Así $\|1, n\|$ es un subconjunto propio de $\|1, m\|$. Sea $f : \|1, n\| \to \|1, m\|$ una función biyectiva. Así, existe $k \in \|1, n\|$ tal que $f(k) > f(i)$, para cualquier $i \in \|1, n\|$. De aquí que $f(k) + 1 > f(i)$ para toda $i \in \|1, n\|$, lo que implica que $f(k) + 1 \notin f(\|1, n\|)$. Como $f(k) + 1 \in \|1, m\|$, se sigue que f no es sobreyectiva, lo cual es una contradicción. Pero entonces, $\|1, n\| \nsim \|1, m\|$ es un absurdo. Por lo tanto $n = m$.

Supongamos que $n = m$. Luego, la función identidad $Id : \|1, n\| \to \|1, n\|$ es biyectiva. Por lo tanto, $\|1, n\| \sim \|1, m\|$. $\square$

Corolario 3.4.9 *Sean A y B conjuntos finitos. Entonces $A \sim B$ si y sólo si $|A| = |B|$.*

Ejemplo 3.4.10 *Sea $B = \{1, 4, 9, 16\}$. Entonces $|B| = 4$.*

En efecto, consideremos la función $h : B \to \|1, 4\|$, dada por $h(x) = \sqrt{x}$ para toda $x \in B$. Claramente, h es biyectiva. Por lo tanto, $|B| = 4$.

A continuación, daremos algunas propiedades de la cardinalidad de conjuntos finitos.

Teorema 3.4.11 *Sean A y B conjuntos finitos.*

(a) *Si $X \subset A$, entonces X es finito.*

(b) *Si $X \subset A$, entonces $|A| = |X| + |(A - X)|$.*

(c) *Si $X \subsetneq A$, entonces $|X| < |A|$.*

(d) *Si $X \subsetneq A$, entonces $X \nsim A$.*

Demostración. (a) Existe una función biyectiva $h : A \to \|1, n\|$ tal que $h(X) = \|1, k\|$ con $k \leq n$. Por lo tanto, X es finito.
(b) Si $A - X = \emptyset$, el resultado es trivial. Supongamos lo contrario. Sea $|A| = n$ y sea $f : A \to \|1, n\|$ una función biyectiva. Luego, podemos encontrar una función biyectiva $g : \|1, n\| \to \|1, n\|$ y un número natural k con $k < n$, tal

que $g(f(X)) = \|1, k\|$. Por lo que $|X| = k$. Ahora, de la biyectividad de f y g, tenemos que

$$\begin{aligned}(g \circ f)(A - X) &= g(f(A - X)) = g(f(A) - f(X)) \\ &= g(f(A)) - g(f(X)) = g(\|1, n\|) - g(f(X)) \\ &= \|1, n\| - \|1, k\| = \|k + 1, n\|.\end{aligned}$$

De aquí que, $(g \circ f)|_{A-X}$ es una biyección entre $A - X$ y $\|k+1, n\|$. Así, la función $h : \|k + 1, n\| \to \|1, n - k\|$ dada por $h(x) = x - k$ para toda $x \in \|k + 1, n\|$ es una biyección, lo que implica que $|A - X| = n - k$.
El inciso (c) es consecuencia de (b) y el inciso (d) es consecuencia de (c) y del corolario anterior. $\square$

Observemos que la parte (d) del teorema anterior no es cierta para conjuntos infinitos, ya que $\mathbb{N}$ es un subconjunto propio de $\mathbb{Z}$; sin embargo, como vimos en el ejemplo 3.4.4 ambos conjuntos poseen la misma cardinalidad.

Continuaremos ahora con el estudio de los conjuntos infinitos.

Corolario 3.4.12 *Sea A un conjunto. Entonces A es infinito si y sólo si contiene un subconjunto infinito.*

Demostración. Si A contiene un subconjunto infinito, entonces A debe ser infinito, ya que en caso contrario, contradice el teorema 3.4.11 (a).

Ahora, supongamos que A es infinito. Luego, si todo subconjunto de A es finito, aplicando el teorema 3.4.11 (b), tenemos que A es finito. Lo cual es una contradicción, por lo tanto el resultado se sigue. $\square$

Teorema 3.4.13 (a) *El conjunto $\mathbb{N}$ es infinito.*

(b) *Un conjunto infinito numerable es infinito.*

Demostración. (a) Supongamos que $\mathbb{N}$ es finito. Entonces, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{N} \sim \|1, n\|$. Sea $f : \|1, n\| \to \mathbb{N}$ una función biyectiva. Así, existe $k \in \|1, n\|$ tal que $f(k) > f(i)$, para cualquier $i \in \|1, n\|$. De aquí que $f(k) + 1 > f(i)$ para toda $i \in \|1, n\|$, lo que implica que $f(k) + 1 \notin f(\|1, n\|)$. Como $f(k) + 1 \in \mathbb{N}$, se sigue que f no es sobreyectiva, lo cual es una contradicción. Por lo tanto,

$\mathbb{N} \nsim \|1, n\|$.

(b) Sea B un conjunto infinito numerable. Entonces $B \sim \mathbb{N}$. Supongamos que B es finito, entonces $B \sim \|1, n\|$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Así $\mathbb{N} \sim \|1, n\|$, lo cual es una contradicción a la parte (a) del teorema. Por lo tanto, B es infinito. $\square$

La primera parte del teorema anterior, nos muestra que existen conjuntos infinitos. Además de la segunda parte y el corolario anterior, tenemos que si un conjunto A contiene un conjunto infinito numerable, entonces A es infinito; si un conjunto numerable B contiene un subconjunto infinito numerable, entonces B es un conjunto infinito numerable.
El siguiente teorema nos da algunas propiedades de los conjuntos numerables.

Teorema 3.4.14 *Sea A un conjunto no vacío. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

(a) *El conjunto A es numerable.*

(b) *El conjunto A es un subconjunto de un conjunto numerable.*

(c) *Existe una función inyectiva $f : A \to \mathbb{N}$.*

(d) *Existe una función suprayectiva $g : \mathbb{N} \to A$.*

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$. Es claro.
$(b) \Rightarrow (c)$. Sea X un conjunto numerable tal que $A \subseteq X$. Sea $j : A \to X$ la inclusión. Así j es inyectiva. Tenemos dos casos, dependiendo de si X es finito o infinito numerable. Si X es finito, existe una función biyectiva $k : X \to \|1, n\|$ para algún $n \in \mathbb{N}$; de aquí que existe una función inyectiva $\hat{k} : X \to \mathbb{N}$, ya que $\|1, n\| \subseteq \mathbb{N}$. Luego, la función $\hat{k} \circ j : A \to \mathbb{N}$ es inyectiva. Si X es infinito numerable, existe una función biyectiva $h : X \to \mathbb{N}$. Entonces $h \circ j : A \to \mathbb{N}$ es inyectiva.
$(c) \Rightarrow (a)$. Como A es no vacío, tenemos que $f(A)$ no es vacío. Además $f(A) \subseteq \mathbb{N}$, por lo que podemos encontrar $x_1 \in A$ tal que $f(x_1) \leq f(x)$ para toda $x \in A$. Puesto que f es inyectiva, se sigue que $f(x_1) < f(x)$ para toda $x \in A - \{x_1\}$. Sea $A_2 = A - \{x_1\}$. Si $A_2 = \emptyset$, entonces terminamos aquí. En caso contrario, aplicamos los mismos argumentos al conjunto $f(A_2)$, para obtener $x_2 \in A_2$ tal que $f(x_2) < f(x)$ para toda $x \in A_2 - \{x_2\} = A - \{x_1, x_2\}$. Sea $A_3 = A - \{x_1, x_2\}$. Continuamos inductivamente este proceso, siempre y

cuando $A_i \neq \emptyset$.

Tenemos dos casos.
Caso 1: Supongamos que $A_n = \emptyset$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces el conjunto $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$, por lo que $A \sim \|1, n-1\|$ es finito, y por lo tanto numerable.

Caso 2: Supongamos que $A_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, hemos definido un elemento $x_n \in A$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $h : \mathbb{N} \to A$ dada por $h(n) = x_n$ para $n \in \mathbb{N}$. Afirmamos que h es biyectiva. En efecto, por construcción tenemos que $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$. De aquí que h es inyectiva. Ahora vamos a probar que es sobre. Sea $y \in A$ y supongamos que $y \neq h(n)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que $f(y) \in \mathbb{N}$, es decir, $f(y) = m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Además, de la construcción sabemos que $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) < \cdots$, por lo que $f(x_n) \geq n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo que $f(y) \leq f(x_m)$. Por otro lado, de la definición de x_m, tenemos que $f(x_m) < f(x)$ para cualquier $x \in A - \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Lo que implica que $f(x_m) < f(y)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto h es biyectiva; o equivalentemente $A \sim \mathbb{N}$. Por lo tanto A es infinito numerable.

$(c) \Rightarrow (d)$, Supongamos que (c) se cumple. Así existe una función inyectiva $f : A \to \mathbb{N}$. Luego, f tiene un inverso izquierdo, digamos $g : \mathbb{N} \to A$, que es sobre. Un argumento similar muestra que (d) implica (c). $\square$

Teorema 3.4.15 *Sea I un conjunto no vacío y sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos indexada por I, donde A_i es numerable para cada $i \in I$.*

(a) $\cap_{i \in I} A_i$ *es numerable.*

(b) *Si I es numerable, entonces $\cup_{i \in I} A_i$ es numerable.*

Demostración. (a) Escogemos algún $k \in I$. Entonces $\cap_{i \in I} A_i \subseteq A_k$, y así $\cap_{i \in I} A_i$ es numerable.
(b) Tenemos dos casos dependiendo de que I sea finito o infinito. El caso finito lo dejamos como ejercicio. Vamos a suponer que I es infinito numerable. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $I = \mathbb{N}$.
Como A_i es numerable para cada $i \in I$, entonces existen funciones suprayectivas $f_i : \mathbb{N} \to A_i$ para cada $i \in I$, Ahora vamos a definir una función $g : \mathbb{N} \to \cup_{i \in I} A_i$, para esto consideremos la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n) = \frac{n(n-1)}{2}$, para

$n \in \mathbb{N}$. Ahora dado $r \in \mathbb{N}$, existen números naturales únicos n y p tales que $\frac{n(n-1)}{2} < r < \frac{n(n+1)}{2}$ y $r = \frac{n(n-1)}{2} + p$. Definimos $g(r) = f_{n-p+1}(p)$.
Observemos que para probar el resultado es suficiente mostrar que g es sobre. Sea $x \in \cup_{i\in I} A_i$. Entonces por el axioma de elección, $x \in A_k$ para algún $k \in I$. Como f_k es sobre, existe algún $w \in \mathbb{N}$ tal que $x = f_k(w)$. Sea $t = k + w - 1$. Es fácil verificar que $g(\frac{(t-1)t}{2} + w) = f_{t-w+1}(w) = f_k(w) = x$. Por lo tanto, g es sobre. □

Teorema 3.4.16 *Sean $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos numerables. Entonces el producto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ es numerable.*

Demostración. El resultado es trivial cuando $n = 1$. El resultado se prueba para $n = 2$ y se aplica inducción. Los detalles se dejan como ejercicio al lector. □

Teorema 3.4.17 *El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es infinito numerable.*

Demostración. Como $\mathbb{Z}$ es infinito numerable, tenemos que es numerable. Luego $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ es también numerable. Así, por el teorema anterior, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ es numerable; de aquí que existe una función suprayectiva $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Definimos la función $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$ como $f((m, n)) = \frac{m}{n}$ para todo $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Dado que $\mathbb{Q}$ consiste de todas las fracciones, es claro que f es sobre. Luego $f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ es una función suprayectiva y por el teorema 3.4.14, se sigue que $\mathbb{Q}$ es numerable. Por otro lado, $\mathbb{Q}$ es infinito, de aquí que es infinito numerable. □

Teorema 3.4.18 *El conjunto $\mathbb{R}$ es no numerable.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{R}$ es numerable y como es infinito, tenemos que $\mathbb{R}$ es infinito numerable. Luego, usando el mismo argumento del ejemplo 3.4.5 tenemos que $(0, 1) \sim \mathbb{R}$; de aquí que $(0, 1)$ es infinito numerable. Sea $f : \mathbb{N} \to (0, 1)$ una función biyectiva. Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos escribir $f(n)$ como una expresión decimal infinita $f(n) = 0.a_n^1 a_n^2 a_n^3 \ldots$, donde los números $a_n^1, a_n^2, a_n^3, \ldots$ son enteros en $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.
Ahora definimos un número $b \in (0, 1)$ como sigue. Para $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$b_k = \begin{cases} 1, & \text{si } a_k^k \neq 1 \\ 2, & \text{si } a_k^k = 1. \end{cases}$$

Notemos que $b_k \neq a_k^k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea b el número representado por la expresión decimal $b = 0.b_1b_2b_3\ldots$. Como ninguno de los números b_k son nueve's, esta expresión decimal corresponde a un único número en $(0,1)$. Afirmamos que $b \neq f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Recordemos que la expansión decimal de cualquier número real es única, y así si dos números tienen diferente expansión decimal (incluso en un solo dígito) entonces son números diferentes. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el n-ésimo dígito en la expansión decimal de $f(n)$ es a_n^n, mientras que el n-ésimo dígito en la expansión decimal de b es b_n. Así $b \neq f(n)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, lo cual es una contradicción a la suprayectividad de f. Por lo tanto, $\mathbb{R}$ no es numerable. $\square$

Ejercicio 3.28 *Probar que todos los enteros pares tienen la misma cardinalidad de los enteros.*

Ejercicio 3.29 *Probar que el conjunto de todos los naturales que son múltiplos de cinco tienen la misma cardinalidad que el conjunto de los naturales.*

Ejercicio 3.30 *Sean A y B conjuntos finitos. Probar que $A \cup B$ es finito.*

Ejercicio 3.31 *Sean A y B conjuntos finitos tales que $|A| = |B|$. Sea $f : A \to B$. Probar que f es biyectiva si y solo si es inyectiva si y solo si es suprayectiva.*

Ejercicio 3.32 *Sean A, B y C conjuntos. Supongamos que $A \sim B$ y que $A \cap C = \emptyset = B \cap C$. Probar que $A \cup C \sim B \cup C$.*

Ejercicio 3.33 *Sea A un conjunto y sea x un elemento (no necesariamente en A). Probar que $A \times \{x\} \sim A$.*

Ejercicio 3.34 *Sean A, B, C y D conjuntos. Supongamos que $A \sim B$ y $C \sim D$. Probar que $A \times C \sim B \times D$.*

Capítulo 4

Relaciones y Particiones

4.1. Relaciones

Empleando parejas ordenadas, intuitivamente podemos pensar que una relación R es un proposición, tal que, para cada par ordenado (a, b) uno puede determinar cuándo a está en relación R con b o cuándo no lo está. Si conocemos la relación conocemos el conjunto, o mejor aún si conocemos el conjunto conocemos la relación. Por ejemplo, el conjunto de todos los pares ordenados que consiste de un número real y su cuadrado.

