Implementación del método split-step para la estabilidad en solitones de dos dimensiones de ondas de materia en rejillas ópticas 2D modulados por el tiempo

Split-Step Method implementation for stability in 2D solitons of matter waves in 2D optical lattice modulated by time

Salomón García Paredes, Gennadiy Burlak

Centro de Investigación en Ingeniería y Ciencias Aplicadas (CIICAp)
Universidad Autónoma del Estado de Morelos
Av. Universidad 1001, Col. Chamilpa. Cuernavaca, Mor.
C.P. 62209, México
{salomon.garcia, gburlak}@uaem.mx

PALABRAS CLAVE:

Solitón, rejilla óptica, estabilidad, colapso, cuasiperiódico.

RESUMEN

Por medio del método split-step y simulaciones sistemáticas, estudiamos la dinámica de estabilidad en solitones de dos dimensiones (2D), mismos que al somterse a rejillas ópticas (OL) cuasiperiódicas (QP), y utilizando la ecuación Gross-Pitaevskii (GPE), nos permite obtener familias de solitones estables de acuerdo a un umbral de intervalos de las variables de frecuencia y amplitud principalmente. Asimismo, se demuestra que existen rangos de parámetros (amplitud y frecuencia) para los que ya no es posible tener estabilidad de un solitón en un deteminado número de iteraciones (t), lo que nos lleva a un colapso del mismo. Por otra parte, se demuestra que la profundidad del OL y su periódo influyen de manera directa para mantener a un solitón por más tiempo.

KEYWORDS:

Soliton, optical lattice, stability, collapse, quasiperiodical.

ABSTRACT

By means of the split-step method and systematic simulations, we study the dynamic of stability en two dimensional (2D) solitons, which when subjected to quasiperiodical optical lattice (OL), and also using the Gross-Pitaevskii equation (GPE), it allows us to obtain stable soliton families according to a thereshold of frecuency and amplitude. Also shows that there are parameters (frecuency, amplitude) for which it is not possible to have stability of the soliton in a certain number of iterations (t), which lead us to a collapse. On the other hand, it shows that the depth of the OL and period directly influence to keep a stable soliton for longer.

Recibido: 17 de agosto de 2014 • Aceptado: 1 de diciembre de 2014 • Publicado en línea: 28 de febrero de 2015

I INTRODUCCIÓN

Dentro de los estudios más importantes dentro del fenómeno solitón, es el que tiene que ver con las diferentes dinámicas en los solitones 2D [1-2]. Dentro de la física y las matemáticas, uno de los retos es mantener solitones estables el mayor tiempo posible, evitando así que colapsen. Para solitones en una dimensión (1D), el mantener su estabilidad no es gran problema [3], debido que en éstos no se aplican las rejillas ópticas (OL), sin embargo, al emplear rejillas ópticas cuasi periódicas en solitones 2D, y crear solitones estables será una tarea en la que se usen algoritmos para el cálculo y simulación de los solitones 2D estables [4-5].

Ese el motivo por el cual este trabajo está enfocado en el estudio de la estabilidad de los mismos dentro una rejilla óptica QP, utilizando el método split-step [3].

Para la obtención de la estabilidad en los solitones 2D, se empleó la ecuación Gross-Pitaevskii Ec. (1) [6], la cual nos permitió por medio de la variables ω, ϵ, y V0 (frecuencia, amplitud y potencial óptico, respectivamente) diseñar una interfaz óptica (GUI) que facilite la observación de la estabilidad del estado fundamental de un solitón 2D.

i ∂Ψ/∂t=1/2 ((∂^2/∂t^2)+(∂^2/∂y^2))Ψ-|Ψ|^2 Ψ-V0 [1+ε/2 cos(ωt)][cos(2x)+cos(2y)]Ψ (1)

donde ω es la frecuencia, ε es la amplitud, t es el tiempo, V0 es el potencial óptico y cos(2x)+cos(2y) las dimensiones del OL.

II ALGORITMO.

Aunque el método split-step, surgió en los años 60´s [3], fue hasta 1990, cuando se mejoró para la aplicación de ecuaciones lineales. Este método, fue muy usado por los físicos a finales del siglo pasado. La precisión espacial de este método también es espectral si en sus derivadas espaciales se calculan las transformadas de Fourier. Además, algo más importante, éste método tiene limitaciones de estabilidad más leves en el tamaño del paso de tiempo. Algunas propiedades importantes de las ecuaciones de evolución originales (como la conservación de la energía) se conservan por este método, y esto puede ser importante para las simulaciones en tiempo largo, como es en el caso de este trabajo.