Definición 4.1.1 *Una* **relación** *R de A en B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Esto es, un conjunto R es una relación si todo elemento de R es un par ordenado (x, y), con $x \in A$ y $y \in B$. Podemos también escribir xRy.*

Ejemplo 4.1.2 *Si A es un conjunto, denotamos por $D(A)$ la* **diagonal***, que es un subconjunto de $A \times A$, es decir, es el conjunto*

$$\{(a, a) \mid a \in A\}.$$

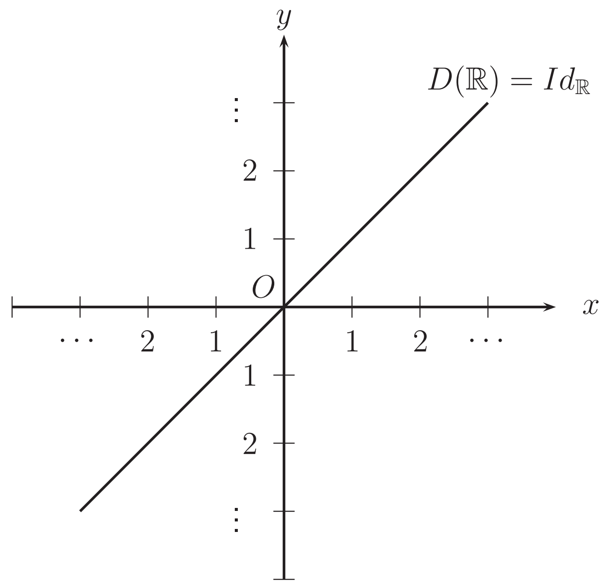
A este conjunto también se le conoce como la identidad en A y se denota como Id_A.

Notemos que esta relación no es más que la relación de igualdad en A o relación identidad. Es decir,

$$\{(a, b) \in A \times A \mid a = b\} = \{(a, a) \mid a \in A\}.$$

Esto es, cada par de elementos en A no necesariamente están relacionados. Si $a \neq b$, $(a,b) \notin Id_A$ y $(b,a) \notin Id_A$.

Ejemplo 4.1.3 *El producto cartesiano* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, *nos da el plano cartesiano y* $D(\mathbb{R}) = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, x = y\}$ *es exactamente la diagonal.*



Definición 4.1.4 *Al conjunto de todas las* x *que están en relación* R *con alguna* y *es llamado el* **dominio de la relación** *y lo denotamos como* $Dom\, R$.
Al conjunto de todas las y *para las cuales hay una* x *tal que* x *está en relación con* y, *se le llama el* **rango o imagen de la relación** *y escribimos* $Im\, D$.

Ejemplo 4.1.5 *Definimos una relación entre los enteros positivos y los enteros diciendo que un entero positivo* m *está en relación* R *con un entero* n, *si* m *divide a* n.

La relación es simplemente el conjunto

$$\{z \,|\, \exists\, m, n \text{ tales que } z = (m,n), m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z},\ m > 0 \text{ y } m \text{ divide a } n\}.$$

Los elementos de R son pares ordenados

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} \ldots, & (1,-3), & (1,-2), & (1,-1), & (1,0), & (1,1), & (1,2), & (1,3), & \ldots \\ \ldots, & (2,-6), & (2,-4), & (2,-2), & (2,0), & (2,2), & (2,4), & (2,6), & \ldots \\ \ldots, & (3,-9), & (3,-6), & (3,-3), & (3,0), & (3,3), & (3,6), & (3,9), & \ldots \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \end{array}\right\}$$

Ejemplo 4.1.6 *Si $\mathcal{F}$ es una familia de conjuntos, la relación de contención entre los elementos de $\mathcal{F}$ es*

$$\{(A, B) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid A \subseteq B\}.$$

Observación 4.1.7 *En cualquier familia de conjuntos $\mathcal{F}$, la relación de contención $\subseteq$ tiene las siguientes propiedades:*

(a) *La contención es reflexiva, es decir, para cada $A \in \mathcal{F}$, $A \subseteq A$.*

(b) *La contención es antisimétrica, es decir, para cualesquiera dos conjuntos A y $B \in \mathcal{F}$, $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $A = B$.*

(c) *La contención es transitiva, es decir, para cualesquiera tres conjuntos A, B y $C \in \mathcal{F}$, $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.*

Ejercicio 4.1 *Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b, c\}$. Definimos la relación R como el conjunto*

$$R = \{(2, a), (4, a), (4, c)\}.$$

Di cuál es el dominio y la imagen de la relación.

Ejercicio 4.2 *Sean $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b\}$. El producto cartesiano es el conjunto*

$$A \times B = \{(1, a), (2, 1), (1, b), (2, b)\}.$$

Escribe todas las posibles relaciones.

Ejercicio 4.3 *Sean $A = [-5, 5]$ y $B = [0, \infty)$ y sea R la relación*

$$R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25\}.$$

Describe gráficamente quién es R.

4.2. Relaciones de equivalencia y particiones

La mayoría de las relaciones importantes en matemáticas satisfacen las siguientes propiedades.

Definición 4.2.1 *Una relación R de $A \times A$ se llama de* **equivalencia** *si satisface:*
(a) $(a, a) \in R$ *para toda* $a \in A$.
(b) $(a, b) \in R$ *entonces* $(b, a) \in R$.
(c) $(a, b) \in R$ *y* $(b, c) \in R$ *entonces* $(a, c) \in R$.
Estas propiedades se llaman **reflexiva**, **simétrica** *y* **transitiva**, *respectivamente.*

Ejemplo 4.2.2 *Sea $\mathcal{G}$ una familia de conjuntos. Para cualesquiera A, $B \in \mathcal{G}$, decimos que A está en relación R con B si ambos conjuntos poseen la misma cardinalidad. Luego, R es una relación de equivalencia (para mas detalles ver lemma 3.4.14).*

Ejemplo 4.2.3 *Sea $\mathcal{T}$ la familia de todos los triángulos en el plano. La semejanza de triángulos es una relación de equivalencia en $\mathcal{T}$.*

Definición 4.2.4 *Sea R una relación de equivalencia en el conjunto no vacío A y sea $x \in A$. Definimos la* **clase de equivalencia** *de x, $[x]_R$ por*

$$[x]_R = \{y \in A \mid xRy\}.$$

Al conjunto de clases de equivalencia se le llama **el conjunto cociente** *y se denota por*

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}.$$

Ejemplo 4.2.5 *Tomemos la relación de equivalencia $D(A)$ en $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Entonces las clases de equivalencia son: $[0]_{D(A)} = \{0\}$, $[1]_{D(A)} = \{1\}$, $[2]_{D(A)} = \{2\}$, $[3]_{D(A)} = \{3\}$, por lo que $A/D(A) = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.*

Ejemplo 4.2.6 *Si consideremos $f : A \to B$ y la relación definida en A por*

$$xRy \;\Leftrightarrow\; f(x) = f(y)$$

entonces la clase de equivalencia de $a \in A$ es $[a]_R = \{b \in A \mid f(b) = f(a)\}$.

Teorema 4.2.7 *Sea A un conjunto no vacío y sea $\sim$ una relación de equivalencia en A. Para x, $y \in A$ se tiene lo siguiente:*

(a) *Si $x \sim y$, entonces $[x] = [y]$. Si $x \not\sim y$, entonces $[x] \cap [y] = \emptyset$.*

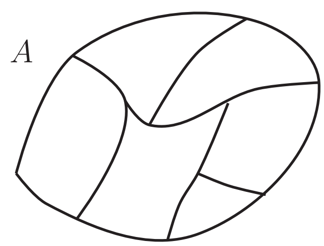
(b) $\cup_{x \in A}[x] = A$.

Demostración. (a) Sea $x \sim y$. Si $s \in [y]$ se tiene que $s \sim y$ y como $x \sim y$, se sigue que $s \sim x$, lo que implica que $[y] \subseteq [x]$. Intercambiando x y y, tenemos que $[x] = [y]$. Si $z \in [x] \cap [y]$, entonces $z \sim x$ y $z \sim y$. Por transitividad $x \sim y$, por lo que $y \in [x]$.

(b) Por definición $[x] \subseteq A$ para toda $x \in A$, de aquí que $\cup_{x\in A}[x] \subseteq A$. Ahora, sea $q \in A$. Por reflexividad $q \sim q$, y así $q \in [q] \subseteq \cup_{x\in A}[x]$, de donde $A \subseteq \cup_{x\in A}[x]$. Por lo tanto, $\cup_{x\in A}[x] = A$. $\square$

Corolario 4.2.8 *Sea A un conjunto no vacío y sea $\sim$ una relación de equivalencia en A. Sean x, $y \in A$, entonces $[x] = [y]$ si y sólo si $x \sim y$.*

Del teorema anterior, tenemos que cualesquiera dos clases de equivalencia distintas son disjuntas y que la unión de todas las clases de equivalencia es el conjunto original A. Esto nos permite pensar al conjunto cociente $A/\sim$ como el conjunto A dividido en subconjuntos disjuntos, donde cada subconjunto es precisamente una clase de equivalencia. De esta manera, cada punto de $A/\sim$ corresponde a uno de estos subconjuntos de A como se puede ver en la siguiente figura.



El conjunto A dividido en clases de equivalencia.

Lo anterior se generaliza en la siguiente definición.

Definición 4.2.9 *Sea A un conjunto no vacío. Una* **partición** *de A es una colección $\mathcal{D}$ de subconjuntos no vacíos de A tales que:*

(a) $P \cap Q = \emptyset$ *donde* P, $Q \in \mathcal{D}$ *y* $P \neq Q$.

(b) $\cup_{p\in\mathcal{D}} P = A$.

Corolario 4.2.10 *Sea A un subconjunto no vacío y sea $\sim$ una relación de equivalencia en A. Entonces $A/\sim$ es una partición de A.*

Ejemplo 4.2.11 *Sea E el conjunto de números enteros pares y sea O el conjunto de los enteros impares. Entonces, la colección $\mathcal{D} = \{E, O\}$ es una partición para $\mathbb{Z}$.*

Ejemplo 4.2.12 *Sea $\mathcal{C} = \{[n, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Entonces $\mathcal{C}$ es una partición de $\mathbb{R}$.*

Sin embargo, $\mathcal{F} = \{(n-1, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ no es una partición de $\mathbb{R}$, ya que no todos los elementos de $\mathcal{F}$ son disjuntos.

Definición 4.2.13 *Sea A un conjunto no vacío. Denotamos por $\mathcal{E}(A)$ al conjunto de todas las clases de equivalencia en A y por τ_A el conjunto de todas las particiones de A.*

Ejemplo 4.2.14 *Sea $A = \{1, 2, 3\}$. Entonces $\tau_A = \{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_5\}$, donde los conjuntos $\mathcal{D}_i$ son*

$$\begin{array}{ll} \mathcal{D}_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, & \mathcal{D}_4 = \{\{2, 3\}, \{1\}\}, \\ \mathcal{D}_2 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}, & \mathcal{D}_5 = \{\{1, 2, 3\}\}. \\ \mathcal{D}_3 = \{\{1, 3\}, \{2\}\}, & \end{array}$$

Además $\mathcal{E}(A) = \{R_1, R_2, \ldots, R_5\}$, donde las relaciones R_i son

$$\begin{array}{lcl} R_1 & = & \{(1,1), (2,2), (3,3)\}, \\ R_2 & = & \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}, \\ R_3 & = & \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,3), (3,1)\}, \\ R_4 & = & \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,3), (3,2)\}, \\ R_5 & = & \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2)\}. \end{array}$$

Se puede verificar directamente que cada relación R_i es una relación de equivalencia y que éstas son todas las relaciones de equivalencia posibles.

En este ejemplo, podemos ver que $\mathcal{E}(A)$ y τ_A tienen la misma cardinalidad. La pregunta que surge es ¿los conjuntos $\mathcal{E}(A)$ y τ_A tienen la misma cardinalidad para cualquier conjunto A? A continuación vamos a demostrar que existe una biyección entre estos conjuntos.

Definición 4.2.15 *Sea A un conjunto no vacío. Definimos $\Phi : \mathcal{E}(A) \to \tau_A$ como sigue. Si R es una relación de equivalencia en A, entonces el conjunto $\Phi(R)$ es la colección de conjuntos de A/R. Definimos $\Psi : \tau_A \to \mathcal{E}(A)$ de la siguiente manera. Si $\mathcal{D}$ es una partición de A, entonces $\Psi(\mathcal{D})$ es la relación en A dada por $x\, \Psi(\mathcal{D})\, y$ si y sólo si existe un $P \in \mathcal{D}$ tal que $x, y \in P$, para todo $x, y \in A$.*

Lema 4.2.16 *Sea A un conjunto no vacío. Las funciones Φ y Ψ están bien definidas.*

Demostración. Por el corolario 4.2.10 tenemos que la colección de conjuntos de $\Phi(R)$ es en efecto una partición de A. Por otro lado, $\Psi(\mathcal{D})$ es reflexiva, ya que $x\,\Psi(\mathcal{D})\,x$, puesto que $x \in P \in \mathcal{D}$. Si $x\,\Psi(\mathcal{D})\,y$, tenemos que existe $P \in \mathcal{D}$ tal que $x,\, y \in P$, por lo que $y\,\Psi(\mathcal{D})\,x$, es decir, $\Psi(\mathcal{D})$ es simétrica. Para terminar, $\Psi(\mathcal{D})$ es transitiva, ya que si $x\,\Psi(\mathcal{D})\,y$ y $y\,\Psi(\mathcal{D})\,z$, tenemos que existen $P,\, Q \in \mathcal{D}$ tal que $x,\, y \in P$ y $y,\, z \in Q$, pero como $\mathcal{D}$ es una partición, se sigue que $P = Q$. Por lo tanto, $\Psi(\mathcal{D})$ es una relación de equivalencia. $\square$

Ejemplo 4.2.17 *En el ejemplo 4.2.14, podemos verificar que $\Phi(R_i) = \mathcal{D}_i$ y que $\Psi(\mathcal{D}_i) = R_i$, para $i = 1, 2, \ldots, 5$.*

Ejemplo 4.2.18 *Sea $\sim$ la relación en $\mathbb{R}^2$ dada por $(x, y) \sim (z, w)$ si y sólo si $y - x = w - z$, para todo (x, y), $(z, w) \in \mathbb{R}^2$. Se puede verificar que $\sim$ es una relación de equivalencia.*

A continuación vamos a describir la partición $\Phi(\sim)$ de $\mathbb{R}^2$. Se tiene que

$$[(x, y)] \;=\; \{(z, w) \in \mathbb{R}^2 \,|\, w - z = y - x\}.$$

Si $c = y - x$, entonces

$$[(x, y)] \;=\; \{(z, w) \in \mathbb{R}^2 \,|\, w = z + c\}.$$

la cual es una línea en $\mathbb{R}^2$ con pendiente uno e intersecta al eje de las y's en c. Por lo tanto, $\Phi(\sim)$ es el conjunto de todas las rectas en $\mathbb{R}^2$ con pendiente 1.

Teorema 4.2.19 *Sea A un conjunto no vacío. Entonces las funciones Φ y Ψ son inversas una de la otra, de aquí que ambas son biyectivas.*

Demostración. Vamos a probar que $\Psi \circ \Phi = Id_{\mathcal{E}(A)}$ y $\Phi \circ \Psi = Id_{\tau_A}$. Para probar que $\Psi \circ \Phi = I_{\mathcal{E}(A)}$, sea R una relación de equivalencia en A. Vamos a probar que $\Psi \circ \Phi(R)$ es una relación de equivalencia. Sea $\mathcal{D} = \Phi(R)$, así $\sim = \Psi(\mathcal{D})$. Sean $x,\, y \in A$. Supongamos que $x \sim y$. Entonces por definición de Ψ existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $x,\, y \in D$. De la definición de Φ, tenemos que D es una clase de equivalencia de R, digamos $D = [q]$ para algún $q \in A$. Entonces $q\,R\,x$ y $q\,R\,y$, por lo que $x\,R\,y$. Ahora supongamos que $x\,R\,y$, lo que implica que $y \in [x]$. De la reflexividad de R, sabemos que $x \in [x]$. Luego, de la definición de Φ, sabemos que $[x] \in \mathcal{D}$. De aquí que, de la definición de Ψ, se sigue que $x \sim y$. Por lo tanto, $x \sim y$ si y sólo si $x\, R\, y$. En otras palabras, $\sim = R$.