Para explicar este método, en primer lugar, introducimos al método split-step un sistema lineal de ecuaciones diferenciales parciales (EDP´s) con coeficientes en tiempo independiente. Supongamos que este sistema se puede escribir como:

ut=(L+M)u, (2)

donde u(x,t) es la función vector, x es la variable de espacial multifuncional, y L, M son dos operadores lineales del tiempo.

Por lo tanto, la solución a este sistema en el tiempo h es:

u(x,h)=e^h(L+M) u(x,0), (3)

donde h es el tamaño del tiempo-split-step. Ahora consideremos dos ecuaciones

v=Lv (4)

y

v_t=Mv (5)

donde las soluciones en el tiempo h, pueden formalmente describirse como ehLv(x,0) y ehM v(x,0). Por lo que la idea principal del método split-step es el de aproximarse a eh(L+M), por la secuencia de los operadores split, tales como:

e^(h(L+M))≈e^(β_nhM)e^(αn hL)...e^(β_1 hM) e^(α1 h) (6)

donde los coeficientes αj y βj son constantes.

La heurística de dicho método se puede describir de la siguiente forma:

INICIO

dt=0.01; tmax =2; nmax = round(tmax/dt)

E(1,2,3,4) = e(α(1,2,3,4)dt∗i∗k2)

```
a1 ← c/2;

a2 ← (1 − c)/2;

a3 ← a2;

a4 = c/2;

b1 ← c;

b2 ← 1 − 2 ∗ c;     b3 ← c;

Para nn ← 1 hasta  nmax

v ←  ifft(fft(u) ∗  E(1,2,3,4))

v ← v.∗exp(b(1,2,3) ∗dt∗i∗2∗v∗conj(v))

Fin para

Graficar solución.

FIN
```

Para efectos de simulación se implementó una interfaz gráfica (Fig. 1) en lenguaje C++ y C# [7], asimismo se realizaron varias pruebas donde nuestro principal enfoque fue con las variables ω y ε, con un t = 300, teniendo casi para todas las pruebas un potencial óptico (V 0= 1).

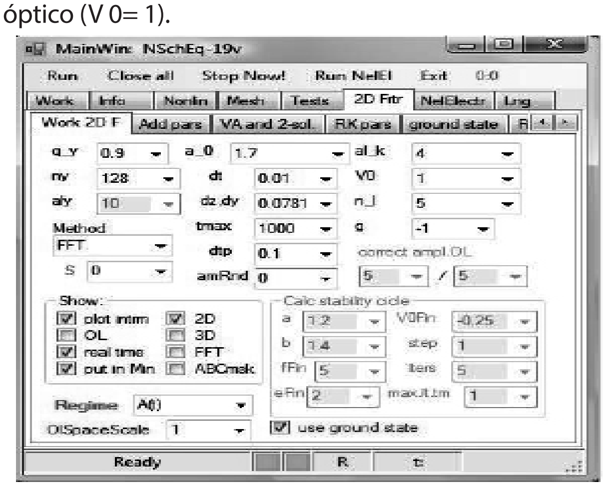

Fig. 1: Interfaz de usuario (GUI) para manejar el potencial óptico (V0) y t.

III. RESULTADOS.

Una vez que se utilizó la Ec. (1), se observó la estabilidad de un solitón 2D con una rejilla óptica QP, lo cual como se muestra en la Fig. 2 y 4, y tomando diferentes valores para є, ω (amplitud y frecuencia), se demostró que el método split-step, es una herramienta que nos permite calcular de una manera extremadamente rápida la obtención de estas dinámicas de los solitones 2D.

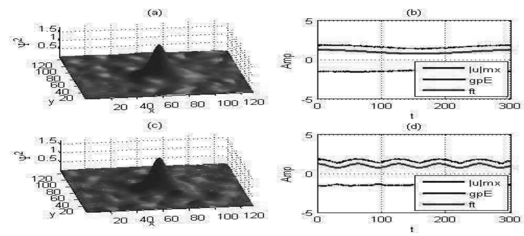

Fig. 2: a) Solitón estable para una frecuencia ω = 0.02, amplitud ε = 0.5 y potencial óptico V0 = 1. b) Grafica 1D (frecuencia con respecto al tiempo) para solución (a) c) Solitón estable para frecuencia ω = 0.2, amplitud ε = 0.5 y potencial óptico V0 = 1 d) Grafica 1D (frecuencia con respecto al tiempo) para solución (c).