Para probar que $\Phi \circ \Psi = Id_{\tau_A}$, sea $\mathcal{D} \in \tau_A$ una partición de A. Sea $\mathcal{F} = \Phi \circ \Psi(\mathcal{D})$. Vamos a probar que $\mathcal{F} = \mathcal{D}$. Denotemos $\sim = \Psi(\mathcal{D})$, así $\mathcal{F} = \Phi(\sim)$. Ahora, sea $B \subseteq A$. Entonces de la definición de Φ sabemos que $B \in \mathcal{F}$ si y sólo si B es una clase de equivalencia de $\sim$. Afirmamos que la definición de Ψ implica que B es una clase de equivalencia de $\sim$ si y sólo si $B \in \mathcal{D}$. Los detalles los dejamos de ejercicio al lector. Se sigue que $B \in \mathcal{F}$ si y sólo si $B \in \mathcal{D}$. Por lo tanto $\mathcal{F} = \mathcal{D}$.
$\square$

Ejercicio 4.4 *Sea L el conjunto de rectas en el plano y sea R la relación en L definida por x es perpendicular a y. Decir si R es reflexiva, simétrica o transitiva.*

Ejercicio 4.5 *Sea A el conjunto de personas en el mundo. Decir en cada caso si la relación descrita es reflexiva, simétrica o transitiva.*

(i) x *es el marido de* y.
(ii) x *es más inteligente que* y.
(iv) x *es más alto que* y.

Ejercicio 4.6 *Muestra que la relación definida en $\mathbb{Z}^+$ por $m \sim n$ si y sólo si mn es el cuadrado de un entero es una relación de equivalencia. Encuentra la clase de $[2]$.*

Ejercicio 4.7 *Muestra que la relación definida en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ por $(x, y) \sim (x, y)$ si y sólo si $x + y = y + x$ es una relación de equivalencia.*

Ejercicio 4.8 *Muestra que la relación definida en $\mathbb{Z}^+$ por $m \sim n$ si y sólo si mn es el cuadrado de un entero es una relación de equivalencia. Encuentra las clases de $[2]$, $[3]$ y $[p]$, donde p es un número primo.*

Ejercicio 4.9 *Sea $\sim$ la relación en $\mathbb{Z}^+$ definida por $m \sim n$ si y sólo si m y n terminan en el mismo dígito. Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}^+$.*

Ejercicio 4.10 *Sean L el conjunto de rectas en el plano y sea R la relación en L definida por x es perpendicular a y. Decir si R es reflexiva, simétrica o transitiva.*

Ejercicio 4.11 *Si* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *haz una lista de todas las posibles particiones de* A.

Ejercicio 4.12 *En los números* $\mathbb{N}$ *define la relación* xRy *si* $3 \mid x - y$, *es decir, si* 3 *divide a* $x - y$. *Encuentra la partición en los números naturales que te define esta relación.*

Ejercicio 4.13 *Muestra que la relación definida en* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *por* $(x, y) \sim (x, y)$ *si y sólo si* $x + y = y + x$ *es una relación de equivalencia y encuentra las clases* $[(1, 3)]$, $[(0, -2)]$ *y* $[(a, b)]$.

Ejercicio 4.14 *Sea* $\sim$ *la relación en* $\mathbb{Z}^+$ *definida por* $m \sim n$ *si y sólo si* m *y* n *terminan en el mismo dígito. Prueba que* $\sim$ *es una relación de equivalencia en* $\mathbb{Z}^+$ *y encuentra las clases de equivalencia.*

Ejercicio 4.15 *Sea* $k \in \mathbb{Z}$. *Definamos el subconjunto* E_k *de* $\mathbb{R}$ *por* $E_k := \{x \in \mathbb{R} : k \leq x < k + 1\}$. *Muestra que* $\Sigma = \{E_k : k \in \mathbb{Z}\}$ *es una partición de* $\mathbb{R}$. *Define una relación de equivalencia* $\sim$ *en* $\mathbb{R}$ *tal que las clases de equivalencia sean los elementos en* Σ.

Ejercicio 4.16 *Define una relación de equivalencia* $\sim$ *en el conjunto* $A = \{a, b, c, d\}$ *tal que las clases de equivalencia sean* $\{a, b, c\}$ *y* $\{c\}$.

Capítulo 5

Combinatoria

La combinatoria es la rama de las matemáticas que estudia conjuntos finitos o discretos y su estructura. Por ejemplo, contar o enumerar conjuntos o eventos es parte de la combinatoria. La preguntas tales como: ¿de cuántas formas algún evento puede suceder? o ¿cuántos elementos tiene un cierto conjunto? son las preguntas clásicas de la combinatoria. Para realizar este tipo de conteos hay dos leyes fundamentales:

Ley de la suma. Si un evento A puede realizarse de m formas distintas y un evento B puede realizarse de n formas distintas, entonces el número de formas en las cuales un evento A o B puede suceder es $m + n$.

Ley del producto. Si una tarea puede realizarse de n formas distintas y otra tarea puede realizarse de m formas distintas, entonces las dos tareas juntas pueden realizarse de nm formas distintas.

Estas son las dos leyes fundamentales sobre las cuales descansa la combinatoria.

5.1. Ordenaciones con repetición

Ejemplo 5.1.1 *Consideremos las letras a, b y c. A cada una de las "palabras" de dos letras que se pueden formar utilizando exclusivamente las letras consideradas le llamamos una ordenación con repetición de las letras a, b y c tomadas de dos en dos. Aquí "palabra" significa simplemente una lista de letras sin que éstas* *tengan necesariamente algún sentido, por ejemplo, aa, ab son palabras de dos letras.*

Un procedimiento útil para escribir todas estas palabras consiste en formar la siguiente tabla

$$\begin{array}{c|ccc} c & ac & bc & cc \\ b & ab & bb & cb \\ a & aa & ba & ca \\ \hline & a & b & c \end{array}$$

Es decir, el número de ordenaciones con repetición de las letras a, b y c tomadas de dos en dos es 9.
Una variante del ejemplo anterior es formar con dos letras únicamente, palabras de tres letras.

Ejemplo 5.1.2 *¿Cuántas palabras de tres letras se pueden formar si tenemos únicamente las letras a y b?*

Se tienen que llenar tres casillas y en cada una de las casillas se puede poner indistintamente la letra a o b. Por lo tanto, hay $2 \times 2 \times 2 = 8$ posibilidades.

Ejemplo 5.1.3 *¿Cuántas placas distintas hay con dos letras a la izquierda y tres números a la derecha?*

Se tienen que llenar cinco casillas. Las primeras dos casillas se pueden llenar con cualquiera de las 27 letras del alfabeto y las siguientes tres casillas con cualesquiera de los 10 números. Por lo tanto, hay $27 \times 27 \times 10 \times 10 \times 10 = 729,000$ formas.

Ejemplo 5.1.4 (a) *¿Cuántos números de tres dígitos se pueden formar con los dígitos $0, 1, \ldots, 9$?*
(b) *¿Cuántos números de tres dígitos se pueden formar con los dígitos $0, 1, \ldots, 9$, pero el primer dígito no puede ser 0?*

En el caso (a) tenemos que el primer dígito de la izquierda puede tomar cualquier valor, entonces tenemos que llenar tres casillas con los dígitos $0, 1, \ldots, 9$. La primera casillas se puede llenar de 10 formas distintas. La segunda de 10 y la tercera de 10. Por lo tanto, tenemos $10 \times 10 \times 10 = 1000$ posibles números.
(b) Tenemos tres casillas. La primera casilla se puede llenar con cualesquiera de los 9 dígitos $1, \ldots, 9$. La segunda y tercera casillas se pueden llenar con cualesquiera de los dígitos $0, 1, \ldots, 9$. Luego, tenemos $9 \times 10 \times 10 = 900$ posibles números.

Definición 5.1.5 *El símbolo OR_n^m denota el número de* **ordenaciones con repetición** *de un conjunto A de n elementos tomados de m en m, es decir, el número de elementos del producto cartesiano $A \times A \times \cdots \times A = A^m$ y este número es simplemente n^m.*

Ejemplo 5.1.6 *¿Cuántas banderas bicolores se pueden formar si se dispone de 4 lienzos de tela de colores distintos y un asta? (Nota: banderas como rojo-rojo no son permisibles. Por otro lado, es importante notar el color que queda junto al asta, así una bandera rojo-azul es distinta de una bandera azul-rojo.)*

En este caso hay 2 casillas y cada una de las casillas tiene 4 elecciones distintas. Una vez elegido el primer color, que se puede elegir de 4 distintos lienzos, la casilla de la derecha se puede únicamente elegir de 3 colores distintos. Por lo tanto, hay $4 \times 3 = 12$ posibles banderas.

Ejemplo 5.1.7 *Ahora nos hacemos la misma pregunta que en el ejemplo anterior pero ahora suponemos que no hay asta. Es decir, es indistinto el color de la derecha que el de la izquierda.*

Como las banderas azul-rojo son iguales que la rojo-azul, pues únicamente la tendríamos que voltear, tenemos que el número de posibilidades que teníamos lo tenemos que dividir entre 2. Así tenemos $\frac{12}{2} = 6$ posibles banderas.
Estos últimos dos ejemplos son distintos de los primeros, ya que no permitimos que los colores o los números se repitan.

5.2. Ordenaciones

Ejemplo 5.2.1 *¿Cuántos números de tres dígitos distintos se pueden formar con los dígitos $0, 1, \ldots, 9$?*

Tenemos que llenar tres casillas con los dígitos $0, 1, \ldots, 9$. La primera casilla se puede llenar de 10 formas distintas. La segunda de 9 y la tercera de 8. Por lo tanto, tenemos $10 \times 9 \times 8 = 720$ posibles números.

Ejemplo 5.2.2 *Dado un conjunto A con n elementos distintos y un entero no negativo $k \leq n$, ¿cuántas listas ordenadas de k elementos distintos hay?*

Notemos que para elegir el primer elemento, tenemos n opciones. Entonces para elegir el segundo elemento vamos a tener $n-1$ posibilidades. Por la ley del producto, para elegir los primeros dos elementos hay $n(n-1)$ opciones. Ahora bien, para elegir el tercer elemento tendremos $n-2$ opciones, luego, para elegir los primeros tres elementos habrá $n(n-1)(n-2)$ posibles maneras. Si continuamos de la misma manera, para elegir los primeros k elementos (en orden) hay $n(n-1)(n-2)(n-k+1)$ distintas posibilidades.

Ejemplo 5.2.3 *De un grupo de 5 estudiantes quiere elegirse una comisión de 3 estudiantes para que cada uno visite un museo de una lista de 3 museos distintos. ¿Cuántas comisiones se pueden formar?*

Se tienen que visitar tres museos distintos, es decir, tenemos 3 distintas casillas. A la primera casilla puede ir cualquiera de los 5 estudiantes, al segundo museo o casilla puede ir cualquiera de los 4 estudiantes que quedan y al tercer museo cualquiera de los 3 estudiantes que no han sido elegidos. Luego, tenemos $5\times 4\times 3=60$ posibles comisiones.

Ejemplo 5.2.4 *Supongamos que se tienen 4 pelotas azules idénticas y 3 rojas. ¿De cuántas maneras se pueden acomodar?*

Si todas fueran distintas, se podrían acomodar de $7!$ maneras. Pero

$$R_1R_2A_1A_2R_3A_4A_5$$

y

$$R_2R_1A_1A_2R_3A_4A_5$$

son iguales, lo mismo pasa si se cambia de lugar cualesquiera de las del mismo color, por lo que es necesario dividir entre el número de permutaciones:

$$\frac{7!}{3!\cdot 4!}.$$

En general, si se tienen n objetos, n_1 de un tipo, n_2 de otro tipo, $\ldots$, n_r de otro tipo, donde $n_1+\cdots+n_r=n$ existen

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!}$$

disposiciones lineales de los objetos dados (por el mismo razonamiento anterior).

Definición 5.2.5 *El símbolo O_n^m denota el número de* **ordenaciones** *de un conjunto A de n elementos tomados de k en k. El número de ordenaciones es $n(n-1)(n-2)(n-k+1)$.*

En este ejemplo si $n = k$, entonces podemos ver que el número de formas de ordenar n elementos is $n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$. Esta es la manera de ordenar todos los elementos del conjunto original. Este número se denota como $n!$, y se lee como "n factorial" . . Definimos $0!$ como 1. Una ordenación de toda una lista completa se llama una **permutación**. Más ejemplos de este principio veremos en la siguiente sección.

5.3. Permutaciones

Ejemplo 5.3.1 *¿De cuántas formas pueden sentarse 5 personas en 5 sillas numeradas del 1 al 5?*

En el asiento no. 1 se pueden sentar cualesquiera de las 5 personas, para el asiento no. 2 ya únicamente tenemos 4 personas, para el 3 tenemos 3 personas y, así sucesivamente. Por lo tanto, el número de formas en las que se pueden sentar las 5 personas en 5 sillas numeradas es $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 = 5!$.

Definición 5.3.2 *El número P_n de distintas formas en que se pueden ordenar n objetos es $n!$. Cada una de las listas ordenadas que se forman con los n objetos se llama permutación de los objetos. Tenemos entonces que $P_n = n!$.*

Ejemplo 5.3.3 *De un grupo de 5 estudiantes quiere elegirse una comisión de 3 estudiantes para que juntos visiten un museo (el mismo museo todos). ¿Cuántas comisiones se pueden formar?*

Tenemos que observar que aquí, a diferencia del ejemplo 5.2.3 no importa el orden en que elijamos a los estudiantes, ya que todos van al mismo museo. En el ejemplo anterior había distinción ya que cada comisión iba a visitar un museo distinto. En este caso no hay distinción, ya que cada una de las comisiones irá al mismo museo. Por ejemplo, una comisión en la que se hayan elegido los alumnos Ana-Carlos-Ernesto es igual que una comisión en la que se hayan elegido Carlos-Ernesto-Ana. Nuestro interés es entonces determinar en la cantidad $5 \times 4 \times 3$, cuántas veces aparece el mismo conjunto de alumnos. Conviene que nos planteemos esta parte del ejemplo al revés: consideremos un conjunto fijo de 3 personas y contemos de cuántas formas se pueden ordenar estas 3 personas. Estas son las permutaciones de 3 personas, es decir, $P_3 = 3! = 6$. Entonces en el ejemplo anterior, cada grupo de tres personas se está contando 6 veces en el producto $5 \times 4 \times 3$, por lo tanto, tenemos que dividirlo entre 6. La respuesta es entonces

$$\frac{5 \times 4 \times 3}{3!} = 10.$$

Es decir, el número de colecciones (en las que el orden no importa) con m elementos que se pueden seleccionar de un grupo de n elementos, con $n \geq m \geq 1$ es

$$\frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-(m-1))}{m!}.$$

Este número recibe el nombre de **combinaciones** de n elementos tomadas de m formas y las estudiaremos con más detalle en la siguiente sección. Por ejemplo, en el ejemplo 5.3.3, $n = 5$, $m = 3$ tenemos $C_5^3 = \binom{5}{3}$. Nótese que la fórmula no tiene sentido para $n = 0$, sin embargo, si tiene sentido hablar del número de subconjuntos con 0 elementos que evidentemente sólo hay 1, el conjunto vacío.

5.4. Combinaciones

Ejemplo 5.4.1 *Dado un conjunto A con n elementos distintos, ¿cuántos subconjuntos tiene?*

Para resolver este ejemplo, lo que queremos contar es la posibilidad de formar un subconjunto de A. Lo podemos construir escogiendo un elemento a la vez. Esto es, para cada elemento de A podemos considerar la posibilidad de que esté o no en el subconjunto. Así, cada elemento tiene dos opciones (estar o no estar dentro del subconjunto), entonces utilizando la ley del producto n veces obtenemos que el número de subconjuntos de A is 2^n.