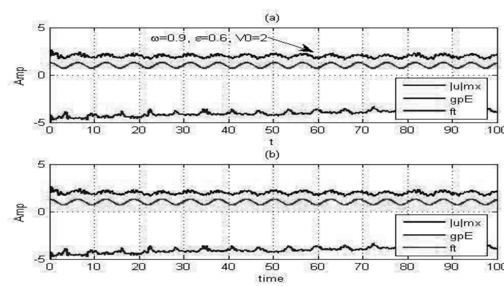

Fig. 3: Dinámica para un solitón estable 2D, donde a) frecuencia ω=0.9, amplitud ε=0.6 y el potencial óptico V0=2. b) Frecuencia ω=1.0, amplitud ε=0.6 y el potencial óptico V0=2.

IV. CONCLUSIONES

1. Se han estudiado la dinámica de solitones 2D atrapados en una rejilla óptica cuadrada, a la cual al aplicarse una fuerza que está sujeta con el tiempo, nos permite observar si bajo condiciones iniciales, el solitón permanecerá estable. Gracias al método split-step, se puede observar que dicha dinámica se puede obtener de forma más rápida comparando con algunos otros algoritmos. Este método, resultó ser de gran ayuda para la ecuación GPE, por lo que se recomienda para el uso de ecuaciones diferenciales parciales.

2. Se encontró que la estabilidad de un solitón 2D, tiene que ver con la profundidad y periodo del OL.

3. Gracias a la ecuación GPE, se puede simular la estabilidad de un solitón, ya que dicha ecuación permite tener valores de frecuencia y amplitud, mismas que se pueden manejar con respecto al tiempo.

V. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue parcialmente apoyado por CONACyT (México) apoyo No. 169496.

REFERENCIAS

1. B. A. Malomed. Soliton Management in Periodic Systems (Springer: New York, 2006).

2. García-Paredes, Salomón, Burlak G. Simulation software for ground states in matter waves solitons. Mexican Journal of Scientific Research, Vol. 2, No. 2, Jul-Dec 2013, pp. 41-53. ISSN: 2007-5146.

3. L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, L. D. Carr, Y. Castin, and C. Salomon, Science 296, 1290 (2002); S. L. Cornish, S. T. Thompson, and C. E. Wieman, Phys. Rev. Lett. 96, 170401 (2006).

4. J. Yang. Nonlinear waves in integrable and non-integrable systems. (SIAM-USA, 2010).

5. G. Burlak and A. Klimov, Phys. Lett. A 369, 510 (2007).

6. G. Burlak and B. A. Malomed, Phys. Rev. A 77 ,053606 (2008).

7. [7] Xavier Antoine, Weizhu Bao, Christophe Besse. Computational methods for the dynamics of the nonlinear Schrodinger/Gross-Pitaevskii equations. arXiv:1305.1093. (Cornell University-2013).

8. [8] W. H. Press, S. A. Teukovsky, W. T. Vetterling, and B. P.Flannery, Numerical recipes in C++ (Cambridge University Press: Cambridge, 2002).

9. [9] Xavier Antoine, Weizhu Bao, Christophe Besse. Computational methods for the dy-namics of the nonlinear Schrodinger/Gross-Pitaevskii equations. arXiv:1305.1093. (Cornell University-2013).

Acerca de los autores

El Maestro Salomón García Paredes, tiene estudios de Ingeniero en Computación. Asimismo, una Maestría en Ingeniería y Ciencias Aplicadas, misma que cursó en el Centro de Investigación en Ingeniería y Ciencias Aplicadas en la Universidad Autónoma del Estado de Morelos, obteniendo el grado de Maestro con la tesis: Obtención y simulación del estado fundamental (ground state) en solitones de dos dimensiones.

Actualmente, estudia el Doctorado en dicho centro de investigación (CIICAp-UAEM), estudiando y experimentando nuevas técnicas en programación paralela en algoritmos para optimizar el comportamiento de solitones.

Asimismo, imparte clases de Programación Avanzada y Matemáticas Discretas en la misma UAEM.

El Dr. Gennadiy Burlak estudió la licenciatura y maestría en la Universidad Nacional de Kiev (KNU) en 1975. Obtuvo el Doctorado en Ciencias físico-matemáticas por la KNU en 1988. Actualmente, es Profesor-Investigador Titular "C" definitivo del Centro de Investigaciones en Ingeniería y Ciencias Aplicadas (CIICAp-UAEM) desde 2003.

Recientemente obtuvo el nivel III del SNI, por parte del CONACYT.

El Dr. Burlak es autor y coautor de cuatro libros y más de 150 artículos en revistas arbitradas, Ha participado en 118 ponencias en congresos nacionales e internacionales.