Proposición 5.4.2 *El número de subconjuntos con k elementos de un conjunto con n elementos es $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.*

Demostración. Para ver esto, notemos que cuando contamos el número de listas de k elementos, cada subconjunto de tamaño k se cuenta una vez para cada una de las formas de ordenar los elementos. Así, el números de listas de k elementos is $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ y el número de formas de ordenar k elementos en una lista es $k!$. Entonces el número que estamos buscando es

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Definición 5.4.3 *El número, $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, se puede escribir también como $\binom{n}{k}$, o C_k^n. Generalmente, se lee como "el número de formas de escoger k elementos de un conjunto de n elementos"o como las combinaciones de n elementos tomadas de k en k.*

A estos números se les conoce como los coeficientes binomiales y reciben este nombre, ya que son los coeficientes en la expansión de $(a+b)^n$. Es decir, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 5.4.4 (Binomio de Newton) *Sean a y b números reales y, n y m números enteros, con $0 \leq m \leq n$. Los números $\binom{n}{m}$ son los coeficientes en el desarrollo de $(a+b)^n$, es decir,*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{m}a^{n-m}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n. \quad (5.1)$$

Utilizando la notación de sumas, tenemos

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i.$$

Esta ecuación se conoce como el **binomio de Newton**.
Demostración. Primero notemos que

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n-\text{ times}}.$$

Esto es, en cada $(a+b)$ del producto tenemos que escoger a o b. Como hay n partes en el producto, cada término en el resultado es de la forma $a^r b^s$ con $r+s=n$. El término $a^{n-k}b^k$ aparece una vez para cada una de las formas de elegir k veces el término b en el producto. Hay $\binom{n}{k}$ formas para hacer esto, que es el número que estamos buscando.

Segunda demostración. Otra demostración fue dada en el capítulo 2 de inducción.

Ejemplo 5.4.5 *De un grupo de 10 hombres y 15 mujeres se quiere escoger una colección de 5 jóvenes que tenga a los más 2 mujeres.¿Cuántos grupos distintos se pueden formar?*

Caso 1**.** Que la colección tenga exactamente 2 mujeres, tenemos

$$\binom{15}{2}\binom{10}{3} = \frac{15!}{13!\,2!}\frac{10!}{7!\,3!} = 12600.$$

Caso 2**.** Que el grupo tenga exactamente 1 mujer, tenemos

$$\binom{15}{1}\binom{10}{4} = \frac{15!}{14!\,1!}\frac{10!}{6!\,4!} = 3150.$$

Caso 3**.** Que el grupo no tenga mujeres, tenemos

$$\binom{15}{0}\binom{10}{5} = \frac{15!}{15!\,0!}\frac{10!}{5!\,5!} = 252.$$

Por lo tanto, el número de formas distintas es $12600 + 3150 + 252 = 16\,002$.

Ejemplo 5.4.6 *Un grupo de 15 personas quiere dividirse en 3 equipos de 5 personas cada uno. Cada equipo tendrá una labor específica distinta a las demás. ¿De cuántas formas distintas es posible hacer la distribución?*

Escogemos uno por uno los equipos. Para el primer equipo, escogemos de 15 personas el primer equipo de 5 personas, estas son

$$\binom{15}{5} = \frac{15!}{10!\,5!} = 3003 \quad \text{formas.}$$

Para elegir el segundo equipo únicamente nos quedan 10 personas, es decir, tenemos

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\,5!} = 252 \quad \text{formas.}$$

Con esto tenemos que el tercer equipo de 5 personas ya queda determinado. Una forma de determinar las labores es que el primer equipo hará la labor uno, el segundo la labor 2 y el tercero la labor 3. Pero como podría ser distinto, entonces tenemos que el número de formas de hacer la elección sucesiva es $3003 \times 252 \times 1 = 756,756$.

Ejemplo 5.4.7 *La palabra Cuernavaca tiene* 10 *letras pero tenemos solamente* 6 *letras distintas. La letra a se usa* 3 *veces, la letra c se usa* 2 *veces y las letras e, n, r y v se usan solamente una vez. Se quieren contar todas las posibles "palabras" que se pueden formar con las 10 letras.*

Podemos empezar por escoger los tres lugares donde colocaremos la letra "a". El número de elecciones posibles es

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!\,3!} = 120.$$

Una vez hecha la elección particular, nos quedan únicamente 7 lugares para acomodar las demás letras. De estos siete lugares podemos contar el número de maneras de escoger los dos lugares en que pondremos la letra "c". Esto lo podemos hacer de

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{5!\,2!} = 21,$$

maneras posibles. Podemos continuar de esta manera, para deducir que el número de palabras será

$$\binom{10}{3}\binom{7}{2}\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 120 \cdot 21 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 302\,400.$$

5.5. Algunos trucos

En esta sección daremos dos trucos clásicos y que se utilizan muy frecuentemente en problemas de conteo.
El primero es introducir lo que se llama **delimitadores** o **separadores** para resolver el problema. El segundo se conoce como **el principio de inclusión-exclusión**, que nos permite conocer el tamaño de la unión de algunos conjuntos si conocemos el tamaño de su intersección.

Ejemplo 5.5.1 *Supongamos que tenemos* 9 *bolas idénticas en* 9 *compartimentos distintos. Queremos contar el número de maneras de distribuir las bolas en los distintos compartimentos (puede haber uno o más objetos en el mismo compartimento).*

Para contar las distintas distribuciones, estamos solamente interesados en saber cuántos objetos hay en el primer compartimento, cuántos en el segundo, etc. En otras palabras, el número de arreglos es igual al número de listas ordenadas de los enteros $(n_1, n_2, \ldots, n_9)$ tal que $n_i \geq 0$ para toda i y $n_1 + n_2 + \cdots + n_9 = 9$. Esto es lo que se conoce como una **ecuación Diofantina** (con coeficiente 1).

$$\bullet\ \bullet\ |\ \bullet\ \bullet\ ||\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ |\ \bullet\ |\ \bullet\ |||$$

Lista de bolas y delimitadores que generan $(2, 2, 0, 3, 1, 1, 0, 0, 0)$

Ahora consideremos los 17 objetos en una línea: Vamos a escoger 8 de ellos para que sean los "delimitadores", y los otros objetos representarán las bolas. Decimos que n_1 es el número de bolas antes del primer delimitador y n_2 es el número de bolas entre el primer delimitador y el segundo, $\ldots$, n_9 es el número de bolas después del octavo delimitador. Es claro que obtenemos una lista como las que estamos buscando, pero también que cualquier lista de este tipo corresponde a un arreglo de 9 bolas y 8 delimitadores en una línea. Entonces el número que estamos buscando es $\binom{17}{8}$.

En el problema general, cuando queremos distribuir n objetos idénticos en m lugares, lo podemos hacer de $\binom{n+m-1}{m-1}$ maneras, y esto es igual al número de listas $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ de enteros no negaticos tales que $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$.

Ejemplo 5.5.2 *Sean m, k enteros positivos. ¿Cuántas listas $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ de k números hay tales que $0 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \cdots \leq n_k \leq m$?*

Resolvamos primero el ejemplo utilizando delimitadores. Consideremos un arreglo de m bolas y k delimitadores. Si enumeramos los delimitadores de izquierda a derecha, podemos definir n_i como el número de bolas del lado izquierdo del i-ésimo delimitador. Es claro que el número de listas que estamos buscando es el mismo que el número de arreglos de m bolas y k delimitadores, que es $\binom{m+k}{k}$.

Veamos ahora la solución sin utilizar delimitadores.

Consideremos la lista $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ definida por $m_i = n_i + i$. Entonces tenemos que $1 \leq m_1 < m_2 < m_3 < \ldots < m_k \leq m + k$. Para cada lista $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ que satisface la condición podemos construir $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$. Sin embargo, los m_i son k números distintos, y para cualquier elección de k números distintos, se genera únicamente una de esas listas. Entonces, solamente tenemos que escoger k números entre 1 y $m + k$, para los cuales hay únicamente $\binom{m+k}{k}$ posibles elecciones.

Ahora veamos el principio de **inclusión-exclusión**. Para esto, supongamos que tenemos 3 conjuntos A, B, C y que queremos encontrar la cardinalidad de la unión, es decir, $|A \cup B \cup C|$. Si contamos los elementos de cada conjunto, hay $|A| + |B| + |C|$. Sin embargo, contamos dos veces cada elemento que está en dos de los conjuntos y por lo tanto, lo tenemos que restar, es decir, tenemos que restar $|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|$. Haciendo esto, eliminamos los elementos que están en la intersección de los 3 conjuntos, por lo tanto, tenemos que sumarlos $|A \cap B \cap C|$. Al final, tenemos que

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| = & |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|) \\ & + |A \cap B \cap C|. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.5.3 *¿Cuántos números menores que* $10\,000$ *no son divisibles ni entre 2, ni entre 3, ni entre 5?*

A $10\,000$ habrá que restarle la cantidad de números divisibles entre alguno de los números 2, 3 o 5. Sin embargo, esto hay que hacerlo con cuidado para evitar repeticiones; por ejemplo, los números que son divisibles entre 2 y entre 3 se consideran dos veces: al contar los divisibles entre 2 y al contar los divisibles entre 3. Vamos a determinar primero, por separado, cuántos múltiplos hay de cada una de las distintas combinaciones, veamos la siguiente lista:

- Hay $5\,000$ números divisibles entre 2.
- $3\,333$ números divisibles entre 3.
- $2\,000$ números divisibles entre 5.
- $1\,666$ números divisibles entre 6.
- $1\,000$ números divisibles entre 10.
- 666 números divisibles entre 15.
- 333 números divisibles entre 30.

Al restarle a $10\,000$ la cantidad de números divisibles entre 2 y luego, los divisibles entre 5 y los divisibles entre 5 tenemos

$$10\,000 - (5\,000 + 3\,333 + 2\,000).$$

Los que son divisibles entre 6, entre 10 o entre 15, pero no entre 30 se habrán quitado dos veces cada uno, y los que son múltiplos de 30 se habrán quitado tres veces. Entonces al agregar a la cuenta los que son múltiplos de 6, de 10 o de 15, los que son divisibles entre 30 se habrán quitado primero tres veces al restar los múltiplos de 2, de 3 y de 5, y después se habrán vuelto a sumar tres veces al sumar los múltiplos de 6, los de 10 y los de 15, así que tendremos que restarlos. Luego la respuesta es

$$10,000 - (5\,000 + 3\,333 + 2\,000) + (1\,666 + 1,000 + 666) - 333 = 2\,666.$$

Este argumento se puede extender a cualquier número finito de conjuntos.

Dada la importancia de ir reconociendo como atacar cada uno de los problemas y de que algunos de ellos se pueden resolver con distintos métodos se decidió hacer una sección que sólo contenga ejercicios para aplicar las técnicas analizadas en este capítulo en lugar de poner el problema en cada una de las secciones correspondientes.

5.6. Ejercicios del capítulo

Ejercicio 5.1 *Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$. Escribe todos los subconjuntos de X con 0 elementos, con 1 elemento, con 2 elementos, con 3 elementos, con 4 elementos y con 5 elementos.*

Ejercicio 5.2 *¿De cuántas maneras se pueden escoger k subconjuntos de un conjunto de n elementos, tales que sean ajenos dos a dos? Ilustra esto tomando un subconjunto de cuatro elementos.*

Ejercicio 5.3 *Sea S un conjunto de números enteros positivos. ¿Cuál es el mínimo número de elementos que debe tener S para garantizar que existen 3 elementos de S que dejan el mismo residuo al dividirse entre 1000?*

Ejercicio 5.4 *Sea $X = \{a, b, c, d\}$. Escribir todas las posibles permutaciones de los elementos de X.*

Ejercicio 5.5 *Se tiene un librero con n niveles, cada uno con un libro de álgebra, otro de biología y otro de cálculo. Si se escoge un libro en cada nivel del librero, ¿De cuántas maneras se pueden escoger i libros de álgebra, j libros de biología y el resto de cálculo?*

Ejercicio 5.6 *Hay nueve libros diferentes en un librero. Cuatro de ellos son rojos y cinco son negros. ¿Cuántos arreglos se pueden hacer en cada uno de los siguientes casos?*

(i) *No hay restricciones de como escogerlos.*

(ii) *Los libros negros tienen que ir juntos.*

(iv) *Los libros negros tienen que ir juntos y los libros rojos también.*

(v) *Los colores deben alternarse.*

Ejercicio 5.7 *¿De cuántas formas se pueden distribuir 15 libros entre 15 alumnos?*

Ejercicio 5.8 *Si tenemos* 10 *cajas y* 30 *bolas de las cuales* 10 *son verdes,* 10 *son azules y* 10 *son rojas (las bolas del mismo color son idénticas). ¿De cuántas maneras podemos distribuir las* 30 *bolas en las* 10 *cajas?*

Ejercicio 5.9 *En un bote hay* 12 *canicas:* 5 *rojas,* 2 *azules,* 5 *verdes. Las canicas del mismo color son indistingibles. ¿Cuántas secuencias lineales de longitud* 4 *se pueden formar?*

Ejercicio 5.10 *Se tienen tres montones de pelotas iguales, uno de pelotas rojas, otro de azules y el tercero de verdes. Cada montón contiene al menos diez bolas.*

(i) *¿De cuántas maneras se pueden seleccionar diez pelotas?*

(ii) *¿De cuántas maneras se pueden seleccionar diez pelotas, si al menos una bola tiene que ser roja?*

(iv) *¿De cuántas maneras se pueden seleccionar diez pelotas, si al menos una bola tiene que ser roja, dos azules y tres verdes?*

(v) *¿De cuántas maneras se pueden seleccionar diez pelotas, si debe tenerse exactamente una pelota roja?*

(vi) *¿De cuántas maneras se pueden seleccionar diez pelotas, si debe haber a lo sumo una pelota roja?*

(vii) *¿De cuántas maneras se pueden seleccionar diez pelotas, si el número de bolas rojas tiene que ser el doble que el número de bolas verdes?*

$(viii)$ *¿De cuántas maneras se pueden seleccionar diez pelotas, si debe haber exactamente una bola roja y, al menos una azul?*

Ejercicio 5.11 *En una cierta escuela hay 100 alumnos. De ellos 50 saben inglés, 30 saben alemán y 30 saben francés. Además, 10 saben inglés y francés, 14 saben francés y alemán, 11 saben inglés y alemán y solamente 6 hablan los tres idiomas. Determina cuántos alumnos no saben ninguno de los tres idiomas.*

Ejercicio 5.12 *Si hay* 13 *concursantes, ¿De cuantas maneras se puede elegir un primer lugar, un segundo lugar y un tercer lugar?*

Ejercicio 5.13 *¿De cuántas maneras se pueden sentar* 4 *hombres y* 4 *mujeres alrededor de una mesa circular si hombres y mujeres deben ir alternados?*

Ejercicio 5.14 *Un club con* 14 *personas tiene que elegir un presidente, un secretario y un tesorero, ¿de cuántas formas pueden hacerlo?*
Nota: A*-presidente,* B*-secretario y* C*-tesorero es diferente que* B*-presidente,* A*-secretario y* B*-tesorero, y además no puede haber una persona que ocupe más de un puesto a la vez.*

Ejercicio 5.15 *Supongamos que tenemos una mesa circular y queremos sentar a 5 personas. ¿De cuántas maneras puede hacerse?*
Nota: dos maneras son iguales si difieren en una rotación de la mesa

Ejercicio 5.16 *Un auditorio tiene capacidad para 800 personas. ¿Cuántos asientos deben ocuparse para garantizar que al menos dos personas sentadas en el auditorio tienen las mismas iniciales de primer nombre y primer apellido?*

Ejercicio 5.17 *¿De cuántas formas pueden sentarse* 20 *personas en una mesa circular, si las personas A y B deben estar sentadas juntas?*

Ejercicio 5.18 *¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar* 5 *personas en una fila de* 8 *asientos numerados del* 1 *al* 8*?*

Ejercicio 5.19 *Bonesville tiene* 1000 *residentes. Explica por qué al menos* 2 *de ellos deben tener las mismas iniciales, si ellos usan sólo su primer nombre y el primer apellido. Considera que el alfabeto tiene* 26 *letras.*

Ejercicio 5.20 *Un par de nuevos padres decidieron probar* 10 *diferentes marcas de pañales en su nuevo bebé recién nacido. Ellos encontraron que* 7 *marcas escurren,* 5 *marcas no ajustan bien y* 4 *marcas escurren y no ajustan.*

1. *¿Cuántas marcas tienen al menos un problema?*

2. ¿Cuántas marcas no tiene problema alguno?

Ejercicio 5.21 *Un reportero afirma que en una encuesta ralizada a 100 hackers probó que 36 leen la revista Greek, 56 leen la revista Nerd, 38 leen la revista Wonk, 11 leen las revistas Greek y Nerd, 10 leen Greek y Wonk, 18 leen Nerd y Wonk, 5 leen las tres y 7 no leen ninguna. Un hacker leyó el artículo y dudó de que la encuesta se hubiera realizado. ¿Estaba en lo correcto?*

Ejercicio 5.22 *De un grupo de 30 socios de un club se quiere elegir una mesa directiva con un presidente, un secretario y 3 equipos de 2 personas cada uno. ¿Cuántas mesas directivas distintas se pueden formar?*

Ejercicio 5.23 *Un examen tiene 8 preguntas y lo responden 21 personas. Supón que todos responden al menos 7 preguntas correctamente. ¿Cuántos exámenes con exáctamente las mismas respuestas correctas se puede garantizar que habrá?*

Ejercicio 5.24 *Tres hombres y cuatro mujeres se quieren formar en una fila de manera que los hombres están juntos y las mujeres también ¿De cuántas formas puede hacerse? ¿Qué pasaría si la mesa fuera circular?*

Ejercicio 5.25 *Diez hombres y diez mujeres quieren formar un comité que contenga a 2 hombres y a 2 mujeres. ¿De cuántas formas puede hacerlo?*

Ejercicio 5.26 *¿Cuántas palabras se pueden formar utilizando las letras de la palabra "caracterización"?*

Ejercicio 5.27 *Consideremos que el alfabeto tiene 26 letras, ¿Cuántas palabras de longitud 7 se pueden formar sin que las palabras tengan letras repetidas?*

Ejercicio 5.28 *¿Cuántas palabras palíndromes (decimos que una palabra es palíndrome si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda, por ejemplo, el nombre ANA) hay de longitud 6?*

Ejercicio 5.29 *¿Cuántas palabras distintas pueden formarse con las letras de la palabra COROLARIO?*

Ejercicio 5.30 *En un motor de seis cilindros los cilindros pares están a la izquierda y los impares están a la derecha. Un buen orden de explosiones es una permutación de los números del 1 al 6 en la que se alternan los cilindros pares* *con los impares. ¿Cuántas buenos órdenes para explosiones hay? Haz lo mismo para un motor con $2n$ cilindros.*

Ejercicio 5.31 *¿Cuántas manos de pókar son pókar (es decir, cuatro cartas con el mismo número y una carta con un número distinto)?*

Ejercicio 5.32 *¿Cuántas manos (5 cartas) tienen únicamente tercia (3 cartas del mismo número y las otras dos son de números distintos a la tercia y no forman par).*

Ejercicio 5.33 *¿Cuántas manos de cartas constan únicamente de tréboles y diamantes, y contiene al menos una carta de cada uno (una mano está formada de 5 cartas)?*

Ejercicio 5.34 *¿Cuántas manos de póker habrá en las que aparezca por lo menos dos cartas del mismo número?*

Ejercicio 5.35 *¿Cuántas manos de pókar hay que sean «flor imperial» (es decir, las cinco cartas son del mismo palo y los números tienen que ser consecutivos: observación la numeración 10, J, Q, K, 1 se consideran consecutivos, pero J, Q, K, 1, 2 no son consecutivos)?*

Ejercicio 5.36 *¿Cuántos números de 4 cifras cumplen la propiedad de que el producto de dichas cifras es un cuadrado perfecto?*

Ejercicio 5.37 *Utiliza el teorema del binomio para desarrollar la expresión*

$$\left(a + 2b - \frac{c}{2}\right)^4.$$

Ejercicio 5.38 *¿Cuántas trayectorias de la esquina inferior izquierda a la esquina superior derecha hay en una cuadrícula de 4×3 si solo se pueden mover hacia la derecha y hacia arriba?*

Ejercicio 5.39 *Encuentra el número de enteros entre 1 y $100,000$ que no son divisibles entre $2, 5, 11$ o 67.*

Ejercicio 5.40 *En el sistema de numeración ternario se utilizan tres dígitos: 0, 1 y 2. ¿Cuántos números de 4 cifras se pueden formar en este sistema? (Por ejemplo, 2210 es uno de estos números pero 0221 no pues contiene sólo 3 cifras).*

Ejercicio 5.41 *Probar que cualquier subconjunto de tamaño 6 del conjunto* $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ *debe contener dos elementos cuya suma es* 10.

Ejercicio 5.42 *Utilizar el teorema del binomio para desarollar la expresión*

$$(2a - 3b^2)^8.$$

Ejercicio 5.43 (i) *Expandir la expresión* $(2x - \frac{1}{x})^7$.
(ii)*Probar que para* $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n+1}{3} - \binom{n}{3} = n^2.$$

Ejercicio 5.44 *¿Cuántas banderas de* 2 *colores se pueden formar con* 7 *colores disponibles?*

Ejercicio 5.45 *¿Cuántas placas de* 4 *letras y* 3 *números se pueden formar si el último número debe ser par?*

Ejercicio 5.46 *Para participar en una lotería se pide que se seleccionen* 5 *números de* $\{1, 2, \ldots, 49\}$.

1. *¿De cuántas formas puede hacerse esta selección?*
2. *Luego, los organizadores seleccionan* 6 *números. Para ganar los 5 números escogidos por un participante deban estar dentro de éstos* 6 *números. ¿Cuántas posibles soluciones de* 5 *números son ganadoras?*

Ejercicio 5.47 *Se quiere formar un número de* 7 *cifras usando* $3, 4, 4, 5, 5, 6, 7$. *¿De cuántas maneras pude hacerse? ¿Cuántos de estos números son mayores que* $5,000,000$*?*

Ejercicio 5.48 *Se tienen* n *perlas distintas y y se las quiere engarzar para formar un collar. ¿Cuántos collares distintos se pueden formar?*

Ejercicio 5.49 *Sea* $ABCD$ *un cuadrado de lado* 1. *Demostrar que si seleccionamos* 5 *puntos en el interior del cuadrado existen al menos dos puntos cuya distancia es menor o igual a* $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ejercicio 5.50 *¿De cuántas formas se pueden distribuir* 7 *manzanas y* 6 *naranjas entre* 4 *niños de manera que cada uno reciba al menos una manzana?*

Ejercicio 5.51 *Una tienda de helados tiene disponible 31 sabores de helado. ¿De cuántas formas puede ordenarse una docena de helados si*
(i) *no queremos el mismo sabor más de una vez?*
(ii) *cada sabor puede ordenarse hasta* 12 *veces?*

Ejercicio 5.52 *Un domador de fieras quiere sacar a la arena del circo* 5 *leones y* 4 *tigres. Un tigre no puede ir detras de otro. ¿De cuántas maneras se puede distribuir a las fieras?*
Nota:$L_1T_1L_2T_2L_3T_3L_4T_4L_5$ *es diferente de* $L_2T_1L_1T_2L_3T_3L_4T_4L_5$.

Ejercicio 5.53 *¿De cuántas maneras se pueden repartir* 10 *hongos blancos,* 15 *setas y* 8 *trufas entre* 4 *niños?*

Ejercicio 5.54 *¿De cuántas maneras se pueden repartir* 10 *hongos blancos,* 15 *setas y* 8 *trufas entre* 4 *niños si cada uno debe recibir un hongo de cada tipo?*

Ejercicio 5.55 *Muestra que si* $k \leq n$ *entonces* $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Ejercicio 5.56 *Utiliza el teorema del binomio para probar la fórmula*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$$

Ejercicio 5.57 *Probar que* $\binom{27}{1} + \binom{27}{3} + \binom{27}{5} + \binom{27}{7} + \cdots = 2^{26}$.

Capítulo 6

Sistemas de Ecuaciones Lineales

6.1. Teoría de sistemas de ecuaciones lineales

La solución de sistemas de ecuaciones lineales tiene una muy amplia aplicación en la ciencia y la tecnología. En particular, la teoría de ecuaciones lineales desempeña un papel muy importante en el estudio del álgebra lineal. En este capítulo, daremos una introducción a este fascinante tema. Deseamos enfatizar que nos enfocaremos en sistemas de ecuaciones de 2×2 y 3×3.
Una **ecuación lineal** sobre $\mathbb{R}$ es una expresión de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \,=\, b. \tag{6.1}$$

Los números reales a_i se denominan **coeficientes**, las x_i son llamadas **incógnitas** o **variables** y el número real b es el **término constante** o simplemente la **constante** de la ecuación. Un conjunto de valores de las incógnitas, por ejemplo

$$x_1 = k_1,\ x_2 = k_2,\ \ldots,\ x_n = k_n$$

se dice que es una solución de (6.1) si se satisface que la proposición

$$a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n \,=\, b$$

es verdadera. Notemos que podemos escribir esta solución simplemente como la n-tupla

$$u = (k_1, k_2,\ \ldots, k_n).$$

Ejemplo 6.1.1 *Consideremos la ecuación* $x + 2y - 4z = 2$. *La* 3*-tupla* $u = (2, 2, 1)$ *es una solución de la ecuación; pero la* 3*-tupla* $v = (1, 0, 0)$ *no lo es.*

Las soluciones de la ecuación (6.1) se obtienen muy fácilmente. En efecto, tenemos tres casos:

Caso 1. Uno de los coeficientes de (6.1) es diferente de cero. Por simplicidad, supongamos que $a_1 \neq 0$. Podemos entonces escribir la ecuación como

$$a_1x_1 = b - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n \quad \text{o} \quad x_1 = \frac{b - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n}{a_1}.$$

Al asignar valores a las incógnitas $x_2, \ldots, x_n$, obtenemos un valor de x_1; estos valores forman una solución de la ecuación. Además, cualquier solución de la ecuación puede obtenerse de esta forma.

Caso 2. Todos los coeficientes en (6.1) son nulos, y la constante no es nula. Esto es, la ecuación es de la forma

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n \, = \, b \quad \text{con} \quad b \neq 0.$$

En tal caso, la ecuación no tiene solución.

Caso 3. Todos los coeficientes en (6.1) son nulos, y la constante es nula. Esto es, la ecuación es de la forma

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n \, = \, 0.$$

En este caso, cualquier n-tupla de números reales es una solución de la ecuación.

Como es bien sabido, las ecuaciones lineales con 2 incógnitas representan una recta en el plano. Por ejemplo, la representación gráfica de la ecuación $x + y = 1$ es la recta que pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Ver figura 6.1.
Si la ecuación lineal tiene 3 incógnitas, su representación gráfica es un plano en el espacio. Ver figura 6.2.
En general, si la ecuación tiene n incógnitas, su representación gráfica es un hiperplano de dimensión $n - 1$ en $\mathbb{R}^n$. Diremos que dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones o geométricamente representan la misma recta, plano o hiperplano.
El objetivo de este capítulo es el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, es decir, el estudio de un conjunto de varias ecuaciones lineales.

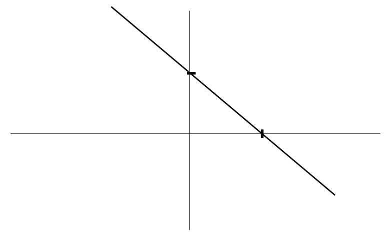


Figura 6.1: *Recta* $x + y = 1$.

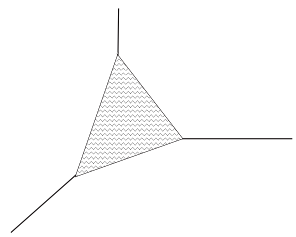


Figura 6.2: *Plano* $x + y + z = 1$.

6.1.1. Sistemas de ecuaciones lineales

Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Los números reales a_{ij}, $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ se denominan **coeficientes** y los números reales b_i se denominan **términos independientes**. En el caso de que el número de incógnitas sea dos, las denotaremos simplemente por x y y. Si el número de incógnitas es tres, las denotaremos por x, y y z.
El sistema se dice **homogéneo** si las constantes b_i son todas cero, en caso contrario se dice que es **no homogéneo**. Una n-tupla $u = (k_1, \ldots, k_n)$ de números reales es una **solución** (o también **solución particular**) si satisface cada una de las ecuaciones; el conjunto de todas las soluciones se llama el **conjunto**

solución o la **solución general** del sistema. Diremos que dos sistemas son **equivalentes** si tienen la misma solución general.
Los sistemas de ecuaciones lineales se clasifican, acorde a su conjunto de soluciones, en:

Incompatibles. Son los sistemas que no tienen solución.

Compatibles. Son los que tienen solución. Éstos se subdividen en:

- **Determinados**. Tienen solución única.
- **Indeterminados**. Tienen múltiples soluciones.

En las próximas dos subsecciones describiremos con mas detalle los sistemas de ecuaciones de 2×2 y 3×3; en particular, nos enfocaremos en su interpretación geométrica. El problema de encontrar el conjunto de soluciones de estos sistemas de ecuaciones, se abordará en las siguientes secciones.

6.1.2. Sistemas de ecuaciones de 2×2

Los sistemas de ecuaciones lineales mas sencillos son aquellos que consisten de dos ecuaciones con dos incógnitas. Algunos de los métodos más comunes para resolverlos son: reducción, igualación y sustitución. No vamos a profundizar en ellos ya que el lector los conoce, únicamente vamos a dar una breve descripción.
Consideremos el siguiente sistema

$$\begin{array}{rcr} x + 2y & = & -3 \\ -2x + y & = & 1. \end{array}$$

Resolviéndo el sistema por reducción tenemos que

$$\begin{array}{rcr} 2x + 4y & = & -6 \\ -2x + y & = & 1 \\ \hline 5y & = & -5, \end{array}$$

de donde $y = -1$ y sustituyendo este valor en cualquiera de las dos ecuaciones obtenemos que $x = -1$. En otras palabras, la solución es única, por lo que el sistema es compatible y determinado.
Lo anterior se interpreta geométricamente de la siguiente manera. Recordemos que cada ecuación representa una recta en el plano; así las dos rectas se intersectan en el punto $(-1, -1)$. Ver figura 6.3.

Consideremos el siguiente sistema

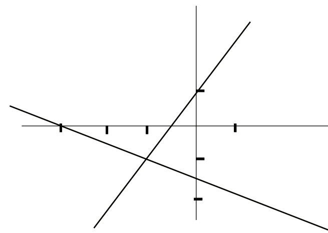


Figura 6.3: *Sistema de ecuaciones compatible y determinado.*

$$\begin{aligned} x + 2y &= -3 \\ -2x - 4y &= 5. \end{aligned}$$

Resolviéndo el sistema por igualación tenemos que

$$\begin{aligned} x &= -3 - 2y \\ x &= \tfrac{5+4y}{-2}, \end{aligned}$$

de donde

$$-3 - 2y = \frac{5 + 4y}{-2}$$

lo que implica que

$$4y + 6 = 5 + 4y$$

por lo que

$$0y = -1$$

o equivalentemente

$$0 = -1.$$

Esto es imposible, por lo tanto el sistema no tiene solución, es decir, es un sistema incompatible. Geométricamente, tenemos que las rectas dadas por las ecuaciones anteriores son paralelas. Ver figura 6.4.
Consideremos ahora el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y &= -3 \\ 3x + 6y &= -9. \end{aligned}$$

Lo resolveremos por sustitución. De la primera ecuación se sigue que $x = -2y - 3$, ahora reemplazando x en la segunda ecuación, tenemos que $3(-2y-3)+6y = -9$ y simplificando obtenemos que $0 = 0$. Como esta igualdad es cierta, tenemos que el sistema tiene infinitas soluciones; es decir, es compatible indeterminado.

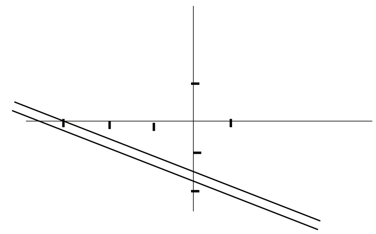


Figura 6.4: *Sistema de ecuaciones incompatible.*

Geométricamente, lo anterior implica que ambas ecuaciones representan la misma recta. Ver figura 6.5.

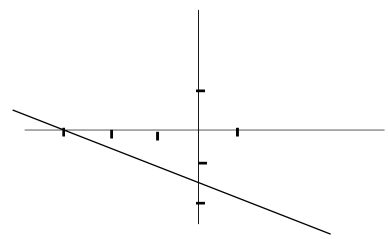


Figura 6.5: *Sistema de ecuaciones es compatible indeterminado.*

Consideremos el caso general

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Por simplicidad supongamos que $b \neq 0$ y $d \neq 0$. Ahora multiplicamos la primer ecuación por d y la segunda ecuación por $-b$.

$$\begin{array}{rcr} adx + bdy & = & ed \\ -bcx - bdy & = & -bf \\ \hline (ad - bc)x & = & ed - bf. \end{array}$$

Tenemos tres casos:

Caso 1. Supongamos que $ad - bc \neq 0$, es decir $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$. Entonces el sistema tiene la solución única $x = \frac{ed-bf}{ad-bc}$ y $y = \frac{af-ce}{ad-bc}$; por lo que el sistema es compatible determinado.

Caso 2. Supongamos que $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \neq \frac{e}{f}$. Entonces $ad - bc = 0$ y $ed - bf \neq 0$, y así $0x = ed - bf \neq 0$. Lo que implica que el sistema no tiene solución; es decir, es incompatible.

Caso 3. Supongamos que $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{e}{f}$. Entonces $ad - bc = 0$ y $ed - bf = 0$; es decir $0x = 0$. Por lo que el sistema es compatible indeterminado.

En conclusión, el sistema anterior tiene solución única si y sólo si $ad - bc \neq 0$. Al número $ad - bc$ se le conoce como **determinante**.

6.1.3. Sistemas de ecuaciones de 3×3

Al igual que los sistemas de ecuaciones de 2×2, algunos métodos para resolver los sistemas de 3×3 son: reducción, igualación y sustitución. Debido a que el lector ya está familiarizado con ellos, nos enfocaremos en dar su interpretación geométrica.

Recordemos que cada ecuación lineal con tres incógnitas corresponde a un plano en el espacio, por lo que la solución del sistema corresponderá a la posición en que dichos planos se encuentran. Primero analizaremos las posibilidades de dos planos.

Sean P y P' dos planos cuyas ecuaciones son $ax+by+cz = d$ y $a'x+b'y+c'z = d'$, respectivamente. Así P y P' pueden ser:

Coincidentes. En este caso ambas ecuaciones representan el mismo plano; por lo que tanto los coeficientes de las respectivas incógnitas, así como los términos independientes son proporcionales, es decir,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}.$$

Por ejemplo, los planos $2x + 2y - z = 5$ y $-6x - 6y + 3z = -15$ son coincidentes.

Paralelos. En este caso, los coeficientes de las respectivas incógnitas son proporcionales, pero los términos independientes no. Es decir,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}.$$

Por ejemplo, los planos $2x+2y-z = 5$ y $-6x-6y+3z = 7$ son paralelos.

Secantes. En este caso, los coeficientes no son proporcionales.

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}.$$

Por ejemplo, los planos $7x + 3y - z = 5$ y $-10x - 15y + 5z = 7$ son secantes.

Ahora regresamos a nuestro sistema de 3×3. Consideremos

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \\ a''x + b''y + c''z &= d''. \end{aligned}$$

Estas tres ecuaciones corresponden a los tres plano P, P' y P''. Así

(a) **El sistema es compatible determinado**. Los tres planos se cortan en un punto que es la solución del sistema. Ver la figura 6.6.

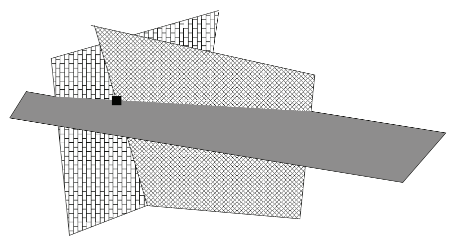


Figura 6.6: *Sistema de ecuaciones de* 3×3 *compatible determinado.*

(b) **El sistema es compatible indeterminado**. En este caso, puede ocurrir lo siguiente (ver figura 6.7).

- Los tres planos se cortan en una recta.
- Dos planos son coincidentes y el otro los corta en una recta.
- Los tres planos son coincidentes.

(c) **El sistema es incompatible**. En este caso, puede ocurrir (ver figura 6.8).

- Los planos se intersectan dos a dos.
- Dos planos son paralelos y el tercero los intersecta.

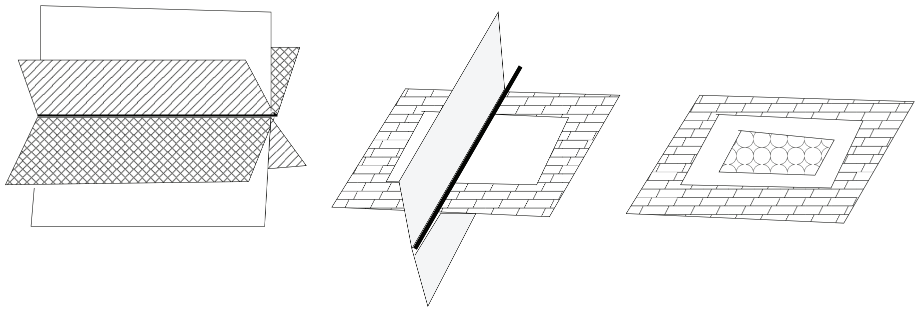


Figura 6.7: *Sistema de ecuaciones de* 3×3 *compatible determinado.*

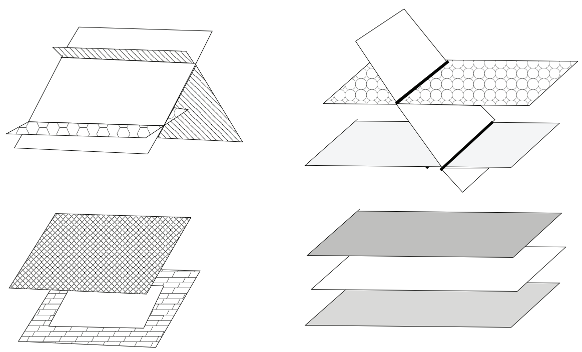


Figura 6.8: *Sistema de ecuaciones de* 3×3 *incompatible.*

- Los tres planos son paralelos.
- Dos planos son paralelos y el otro es coincidente con uno de ellos.

y determinamos la opción correspondiente estudiando la intersección de dos planos en dos.

Ejemplo 6.1.2 *Consideremos el sistema*

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= -6 \\ 3x - y + z &= -5 \\ 4x + 2y - 2z &= -1. \end{aligned}$$

Si multiplicamos la primer ecuación por -2 y sumamos la tercer ecuación, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} -4x - 2y + 2z & = & 12 \\ 4x + 2y - 2z & = & -1 \\ \hline 0 & = & 11 \end{array}$$

lo que indica que el sistema no tiene solución, es decir, el sistema es incompatible.

Ejemplo 6.1.3 *Consideremos el sistema*

$$\begin{array}{rcl} x + y + z & = & m + 1 \\ mx + y + (m-1)z & = & m \\ x + my + z & = & 1. \end{array}$$

A continuación, discutiremos su conjunto solución según los valores de m.

(a) Supongamos que $m \neq 0$. Entonces realizando algunas operaciones, vamos a obtener un sistema de ecuaciones equivalente. Así, a la segunda ecuación le restamos m-veces la primer ecuación y a la tercer ecuación le restamos la primer ecuación, obteniendo

$$\begin{array}{rcl} x + y + z & = & m + 1 \\ (1-m)y - z & = & -m^2 \\ (m-1)y & = & -m. \end{array}$$

De esta forma, si $m \neq 1$, el sistema tiene solución única; a saber $y = \frac{m}{1-m}$, $z = m(m-1)$ y $x = \frac{1-2m-m^2+m^3}{1-m}$.

(b) Si $m = 1$. El sistema entonces es

$$\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 2 \\ x + y & = & 1 \\ x + y + z & = & 1. \end{array}$$

Si a la primer ecuación le restamos la segunda ecuación, obtenemos que $0 = 1$; lo cual es una contradicción. Por lo que el sistema no tiene solución.

(c) Si $m = 0$.

$$\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ y - z & = & 0 \\ x + z & = & 1. \end{array}$$

Entonces a la tercera ecuación le restamos la primera ecuación, obteniendo

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ y-z &= 0 \\ -y &= 0, \end{aligned}$$

por lo que el sistema tiene solución única, a saber $x=1$, $y=z=0$.

Por lo tanto, si $m=1$ el sistema es incompatible y si $m\neq 1$ el sistema es compatible determinado.

Ejercicio 6.1 *Encontrar la solución de los siguientes sistemas e interpretarla geométricamente:*

(i) $\begin{aligned} x+y &= 5 \\ -2x+y &= 9. \end{aligned}$ $\quad(ii)$ $\begin{aligned} 2x+y &= 1 \\ x-y &= 1. \end{aligned}$ $\quad(iii)$ $\begin{aligned} x+2y &= -3 \\ x-y &= 4. \end{aligned}$

Ejercicio 6.2 *Discutir las soluciones de los siguientes sistemas en términos del parámetro desconocido:*

(i) $\begin{aligned} x+y &= 5 \\ ax+2y &= 10. \end{aligned}$ $\quad(ii)$ $\begin{aligned} ky+x &= \tfrac{1}{2} \\ y-3x &= 5. \end{aligned}$

Ejercicio 6.3 *Encontrar las soluciones de los siguientes sistemas, y dar la interpretación geométrica:*

(i) $\begin{aligned} -x+2y &= 5 \\ 3x+y &= 7 \\ 2x+3y &= 12. \end{aligned}$ $\quad(ii)$ $\begin{aligned} x-y &= -2 \\ x+2y &= 1 \\ 4x-10y &= 14. \end{aligned}$ $\quad(iii)$ $\begin{aligned} x-y &= -2 \\ x+2y &= 1 \\ 4x-10y &= 14. \end{aligned}$

Ejercicio 6.4 *Discutir las soluciones de los siguientes sistemas en términos del parámetro desconocido:*

(i) $\begin{aligned} x-y &= 1 \\ x+2y &= -1 \\ 2x+my &= 0. \end{aligned}$ $\quad(ii)$ $\begin{aligned} 2x+y &= 3 \\ -x+3y &= 0 \\ mx+4y &= 3. \end{aligned}$

Ejercicio 6.5 *Resolver e interpretar geométricamente los siguientes sistemas:*

(i) $\begin{aligned} 2x-y+3z &= -1 \\ 4x-2y+6z &= -5 \\ -2x+y-3z &= -7. \end{aligned}$ $\quad(ii)$ $\begin{aligned} x+y+z &= 2 \\ 2x+y+3z &= 1 \\ x+2y+z &= 4. \end{aligned}$

(iii) $\begin{aligned} x+y-z &= -2 \\ 2x-y+3z &= -5 \\ 3x+2z &= -7. \end{aligned}$ $\quad(iv)$ $\begin{aligned} 4x-y+5z &= -6 \\ 3x+3y-4z &= 30 \\ 6x+2y-3z &= 33. \end{aligned}$

Ejercicio 6.6 *Discutir en función del parámetro desconocido las soluciones de los siguientes sistemas e interpretar geométricamente el resultado:*

$$(i)\quad \begin{aligned} x+y+az &= 1\\ x+ay+z &= 1\\ ax+y+z &= 1. \end{aligned} \qquad (ii)\quad \begin{aligned} x+y-6z &= 0\\ x-2y+6z &= 0\\ 3x-y+mz &= 0. \end{aligned}$$

$$(iii)\quad \begin{aligned} 3x+y+2z &= 1-a\\ (1+a)x+2y+z &= a\\ ax-y+z &= 1-a. \end{aligned} \qquad (iv)\quad \begin{aligned} y+az &= 0\\ 2x+az &= 0\\ 3y-2x &= 0. \end{aligned}$$

Ejercicio 6.7 *Dado el sistema:*

$$\begin{aligned} x+2y-z &= 8\\ 2x-3y+z &= -1\\ 3x-y+kz &= 5. \end{aligned}$$

(i) *Hallar el valor de k tal que el sistema sea incompatible.*
(ii) *Hallar el valor de k tal que el sistema sea compatible y $z=-1$.*
(iii) *Para el valor de k encontrado en (ii), resolver el sistema.*

Ejercicio 6.8 *Encontrar la solución de los siguientes sistemas homogéneos:*

$$(i)\quad \begin{aligned} x+y &= 0\\ x-y &= 0. \end{aligned} \qquad (ii)\quad \begin{aligned} x+y+z &= 0\\ 2x-y+z &= 0. \end{aligned} \qquad (iii)\quad \begin{aligned} x+y-z &= 0\\ 2x-y+z &= 0\\ 4x+y-z &= 0. \end{aligned}$$

Ejercicio 6.9 *Discutir las soluciones del siguiente sistema homogéneo en términos del parámetro desconocido:*

$$\begin{aligned} 6x+18y-bz &= 0\\ 7x-2y-4z &= 0\\ 4x+10y-6z &= 0. \end{aligned}$$

6.2. Matrices

Consideremos de nuevo un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas (ver el sistema (6.2)).

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Este sistema se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Con esta idea en mente, vamos a introducir el concepto de matriz.

Definición 6.2.1 *Una* **matriz** *de $m \times n$ es una ordenación rectangular de la forma*

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix},$$

donde los c_{ij} son números reales ($1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$).

En el sistema de ecuaciones, tenemos que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se llama **matriz de coeficientes**, la matriz

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

se llama **matriz de incógnitas**, y la matriz

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

se llama **matriz de términos independientes**.
De esta forma, el sistema de ecuaciones (6.2) se escribe como

$$AX = B.$$

Si de "alguna manera" pudiéramos encontrar la "inversa" de A, tendríamos que el conjunto solución estaría dado por

$$X = A^{-1}B.$$

Mas adelante diremos que significa A^{-1}, daremos condiciones para su existencia y describiremos como encontrarla.
Nota: En las siguientes secciones introduciremos operaciones entre matrices. Aunque éstas las definiremos para matrices de cualquier tamaño, en los ejemplos y ejercicios nos restringuiremos a matrices de $n \times m$, con $1 \leq n, m \leq 3$.

6.2.1. Definiciones

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Las m n-tuplas horizontales

$$(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \;\; (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \;\; \ldots, \;\; (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$$

son los **renglones** de la matriz, y las n m-tuplas verticales

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \; \ldots, \; \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$$

son sus **columnas**. Notemos que el elemento a_{ij}, llamado **la entrada** ij-ésima, ocupa el i-ésimo renglón y la j-ésima columna. A la matriz A también se le denota por $A = (a_{ij})_{ij}$, $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$. Una matriz con m renglones y n columnas se le llama una matriz de $m \times n$ y a la pareja de números (m, n) se llama el **tamaño** de la matriz.

6.2.2. Operaciones matriciales

Consideremos dos matrices A y B de $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Definición 6.2.2 *La* **suma** *de A y B, representada por $A+B$, es la matriz que se obtiene sumando las entradas correspondientes*

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Notemos que la suma de matrices de diferente tamaño no está definida.

Ejemplo 6.2.3 *Sean* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$. *Por lo tanto*

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+3 & -2+0 & 3+2 \\ 4-7 & 5+1 & -6+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definición 6.2.4 *El* **producto por un real** *k con la matriz A, representado por kA, es la matriz que se obtiene al multiplicar cada entrada de A por k.*

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Observemos que $A+B$ y kA son también matrices de $m \times n$. Además definimos

$$-A = -1A \quad \text{y} \quad A - B = A + (-B).$$

Ejemplo 6.2.5 *Sean A y B como en el ejemplo 6.2.3. Así*

$$3A = \begin{pmatrix} (3)(1) & (3)(-2) & (3)(3) \\ (3)(4) & (3)(5) & (3)(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 12 & 15 & -18 \end{pmatrix}.$$

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & 10 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 0 & -6 \\ 21 & -3 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 0 \\ 29 & 7 & -36 \end{pmatrix}.$$

La matriz de $m \times n$ cuyas componentes son todas cero,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

es llamada la **matriz cero** y se denota por 0. Esta matriz desempeña un papel similar al real 0 con respecto a la suma, es decir, $A + 0 = 0 + A = A$.
Las propiedades de suma de matrices y multiplicación por un real, son las siguientes.

Teorema 6.2.6 *Sea $\mathcal{M}_{m\times n}$ el conjunto de todas las matrices de $m\times n$. Entonces para las matrices $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y los números reales k_1, k_2 se tiene lo siguiente¿*

(a) $(A+B)+C = A+(B+C)$.
(b) $A+0 = A$.
(c) $A+(-A) = 0$.
(d) $A+B = B+A$.
(e) $k_1(A+B) = k_1A + k_1B$.
(f) $(k_1+k_2)A = k_1A + k_2A$.
(g) $(k_1k_2)A = k_1(k_2)A$.
(h) $1A = A$.

A continuación, vamos a introducir el producto o multiplicación de dos matrices. La multiplicación matricial difiere de las dos operaciones anteriores en que no se realiza entrada por entrada, es de hecho una operación un poco mas complicada y a simple vista poco natural. En los cursos de álgebra lineal se justificará esta definición.

Primero recordemos el producto interior usual de $\mathbb{R}^n$. Sean $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Representamos a A por un vector renglón y a B por un vector columna. Entonces el **producto interior** AB se define como

$$AB = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

Por tanto definimos **el producto matricial** de un vector renglón A por un vector columna B de la manera anterior.

Definición 6.2.7 *Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices tales que el número de columnas de A es igual al número de renglones de B; esto es, $A \in \mathcal{M}_{m\times p}$ y $B \in \mathcal{M}_{p\times n}$. Entonces el* **producto** *AB es la matriz de $m \times n$ cuya entrada ij-ésima se obtiene multiplicando el i-ésimo renglón A_i de A por la columna j-ésima B^j de B.*

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B^1 & A_1B^2 & \cdots & A_1B^n \\ A_2B^1 & A_2B^2 & \cdots & A_2B^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_mB^1 & A_mB^2 & \cdots & A_mB^n \end{pmatrix}.$$

Esto es,

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix},$$

donde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + \cdots a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$.
Observemos que el producto AB no está definido si A es una matriz de $\mathcal{M}_{m\times p}$ y B es una matriz de $\mathcal{M}_{q\times n}$, donde $p \neq q$.

Ejemplo 6.2.8 *Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces*

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 2\times 0 & 1\times 1 + 2\times 2 \\ 3\times 1 + 4\times 0 & 3\times 1 + 4\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

y

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 1\times 3 & 1\times 2 + 1\times 4 \\ 0\times 1 + 2\times 3 & 0\times 2 + 2\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Esto muestra que el **producto matricial no es conmutativo**.

Ejemplo 6.2.9 *Sean* $C = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$. *Entonces*

$$CD = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 + sb_1 & ra_2 + sb_2 & ra_3 + sb_3 \\ ta_1 + ub_1 & ta_2 + ub_2 & ta_3 + ub_3 \end{pmatrix}$$

El producto DC no está definido.

La multiplicación matricial satisface las siguientes propiedades.

Teorema 6.2.10 (a) $(AB)C = A(BC)$, *(ley asociativa).*

(b) $A(B + C) = AB + AC$, *(ley distributiva por la izquierda).*

(c) $(B + C)A = BA + CA$, *(ley distributiva por la derecha).*

(d) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$, *donde k es un escalar.*

Suponemos que las sumas y productos en el teorema anterior están definidos.
Observemos que $0A = 0$ y $B0 = 0$, donde 0 es la matriz cero.
La **matriz identidad** de $n \times n$, denotada por I_n o simplemente I, es la matriz tal que su entrada ij-ésima es cero si $i \neq j$ y uno si $i = j$; es decir,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Así $IA = AI = A$, donde $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$.

Ejercicio 6.10 *Calcular:*
(i)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(ii)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

(iii)

$$4\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6.11 *Suponer* $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. *Hallar* $3A + 2B - C$.

Ejercicio 6.12 *Hallar* x, y, z *y* w, *si*

$$3\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6.13 *Supongamos que* A *y* B *son dos matrices de* $m \times n$ *y* $k \in \mathbb{R}$. *Probar que* $k(A+B) = kA + kB$.

Ejercicio 6.14 *Sean* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. *Hallar¿*
(i) AB. (ii) BA.

Ejercicio 6.15 *Dadas* $A = (2, 1)$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$. *Hallar:*
(i) AB. (ii) BA.

Ejercicio 6.16 *Dadas* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. *Hallar:*
(i) AB. (ii) BA.

6.3. Matrices y sistemas de ecuaciones

De la sección 6.2, sabemos que un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, lo podemos escribir como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

donde el lado izquierdo es en efecto un producto matricial.
Como veremos a continuación, el lenguaje de matrices facilita el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales.

Teorema 6.3.1 *Supongamos que u_1, u_2, $\ldots$, u_s son soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales $AX = 0$. Entonces toda combinación lineal de los u_i de la forma $k_1u_1 + k_2u_2 + \cdots + k_Su_s$, donde los k_i son números reales, es también una solución de $AX = 0$. Por tanto, en particular, todo múltiplo ku de una solución u de $AX = 0$ es también una solución de $AX = 0$.*

Demostración. Sabemos que $Au_1 = 0$, $Au_2 = 0$, $\ldots$, $Au_s = 0$. Así,

$$\begin{aligned} A(k_1u_1 + k_2u_2 + \cdots + k_Su_s) &= k_1Au_1 + k_2Au_2 + \cdots + k_SAu_s \\ &= k_10 + k_20 + \cdots + k_s0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $k_1u_1 + k_2u_2 + \cdots + k_Su_s$ es una solución del sistema homogéneo $AX = 0$. □

Teorema 6.3.2 *El sistema $AX = B$, no tiene solución, tiene una solución única o tiene un número infinito de soluciones.*

Demostración. Es suficiente probar que si $AX = B$ tiene más de una solución, entonces tiene un número infinito. Supongamos que u y v son dos soluciones distintas de $AX = B$; esto es, $Au = B$ y $Av = B$. Entonces, para cualquier real k,

$$A(u + k(u - v)) = Au + k(Au - Av) = B + k(B - B) = B.$$

Así, para cada k, obtenemos una solución distinta de $AX = B$. Por lo tanto, $AX = B$ tiene un número infinito de soluciones. □

A continuación, vamos a describir un método para resolver sistemas de ecuaciones.

6.3.1. Método de Gauss

El método de Gauss consiste en convertir un sistema "normal" de 3 ecuaciones con 3 incógnitas en uno "escalonado"; es decir, en un sistema tal que en el que la primera ecuación tiene 3 incógnitas, la seguna tiene 2 incógnitas y la tercera 1 incógnita. De esta forma será fácil a partir de la última ecuación ir subiendo en las distintas ecuaciones y calcular así el valor de las 3 incógnitas.
Para esto utilizaremos las llamadas **operaciones elementales** entre renglones, las cuales son:

E_1 : Intercambiar el renglón i-ésimo R_i, por el renglón j-ésimo, R_j y es denotada por $R_i \longleftrightarrow R_j$.

E_2 : Multiplicar el renglón R_i por un escalar k diferente de cero, $R_i \longrightarrow kR_i$, $k \neq 0$.

E_3 : Reemplazar el renglón R_i por k-veces el renglón j-ésimo más el renglón i-ésimo, $R_i \longrightarrow kR_j + R_i$.

Observación 6.3.3 *En la práctica aplicaremos las operaciones E_2 y E_3 en un solo paso; es decir, reemplazaremos el renglón i-ésimo por k'-veces el renglón j-ésimo más k-veces el renglón i-ésimo: $R_i \longrightarrow k'R_j + kR_i$, $k' \neq 0 \neq k$.*

Definición 6.3.4 *Decimos que una matriz A es* **equivalente por renglones** *a una matriz B, si B se puede obtener de A por medio de una sucesión finita de operaciones elementales entre renglones.*

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

o equivalentemente $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Ahora vamos a considerar **la matriz aumentada** $(A \mid B)$.

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right).$$

El **método de Gauss** consiste en a aplicar las operaciones elementales para colocar ceros en las entradas 21, 31 y 32. Más específicamente:

Paso 1. Supongamos que j_1 es el primer renglón tal que la entrada $a_{j_1 1} \neq 0$ (si una columna es igual a cero, se suprime). Se intercambian los renglones de tal manera que esta componente distinta de cero aparezca en el primer renglón; esto es, $a_{11} \neq 0$.

Paso 2. Para cada $j > 1$, se aplica la operación $R_i \longrightarrow -a_{i1}R_1 + a_{11}R_i$.

Se repiten los pasos 1 y 2 con la submatriz formada por todos los renglones excluyendo el primero. Se continúa el proceso y al final obtenemos la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} c_{11} & c_{12} & c_{13} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & d_3 \end{array} \right).$$

La solución del sistema será entonces:

(a) Si $c_{33} = 0$ y $d_3 = 0$, el sistema es compatible indeterminado (tiene un número infinito de soluciones).

(b) Si $c_{33} = 0$ y $d_3 \neq 0$, el sistema es incompatible (no tiene solución).

(c) Si $c_{33} \neq 0$, tenemos que $z = \frac{d_3}{c_{33}}$. En este caso, consideramos el segundo renglón.

  $(c.1)$ Si $c_{22} = 0$ y $c_{33}d_2 - c_{23}d_3 = 0$, el sistema es compatible indeterminado.

  $(c.2)$ Si $c_{22} = 0$ y $c_{33}d_2 - c_{23}d_3 \neq 0$, el sistema es incompatible.

  $(c.3)$ Si $c_{22} \neq 0$, es compatible determinado. Luego $z = \frac{d_3}{c_{33}}$ y $y = \frac{c_{33}d_2 - c_{23}d_3}{c_{22}}$. Ahora consideramos el primer renglón, como $c_{11} \neq 0$, tenemos que $x = \frac{d_1 - c_{12}y - c_{13}z}{c_{11}}$.

Ejemplo 6.3.5 *Consideremos el sistema*

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 7z &= -1 \\ 3x + 4y - 6z &= 5 \\ 5x - 2y + 4z &= -7. \end{aligned}$$

La matriz aumentada es

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & -6 & 5 \\ 5 & -2 & 4 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{-3R_1+2R_2\to R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & -1 & 9 & 13 \\ 5 & -2 & 4 & -7 \end{array}\right).$$

$$\xrightarrow{-5R_1+2R_3\to R_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & -1 & 9 & 13 \\ 0 & -19 & 43 & -9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-19R_2+R_3\to R_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & -1 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & -128 & -256 \end{array}\right).$$

Esta matriz aumentada, representa el sistema equivalente

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 7z &= -1 \\ -y + 9z &= 13 \\ -128z &= -256. \end{aligned}$$

De la tercera ecuación, tenemos que $z = 2$. Sustituyendo en la segunda ecuación, se sigue que $y = 5$ y finalmente sustituyendo ambos valores en la primera ecuación, obtenemos que $x = -1$. Por lo tanto, la solución es $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 6.3.6 *Consideremos el sistema*

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 7z &= -1 \\ 3x + 4y - 6z &= 5 \\ 5x + 7y - 13z &= 10. \end{aligned}$$

Luego,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & -6 & 5 \\ 5 & 7 & -13 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{-3R_1+2R_2\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & -1 & 9 & 13 \\ 5 & 7 & -13 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-5R_1+2R_3\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & -1 & 9 & 13 \\ 0 & -1 & 9 & 25 \end{array}\right).$$

$$\xrightarrow{-R_2+R_3\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & -1 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right)$$

Esta matriz aumentada, representa el sistema equivalente

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 7z &= -1 \\ -y + 9z &= 13 \\ 0z &= -12. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el sistema es incompatible.

Ejemplo 6.3.7 *Consideremos el sistema*

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 7z &= -1 \\ 3x + 4y - 6z &= 5 \\ 5x + 7y - 13z &= 4. \end{aligned}$$

Así,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & -6 & 5 \\ 5 & 7 & -13 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{-3R_1+2R_2\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & -1 & 9 & 13 \\ 5 & 7 & -13 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-5R_1+2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & -1 & 9 & 13 \\ 0 & -1 & 9 & 13 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-R_2+R_3\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & -1 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Esta matriz aumentada, representa el sistema equivalente

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 7z &= -1 \\ -y + 9z &= 13 \\ 0z &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado. En efecto, sea $z = t$. De la segunda ecuación, tenemos que $y = 9t - 13$ y de la primer ecuación se sigue que $x = -10t - 19$; es decir, el conjunto solución es

$$\text{Sol} = \left\{ \begin{pmatrix} -10t - 19 \\ 9t - 13 \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ejemplo 6.3.8 *Consideremos el sistema*

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= 7 \\ x + 2y - 5z &= 3. \end{aligned}$$

Así,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & -5 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{-R_1 + 2R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & -6 & -1 \end{array} \right).$$

Esta matriz aumentada, representa el sistema equivalente

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= 7 \\ y - 6z &= -1. \end{aligned}$$

De la segunda ecuación se sigue que $y = -1 + 6z$, por lo que si tomamos $z = t$, tenemos que $y = -1 + 6t$. Sustituyendo en la primer ecuación obtenemos que $x = 5 - 7t$. Por lo tanto, el conjunto solución es:

$$\text{Sol} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 - 7t \\ -1 + 6t \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ejercicio 6.17 *Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de Gauss:*

$$(i) \quad \begin{array}{rcl} 2x + y - 2z + 3w &=& 1 \\ 3x + 2y - z + 2w &=& 4 \\ 3x + 3y + 3z - 3w &=& 5. \end{array} \qquad (ii) \quad \begin{array}{rcl} 2x + y - 2z + 3w &=& 1 \\ y + 4z - 5w &=& 5 \\ 3y + 12z - 15w &=& 7. \end{array}$$

Ejercicio 6.18 *Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de Gauss:*

$$(i)\quad \begin{aligned} x+2y-3z &= 4 \\ x+3y+z &= 11 \\ 2x+5y-4z &= 13 \\ 2x+6y+2z &= 22. \end{aligned} \qquad (ii)\quad \begin{aligned} x+2y-3z &= 4 \\ y+4z &= 7 \\ y+2z &= 5 \\ 2y+8z &= 14. \end{aligned}$$

Ejercicio 6.19 *Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de Gauss:*

$$(i)\quad \begin{aligned} x+2y-3z &= 4 \\ y+4z &= 7 \\ 2z &= 2 \\ 0 &= 0. \end{aligned} \qquad (ii)\quad \begin{aligned} x+2y-3z &= 4 \\ y+4z &= 7 \\ 2z &= 2. \end{aligned}$$

Ejercicio 6.20 *Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de Gauss:*

$$(i)\quad \begin{aligned} x+2y-2z+3w &= 2 \\ 2x+4y-3z+4w &= 5 \\ 5x+10y-8z+11w &= 12. \end{aligned} \qquad (ii)\quad \begin{aligned} x+2y-2z+3w &= 2 \\ z-2w &= 1 \\ 2z-4w &= 2. \end{aligned}$$

Ejercicio 6.21 *Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de Gauss:*

$$(i)\quad \begin{aligned} x+2y-2z+3w &= 2 \\ z-2w &= 1 \\ 0 &= 0. \end{aligned} \qquad (ii)\quad \begin{aligned} x+2y-2z+3w &= 2 \\ z-2w &= 1. \end{aligned}$$

Ejercicio 6.22 *Resolver los siguientes sistemas homogéneos por el método de Gauss:*

$$(1)\quad \begin{aligned} x+y-z &= 0 \\ 2x+4y-z &= 0 \\ 3x+2y+2z &= 0. \end{aligned} \qquad (ii)\quad \begin{aligned} x+y-z &= 0 \\ 2y+z &= 0 \\ -y+5z &= 0. \end{aligned} \qquad (iii)\quad \begin{aligned} x+y-z &= 0 \\ 2y+z &= 0 \\ 11z &= 0. \end{aligned}$$

Ejercicio 6.23 *¿Qué condición deben cumplir a, b y c para que el siguiente sistema con las incógnitas x, y y z tenga una solución?*

$$\begin{aligned} x+2y-3z &= a \\ 2x+6y-11z &= b \\ x-2y+7z &= c. \end{aligned}$$

6.4. Inversa de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

A continuación, vamos a describir otro método para resolver sistemas de ecuaciones de 2×2 y 3×3, llamado **Regla de Cramer**, el cual tiene como condición que la matriz de coeficientes del sistema sea invertible, por lo que iniciaremos con el estudio de la inversa de una matriz.

Definición 6.4.1 *Se dice que una matriz de $n\times n$ es* **invertible** *si existe una matriz B con la propiedad de que*

$$AB = BA = I.$$

Observación 6.4.2 *La matriz B es única. En efecto, supongamos que existen B_1 y B_2 tales que $AB_1 = B_1A = I$ y $AB_2 = B_2A = I$. Entonces $B_1 = B_1I = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = IB_2 = B_2$.*

Llamamos a la matriz B la **inversa** de A y la denotamos por A^{-1}. Notemos que esta relación es simétrica; es decir, si B es la inversa de A entonces A es la inversa de B.

Proposición 6.4.3 *Supongamos que A y B son matrices invertibles de $n\times n$. Entonces $AB = I$ si y sólo si $BA = I$.*

Demostración. Supongamos que $AB = I$. Entonces $A = IA = (AB)A = A(BA)$ y multiplicando por A^{-1} ambos lados de la igualdad, tenemos que $A^{-1}A = A^{-1}A(BA)$; de aquí que $I = BA$.

Análogamente, si $BA = I$, se sigue que $AB = I$. $\square$

Ejemplo 6.4.4 *Consideremos*

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & 15-15 \\ -2+2 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ son invertibles y una es la inversa de la otra.

Ejemplo 6.4.5 *Consideremos*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 11+0+12 & 2+0-2 & 2+0-2 \\ -22+4+18 & 4+0-3 & 4-1-3 \\ -44-4+48 & 8+0-8 & 8+1-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego las dos matrices son invertibles y una es inversa de la otra.

6.4.1. Inversa de una matriz de 2×2

A continuación vamos a calcular la inversa de una matriz de 2×2, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
Sean x, y, z y w tales que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, encontrar A^{-1} se reduce a resolver los dos sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{aligned} ax+bz &= 1 & \qquad ay+bw &= 0 \\ cx+dz &= 0 & \qquad cy+dw &= 1. \end{aligned}$$

Recordemos que un sistema de ecuaciones de 2×2 (ver ecuación 6.3) tiene solución única si y sólo si su determinante es distinto de cero ($ad - bc \neq 0$). Tales soluciones son: $x = \frac{d}{ad-bc}$, $y = \frac{-b}{ad-bc}$, $z = \frac{-c}{ad-bc}$, $w = \frac{a}{ad-bc}$.
Recordemos que el número real $ad - bc$ es llamado el **determinante de** A y es denotado por $\det(A)$. Luego

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d/\det(A) & -b/\det(A) \\ -c/\det(A) & a/\det(A) \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -e & a \end{pmatrix}.$$

Lo anterior se resume en el siguiente resultado.

Teorema 6.4.6 *Una matriz A de 2×2 es invertible si y sólo si su determinante es distinto de cero.*

6.4.2. Inversa de una matriz de 3×3

Para encontrar la inversa de una matriz A de 3×3, colocaremos junto a la matriz A la matriz identidad I, $(A\,|\,I)$. Luego hacemos operaciones elementales entre renglones, las cuales afectaran tanto a A como a I, con el objeto de transformar la matriz A en la matriz identidad; es decir $(A\,|\,I) \sim (I\,|\,B)$. La matriz resultante B es la inversa de A y es denotada por A^{-1}.

Ejemplo 6.4.7 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vamos a calcular su inversa.

$$(A\,|\,I) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - R_2 \to R_1} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 + R_1 \to R_3]{R_2 - R_1 \to R_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 + R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Por lo tanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al igual que en el caso de una matriz de 2×2, existe una condición necesaria y suficiente para que una matriz de 3×3 sea invertible y es precisamente la misma, que su "determinante" sea distinto de cero, lo cual será estudiado en la siguiente sección.

6.4.3. Determinante de una matriz de 2×2 y 3×3

Como vimos anteriormente, si $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}$, esto es $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces **el determinante** de A está definido como $\det(A) = |A| = ad - bc$.

Consideremos ahora una matriz A de 3×3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Definimos el **determinante** de A como

$$\begin{aligned} \det(A) = |A| = & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$

La expresión anterior la podemos escribir como

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

o

$$a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

la cual es una combinación lineal de tres determinantes de matrices de 2×2, cuyos coeficientes (con signos alternados) forman el primer renglón de la matriz dada. Observa que cada matriz de 2×2 puede obtenerse quitando, en la matriz original, el renglón y la columna que contiene su coeficiente.

Ejemplo 6.4.8 *Calcular el determinante.*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 2(6 - 63) - 3(5 - 56) + 4(45 - 48) = 27.$$

Ejemplo 6.4.9 *Calcular el determinante.*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + (-4) \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-20 + 2) - 3(0 - 2) - 4(0 + 4) = -46.$$

El concepto de determinante de una matriz, se generaliza a matrices de $n \times n$. Este tema se abordará en los cursos de álgebra lineal.
Los determinantes cumplen varias propiedades, que son inmediatas de las definiciones.

Teorema 6.4.10 *Sean A y B matrices de 3×3 y sea $k \in \mathbb{R}$. Entonces:*

(a) *Al intercambiar dos renglones consecutivos o dos columnas consecutivas de cualquier matriz A, el signo del determinante cambia,*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

(b) *Se puede sacar un factor común a cualquier renglón o columna de una matriz y los determinantes se relacionan de la siguiente manera*

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \alpha a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & \alpha a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & \alpha a_{33} \end{vmatrix}.$$

(c) *Si a un renglón (o columna) le sumamos otro renglón (o, respectivamente, columna), no cambia el valor del determinante.*

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & a_{13}+a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

(d) *Si una matriz tiene dos renglones (o dos columnas) iguales el determinante es cero.*

(e) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(f) *Una matriz es invertible si y sólo si su determinante es distinto de cero.*

6.4.4. Inversa de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

Ahora aplicaremos lo anterior a la solución de sistemas de ecuaciones de 2×2 y 3×3. Como ya lo comentamos en la sección 6.2, dado un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

su representación matricial es $AX = B$. Supongamos que A es invertible. Luego

$$X = A^{-1}B.$$

Por lo que el sistema tiene solución y es única.
Claramente, si A no es invertible entonces el sistema no se puede resolver de esta manera.

Ejemplo 6.4.11 *Consideremos el sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 11 \\ x - 3y &= -20 \\ 4x + 2y + 5z &= 8. \end{aligned}$$

Así, la matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aplicando el procedimiento anterior, encontramos que la inversa de A es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{15}{49} & \frac{1}{7} & \frac{3}{49} \\ \frac{5}{49} & \frac{-2}{7} & \frac{1}{49} \\ \frac{-2}{49} & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{49} & \frac{1}{7} & \frac{3}{49} \\ \frac{5}{49} & \frac{-2}{7} & \frac{1}{49} \\ \frac{-2}{49} & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ -20 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix},$$

es decir, $x = 1$, $y = 7$ y $z = 2$.

6.4.5. Regla de Cramer

De nuevo consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3. \end{aligned}$$

Si la matriz de coeficientes A es invertible, podemos aplicar una regla muy sencilla para calcular su solución, basada en calcular ciertos determinantes, llamada **regla de Cramer**.

A groso modo, el valor de la incógnita número k se calcula dividiendo entre el determinante de A, el determinante que resulta de sustituir la columna k (correspondiente al lugar que ocupa la incógnita que se está calculando) por la columna de términos independientes. Por lo cual, es requisito fundamental que la matriz A sea invertible. Explícitamente, para calcular x, sustituimos la primer columna de A por el vector de términos independientes B.

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}{\det(A)},$$

para calcular y, sustituimos la segunda columna de A por B

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}}{\det(A)}$$

y para calcular z, sustituimos la tercer columna de A por B

$$z = \frac{\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}}{\det(A)}.$$

Ejemplo 6.4.12 *Resolver el sistema*

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 11 \\ x - 3y &= -20 \\ 4x + 2y + 5z &= 8. \end{aligned}$$

Lo primero que debemos hacer es calcular el determinante de la matriz de coeficientes, el cual es $\det(A) = -49$. Así

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 11 & 1 & -1 \\ -20 & -3 & 0 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}}{-49} = \frac{-49}{-49} = 1,$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & 11 & -1 \\ 1 & -20 & 0 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}}{-49} = \frac{-343}{-49} = 7$$

y

$$z = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 \\ 1 & -3 & -20 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}}{-49} = \frac{98}{-49} = -2$$

y obtenemos la misma solución anterior.

Ejercicio 6.24 *Hallar la inversa de:*

$$(i) \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad (ii) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \qquad (iii) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6.25 *Hallar la inversa de:*

$$(i) \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad (ii) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6.26 *Hallar la inversa de* $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 6.27 *Sean A y B matrices invertibles (del mismo orden). Mostrar que el producto también es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Ejercicio 6.28 *Probar que A es invertible si y sólo si el sistema $AX = 0$ tiene únicamente la solución cero.*

Ejercicio 6.29 *Calcular el determinante de:*

$$(i)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (ii)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (iii)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$(iv)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6.30 *Evaluar el determinante de cada matriz:*

$$(i)\begin{pmatrix} t-2 & 4 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{pmatrix}. \qquad (ii)\begin{pmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{pmatrix}.$$

$$(iii)\begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 7 & t-5 & 1 \\ 6 & -6 & t+2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6.31 *Para cada matriz en el problema anterior, determinar los valores de t para los cuales el determinante es cero.*

Ejercicio 6.32 *Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por la Regla de Cramer:*

$$(i)\ \begin{array}{rcl} 2x+y &=& 7 \\ 3x-5y &=& 4. \end{array} \qquad (ii)\ \begin{array}{rcl} ax-2by &=& c \\ 3ax-5by &=& 2c, \end{array} \quad \text{donde } ab \neq 0.$$

$$(iii)\ \begin{array}{rcl} 3x+5y &=& 8 \\ 4x-2y &=& 1. \end{array} \qquad (iv)\ \begin{array}{rcl} 2x-5y+2z &=& 7 \\ x+2y-4z &=& 3 \\ 3x-4y-6z &=& 5. \end{array} \quad (v)\ \begin{array}{rcl} 2x+3 &=& y+3x \\ x-3z &=& 2y+1 \\ 3y+z &=& 2-2x. \end{array}$$

Ejercicio 6.33 *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por la Regla de Cramer.*

$$\begin{array}{rcl} 3y+2z &=& z+1 \\ 3x+2z &=& 8-5y \\ 3z-1 &=& x-2y. \end{array}$$

Bibliografía

[1] Bulajich Manfrino R., Gómez Ortega J.A., Valdez Delgado R., *Desigualdades*, Cuadernos de la Olimpiada, Instituto de Matemáticas, UNAM, Sociedad Matemática Mexicana, cuarta edición, 2010.

[2] Bloch Ethan D., *Proofs and Fundamentals. A First Course in Abstract Mathematics*, Birkhäuser, primera edición, 2000.

[3] Bravo Mojica A., Rincón Mejía H., Rincón Orta C., *Álgebra Superior*, Facultad de Ciencias, UNAM, primera edición, 2006.

[4] Cárdenas H., Lluis E., Raggi F., Tomás F., *Álgebra Superior*, Editorial Trillas, sexta edición, 2001.

[5] Friedberg Stephen H., Insel Arnold J., Spence Lawrence E., *Linear Algebra*, Prentice Hall, tercera edición, 1997.

[6] Gómez Ortega J.A., Vazquez Padilla R., Valdez Delgado R., *Casillas*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM y Sociedad Matemática Mexicana, primera edición, 2011.

[7] Lipschutz Seymour, *Álgebra Lineal*, Serie de Compendios Schaum, McGraw-Hill, 1971.

[8] Pérez Segui M.L.,*Combinatoria*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM y Sociedad Matemática Mexicana, primera edición, 2000.

[9] Pérez Segui M.L.,*Combinatoria Avanzada*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM y Sociedad Matemática Mexicana, primera edición, 2010.

[10] Soberón Bravo P.,*Combinatoria para Olimpiadas*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM y Sociedad Matemática Mexicana, primera edición, 2010.

[11] Wallis W. D., *A Beginner's Guide to Discrete Mathematics*, Birkhäuser, primera edición, 2003.

Introducción al álgebra
se terminó de imprimir en el mes de Mayo de 2013,
en los talleres de Dicograf, S.A. de C.V.
Poder Legislativo 304, Cuernavaca, Morelos.

El álgebra es una de las principales ramas de la matemática y una herramienta fundamental para la disciplina científica en general. Su principal tema de estudio lo constituyen las llamadas estructuras algebraicas, es decir, conjuntos cuyos elementos están dotados de ciertas operaciones. Vistas dichas estructuras algebraicas con esta generalidad se garantiza la aplicabilidad de la teoría desarrollada en distintos ámbitos de las ciencias. En este libro se presentan los requisitos teóricos básicos y las herramientas fundamentales para el estudio de las estructuras algebraicas numéricas, que son el primer eslabón para desarrollos posteriores, y se introduce con él al alumno en el pensamiento lógico matemático, el cual es indispensable para el estudio en cualquier área científica. La motivación principal para publicarlo es cubrir los temas del curso de Álgebra Introductoria que se ofrece en la Licenciatura en Ciencias de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos (UAEM). Éste es un curso básico en algunas áreas, que los alumnos deben cursar en el primer semestre de la carrera, y durante varios años dos de los autores lo han impartido en dicha facultad. Con ello se percataron de la necesidad de contar con notas que cubrieran el programa. Este trabajo es una respuesta a esa necesidad.

Universidad Autónoma del Estado de Morelos

Facultad de Ciencias

ISBN: 978-607-7771-86-9